University of Jyväskylä
Department of Teacher Education
Research report 90

# Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Association

## Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran konferenssijulkaisu 2012

Markus Hähkiöniemi, Henry Leppäaho, Pasi Nieminen & Jouni Viiri (eds.)

Jyväskylä 2013

Sales:
Kirjavitriini Bookstore
Jyväskylä University Library
PO Box 35
FI-40014 University of Jyväskylä
Finland
Tel. +358 40 805 3978
kirvit@library.jyu.fi



Cover: Minja Manninen and Heli Ruokolainen, art design and layout

ISSN 0357-7562
ISBN 978-951-39-5390-4 (printed)
ISBN 978-951-39-5393-5 (pdf)
https://jyx.jyu.fi

Jyväskylä University Printing House

Jyväskylä 2013

**CONTENTS**

FOREWORD 5

**MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING**

THE KNOWLEDGE QUARTET: A TOOL FOR DEVELOPING MATHEMATICS TEACHING 11
Tim Rowland

ELEMENTARY LEVEL TRAINEE TEACHERS' VIEWS OF TEACHING MATHEMATICS AND THE USAGE OF TECHNOLOGY AT THE BEGINNING OF THEIR DIDACTICAL COURSES 25
Lenni Haapasalo and Pasi Eskelinen

ON THE RELATION OF MATHEMATICAL MODELLING AND TECHNOLOGY 35
Lenni Haapasalo and Heikki Vilpponen

PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' PROFILES OF ASKING PROBING QUESTIONS 47
Markus Hähkiöniemi

MATEMATIIKAN KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN YLIOPISTON MATEMATIIKAN OPETUKSESSA 59
Jorma Joutsenlahti, Hanna Sarikka, Jussi Kangas ja Petteri Harjulehto

VALTAKUNNALLISEN KOKEEN KUUDENNEN LUOKAN ONGELMANRATKAISUTEHTÄVIEN JA OPPILAIDEN RATKAISUPROSESSIEN ANALYSOINTIA 71
Henry Leppäaho, Harry Silfverberg ja Jorma Joutsenlahti

SUOMALAISTEN JA CHILELÄISTEN ALALUOKKIEN OPETTAJIEN ESILLE TUOMIA USKOMUKSIA ONGELMANRATKAISUSTA 83
Liisa Näveri, Paulina Araya, Erkki Pehkonen, Anu Laine ja Markku S. Hannula

AIKUISEN OPPIJAN MATEMATIIKKA-AHDISTUKSEN MERKKEJÄ 95
Päivi Perkkilä

ONGELMANRATKAISUTEHTÄVÄT LUOKANOPETTAJAN AMMATILLISEN KEHITTYMISEN TUKENA 105

Päivi Portaankorva-Koivisto, Liisa Näveri, Laia Saló i Nevado, Erkki Pehkonen ja Anu Laine

MINÄKÄSITYS, MOTIVAATIO SEKÄ TUNTEET MATEMATIIKKAAN LIITTYEN: KOLMASLUOKKALAISTEN VERTAILUA SUOMESSA JA CHILESSÄ 117

Laura Tuohilampi ja Valentina Giaconi

**SCIENCE TEACHING AND LEARNING**

ALOITTAVIEN YLIOPISTO-OPISKELIJOIDEN NÄKEMYKSIÄ FYSIIKASTA JA FYSIIKAN OPPIMISESTA FYSIIKAN PERUSOPINTOJEN AIKANA 131

Mervi A. Asikainen, Antti Viholainen ja Pekka E. Hirvonen

CONTENT STRUCTURE OF PHYSICS LESSONS AND ITS RELATION TO STUDENT LEARNING GAINS 143

Jussi Helaakoski and Jouni Viiri

PEDAGOGICAL ASPECTS IN FINNISH SCIENCE EDUCATION RESEARCH PUBLICATIONS 153

Päivi Kinnunen, Jarkko Lampiselkä, Lauri Malmi and Veijo Meisalo

PRE-SERVICE TEACHERS' STRATEGIES OF LINKING PHYSICS CONCEPTS: ARE SIMPLE LOCAL RULES ENOUGH TO GENERATE COMPLEX CONCEPT NETWORKS? 165

Toni Purontaka, Ismo T. Koponen and Juha Merikoski

DOES FOCUSING FORCES AS INTERACTIONS HELP STUDENTS TO IDENTIFY FORCES? 175

Antti Savinainen, Asko Mäkynen and Jouni Viiri

AUTHORS 185

# FOREWORD

The annual conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Association was held in University of Jyväskylä November 8th and 9th 2012. The conference was organized by the Department of Teacher Education together with the Department of Chemistry, the Department of Mathematics and Statistics and the Department of Physics. The organizing committee consisted of Markus Hähkiöniemi (chair), Henry Leppäaho, Jouni Viiri, Anssi Lindell, Kauko Hihnala, Jan Lundell, Petri Juutinen, and Pekka Koskinen.

The theme of the conference was "Inquiry learning, inquiry teaching". Two keynote speakers discussed the theme from different points of view. Professor Ton de Jong, University of Twente, The Netherlands, focused on inquiry learning in science. In particular, he elaborated on the use of computer simulations to enrich inquiry learning. Professor Tim Rowland, University of East Anglia and University of Cambridge, United Kingdom, presented the Knowledge Quartet framework for studying how mathematics teacher knowledge is enacted in the classroom. He focused particularly on situations of contingency in which a teacher has to react to unplanned moments.

The conference attracted 74 participants and 32 presentations. After the conference, participants offered manuscripts for proceedings. The manuscripts were peer reviewed by two referees and authors were asked to revise their manuscripts. Finally, 15 articles were accepted to the proceedings. The articles were divided to two sections depending on whether the article focused on mathematics or science teaching and learning.

The section on mathematics teaching and learning is opened by *Tim Rowland*. He describes the Knowledge Quartet framework which has four dimensions: foundation, transformation, connection and contingency. He shows how each dimension of the Knowledge Quartet can be identified in the lesson. The framework provides a means of reflecting on teaching and teacher knowledge, with a view to developing both.

*Lenni Haapasalo* and *Pasi Eskelinen* present survey results of pre-service primary teachers' views on teaching mathematics and use of technology. They discuss the pre-service teachers' perceptions of factors supporting their learning, task types in textbooks and possible use of ICT.

*Lenni Haapasalo* and *Heikki Vilpponen* studied how upper secondary school students could utilize iPads and interactive applets to find definitions of an ellipse and a parabola. According to the results, students had difficulties to find relevant definitions and felt mistrust on technology-weighted working culture.

*Markus Hähkiöniemi* presents results about pre-service mathematics teachers' profiles of asking probing questions. He video recorded 29 pre-service teachers' inquiry-based mathematics lessons. He created categories for types of probing questions and analysed profiles of those teachers who asked a lot of probing questions.

*Jorma Joutsenlahti*, *Hanna Sarikka*, *Jussi Kangas* and *Petteri Harjulehto* created and used types of task in which students need to use mathematical natural, figural or symbolic language in university mathematics courses. They present survey results on mathematics students' experiences of learning through expressing mathematics in language.

*Henry Leppäaho*, *Harry Silfverberg* and *Jorma Joutsenlahti* present result from a national sixth grade mathematics test. They focus on problem solving tasks and analyse students' solution strategies. They also examine how the tasks measure problem solving skills.

*Liisa Näveri, Paulina Araya, Erkki Pehkonen, Anu Laine* and *Markku S. Hannula* present results from Finland–Chile project on use of open problems. They report on Finnish and Chilean third grade teachers beliefs about problem solving and their teaching practices. According to the results, teachers' beliefs and practices differed in the two countries.

*Päivi Perkkilä* investigates the signs of in-service and pre-service teachers' mathematics anxiety. The teachers answered a survey about affective factors and basic mathematics skills. Those teachers who were the weakest in the basic skills had negative and distressing experiences of mathematics learning in the early school years.

*Päivi Portaankorva-Koivisto, Liisa Näveri, Laia Salò i Nevado, Erkki Pehkonen* and *Anu Laine* investigated one Finnish primary teacher's professional development in using open problems in mathematics lessons. The teacher was interviewed and his/her lessons were video recorded. Portaankorva-Koivisto et al. examine the teachers' views of mathematics and mathematics learning and his/her teaching practices.

*Laura Tuohilampi* and *Valentina Giaconi* analysed Finnish and Chilean third grade mathematics students' affective dimensions. They found that these dimensions were very positive. The authors elaborate on the differences and similarities between the two cultures.

The section on science teaching and learning begins with an article by *Mervi A. Asikainen*, *Antti Viholainen* and *Pekka E. Hirvonen*. They studied first year physics students' views about physics and physics learning. These results suggest that students' views of physics and physics learning may change during the introductory physics courses. The change should be monitored for longer time scale.

*Jussi Helaakoski* and *JouniViiri* compare the content-related features of instruction in Finland, Germany and Switzerland. They found that the number of knowledge elements and connections between elements positively correlate with student learning gains.

*Päivi Kinnunen*, *Jarkko Lampiselkä*, *Lauri Malmi* and *Veijo Meisalo* present an overview on which pedagogical aspects of the instructional process Finnish chemistry and physics education researchers have focused on in recent years. They found that the most studied aspects are teachers' pedagogical actions, students' understanding of some aspect of the content, and the learning outcomes.

*Toni Purontaka*, *Ismo Koponen* and *Juha Merikoski* analyse students' ways to structure their knowledge of physics concepts. Based on the graph theory analysis they conclude that students indeed tend to use some basic patterns in forming the key concepts and meaningful links between concepts.

*Antti Savinainen*, *Asko Mäkynen* and *Jouni Viiri* present an empirical study addressing the question whether the use of a visual-representation tool helps students in identifying forces correctly. Their study shows that the use of the interaction diagram is beneficial in identifying forces when constructing free body diagrams.

Markus Hähkiöniemi, Henry Leppäaho, Pasi Nieminen and Jouni Viiri

Jyväskylä September 12, 2013

# MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING

# THE KNOWLEDGE QUARTET: A TOOL FOR DEVELOPING MATHEMATICS TEACHING

Tim Rowland

University of East Anglia, Norwich, and University of Cambridge, UK

*An important component of initial teacher education is the school-based practicum, in which student teachers develop their knowledge and teaching expertise in the classroom. This paper describes a framework (which we call the Knowledge Quartet) designed to assist reflection on such classroom practice, drawing on the observation of a mentor or mathematics teacher educator. This framework emerged from a grounded theory analysis of videotapes of mathematics lessons prepared and conducted by pre-service elementary teachers towards the end of their initial training. The Knowledge Quartet has four dimensions: foundation, transformation, connection and contingency. This paper describes how each of these units is characterised with reference to one of the videotaped lessons, and shows how each dimension of the Knowledge Quartet can be identified in the lesson.*

## INTRODUCTION

This paper is located in a collaborative project[1] under the acronym *SKIMA* (subject knowledge in mathematics). The focus of the research reported here is on ways that novice elementary teachers' mathematics content knowledge, both subject matter knowledge (SMK) and pedagogical content knowledge (PCK: Shulman, 1986), can be seen to contribute to their teaching during the 'practical' element of their training – the school-based placements. Placement lesson observation is normally followed by a review meeting between university-based tutor (and/or school-based mentor) and trainee. Research shows that such meetings typically focus heavily on organisational features of the lesson, with very little attention to mathematical aspects of mathematics lessons (Brown, McNamara, Jones, & Hanley, 1999). In one study, only 2% of mentors' suggestions to beginning teachers related to the subject matter being taught (Strong & Baron, 2004).

Whilst we see certain kinds of knowledge to be *desirable* for elementary mathematics teaching, we are convinced of the futility of asserting what a beginning teacher, or a more experienced one for that matter, *ought* to know. Our interest is in how opportunities to enhance knowledge can be identified. We believe that the framework that arose from this research – the Knowledge

[1] The research reported in this paper was undertaken in collaboration with Cambridge colleagues Peter Huckstep, Anne Thwaites, Fay Turner and Jane Warwick. I use the pronoun 'we' in this text as a natural way of acknowledging their contribution.

Quartet – provides a means of reflecting on teaching and teacher knowledge, with a view to developing both.

## METHOD

In the UK, the majority of prospective ('trainee') teachers follow a one-year, full-time course leading to a Postgraduate Certificate in Education (PGCE) in a university education department, about half the year being spent working in a school under the guidance of a school-based mentor. All primary[2] trainees are trained to be generalist teachers of the whole primary curriculum. This study took place in the context of such a one-year PGCE course, in which each of the 149 trainees followed a route focusing either on the 'lower primary' years (LP, pupil ages 3-8) or the 'upper primary' (UP, ages 7-11). Two mathematics lessons taught by six LP and six UP trainees were observed and videotaped i.e. 24 lessons in total. Trainees were asked to provide a copy of their planning for the observed lesson. As soon as possible after the lesson (usually the same day) the observer/researcher wrote a *Descriptive Synopsis* of the lesson. This was a brief (400-500 words) account of what happened in the lesson, so that a reader might immediately be able to contextualise subsequent discussion of any events within it. These descriptive synopses were typically written from memory and field notes, with occasional reference to the videotape if necessary.

From that point, we took a grounded approach to the data for the purpose of generating theory (Glaser & Strauss, 1967). In particular, we identified in the videotaped lessons aspects of trainees' actions in the classroom that seemed to be significant in the limited sense that it could be construed to be informed by a trainee's mathematics content knowledge or their mathematical pedagogical knowledge. These were grounded in particular moments or episodes in the tapes. This inductive process generated a set of 18 codes. Next, we revisited each lesson in turn and, after further intensive study of the tapes, elaborated each *Descriptive Synopsis* into an *Analytical Account* of the lesson. In these accounts, significant moments and episodes were identified and coded, with appropriate justification and analysis concerning the role of the trainee's content knowledge in the identified passages, with links to relevant literature.

### Codes, categories and superordinate classes

Our catalogue of 18 codes presented us with a relatively fine dissection of the elementary mathematics teaching that we observed, with specific reference to the contribution of mathematics content knowledge, both SMK and PCK. This was useful to the extent that we had a set of concepts and an associated vocabulary sufficient to identify and describe various ways in which mathematics content knowledge played out in the work of these novice teachers.

[2] In this paper, 'primary' and 'elementary' synonymously refer to the phase of schooling for ages 3/4 to 11.

However, these fine categories presented us with a difficulty with respect to our intention to make use of the categories, and to offer them to colleagues for their use, as a framework for discussing and assessing trainees' mathematics content knowledge from evidence gained from planning documentation (lesson plans) and classroom observations of teaching. We anticipate that 18 codes is simply too many to be useful for a one-off observation; indeed, we missed many of them ourselves on a first viewing of each videotape. Our resolution of this problem was the 'Knowledge Quartet', in which the 18 categories are grouped into four broad, superordinate categories, or 'units' – the dimensions or 'members' of the Knowledge Quartet. We have named these units: Foundation; Transformation; Connection; and Contingency.

Each of these units is composed of a small number of cognate subcategories. For example, the third of these, *connection*, is a synthesis of four codes, namely: *making connections; decisions about sequencing; anticipation of complexity;* and *recognition of conceptual appropriateness.*

It will become apparent that many moments or episodes within a lesson can be understood in terms of two or more of the four units; for example, a *contingent* response to a pupil's suggestion might helpfully *connect* with ideas considered earlier. Furthermore, it could be argued that the application of subject knowledge in the classroom *always* rests on foundational knowledge.

**Exemplification and conceptualisation**

In this paper, we exemplify the application of the Knowledge Quartet as a framework for analysis and review of mathematics teaching, by reference to a single lesson with 9- and 10-year-old pupils, taught by Laura. We shall make only passing reference to the 18 codes which constitute the four dimensions. By focusing on this one lesson we aim to maximise the possibility of the reader's achieving some familiarity with the scenario, with Laura and some of the children in her class. At the same time, we can make available some examples of each of the dimensions of the Knowledge Quartet.

**LAURA**

We focus on Laura's first videotaped lesson with her Year 5[3] class. In fact, her class had been 'setted by ability' with another Year 5 class, and she had a 'middle ability' set, with just 18 pupils: 10 boys and 8 girls. Such a small class is unusual in UK mainstream schooling. It is a bright classroom, with computers in

---

[3] Compulsory education in England and Wales is organised in chronological 'Years', normally beginning at age four or five with between one and three terms in Year R (for 'reception'). The youngest children in Year 1 will be just five at the beginning of the academic year, the oldest nearly seven at the end. The Primary phase of schooling covers Years R to 6, so that Year 6 children are aged 10 or 11. There is a broad subdivision into two 'key stages'. Key Stage 1 (KS1) covers Years R to 2, whilst Key Stage 2 (KS2) comprises the remaining Years 3 to 6.

view and a whiteboard placed on a stand behind the chair where Laura sits as the lesson begins. The key focus of the lesson is on teaching column multiplication of whole numbers, specifically multiplying a two-digit number by a single digit number. Laura's planning is strongly influenced by guidance given in the English National Numeracy Strategy *Framework* (DfEE, 1999). An overview of the lesson - the *Descriptive Synopsis* - is as follows[4].

After Laura has settled the class on the carpet in front of her, the lesson begins with a three-minute *Oral and Mental Starter* in which they rehearse recall of multiplication bonds, specifically 9x4, 5x12, 5x9, 8x7, 6x3, 7x4, 4x7. For each one, she targets a pair of children who stand, and have five seconds to answer. The mood is competitive, but relaxed. The pupils' recall is good, if not always rapid.

There follows a 15-minute *Introduction* to the *Main Activity*. Laura reminds the class that they have recently been working on multiplication using the 'grid' method [so called because of the way that the calculation is displayed, as in the example below]. She speaks about the tens and units being "partitioned off". Simon is invited to the whiteboard to demonstrate the method for 9x37. He writes:

| x | 30 | 7 | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 270 | 63 | = | 333 |

Laura then says that they are going to learn another way. She proceeds to write the calculation for 9x37 on the whiteboard in a conventional but elaborated column format, explaining as she goes along:

| | |
|---|---|
| | 37 |
| x | 9 |
| 30x9 | 270 |
| 7x9 | 63 |
| | 333 |
| | 1 |

The sum 270+63 is calculated by addition from the right, 'carrying' the 1 (from 7+6=13) into the hundreds column. Laura writes the headings h, t, u above the three columns.

[4] The National Numeracy Strategy *Framework* (DfEE, 1999) guidance segments each mathematics lesson into three distinctive and readily-identifiable phases: the *mental and oral starter*; the *main activity* (an *introduction* by the teacher, followed by *group work*, with tasks differentiated by pupil attainment); and the concluding *plenary*.

Next, Laura shows how to "set out" 49x8 in the new format, followed by the first question (19x4) of the exercises to follow. The class proceeds to 24 minutes' work on exercises that Laura has displayed on the wall. The eight exercises that all pupils are expected to complete are of the same kind i.e. they require multiplying a two-digit number by a single-digit number. There are six 'extension' questions, although no child actually reaches them within the lesson. The pupils are seated in groups, but their work is individual. Laura moves from one child to another to see how they are getting on, helping where she judges assistance to be needed. She emphasises the importance of lining up the hundreds, tens and units columns carefully, and reminds them to estimate first.

Eventually, she tells them to stop and calls them together on the carpet for an eight-minute *Plenary*. She begins this by asking them which of the two methods (the grid method and the "new" method) they found easier. She then asks one boy, Sean, to demonstrate the new method with the example 27x9. Sean gets into difficulty; he is corrected by other pupils and by Laura herself. As the lesson concludes, Laura tells the children that they should complete the set of exercises for homework.

## THE KNOWLEDGE QUARTET: LAURA'S LESSON

We now select from Laura's lesson a number of moments, episodes and issues as a means of introducing the four dimensions of the Knowledge Quartet. The first of these, Foundation, concerns beliefs and propositional knowledge about mathematics and mathematics pedagogy that might be inferred from decisions and actions in the classroom. The other three relate to ways in which teachers' mathematics SMK and PCK can be more directly observed to 'play out' in the classroom.

### Foundation

First, Laura's professional knowledge underpins her recognition that there is more than one possible written algorithm for whole number multiplication. We conceptualise this within the domain of fundamental knowledge, being the *foundation* that supports and significantly determines her intentions or actions. Her awareness and acceptance of alternative methods is an attitude, and a piece of theoretical knowledge acquired from lectures or from the literature. It is certainly relevant to the lesson in hand, but also extends to arithmetic operations other than multiplication.

In the Plenary, Laura emphasises that the method they use is a choice between competing alternatives, asking the children which method (grid or column) they found easier. She confides that she herself finds the new method harder than the grid method. She adds that "Everybody's got different ways that they find easy or difficult". This last statement may be intended to encourage or reassure the children, although it is unlikely to be true of most of the adult population in the

UK, brought up exclusively on the standard column algorithm for multiplication. Laura's learning objective seems to be taken from the National Numeracy Strategy (NNS) teaching programmes for Year 4:

> Approximate first. Use informal pencil and paper methods to support, record or explain multiplication.
>
> Develop and refine written methods for TUxU[5]

The corresponding NNS objective for Year 5 reads:

> Extend written methods to: short multiplication of HTU by U or U.t by U; long multiplication of TU by TU.

These objectives are clarified within the exemplification sections of the *Framework*, which contrast (A) *informal* written methods - the grid, as demonstrated by Simon - with (B) *standard* written methods - the column layout, as demonstrated by Laura in her introduction. The *Framework* commentary refers to 'partitioning', and the example given is 23x7. First, separate calculations for 20x7 and 3x7 are given, then a contracted version is shown, in which explicit partitioning and use of the distributive law is suppressed. In both cases (A and B), an 'approximation' precedes the calculation in the *Framework* worked example. The connotation of the word 'standard' is interesting, and might be supposed to confer some additional value or legitimacy on method B in comparison with the 'informal' grid method. Further weight is conferred on method B in the commentary in its description of the column layout as "an *efficient* method that can be applied generally … units should line up under units, tens under tens …".

Laura can be commended for assimilating the Numeracy Strategy guidance and teaching accordingly. It is perhaps not surprising that she does not question the necessity to teach the standard column format to pupils who already have an effective, meaningful algorithm at their disposal. The NNS distinguishes between 'effective' and 'efficient' methods (Thompson, 2003a) and favours the latter. The distinction is not, however, always as clear as one might wish. The suggestion in this case is that the 'standard' method B is efficient whereas the 'informal' grid method is effective i.e. it merely *works*. The fact that gelosia, grid-like multiplication algorithms have themselves been 'standard' in other times and other cultures (see e.g. Ifrah, 1998, pp. 567-570) throws the NNS distinction into question in this case. Besides, it has been repeatedly pointed out for nearly 30 years now that a more efficient way of performing calculations entailing any complexity is to use a calculator. Even if this attitude were considered to be excessively radical, reservations about the need for *standard* written algorithms have been expressed by UK mathematics educators for many

---

[5] H, T U and t conventionally denote the base ten values i.e. hundreds, tens, units, tenths.

years (see Anghileri, 2000, p. 89). Haylock (2001), writing for trainee primary teachers, explains the standard algorithm for his audience, but forcibly advocates the use of grid-type methods with primary pupils (pp. 91-94). The NNS is generally considered to be somewhat conservative in its pursuit of the standard layout (e.g. Thompson, 2003b) and, we would argue, unwise in proposing both the introduction of the grid method *and* the transition from grid to standard layout to Year 4 pupils.

Laura's emphasis is on the procedures necessary, as she sees it, to make the algorithm foolproof. She frequently emphasises the approved method of "setting out" the calculations, and the vertical alignment of the columns. At one point she looks at a child's work and tells him that although his answers are all correct she wants him to set them out so that "they are all in line". She works with this child concentrating on the layout of the page. The partial products (such as 270 and 63 in the demonstration example 37x9) are always summed by column addition - hence the advice about digits and columns - when many or most fall well within the scope of mental calculations within the NNS curriculum. Laura's approach seems to be underpinned by the belief that learning mathematics - or this mathematics, at least - amounts to carefully following through a set of procedures. This results in her emphasising the syntax of the mathematics at the expense of the semantics.

Laura repeatedly talks about "adding a zero" when multiplying by multiples of ten, a practice that is discouraged in the *Framework* itself ("shift the digits one place to the left …") on account of its restricted application, and the use of additive language in a multiplicative situation. Indeed, Laura refers to 'multiplication *sums*' throughout the lesson, when the Numeracy Strategy itself advocates use of 'correct' language. At the same time, she adopts, fairly consistently the NNS language of 'partition' ("partitioned off", as she puts it), and speaks of "multiples of ten" in connection with estimation. She also advises them to put "one digit in each square" in their textbooks. In these instances, her use of vocabulary is mature, correct and careful.

Another issue related to Laura's fundamental knowledge is her approach to computational estimation. At one point in the introduction, Tom suggests that they should have estimated 37x9 before carrying out the calculation. It seems that Tom has retained this from a lesson with another teacher, and that Laura tends to forget the NNS guidance on estimating first. Laura praises him, and picks up the suggestion a few minutes later. It is not clear, however, whether she has given much thought herself to the nature and purpose of estimation. When she asks the children to estimate 49x8, one child proposes 400, saying that 8x50 is 400. Laura, however, suggests that she could make this "even more accurate" by taking away two lots of 50. She explains, "Because you know two times five is ten and two times fifty is a hundred, you could take a hundred away". Perhaps she had 10x50 in mind herself as an estimate, or perhaps she confused something like subtracting 8 from the child's estimate. She recognises her error and says "Sorry, I was getting confused, getting my head in a spin". Later, when demonstrating 19x4 (the first exercise question), she remembers to ask for an estimate first. Bethany says that she would "Do 10 times 4 is 40, and then 9 times 4 is 36. Laura replies "OK, you were right to do it that way, but I'd do 20 times 4".

The notions of *how* to estimate and *why* it might be desirable to do so are not adequately discussed or explored with the class. At one point she even suggests that the outcome of the calculation (with the algorithm) indicates whether the estimate was a good one, rather than the estimate indicating whether the size of the answer to the calculation is reasonable. Laura would benefit from some theoretical study of computational estimation, and of how it can be taught (Schoen & Zweng, 1986; Sowder, 1992).

At this stage of her career in teaching, Laura gives the impression that she is passing on her own practices and her own forms of knowledge. When helping individual children in the Main Activity, on a number of occasions she uses expressions such as "What I would do" or "I find it easier if …". Her main resource thus seems to be her own experience (of using this algorithm), and it seems that she does not yet have a view of mathematics didactics as a *scientific* enterprise.

**Transformation**

Laura's own ability to perform column multiplication is secure, but her pedagogical challenge is to *transform* what she knows for herself into a form that can be accessed and appropriated by the children. She sets out to do this by means of demonstration examples, 'modelling' for them the actions that she intends them to mimic. She also elaborates the procedure on the whiteboard; that is to say, she incorporates elements such as the statement of the partial products 30x9 and 7x9 that she would probably not need for her own computational purposes.

Laura's choice of demonstration examples in her introduction to column multiplication merits some consideration and comment. Her first example (37×9) is not a bad one (though not the best either), but she then goes on to work through 49×8 and 19×4. Now, the NNS emphasises the importance of *mental* methods, where possible, and also the importance of choosing the most suitable strategy for any particular calculation. 49×8 and 19×4 can all be more efficiently performed by rounding up, multiplication and compensation e.g. 49×8 = (50×8)-8. Perhaps Laura had this in mind in her abortive effort to make the estimate of 400 "even more accurate". The NNS makes much of doubling strategies, and 19×4 could be a double-double. In any case, to carry out these calculations by column multiplication flies in the face of any messages about selecting 'sensible' strategies.

Her choice of exercises - the practice examples - also invites some comment. The sequence is: 19x4, 27x9, 42x4, 23x6, 37x5, 54x4, 63x7, 93x6, with 99x9, 88x3, 76x8, 62x43, 55x92, 42x15 as 'extension' exercises (although no child actually attempts these in the lesson). The exercise problems are written horizontally, as opposed to writing, for example, 19 above x4, followed by a line, as was commonplace in older (and not so old) textbooks. This potentially offers the children some scope for choosing the method they consider most appropriate. However, our earlier remark about the suitability of the column algorithm relative to alternative mental strategies applies to several of these, 99x9 being a notable example.

But perhaps this is to miss the contractual arrangements (in the sense of 'didactical contract': Brousseau, 1997) inherent in the lesson. Suppose for the moment that it is understood and accepted by the pupils that they are to put aside consideration of such alternative strategies - that these exercises are there merely as a vehicle for them to gain fluency with the algorithm. In that case, the *sequence* of exercises might be expected to be designed to present the pupils with increasing challenge as they progress though them. This challenge would be of two kinds. First, the partial products (e.g. 10x4 and 9x4) make demands on their recall of products, although Laura offered multiplication 'squares' for those who felt they needed support. No consideration of this dimension is apparent in the sequence. Secondly, the necessity of 'carrying' when summing the tens digits of the partial products would add to the complexity of an exercise. This is a factor only in the second of the first eight exercises, 27x9, and in the third of the extension items, 76x8. As we have observed, the extension exercises were not used, but one wonders how the pupils might be expected to do the last three, since TUxTU examples had not been demonstrated in the lesson.

**Connection**

We come now to the third dimension of the Knowledge Quartet. Our name for it is *connection*. It concerns the intention and the effort to integrate potentially disparate elements of the lesson, both temporally and conceptually, into a coherent whole, so that the lesson 'hangs together' and relates both to the content of previous lessons and to the knowledge already constructed by learners. Perhaps the most important connection to be established in this lesson is that between the grid method and the column algorithm. Use of the distributive law is made explicit in the former, although the technical term does not feature explicitly in the lesson, perhaps advisedly so. Laura seems to have this connection in mind as she introduces the main activity. She reminds them that they have used the grid method, and says that she will show them a "slightly different way of writing it down". The differences might then be expected to be purely cosmetic, although after the first example is completed

Laura says that they are learning a "different way to work it out". She says that the answer would be the same whichever way they did it "because it's the same sum". Of course, that presupposes that both methods are valid, but does not clarify the connection between them: that the same processes and principles - partition, distributivity and addition - are present in both methods. The fact that Laura includes demonstrations of 37x9 by both methods does help to establish the connection, and her display of the column layout does isolate the partial products 30x9 and 7x9. She declares that she is going to "break it down the same way". Unfortunately, the effort to sustain the connection is not maintained, and no reference to the grid method is made in her second demonstration example, 49x8. This may in part be due to her getting distracted by the muddle over the estimation described earlier. She also writes 8x40 and 8x9 alongside the partial products, whereas she had written 30x9 and 7x9 for the first example. Perhaps this is of no great consequence, but her presentation of the example now homes in on procedural aspects - the need to "partition the number down", "adding a zero" to 8x4, getting the columns lined up, adding the partial products from the right. The presentation is predominantly atomistic, as opposed to holistic. No reference is made to the fact that the same elements would be present if they did the same calculation by the grid method with which they are familiar. Nor, for that matter, does she explore with them what would be an effective way of doing the same calculation mentally. She asks "Who thinks if they went back to their desks they could set it out like that?"

Immediately afterwards, when demonstrating 19x4 (the first exercise question), Laura remembers to ask for an estimate first. Earlier, we reported Bethany's proposal (10 times 4 is 40 and then 9 times 4 is 36 and Laura's confirmation that she was "right to do it that way". Whether Bethany was "right" to *estimate* in that way is open to question, but the possibility of using her answer to reinforce the connection with, and the rationale for, the column method is lost. The fact that the connection is tenuous for at least one pupil is apparent in the plenary. Sean actually volunteers to calculate 27x9 on the whiteboard. He writes 27 and x9 in the first two rows as expected, but then writes 20x7 and 2x9 to the left in the rows below. We shall comment on that incident later, in the next section.

**Contingency**

No amount of planning can anticipate everything that might occur in the course of a lesson, and the teacher is frequently confronted with unforeseen events that demand *contingent* action on their part. Such an action might be merely to respond appropriately to a suggestion, or to correct or probe a misconception; in some cases the response might result in a radical reformulation of the intended agenda for the lesson. An example that falls somewhere between the two extremes arose when Tom reminded Laura that they had not estimated the first product before calculating it. It is clear from Laura's lesson plan that, despite her adherence to the NNS statement of the learning objective, she had not written estimation into her planning. She recognised that Tom had remembered something important, something that she had forgotten, and replied "You're right, you've learned well. Next time we'll do an estimate". Thereafter estimation preceded each of her demonstration examples, and the children were reminded to estimate when doing the exercises. We have already commented on Laura's apparent confusion over the nature and purpose of estimation. If she was aware of some personal insecurity in this respect, this must have been exacerbated in her very public confusion over the estimate of 49x8, yet it did not inhibit her from incorporating estimation into the lesson.

The episode with Bethany is a rather different example of a contingent event. It arose from the pupil's response to Laura's question about estimating 19x4. Laura's reply seems to be intended to show Bethany that her suggestion was a good one, showing a desire to affirm children's ideas whenever possible. In this instance, however, it was a missed opportunity on two counts. First, the distinction between an exact calculation and an estimate is not explored. Secondly, as we have already remarked, the opportunity to make a connection between mental calculation and the written algorithm is lost. This missed opportunity could be attributed to some gap in Laura's PCK regarding the cognitive reconciliation of written and mental methods. It could also relate to Laura's weak hold on the fundamental nature of estimation.

Sean's faulty attempt (mentioned above) to calculate 27x9 on the whiteboard also appears to have caught Laura 'on the hop'. The fact that he actually volunteered to do it may have led Laura to expect that he would be able to apply the algorithm without difficulty. In the event, there are several 'bugs' in his application of the procedure. The partition of 27 into 20 and 2 is faulty, and the multiplicand is first 9, then 7. It seems that Sean's attention is on the syntax of the column procedure - the manipulation of the symbols present in the situation - at the expense of the meaning. This seems to be a case where Sean might be encouraged to reconsider what he has written by asking him some well-chosen questions. One such question might ask how he would do it by the grid method. Or simply why he wrote those particular numbers where he did. Or, thinking back to Bethany's mental partition of 19 above, it might be helpful to ask Sean how he would calculate 27x9 mentally. Laura does not notice Sean's error immediately - it seems that she fully expected him to apply the algorithm faultlessly, and that his actual response really was unanticipated. Laura avoids correcting Sean herself, although her response indirectly suggests that all is not well. She asks the class? "Is that the way to do it? Would everyone do it that way?". Leroy demonstrates the algorithm correctly, but there is no diagnosis of where Sean went wrong, or why.

The episode with Sean took place very close to the end of the lesson, and Laura may simply have felt under pressure to bring it to a conclusion. Considerations of time may have guided her response to two erroneous attempts at the second item, 5x12, in the Mental and Oral Starter. Incidentally, whilst rapid recall of multiples of 12 was desirable when imperial units were in common use (12 pence in a shilling, 12 inches in a foot), it has been unnecessary since the early 1970s, and does not feature in the NNS *Framework*, where the relevant objective even for Year 6 is knowing products to 10x10 "by heart". But old habits die hard, suppliers continue to manufacture wall-charts with the 11- and 12-times 'tables', and a more resolute application of *fundamental* knowledge is required to shift this topic from the domain of "known facts" to that of "derived facts". In any case, 5x12 defeats the two chosen contestants, both boys, who offer 50, 51, 54. Laura offers the same question to a girl at the side of the class, who gives the correct answer. There is little doubt that the two boys would have benefited from reconsidering their answers. From the perspective of connectedness, to ask them to do so might have made good links either with the partitioning and distributivity theme in the Main Activity, or with 'doubling and halving' mental strategies. But much emphasis is placed on the maintenance of "good pace" in the Numeracy Strategy, Laura, in common with many other teachers, may have considered that sustaining good pace should take priority over probing the boys' answers.

## CONCLUSIONS AND CAVEATS

In this paper, we have introduced and elucidated the Knowledge Quartet – foundation, transformation, connection and contingency – and used it to raise issues related to Laura's knowledge - her PCK especially - in our analysis of her lesson on subtraction with a Year 5 class.

We set out to develop an empirically based conceptual framework for the discussion of mathematics content knowledge, between teacher educators, trainees and teacher-mentors, in the context of school-based placements. The outcome has been the Knowledge Quartet. This framework has undergone an extended period of evaluation with our students and colleagues. We have a manageable framework within which to discuss actual, observed teaching sessions with trainees and their mentors. These groups of participants in pre-service teacher education, as well as our university-based school 'partnership tutor' colleagues, are becoming acquainted with (and convinced of the value of) the Knowledge Quartet, and becoming familiar with some details of its conceptualisation, as described in this paper. It is being well received by mentors, who like the specific focus on *mathematics* content and pedagogy. Our intention is that use of the Knowledge Quartet might encourage and assist greater attention to subject matter content in the review. Indications of how this might work are implicit or explicit in our analysis of Laura's lesson. In particular, we are aware that our analysis has been *selective*: we raised some issues for consideration, but there were others which, not least out of space considerations, we chose not to mention. The same would be likely to be true of the review meeting - in that case due to *time* constraints, but also to avoid overloading the trainee with action points. Each such meeting might well focus on only one or two dimensions of the Knowledge Quartet for similar reasons. More detailed guidance on the interpretation and use of the Knowledge Quartet is given in Rowland, Turner, Thwaites and Huckstep (2009).

It is relevant and important to return here to our earlier comment about the futility of stating what Laura *ought* to know at this stage of her teacher education, or what she ought to have done in the lesson. Maintaining a commitment to development rather than judgement in the application of the Knowledge Quartet is likely to be a challenge for teacher educators. The acts of lesson preparation and teaching call on all kinds of personal and intellectual qualities, and the trainee teacher's performance in the classroom is shaped by a host of factors in addition to SMK and PCK. In the novice teacher we see the very beginnings of a process of reconciliation of pre-existing beliefs, new 'theoretical' knowledge, 'practical' advice received from various quarters, in the context of highly-pressured, high-stakes school-based placements (Eisenhart et al. 1993; Smith, 1999; Brown et al, 1999).

In conclusion, the Knowledge Quartet is sufficient as a 'tool' with which to home in on subject matter in lesson observation review, and is promising as a framework to develop teaching and teacher knowledge. At the same time, sensitive consideration of subject matter issues must necessarily take into account the anxieties experienced by novice teachers, and the tensions and constraints identified by Eisenhart et al. (1993). We also recognise that our "purely mathematical perspective" (Skott, 2001, p. 193) has its limitations in coming to understand why teachers do what they do.

**REFERENCES**

Anghileri, J. (2000) *Teaching Number Sense*. London: Continuum

Brousseau, G. (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, T., Mcnamara, O., Jones, L., & Hanley, U. (1999). Primary student teachers' understanding of mathematics and its teaching. *British Education Research Journal, 25*(3), 299-322.

DfEE (1999). *The National Numeracy Strategy: framework for teaching mathematics from Reception to Year 6*. Sudbury: DfEE Publications.

Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D., & Agard, P. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 8-40.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. New York: Aldine de Gruyter.

Haylock, D. (2001). *Mathematics Explained for Primary Teachers*. London: Paul Chapman.

Ifrah, G. (1998) *The Universal History of Numbers.* London: Harvill Press.

Rowland, T., Turner, F., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. London: Sage.

Schoen, H. L., & Zweng, M. J. (1986, Eds.) *Estimation and mental computation*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Skott, J. (2001). Challenging a purely mathematical perspective on teacher's competence. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 4, pp. 193-200). Utrecht, Netherlands: PME.

Smith, D. N. (1999). College ideals and school practice. *Mathematics Education Review* 10, 13-19.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-89). New York: Macmillan Publishing Company.

Strong, M. and Baron, W. (2004). An analysis of mentoring conversations with beginning teachers: suggestions and responses. *Teaching and Teacher Education, 20*, 47-57.

Thompson, I. (2003a). United we stand; divided we fall. *Mathematics in School, 32*(3), 21-23.

Thompson, I. (2003b). Deconstructing the National Numeracy Strategy's approach to calculation. In I. Thompson (Ed.) *Enhancing primary mathematics teaching* (pp. 16-28). Maidenhead: Open University Press.

# ELEMENTARY LEVEL TRAINEE TEACHERS' VIEWS OF TEACHING MATHEMATICS AND THE USAGE OF TECHNOLOGY AT THE BEGINNING OF THEIR DIDACTICAL COURSES

Lenni Haapasalo and Pasi Eskelinen

University of Eastern Finland

*The article summarizes outcomes from the diagnostic phase of a long-along study that focuses on elementary level trainee teachers' professional development. The main aim of the study was to find out what they find as key issues when learning mathematics in school, how this reflects their views as teachers, and which kind of support for the eight sustainable activities (order, find, play, construct, apply, calculate, evaluate, and argue) they gained from school mathematics and the own use of ICT, respectively. The trainees found that mathematics teaching, basing on textbooks utilizing neither visualizations nor technology, offered modest support for the above-mentioned activities except calculating. On the other hand, the support gained from their own usage of ICT was found to be even lower except in playing and constructing, suggesting that ICT was used rather for entertainment than for work that requires or promotes the activities for which computers were originally designed.*

## INTRODUCTION

At the end of 1980's, The Commission of the Finnish Ministry of Education (Komiteanmietintö, 1989) expressed strong criticism against Finnish mathematics teaching that was found to be too much textbook-oriented. After that, numerous official statements have been appeared to versatile the instrumental practice. According to Eskelinen (2005), the Ministry of Education (Opetusministeriö, 1995; 1999) stressed the importance of knowledge structures, collaboration, and shared knowledge. The Information Society Programme for Education (Ministry of Education, 2004) states that "the new program is geared to develop all citizens' information society knowledge and skills to enable educational institutions to use information and communications technology (ICT) in a versatile way their activities, to establish ICT-based procedures in education, training and research and to promote social innovation through the use of ICT" (see Haapasalo & Silfverberg 2007, p. 168). The National Board of Education (Opetushallitus 2004) emphasized that learning environments should also fit today's information society, providing opportunities to use ICT. Even though the amount of information sources and free applications has grown dramatically, including social media, Silfverberg and Haapasalo (2010) emphasize that in spite of this progressive development and shift in the paradigm of teaching and learning, there are not any considerable changes in mathematics teaching in Finland Also in many other countries the use of ICT seems to be clearly more infrequent in mathematics than in most other school subjects (see Barron et *al.* 2003, p. 496). Niederhauser and Stoddart (2001) suggest there is a relationship between teachers' epistemological and pedagogical perspectives and their way to use educational software. Thus, the implementation of technology requires dual focus approach: a well-balanced coherence between teacher's instructional orientation and technological applications.

To obtain a solid view of mathematics, it is important to know how and from where mathematical knowledge and mathematical thinking might appear and come into life and action. Based on a "human laboratory within 5000 years", Zimmermann's (2003) long-term study of the history of mathematics reveals eight main activities, which proved to lead very often to new mathematical results at different times and in different cultures for more than 5000 years: order, find, play, construct, apply, calculate, evaluate, and argue (see Figure 5). Figure 6 illustrates how each of these eight main activities might be interpreted through three sub-activities. Referring to Haapasalo and Hvorecky (2011) who discuss the justification of Zimmermann's long-term research, it sounds appropriate to take these activities (to be called *Z-activities* in this article) as an element not only in a theoretical framework for structuring of learning environments or analyzing student's cognitive and affective variables but also to assess the quality of mathematics teaching. After interpreting the term 'evaluate' in a very broad sense to also include 'estimation', Eronen and Haapasalo (2010; 2011) developed a Likert-scale instrument to measure three profiles among teachers and students:

• *Math-profile*: How strong the student links each Z-activity to the term 'mathematics',

• *Identity-profile:* How good the student thinks he or she is performing each of the activities,

• *Techno-profile:* How suitable the student thinks a computer is in performing each of the activities.

They found that all of the three profiles among elementary level trainee teachers were quite similar, emphasizing calculating. Furthermore, they found that those profiles were rather more degenerated among trainee mathematics teachers at the beginning of their mathematical studies at the university, and that their first study year rather degenerated than extended those profiles. However, Eronen and Haapasalo (2011) found that the usage of technology within constructivist framework of teaching and learning during the pedagogical courses for elementary level trainee teachers not only to changed students' views of mathematics but also increased their self-confidence in using mathematics and the utilization of technology.

Haapasalo and Eronen (2011) improved the instrument especially in relation to the definition of the terms ′evaluate′ and ′play′. Each of the eight main activities was divided into three sub-activities that might be more understandable for the subjects. They applied the new instrument for elementary level trainee teachers to measure the support that subjects gained from school mathematics. They found that only the activities related to calculating were supported. When repeating the survey among trainee mathematics teachers in Finland and in Germany, the support gained from university mathematics during several study years was even weaker than that from school mathematics, especially regarding creative activities as order, find, play, and construct (see pp. 75-76).

## BACKGROUND

Every learning theory emphasizes that one of the first tasks of the teacher is to find out what the learner already knows and even better to get a hunch how he or she thinks. This basic rule holds also when the learners are elementary level trainee teachers. Wee found that at the very beginning of first course in the pedagogy of mathematics it was important to find out from where mathematical knowledge comes into students′ mind. In most cases, students′ own learning history is a crucial factor. The former studies (see Eronen and Haapasalo 2010; 2011) suggest that mathematics teaching in school does not support the Z-activities except calculation. Regarding the teaching in university, the situation seems to be even more alarming, showing same trend in Finland and Germany.

## AIMS AND METHODS

The research subjects of the study consisted of elementary level trainee teachers at the beginning of their first course of Mathematics Didactics (3 credits) at the Philosophical Faculty of the University of Eastern Finland. The main research questions were:

- Q1: How the role of teacher, textbooks, different tasks types, and technology appear among subjects?
- Q2: How the subjects would use ICT and how they think that ICT could promote learning of mathematics?
- Q3: How the Z- activities and their sub-activities appear for subjects and how they think mathematics teaching in school and subjects′ own usage of information and communication technology has given support for those activities?

The data was gained through two web-based questionnaires. The first one (https://elomake.uef.fi/lomakkeet/5106/lomake.html) consisted of 26 questions within 5-step Likert scale (from 1=very weak to 5=very strong), and of four open-ended questions. The second query was based on 48 questions to be answered within the same Likert –scale (https://elomake.uef.fi/lomakkeet/4831/lomake.html). The subjects were told that the query was carried out as a diagnosis whereby the answering is voluntary but recommendable. From 125 potential students 116 answered to the first query, whilst to the second one, 112 students answered.

**RESULTS**

Regarding Q1, Figure 1 illustrates that the subjects experienced their own interest influenced on their learning of mathematics more than teaching methods, teacher's personality, textbooks, or help gained from classmates and from parents. Note the truncated scale and the dynamical "unorthodox" diagram type that has been chosen to illustrate how the mode is related to the average, being recognizable in the middle of the thin and dashed lines.

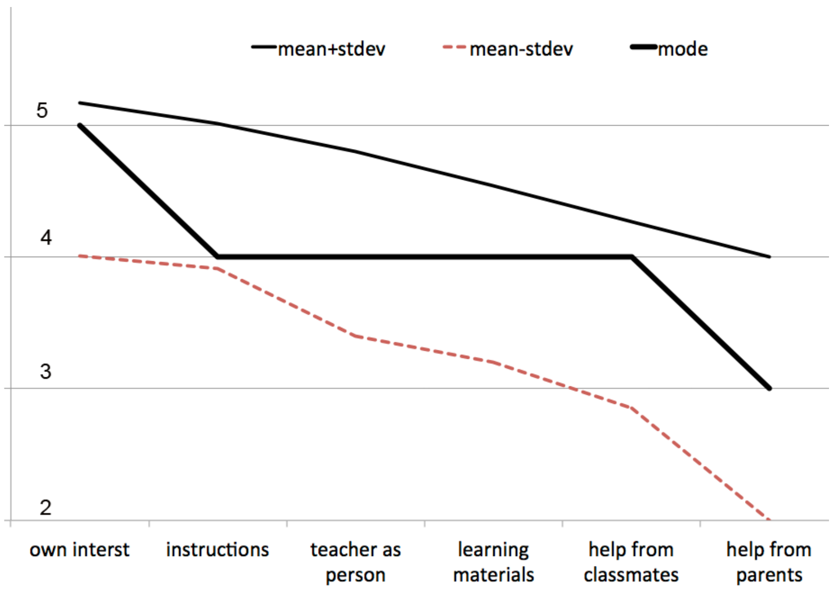



FIGURE 1 Factors that influenced on subject's (N=116) own learning.

Figure 2 represents the amount of different task types that the subjects found in their textbooks (note truncated scale again). When comparing the percentages of answers within each task types, about 50% of the subjects found that the amount of symbolic tasks was high or very high, and for the verbal tasks 70%, respectively. For the graphic tasks the percentage fell to 20%. About 80% of the subjects would like to add especially the amount of authentic application tasks (mean=mode=4, stdev=0.85). Figure 3 shows that in spite of small amount of visualisations the subjects seem to gain help from them for their own learning. A more alarming finding is that the use of ICT for mathematics learning is even more modest outside than inside the classroom, and also the help gained from ICT is low.

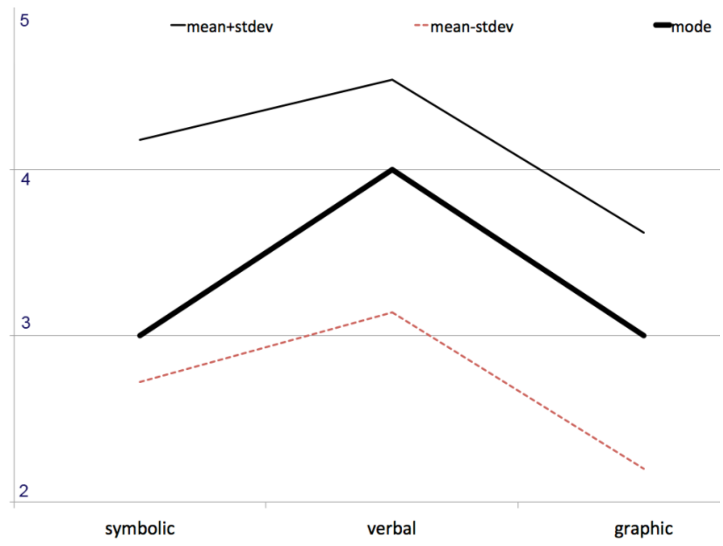



FIGURE 2 The amount of different task types that the subjects (N=116) found in textbooks.

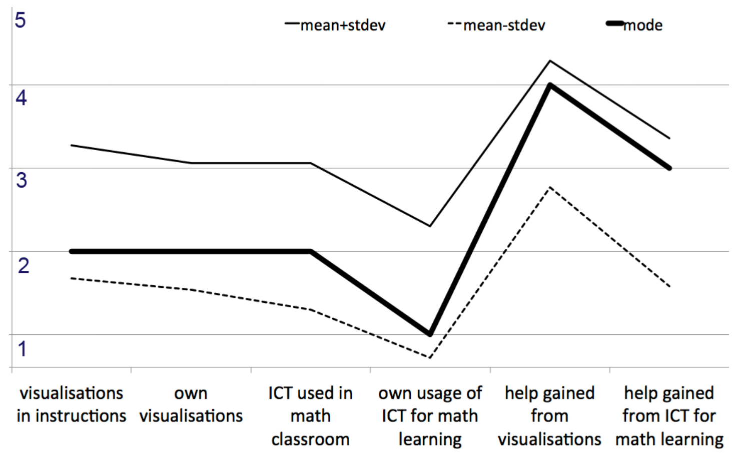



FIGURE 3 How the subjects (N=116) found the usage of ICT and visualization appeared in their mathematics teaching.

The subjects are also quite careful in expressing their wishes regarding the usage of ICT in mathematics learning in general. They were asked if they would like to shift mathematics teaching so that pupils could learn more by using their own computers (the so-called ICT-weighted math in Figure 4). Even though they believe that their own future pupils would like to use interactive ICT (games, simulations, applets etc.) at home with their siblings and parents, they still believe rather on the power of traditional homework whereby technology could be used just partly.

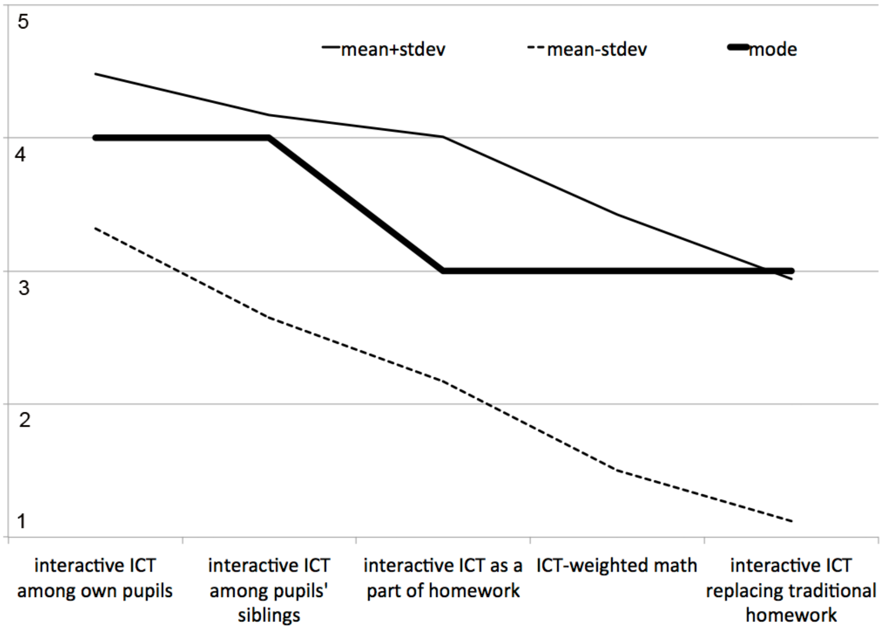



FIGURE 4 How the subjects (N=116) think ICT might be used in the learning.

Regarding Q3, the results reinforce the former findings that mathematics teaching in school does not seem to give support for the activities that can be considered creative: order, find, play and construct. Again, the highest support comes for calculating. Surprisingly the support gained from own usage of ICT was even more modest expect in playing and constructing (Figure 5). Figure 6 represents the same by using the sub-activities, clarifying the meaning of the main activities and reinforcing the coherence of the instrument.

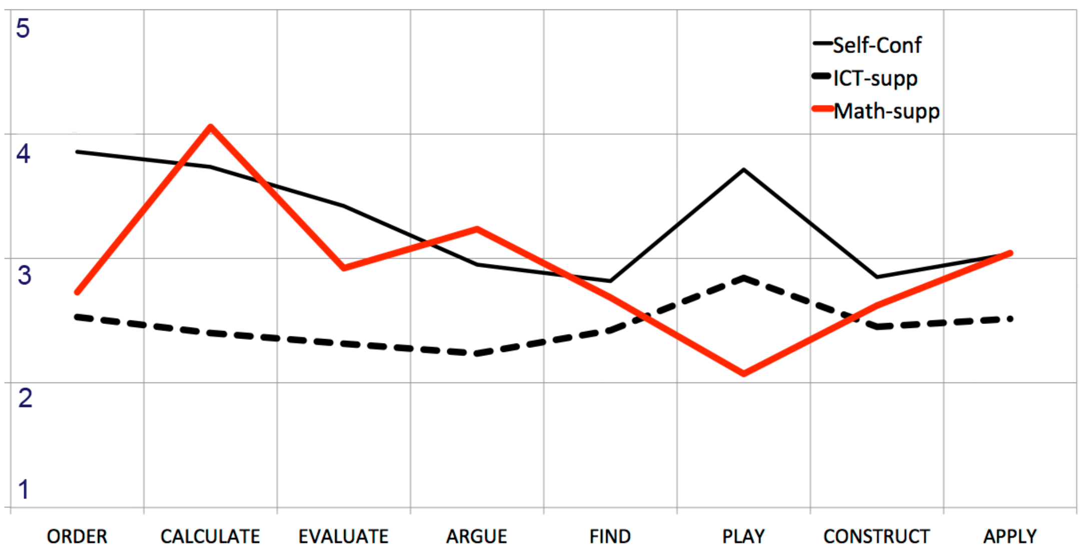



FIGURE 5 How good the subjects (N=112) think they are in doing each of the activities (thin) and how well school mathematics (thick) and subjects' own use of ICT (dashed) has given support for that.

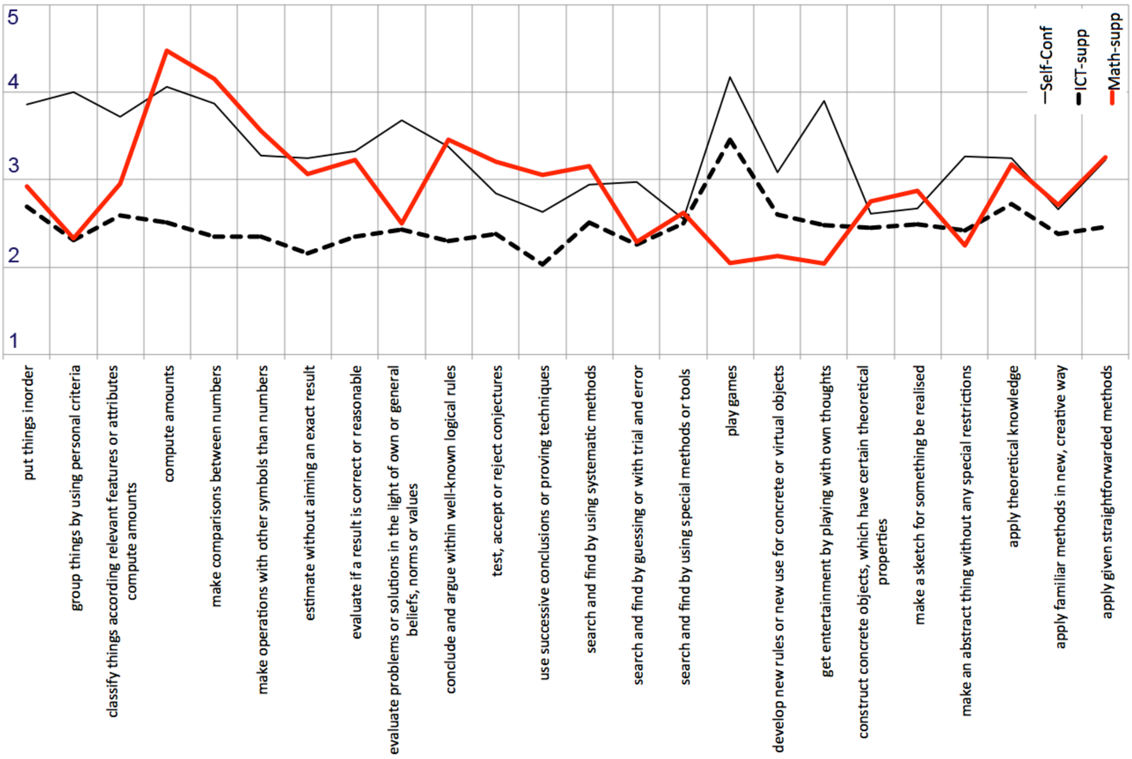



FIGURE 6 How good the subjects (N=112) think they are in doing each of the sub-activities (thin) and how well school mathematics (thick) and own use of ICT (dashed) has given support for that.

## CONCLUSIONS

One can conclude indirect from the outcome (see Figure 2) that the textbooks contain quite stereotypic symbolic tasks and their factitious verbalisations serve as application tasks. The fact that 80% of the subjects would like to add the amount of authentic application tasks refers, namely, to belief that there would be a shortcut to the ability to apply mathematics just by solving application tasks. This is against the recent finding in Lauritzen's (2012) dissertation that to be able to apply, pupils need to have conceptual knowledge. Thus, textbooks should contain tasks to scaffold mathematical concept building with a variety of mathematical representations linked to each other.

Regarding technology, the outcomes are in accord with the conclusion of Haapasalo (2013) and Haapasalo and Vilpponen (2013) that students seem to use ICT on quite superficial level probably mainly for text processing and entertainment but not for work to promote the activities that Zimmermann (2003) proved to be sustainable in mathematics making for more than 5000 years: order, find, play, construct, model, calculate, evaluate, and argue. Using the terms of Aviram and Talmi (2005) the results refer rather to technocratic than reformist or holistic paradigm of the educational use of the ICT. In spite of the official statements of authorities, the low use of ICT does not seem to have brought anything new to the mathematics teaching of the subjects. However, progressive technology as CAS linked to dynamic geometry, for example, should have triggered reformist view and finally accept the fact that the development of ICT will cause a shift in whole school system as it does outside the school. Now that formal obstacles to use technology also in examinations have been officially removed, teacher educators should find new progressive ways to implement technology in educational programmes. Eskelinen (2005) suggests that design of technology-based learning environments within an adequate constructivist theory linked to the knowledge structure offers promising responses to get students understand the basic components for teaching and learning in mathematics and in more general.

It is interesting to notice that the shape of the curves for self-confidence and math support (see Figures 5 and 6) is almost identical with those shapes in former studies. Furthermore, the modest support the elementary level trainee teachers gained from own use of ICT seems to fit the modest support that mathematics trainee teachers gained from the university mathematics in the study of Haapasalo and Eronen (2011, p. 76).

**REFERENCES**

Aviram, A., & Talmi, D. (2005). The Impact of ICT on Education: The Missing Discourse between Three Different Paradigms. *E-Learning,* 2(2), 169-191.

Barron, A. E., Kemker, K., Harmes, C., & Kalaydjian, K. (2003). Large-Scale Research Study on Technology in K-12 Schools: Technology Integration as It Relates to the National Technology Standards. *Journal of Research on Technology in Education, 35*(4), 489-507.

Eronen, L., Haapasalo, L. (2010). Making mathematics through progressive technology. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Palsdottir, B. Dahl, L. Haapasalo (Eds.), *The first sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education.* Charlotte, NC: Information Age Publishing, 701-710.

Eronen, L., & Haapasalo. L. (2011). Shifting mathematical Profiles among Elementary Teacher Students and Mathematics Students. In L. Burman, O. Björkqvist & A-S. Röj-Lindberg (Eds.) *Long-term Research in the Didactics of Mathematics and Science*. Åbo Akademi University: Report from the Faculty of Education 31, 49-54.

Eskelinen, P. (2005). *Collaborative design activities of student primary school teachers to promote their constructivist views on teaching and learning*. Doctoral dissertation. University of Eastern Finland. Publications in Education 110.

Haapasalo, L. (2007). Does professional support match and influence student teacher's interest to attain Educational Technology Standards? *The Electronic Journal of Mathematics and Technology* 1 (1), 1-10. Internet: https://php.radford.edu/~ejmt/deliveryBoy.php?paper=eJMT_v1n1p1 (retrieved 22.02.2013).

Haapasalo L., & Eronen L. (2011). Looking Back and Forward on the Light of Survey Studies Related to Mathematics Teacher Education. In H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (Eds.), *Integrating Research into Mathematics and Science Education in the 2010s.* Proceedings of Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association 14.-15.10.2010, 67-84.

Haapasalo, L. 2013. Tietotekniikan viihdekäytöstä kohti varikkofilosofiaa. *Dimensio* 77 (3), 36-40.

Haapasalo, L., & Hvorecky, J. (2011). Evaluating the Zimmermann octagon within research standards. In T. Fritzlar , L. Haapasalo, F. Heinrich & H. Rehlich (Eds.), *Konstruktionsprozesse und Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker, 145-152.

Haapasalo, L., & Vilpponen, H. (2013). *On the relation of mathematical modelling and technology.* In this volume.

Lauritzen, P. (2012). *Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematical Functions.* Publications of the University of Eastern Finland. Dissertations in Education, Humanities, and Theology 34.

Ministry of Education (2004). *Information Society Programme for Education, Training and Research 2004–2006*. Publications of the Ministry of Education. Internet:http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2004/liitteet/opm_231_opm14.pdf?lang=en (retrieved 22.02.2013).

Niederhauser, D. S., & Stoddart, T. (2001). Teachers' instructional perspectives and use of educational software. *Teaching and Teacher Education* 17, 15-31.

Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. Internet: http://www.oph.fi/english/sources_of_information/core_curricula_and_qualification_requirements/basic_education (retrieved 22.02.2013).

Opetusministeriö (1995). *Koulutuksen ja tutkimuksen tietostrategia.* Internet: http://www.minedu.fi/tietostrategia/tietostrategia.html (retrieved 16.04.2005).

Opetusministeriö (1999). *Koulutuksen ja tutkimuksen tietostrategia 2000 - 2004.* Internet:http://www.minedu.fi/OPM/Julkaisut/1999/liitteet/koul_tutk_tietostrat/index.html (retrieved 22.02.2013).

Silfverberg, H., Haapasalo, L. (2010). Painful Paradigm Shifts in the Teaching and Learning of Mathematics. In Sriraman Bharath, Bergsten Christer, Goodchild Simon, Palsdottir Gudbjörn, Dahl Bettina, Haapasalo Lenni (Eds.). *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education.* Charlotte, NC: Information Age Publishing, 731-739.

Zimmermann, B. (2003). On the genesis of mathematics and mathematical thinking – a network of motives and activities drawn from the history of mathematics. In L. Haapasalo & K. Sormunen (Eds.), *Towards meaningful mathematics and science education.* University of Joensuu: Bulletins of the Faculty of Education 86, 29–47.

# ON THE RELATION OF MATHEMATICAL MODELLING AND TECHNOLOGY

Lenni Haapasalo and Heikki Vilpponen

University of Eastern Finland (UEF)

*This small-scale study investigated how students at upper secondary school can utilize their iPads to find definitions of an ellipse and a parabola with interactive applets, tailored with appropriate instructions. The applets were to be used mainly outside the classroom, whilst the two lessons and a chat forum served for the donating of own ideas and getting support from the teacher and peer students. Besides that students had difficulties to find relevant definitions for those conics, especially in symbolic form, students felt mistrust on technology-weighted working culture, even though the survey reveals that it would give more support for finding, playing, constructing and applying than conventional mathematics teaching. The fact that students find modest support for ordering, calculating, evaluating and calculating from the use of technology, suggest that they might use it on quite frivolous level.*

## INTRODUCTION

Recalling the well-known Trammel of Archimedes, the use of technical tools in applying and modelling of mathematics can be traced back as far as ancient Greek (see http://demonstrations.wolfram.com/TheTrammelOfArchimedes/). On the sixteenth century the Dutch mathematician Stevin (1585) suggested that fieldwork tools should replace tools such as rulers, compasses and right angles. Later on, the term 'modelling' seems to be used usually to mean representing real-world situations through mathematics, as can be seen in the views of Fischer and Malle (1985), and Blum and Leiss (2007), for example. Stressing the authenticity on sense making in problem solving as Palm (2008) does, has implied that very often curriculum text, as in Norway, for example, emphasizes "transforming a problem into mathematical form, solving it and assessing the validity"(see Gjone, 2008). From pedagogical point of view, however, these kinds of characterizations turn out to be awkward. A real-world situation is very seldom directly interpretable through mathematical structures before making a simplification – sometimes even very progressive one. A virtual model on computer screen, for example, can very often offer even for a child, a more appropriate investigation space than a conventional "real-world situation". Changing representation is not only a basic feature of conceptual knowledge (see Haapasalo 2007) but is also considered by many researchers as crucial part of mathematical modelling (see Lesh, Landau & Hamilton, 1983, p. 264) and in the construction of mental models (see Bu, Spector & Haciomeroglu, 2011 and Seel, Al-Diban & Blumschein, 2002). Hence, we prefer to make the following generalization by using the term 'modelling' almost as a synonym to 'mental model': *Modelling means mathematical interpretations that a student makes in verbal, graphic or symbolic representation form of a situation that is logically and psychologically meaningful for him or her.*

This characterization is in accord with the views of who emphasize allows us use the term "model" both in a routine situation as a synonym for "apply" and in a problem situation as a synonym for "accommodation" to solve a cognitive conflict and to reach an equilibrium state of mental structures (cf. Piaget, 1985). From pedagogical point of view even more important than to solve a given problem is to promote students to find own problems related to a situation.

The *instrumental genesis* is "the progressive construction of the use of an artefact by an actor for a given purpose within a given environment" (see Charlier & Daele, 2009; Guin & Trouche, 2002). It comprises of two parallel influences: *instrumentation*, referring to a person's ability to use an instrument, and *instrumentalisation*, referring to the way the instrument shapes the actions and character of the knowledge constructed with the tool, similar to Pea's (1987) exploration of the "aspects of mathematical thinking … new cognitive technologies free up, catalyze, or uncover" (p. 96). According to Prensky (2001, p. 1), "today's students think and process information fundamentally differently from their predecessors; these differences go far further and deeper than most educators suspect or realize". Therefore, as asserted by Haapasalo (2007, p. 1) "instead of speaking about implementing modern technology into the classroom it would be more appropriate to speak about adapting mathematics teaching to the needs of ICT in society" and to shift focus from formal mathematics to informal mathematics within *minimalist* instruction and *navigationism*. The latter means "learners should be able to find, identify, manipulate and evaluate information and knowledge, to integrate this knowledge in their world of work and life, to solve problems and to communicate this knowledge to others" (Brown, 2006, p. 113). In *generative learning*, "the learner is not a passive recipient of information but … active … in the instructional experience, constructing knowledge through relating information in the instructional environment to his or her previous experiences and prior knowledge … [requiring them] to manipulate, interpret, organize or … [actively] make sense … [creating] meaning through generative associations between and among elements" (Bannan-Ritland *et al.*, 2000, p. 22).

Zimmermann's (2003) framework bears similarity with generative learning. His long-term analysis of the history of mathematics reveals eight sustainable and mutually connected activities that have led to mathematical innovations over different times and cultures for more than 5000 years: *order, find, play, construct, apply/model, calculate, evaluate*, and *argue* (see Figures 1 and 4). Taking into account the profound grounding and relevance of Zimmemmann's study (cf.

Haapasalo & Hvorecky, 2012), these activities, to be called *Z-activities* here, may be taken as a framework in teaching and learning of mathematics. Figure 5 illustrates how each of these main activities might be interpreted through three sub-activities.

Eronen and Haapasalo (2010) developed a Likert-scale instrument to measure three kinds of Z-profiles among teachers and students:

• *Math-profile*: How strong the student links each Z-activity to the term 'mathematics',

• *Identity-profile:* How good the student thinks he or she is performing each of the Z-activities,

• *Techno-profile:* How suitable the student thinks a computer is in performing each of the Z-activities.

Haapasalo & Eronen (2010, pp. 713-714) found that these profiles appeared quite degenerated not only among school pupils but also among elementary level trainee teachers and mathematics trainee teachers. Furthermore, they found that the support gained from mathematics teaching both in school and university is modest except calculating (see Haapasalo & Eronen 2011). On the other hand, Eronen and Haapasalo (2010, pp. 707-708) describe in detail how they were encouraged by the findings that a mediocre student at 8th grade was able to use a CAS calculator on the level on instrumentalization on her free time. They orchestrated the learning of a whole 9th grade mathematics class merely with the ClassPad calculator without any textbooks and traditional homework. They designed learning tasks within the quasi-systematic framework of mathematical concept building, still allowing students to select any tasks they wanted from 'problem buffets' (see Haapasalo, 2007). In addition to the fact that students' mathematical profiles were extended, the cognitive results were significantly higher than those of students after conventional teaching.

Haapasalo (2013) reported how the same kind of learning period for the learning of polynomials was carried out successfully at 8th grade by using merely CAS calculators. This short working period (6x75 min) increased student's (N=18) trust on technology-weighted learning regarding the support for creative activities (i.e. find, play, construct and apply). After finding that this support was even stronger than the support elementary trainee teachers (N=112) expressed to have gained from their own general use of ICT in the study of Haapasalo & Eskelinen (2013), he suggests that spontaneous mathematical activities with progressive technology, even during a short period of time, can cause remarkable shifts in students' Z- profiles (see Figure 1).

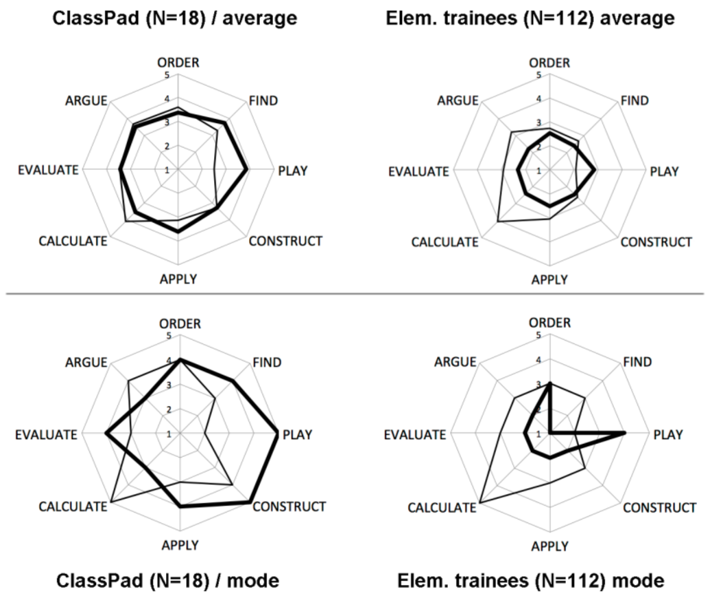



FIGURE 1 Thick lines: Support that the ClassPad students (N=18) think to gain from technology-weighted learning compared to the support elementary level trainee teachers (N=112) think to have gained from their general use of ICT Thin lines: the support gained from conventional mathematics teaching, respectively (Haapasalo 2013).

## BACKGROUND

The school had provided students at upper secondary grade with *i*Pad tablets to be used as learning tools. As the utilization of the tool for the learning of mathematics was still modest, we wanted to adopt the approach of the ClassPad projects to see what kind of cognitive and affective outcomes could be gained during a short period of time. A suitable context for modelling purpose was 'conics' that happened to appear in curriculum in March 2012.

## AIMS

In this small-scale study made among 27 students at the upper secondary school, we wanted to find answers to the following research questions:

(Q1) Which kinds of descriptions students can give in spoken language and in symbolic form for an ellipse and for a parabola?

(Q2) To what extent would students be ready to accept technology-weighted learning, assisted at "pit stops" and via Internet forum?

(Q3) How strong support students think the technology-weighted pit stop learning gives for the Z-activities and how this support is related to conventional mathematics teaching?

## METHODS

The students got a task to investigate the properties of parabola and ellipse with two interactive applets (Figure 2), tailored for *i*Pad with appropriate instructions. In addition to that, they were recommended to watch a video (http://www.youtube.com/watch?v=7UD8hOs-vaI). They had to do their investigations on their free time within one week. The two classroom lessons and a chat forum served as it were a pit stop in a car race to scaffold students with their problems and to give them opportunity to donate ideas to each other.

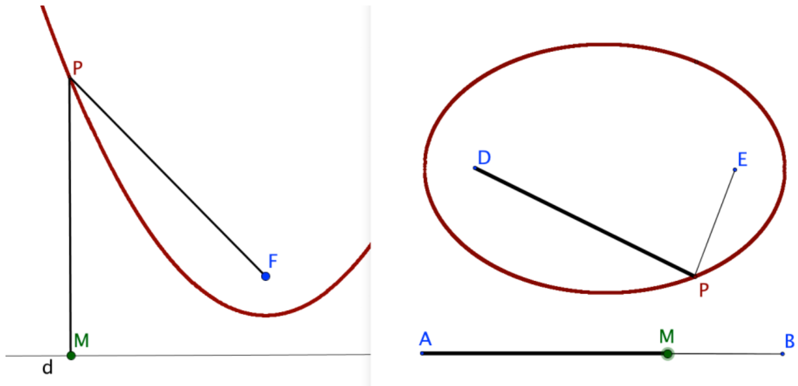



FIGURE 2 Screen shots of applets to investigate the properties of a parabola and an ellipse by moving the point M.

For the last two research questions, students answered a web-based questionnaire before and after the working period. In the second query, an open-ended question about the pit stop was added containing the following introduction (see https://elomake.uef.fi/lomakkeet/3999/lomake.html):

> You might know that the pit stop in a car race is to provide the driver with gasoline, new tires and necessary car adjustments. Let us think that the school would be transformed to a pit stop where the teacher would make at first together with the students a plan how a new topic would be processed (cf. what a new racetrack requires), then would represent typical problems of the topic, and would help students to understand the most important concepts and methods of the topic. The students would investigate those problems outside the school by sharing their ideas and questions among themselves and with the teacher by using Internet and social media. The problems would be tailored to fit the utilization of smart phones, tablets, computers etc. Instead of normal teaching, the lessons is school would serve mainly as pit stop to give support for processing the problems.

Qualitative data was also gained through ethnographic visits to the established chat forum, and video recordings, whereby teams of mathematics trainee teachers were involved as assistant researchers. For the analysis of parabola and ellipse descriptions, grounded theory (see Glaser & Strauss, 1967) was applied, meaning that from the data collected, the key issues (codes) were extracted and grouped into similar concepts to form categories.

## RESULTS

The answer to the research question Q1 is that students showed very modest ability to find appropriate definitions, especially in symbolic form. Figure 3 illustrates that more than one half of 27 students found neither for a parabola nor an ellipse a verbal description that could be considered to at least some extent correct. Regarding a symbolic definition the situation was even worse: only two students found a correct definition that happened to be for a parabola.

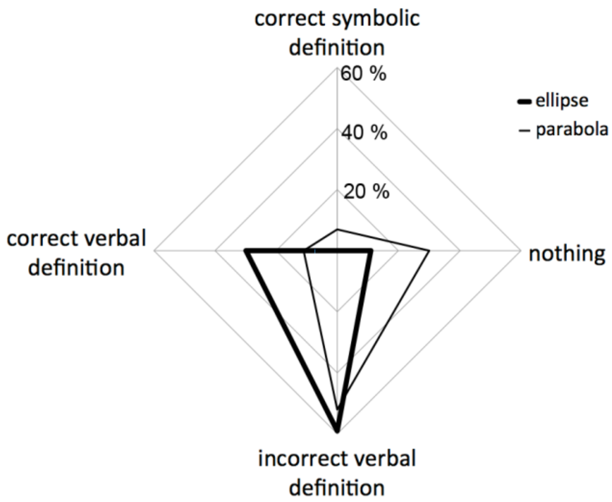



FIGURE 3 Categories of the definitions for an ellipse and a parabola.

The following samples show typical deficient efforts, when the names of points and segments are modified to fit the ellipse applet in Figure 2.

> When D and E stay on their places, PD and DE have equal length when adding them. Hence their orbit can run along the ellipse. The segments AP and PE measure the distances of D and E to every point of the orbit.
>
> When AM increases, PE decreases and vice versa.
>
> The diameter drawn through D and E is PD + PE. The sum of the segments is always equal to the diameter drawn through D and E.
>
> If D and E form a horizontal segment and are located in the middle of the height of the ellipse, then DP+ PE is the longest possible diameter.
>
> Line d is as far away from point P as point F.
>
> Segment PF is as long as the horizontal line from line d to point P.
>
> Because PM=PF, you can build a triangle that is isosceles.

Regarding the research question Q2, the students found very strange to utilize *i*Pad for the learning of mathematics, especially applying pit stop strategy. They did not use the applets outside the classroom almost at all and visited the chat forum as if the question would be about chatting for entertainment. Thus, the mainly investigations happened during in the classroom as it were question about normal mathematic lessons.

Opinions of pit stop learning could be divided in three categories: positive (17%), negative (33%), and neutral (50%) ones. The following samples of student answers reflect this diversity:

> The current teaching works well and things should be like that. If the calculations should be made on free time, people could become frustrated.
>
> I did not understand anything, and what I did, was a pure coincidence.
>
> At the upper secondary school it would be most clear to make during the lessons exact notes of the formulas to be remembered and applied.
>
> Technical applications like in this *i*Pad experiment could be used with normal teaching. At least for me visualizations help me to understand things better than just words and formulas.
>
> The experiment was a nice idea. At the beginning there was a period when pupils were totally lost but with time things would be certainly clear.
>
> It would be nice to open up mathematics in spoken language.
>
> I cannot evaluate the pit stop learning after such a short period.

Regarding Q3, the questionnaire before the working period was used to find out students' self-confidence in doing each of the Z-activities and how conventional teaching gives support for those activities. The questionnaire after the period was made to compare the latter with pit stop learning. Figures 4 and 5 represent the summary of both queries (N=27), because the support gained from conventional mathematics teaching was coherent in both queries. Even though Figure 5 might contain basically the same information as Figure 4, it clarifies the meaning of each of the main activities. Furthermore, the coherence of Figures 4 and 5 reinforces the authors' feeling that the subjects seem to have interpreted the meaning of the main activities in somewhat uniform way.

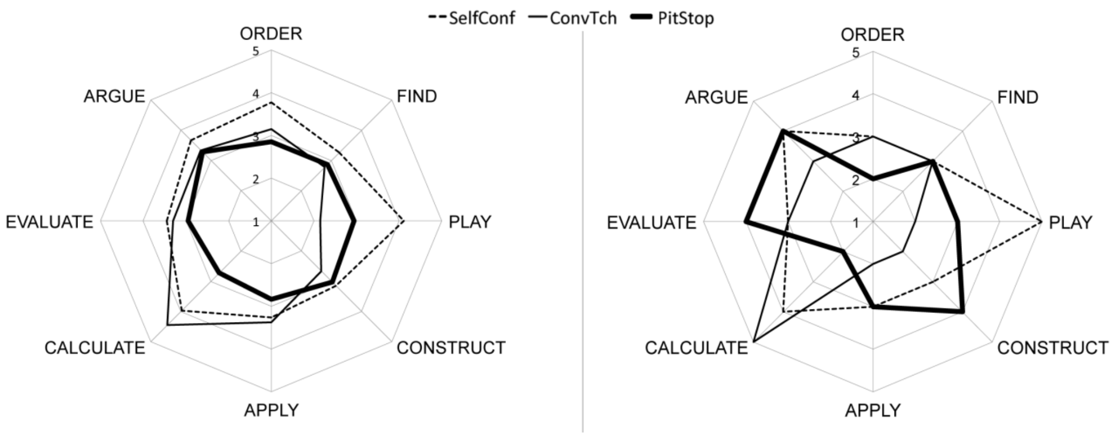



FIGURE 4 Support gained from conventional teaching (thin) vs. support gained from pit stop learning (thick), compared with students' self-confidence in doing each of the Z-activities (dashed). On the left by average, on the right by mode.

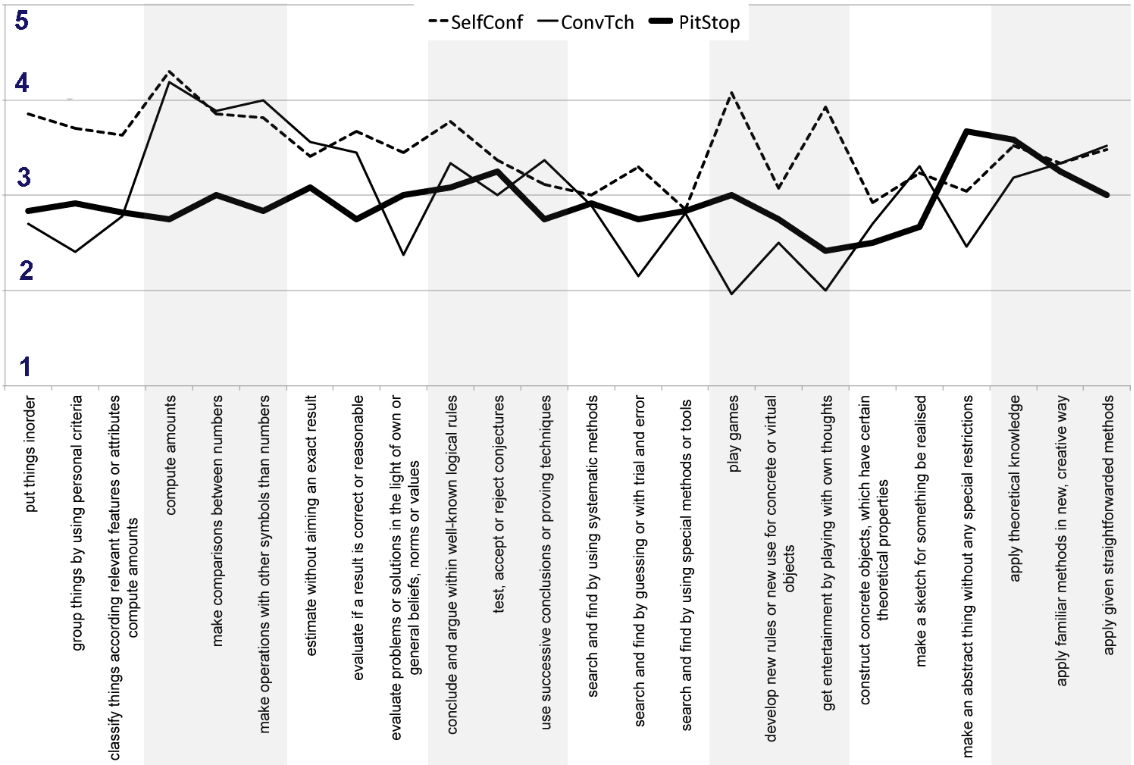



FIGURE 5 The average support for each of the sub-activities gained from conventional teaching (thin) vs. support gained from pit stop learning (thick), compared with students' self-confidence in doing each of the sub-activities (dashed).

## CONCLUSIONS

The outcome that students were not able to describe at least in spoken language what happens in a simple animation or YouTube video, refers to poor ability to understand and change mathematical representations. The figures illustrate that students think the conventional mathematics teaching does not give support for the main activities except calculating. Expressing by average, the pit stop learning seems to give more support for playing and constructing. According to the frequency, this difference is even more remarkable, showing that the pit stop learning would favour also applying, arguing and evaluating.

The shape of the curves describing students self-confidence in the relation of the support gained from conventional mathematics teaching is amazingly similar to those in the studies of Haapasalo and Eronen (2011) and Haapasalo and Eskelinen (2013) not only regarding the eight main Z-activities but also the 24 sub-activities. The support students think to gain from technology is quite similar to the support elementary level trainee teachers gained from their general use of ICT (see Figure 1). This could be interpreted as coherency of the instrument referring also to reproducibility of the study. The fact that students were not capable to utilize their *i*Pads for playing with interactive applets is surprising because students showed high self-confidence in playing and also seem to get support for playing from technology. They seem to trust more on conventional teaching than on technology in ordering and calculating, for example. This causes a problem regarding the utilization of technology because the task in this study can be considered as the lowest level of modelling: just to interpret an easy "tailored animation" in spoken langue or with mathematical symbols. GeoGebra, for example, would allow make an own animation of the same situation, representing almost the highest level of mathematical modelling.

This study suggests, as Haapasalo & Eskelinen (2013) and Haapasalo (2013), that students use ICT rather for entertainment than for activities for which computers were actually invented. The key question is how to allocate students' spontaneous use of technology to more sophisticated activities (see Haapasalo & Zimmermann, 2011). The first reason for modest pit stop success in this study is that students at the upper secondary school are over-motivated to drill conventional task types for matriculation examination. The second one is that the working period was too short. As mentioned in the Introduction, more positive outcomes were gained when the pit stop philosophy was applied during a longer period of time. Students' hesitation was then connected rather to technical questions than to general mistrust on the pit stop approach itself. Their descriptions of dream lessons contained many attributes linked to pit stop: freedom to choose with whom and where to work, in which tempo to work, and opportunities to choose a content that is connected to playfulness.

**REFERENCES**

Bannan-Ritland, B., Dabbagh, N., & Murphy, K. (2000). In D. Wiley (Ed.), *Learning object systems as constructivist learning environments: related assumptions, theories and applications in the instructional use of learning objects.* Bloomington, IN: AECT.

Blum, W., & Leiss D. (2007). How Do Students and Teachers Deal with Mathematical Modelling Problems? The example "Filling up". In C. Haines, P. Calbraith & S. H. Khan (Eds.) *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood.

Brown, T. H. (2006). Beyond Constructivism: Navigationism in the Knowledge Era. *On the Horizon 14* (3), 108 – 120.

Bu, L., Spector, J. M., & Haciomeroglu, E. S. (2011). Toward model-centered mathematics Learning and instruction using GeoGebra. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra.* Rotterdam: Sense Publishers, 13–40.

Charlier, B., & Daele, A. (2009). Design in use of services and scenarios to support learning in communities of practice. In U. Cress, V. Dimitrova & M. Specht (Eds.) *Learning in the Synergy of Multiple Disciplines*. Berlin: Springer, 298-303.

Eronen, L., & Haapasalo, L. (2010). Making mathematics through progressive technology. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Palsdottir, B. Dahl, L. Haapasalo (Eds.), *The first sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education.* Charlotte, NC: Information Age Publishing, 701-710.

Eronen, L., & Haapasalo. L. (2011). Shifting of mathematical profiles among elementary teacher students and mathematics students. In: L. Burman, O. Björkqvist & A-S. Röj-Lindberg (Eds.) *Long-term Research in the Didactics of Mathematics and Science.* Åbo Akademi University: Report from the Faculty of Education 31, 49-54.

Fischer, R., & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik.* Mannheim –Wien-Zürich: Bibliographisches Institut.

Glaser, B. G, & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research.* IL: Chicago: Aldine.

Gjone, G. (2008). Matching Real-life and Mathematics using ICT. An International Project. In L. Haapasalo & J. Hvorecky (Eds.) *Essentials for Bringing Real-World Problems into Maths Education.* Proceedings of the CASIO pan-European Conference 2008 in Barcelona, Spain, 58-63.

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of intrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34 (5), 204-211.

Haapasalo, L. (2007). Adapting Mathematics Education to the Needs of ICT, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology 1* (1), 1-10.

Haapasalo, L., & Eronen, L. (2010). Design of pedagogical studies to shift mathematical profiles among student teachers. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Palsdottir, B. Dahl & L. Haapasalo (Eds.), *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 711-717.

Haapasalo L., & Eronen L. (2011). Looking back and forward on the light of survey studies related to mathematics teacher education. In H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (Eds.), *Integrating research into mathematics and science education in the 2010s.* Proceedings of Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association, 67-84.

Haapasalo, L. (2013). Tietotekniikan viihdekäytöstä kohti varikkofilosofiaa. *Dimensio* 77 (3), 36-40.

Haapasalo, L., & Eskelinen, P. (2013). Elementary level trainee teachers' views of teaching of mathematics and the usage of technology at the beginning of their didactical courses. In this volume.

Haapasalo, L., & Hvorecky, J. (2011). Evaluating the Zimmermann octagon within research standards. In: T. Fritzlar, L. Haapasalo, F. Heinrich & H. Rehlich (Eds.), *Konstruktionsprozesse und Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker, 145-152.

Haapasalo, L., & Zimmermann, B. (2011). Redefining school as pit stop: It is the free time that counts. In W-C Yang, M. Majewski, T. de Avis & E. Karakirik (Eds.), *Integration of technology into mathematics education: past, present and future.* Proceedings of the Sixteenth Asian technology Conference in Mathematics, 19.-23. September in Bolu, Turkey, 133-150.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes.* NY: Academic Press, 263-343.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics 67*(1), 37 – 54.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In A. H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 89-122.

Piaget, J. (1985). *Equilibration of cognitive structures*. University of Chicago Press.

Prensky, M. (2001). Digital Natives, Digital Immigrants Part I. *On the Horizon 9*(5), 1, 3-6.

Seel, N. M., Al-Diban, S., & Blumschein, P. (2002). Mental Models & Instructional Planning. In J. M. Spector & T. M. Anderson (Eds.), *Integrated and Holistic Perspectives on Learning, Instruction and Technology.* Berlin: Springer, 129-158.

Stevin, S. (1585). *De Thiende leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den menschen noodich vallende afveerdighen door heele ghetalen sonder ghebrokenen.* Leiden: Christoffel Plantijn.

Zimmermann, B. (2003). On the genesis of mathematics and mathematical thinking – a network of motives and activities drawn from the history of mathematics. In L. Haapasalo & K. Sormunen (Eds.), *Towards meaningful mathematics and science education*. University of Joensuu: Bulletins of the Faculty of Education 86, 29–47.

# PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' PROFILES OF ASKING PROBING QUESTIONS

Markus Hähkiöniemi

University of Jyväskylä

*Explaining is one of the key elements in inquiry-based mathematics teaching. Teachers should engage students to explain their thinking. Students' explanations help teachers to understand students' learning and design activities accordingly. Asking explanations also push students to think more deeply, and thus, foster learning. The aim of this research is to study pre-service mathematics teachers' profiles of asking probing questions that invite students to explain. 29 pre-service teachers' inquiry-based mathematics lessons were video recorded. The videos were coded for teachers' probing questions. Categories for types of probing questions were created through open coding. After this, probing profiles of those teachers who asked a lot of probing questions were analysed. The types of probing questions and pre-teachers' profiles are discussed in the paper.*

## INTRODUCTION

Several studies highlight the importance of asking students to explain. There is evidence that student explanation has a positive effect on learning and strengthens students' understanding (Wong, Lawson, & Keeves, 2002). Explanations also make students' thinking visible and allow the teacher to proceed accordingly (Ruiz-Primo, 2011). Furthermore, asking students to explain is important in supporting dialogic interaction (McNeill & Pimentel, 2009) and in creating learning possibilities for other students too.

Traditionally good teachers are considered as good explainers (Lavy & Shriki, 2008). However, nowadays more emphasis is placed on getting the students to explain. In particular, inquiry-based mathematics teaching highlights the importance of student explanation (e.g., Kazemi & Stipek, 2001). In this study, inquiry-based mathematics teaching means that students work alone or in small groups to solve non-standard mathematical problems designed to potentially bring forth mathematical ideas related to the topic at hand while the teacher supports students' reasoning and orchestrates classroom discussion. In line with Stein, Engle, Smith, and Hughes (2008), inquiry-based mathematics teaching consists of launch, explore, and discuss and summarize phases. The teacher introduces the problems in the launch phase. Then, students work in small groups during the explore phase. Finally, students' solutions are discussed in the discuss and summarize phase. The main idea of inquiry-based mathematics teaching is that a teacher has a crucial role in activating students to reason more and more mathematically and to build mathematical explanations for their findings (Hähkiöniemi & Leppäaho, 2012).

Questions that ask students to explain are usually considered higher order questions. For example, Kawanaka and Stigler (1999) consider higher order questions requesting an explanation or description of a mathematical object, solution method, or a reason why something is true or not true. They found that 9.6 % of German, 22 % of Japanese, and 1 % of U.S. eight-grade teachers' questions were higher order questions. The rest of the questions asked for a yes or no answer or to state a fact. Also other studies have found that the proportion of questions that ask for explanation is relatively small (e.g., Myhill & Dunkin, 2005; Sahin & Kulm, 2008).

Sahin and Kulm (2008) consider three types of mathematics teachers' questions: factual, guiding, and probing questions. Factual questions request a known fact, guiding questions give hints or scaffold solution, and probing questions ask for elaboration, explanation or justification (Sahin & Kulm, 2008). Sahin and Kulm used the following three criteria for identifying probing questions: (1) ask students to explain or elaborate their thinking, (2) ask students to use prior knowledge and apply it to a current problem or idea, (3) ask students to justify or prove their ideas. They found that the two sixth-grade teachers' use of probing questions varied from 17 % to 42 %.

Despite several classification schemes of teacher questions, studies that suggest different subcategories for questions that ask for explanation are rare. One such study is Kawanaka and Stigler's (1999) study. According to them, higher order questions may request (1) analysis, synthesis, conjecture or evaluation, (2) how to proceed in solving a problem, (3) methods that were used to solve the problem, (4) reasons why something is true, why something works or why something is done, or (5) other information. Kawanaka and Stigler (1999) found that the teachers in the three countries asked different kinds of higher order questions. According to them, Japanese teachers asked students to explain used methods more than teachers from U.S.A. and Germany. Boaler and Brodie (2004) developed 9 categories of teachers' questions. In their typology, question types that request an explanation are (1) Exploring mathematical meaning and/or relationships, (2) Probing, getting students to explain their thinking, and (3) Extending thinking. Boaler and Brodie found that teachers using reform curriculum asked more these three types of questions than teachers using traditional curriculum.

The aim of this study is to further elaborate on different ways of asking students to explain in mathematics lessons. Particularly, subcategories for different types of probing questions that request explanation are constructed. Furthermore, differences in using the different types of probing questions are analysed. This helps us to understand the complexity of explanation asking. The following research questions guided the data analysis: (1) What different types of probing questions do the pre-service teachers ask? (2) What kinds of probing profiles exist among those teachers who ask a lot of probing questions?

## METHODS

### Data collection

The data of this study is a part of a larger study on pre-service secondary and upper secondary mathematics teachers' implementation of inquiry-based mathematics teaching. 29 pre-service teachers participated to a teaching unit taught by the author. The unit included nine 90 minutes group work sessions about the ideas of inquiry-based mathematics teaching. For example, the pre-service teachers practiced how to guide students in hypothetical teaching situations (see, Hähkiöniemi & Leppäaho, 2012). Then, each pre-service teacher implemented one inquiry-based mathematics lesson in grades 7–12 as part of their teaching training. All the lessons were structured in the launch, explore, and discuss and summarize phases. Students used GeoGebra to solve problems in 17 lessons. The actual lengths of the lessons varied from 40 to 87 minutes.

The lessons were videotaped and audio recorded with a wireless microphone attached to the teacher. The video camera followed the teacher as he or she moved around the classroom. When the teacher discussed with a student pair, the camera was positioned so that students' notebooks or computer screens could be seen. Students written notes were collected after each lesson.

### Data analysis

Data was analysed using Atlas.ti video analysis software. All the teachers' subject related questions were coded to probing, guiding, and factual questions. The definitions for these codes were constructed on the basis of Sahin and Kulm's (2008) definitions. All teacher utterances which requested students to explain or examine their thinking, solution method or a mathematical idea were coded as probing questions. A teacher utterance was considered as a question if it invited the students to give an oral response. For example, utterances such as "explain" were considered as questions even though grammatically they are not questions. On the other hand, grammatical questions were not coded as questions if the teacher did not give the students a possibility to answer.

After this, all the probing questions were further analysed using data driven analysis (Glaser & Strauss, 1967). At first, the probing questions were viewed several times to become familiar with them. Then, the probing questions were clustered into categories. The categories were constructed by interpreting what the teacher asks students to explain. The method of constant comparison (Glaser & Strauss, 1967) was used as each coded question was compared to the other questions coded to the same category. In addition, it was compared how each question would fit to the other categories. After creating the categories, the properties of the categories were examined by viewing repeatedly the questions of a certain category. The categories were also compared to each other and relations between them were explored. Through this process the categories were organised into main categories (see Table 1).

Having the frequencies of each teacher's types of probing questions, the analysis continued by selecting those teachers who asked more than 25 probing questions per hour on average. Differences between the teachers were examined by identifying the probing questions preferred by each of the teachers. Finally, the classroom instances where the teachers asked the probing questions were examined and features of their questioning were identified.

## RESULTS

Altogether, the pre-service teachers asked 348 probing questions that is 25 % of all the subject related questions. Taking into account the lengths of the lessons they asked 15.2 probing questions per 60 minutes on average. The types of probing questions are presented in Table 1 and examples are given when presenting the pre-service teachers' probing profiles.

TABLE 1 Types of probing questions asked by the pre-service teachers (n = 29)

| Type | Description | f | % |
|---|---|---|---|
| 1 Probing method | Asks students to explain how they solved a problem, what they did, or how they got an answer. | 97 | 28 |
| 2 Probing reasoning | Asks students to explain what they are thinking, how they reasoned something, or how something could be reasoned. | 71 | 20 |
| 3 Probing cause | Asks students to explain reason why something is as it is or why the students did something. | 61 | 18 |
| 4 Probing meaning | Asks students to explain the meaning of something. | 47 | 14 |
| 5 Probing argument | Asks students to justify, to explain how they know something, or to explain whether something really is as claimed. | 37 | 11 |
| 6 Probing extension | Asks students to explain how their solution method would work in a slightly different situation or how the problem could be solved differently. | 14 | 4 |
| 7 Unfocused | Asks students to explain but it is not expressed what should be explained. | 21 | 6 |

Table 2 presents the distribution of probing questions of those teachers (n = 8) who asked more than 25 probing questions per hour on average. Below, I elaborate on the pre-service teachers' profiles of asking probing questions in the same order as they appear in Table 2.

TABLE 2 Frequencies of probing questions of teachers who asked more than 25 probing questions per hour on average

| | 1 method | 2 reasoning | 3 cause | 4 meaning | 5 argument | 6 extension | 7 unf. | Total /h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 9 | 7 | 6 | 5 | 1 | 0 | 3 | 43,3 |
| B | 7 | 7 | 2 | 0 | 3 | 3 | 2 | 36,3 |
| C | 3 | 17 | 9 | 6 | 6 | 0 | 2 | 36,2 |
| D | 4 | 9 | 0 | 6 | 1 | 2 | 2 | 35,5 |
| E | 0 | 0 | 9 | 4 | 6 | 0 | 2 | 31,4 |
| F | 12 | 0 | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 27,7 |
| G | 17 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 26,8 |
| H | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 | 5 | 0 | 26,8 |

Teacher A, who asked most frequently probing questions, asked relatively evenly four types of probing questions. In his 7th grade lesson, students were solving a problem related to exponent. When teacher A circulated in the class he engaged in lengthy discussions with students and almost every time when he discussed with a student pair, he asked some kind of probing question. For example, he asked the following questions: “Would you like to explain how you have done?” *[Probing method]*, “How did you reason it?” *[Probing reasoning]*, “Why it goes like that?” *[Probing cause]*, and “What do these number twos mean?” *[Probing meaning]*.

Teacher B asked probing method and probing reasoning questions. In this 7th grade lesson, students were solving equations before having been introduced to formal solution methods. Often students just invented the value for the unknown $x$ without writing any intermediate steps. Thus, the teacher asked them to explain either what they did to find $x$ (e.g., “How did you arrive at these answers?”) or how they reasoned the value for $x$ (e.g., “How did you figure it?”).

Similar to teacher A, also teacher C asked many kinds of probing questions but clearly more probing reasoning questions. This was the only high-school lesson where the teacher asked more than 25 probing questions per hour. Teacher C’s 10th grade lesson was about the contingence angle of two tangents to a circle. Students used GeoGebra applet to investigate the relation between central angle and the angle of contingence (see Fig. 1). Often students proposed correct or incorrect solutions and the teacher probed their thinking. For example, a student claimed that the sum of the central angle and the angle of contingence is 180°. Then, the teacher asked her to explain how she reasoned it:

Teacher C: From which did you conclude it? *[Probing reasoning]*

Student: Because the two other angles are 90, it becomes 180 [sum of the angles C and D], and because this is quadrangle, it is 360 [sum of the angles A, B, C, and D].

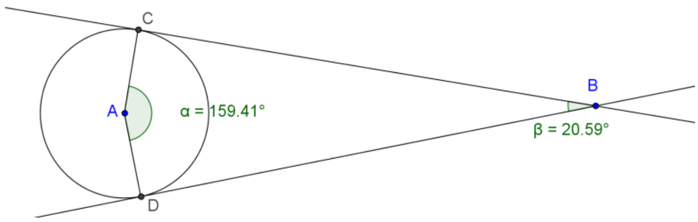



FIGURE 1 GeoGebra applet for investigating the sum of the contingence angle and central angle

Teacher D emphasized probing reasoning and probing meaning questions. In this 7th grade lesson about the concept of variable, students were asked to construct graphs and rules to describe a certain real world situation. Teacher D often asked them to explain how they reasoned their answers and what their notation means. For example, teacher D asked about the formula that a student pair had constructed:

| | |
|---|---|
| Teacher D: | Tell about this. What does this mean [the students' formula h·5 + 2]? *[Probing meaning]* |
| Student: | Every hour costs 5 Euros plus the 2 Euros entrance fee. |

Teacher E asked a lot of probing cause and probing argument questions. Her 9th grade lesson was about divisibility rules. Students were asked to argue whether certain divisibility rules are true or not and possibly to modify the rules. In this lesson, the students quickly determined the truth values of the divisibility rules. They had learned some of the rules already in the elementary school. Other times, they determined the truth value by using examples. The students needed a lot of the teacher's help to pay attention to the mathematical justification of the rules. Teacher E usually did this by admitting that the rule is correct and by asking the reason why the rule holds. For example, a student claimed that a number is divisible by two if the last digit is even. Then, the following discussion occurred:

| | |
|---|---|
| Teacher E: | What is the reason, could you..? *[Probing cause]* |
| Student: | Because they are divisible by two. […] |
| Teacher E: | Why is it enough to look at the last digit? *[Probing cause]* |
| Student: | Because if the last one would by odd, then the number could not be divisible by two. […] It does not matter how much the part in the front is, because you can always divide it by two. […] They can always be divided by two, if the last one is even. |
| Teacher E: | Which all you can divide by two? Which in the front? What do you mean, I don't quite…? *[Probing meaning]* |
| Student: | Well, if you have for instance, let's say 5, 3, 2, 4 [number 5324]. |

Teacher E: Yeah.

Student: Then, if the last digit is even, you can divide them all by two. Like the whole number by two. Of course you cannot divide them all separately by two.

Teacher E: What is the reason that you can divide the whole number by two? I can see that you can divide four [by two]. *[Probing cause]*

Student: They are round thousands, round hundreds, round tens, to which only the digit in the end is added to. So it is the one digit which matters instead of the whole number. […] They are complete thousands, hundreds, and tens, which all are divisible by two, and therefore, the whole number is divisible by two if the last one is not odd.

In this episode, the teacher repeatedly asked the student to explain the reason for the divisibility rule. At first, the student seemed not to understand what kind of reason is asked for, but finally, when the teacher kept on asking, the student formulated a mathematical explanation for the divisibility rule.

Instead, teachers F and G asked high number of probing method questions and only few other probing questions. Both lessons were about percentages. In particular, they focused on finding new ways to calculate percentages or amount of something. For example, in teacher G's lesson students were given the following problem: How much juice can be made of 1.5 litres of concentrate when 30 % of the juice has to be concentrate? As the students constructed their own ways to calculate, it was natural to ask them to explain what they have done as in the following episode:

Teacher G: What did you get as an answer? [Teacher reads the answer.] Yes. Where did you get that 70 % is three and half litres? *[Probing method]*

Student: We calculated here.

Teacher G: Okay.

Student: How many percentages. Or how many times bigger 70 is than 30 % [70 % / 30 % ≈ 2.33].

Teacher G: Yeah.

Student: Here we multiplied 1.5 with that [1.5 *l* × 2.33 ≈ 3.495 *l*]. We got this. And then we added them [1.5 *l* + 3.495 *l* = 4.995 *l* ≈ 5 *l*]. We got this. And this is the whole amount.

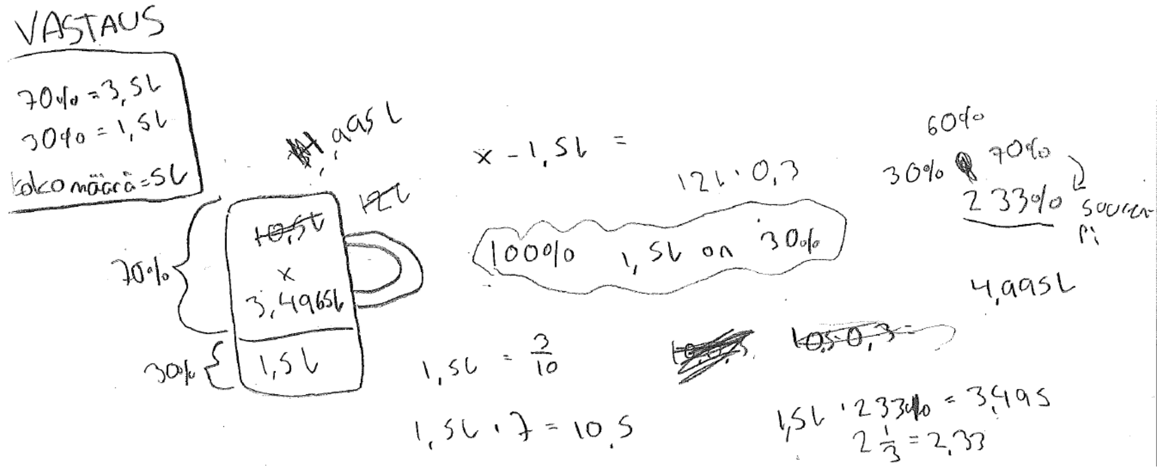



FIGURE 2 Students' solution of how much juice can be made of 1.5 litres of concentrate when 30 % of the juice has to be concentrate

Often, in those solution methods that used an equation, teacher G asked where students had got the equation. These kinds of questions focus on the main idea of this solution method, i.e., how to formulate the equation. For example, this happened in the following episode:

Teacher G: Where did you get that kind of an equation [ $x \cdot 0.30 = 1.5$ ]? *[Probing method]*

Student: Well, you need 30 % concentrate. So. This is 30 %. So, when *x* is multiplied by it we get 30 % of *x* which is 1.5.

The lesson taught by teacher H was different in nature. It was an open problem solving lesson in which students were required to make selections on what aspect of the problem to investigate and to build several different kinds of solutions. The problem was to use GeoGebra to investigate location for the amusement park build by four towns. In this lesson it seemed to be more natural to ask probing extension questions which were rare in other lessons. For example, a pair of students had located the amusement park in the centre of a square and drawn a circle through the four towns. Then the following discussion occurred:

Teacher H: How do you argue that it is just this point? *[Probing argument]*

Student: Because it is as far from all the towns.

Teacher H: Okay. Good. Brilliant. What if you move a little, for example, the point B or a point in the circle. […] Move some point [students drag a point away from the circle]. […] How about this kind of situation? *[Probing extension]*

Student: Then we should perhaps, hmm.

Teacher H: I'll be back.

In this episode teacher H first probed students' justification and then asked probing extension question. The aim of the lesson was to get the students to consider different possibilities, and thus, these kinds of questions fit well to the lesson. The teacher left the students to investigate this new situation and later came back to discuss about their new solution. Hähkiöniemi, Leppäaho and Francisco (in press) have examined this lesson more closely.

**DISCUSSION**

The results of this study show that there are several different types of probing questions. Some of the types of probing questions resemble those of previous studies. The category of probing method is similar to Kawanaka and Stigler's (1999) question types asking for how to proceed in solving a problem and methods that were used to solve a problem. Probing extension is also similar to Boaler and Brodie's (2004) question type Extending thinking. Although all probing questions request explanation, different things are asked to be explained. Furthermore, according to the results, teachers favour different kinds of probing questions. Previous studies have investigated teachers' use of types of questions and often included probing questions as one type (e.g., Kawanaka & Stigler, 1999; Myhill & Dunkin, 2005; Sahin & Kulm, 2008). This study continues to study probing questions more closely.

Some of the teachers preferred to ask probing method questions. In context where students invent their own methods, these types of probing questions seem to be useful. Although at times the students' explanations also included aspects of reasoning, this was not always the case. Thus, when using probing method questions, teachers need to be aware of what they ask students to explain and ensure that students engage also in explaining their reasoning (cf. Kazemi & Stipek, 2001). Also Kawanaka and Stigler (1999) found differences in using this kind of questions. According to them, Japanese teachers asked students to explain used methods more than teachers from U.S.A. and Germany. Japanese teachers emphasize building of multiple solution methods without being instructed how to use a standard method (Kawanaka & Stigler, 1999). In these conditions, which are similar as in inquiry-based mathematics teaching, it is natural to ask probing methods questions.

Sometimes students solve tasks superficially. Then the teacher has to guide the students to reason mathematically. Yet, students do not always explain their reasoning even though asked for. However, if the teacher keeps on asking reasoning with slightly different words, the students can finally reach a mathematical explanation as in the example from teacher E's lesson. In this case, asking reason for the observed property seemed to be more productive than asking the student to justify the claim (cf. Jones, 2000). When asking for argument, a teacher acts as if the truth of the claim is not known. Instead, when asking for cause, the truth is not questioned but we are interested in the reason why the claim is true.

Probing questions that extend students' thinking were rare. This is consistent with Boaler and Brodie's (2004) finding. One explanation for this might be that this type of probing question is demanding for novice teachers. Another reason might be the nature of the lesson because large proportion of these questions were asked in an open problem-solving lesson in which it is more natural to engage students to think about other possibilities in pursuing the problem (see, Hähkiöniemi et al., in press). However, extending students' thinking based on their current thinking should be more frequent and pre-service teachers need support in when and how to do this.

This study has proposed categories for probing questions. As an educational implication these categories offer teachers a way to recognise and conceptualise different ways of asking students to explain. This could help teachers to ask varied kinds of probing questions. In future studies it would be interesting to study teachers' questioning in other conditions and how these conditions affect the use of different types of probing questions. In particular, comparing expert and novice teachers' ways of asking different types of probing questions could produce deeper understanding of how to promote student explanation.

**REFERENCES**

Glaser, B., & Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research.* Chicago: Aldine.

Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The importance, nature and impact of teacher questions. In D. E. McDougall, & J. A. Ross (Eds.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 773-782). Toronto, Ontario: PME-NA.

Hähkiöniemi, M., & Leppäaho, H. (2012). Prospective mathematics teachers' ways of guiding high school students in GeoGebra-supported inquiry tasks. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 19*(2), 45–58.

Hähkiöniemi, M., Leppäaho, H., & Francisco, J. (in press). Teacher-assisted open problem-solving. *Nordic Studies in Mathematics Education*.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1–3), 55–85.

Kazemi, E., & Stipek, D. (2001). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *The Elementary School Journal, 102*(1), 59–80.

Kawanaka, T., & Stigler, J. W. (1999). Teachers' use of questions in eight-grade mathematics classrooms in Germany, Japan, and the United States. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(4), 255–278.

Lavy, I., & Shriki, A. (2008). Investigating changes in prospective teachers' views of a 'good teacher' while engaging in computerized project-based learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 259–284.

McNeill, K. L., & Pimentel, D. S. (2009). Scientific discourse in three urban classrooms: The role of the teacher in engaging high school students in argumentation. *Science Education, 94*(2), 203–229.

Myhill, D., & Dunkin, F. (2005). Questioning learning? *Language in Education, 19*(5), 415−427.

Ruiz-Primo, M. A. (2011). Informal formative assessment: The role of instructional dialogues in assessing students' learning. *Studies in Educational Evaluation, 37*, 15–24.

Sahin, A., & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(3), 221–241.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

Wong, R., Lawson, M., & Keeves, J. (2002). The effects of self-explanation training on students' problem solving in high-school mathematics. *Learning and Instruction, 12*, 233–262.

# MATEMATIIKAN KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN YLIOPISTON MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

Jorma Joutsenlahti[1,2], Hanna Sarikka[2], Jussi Kangas[2] ja Petteri Harjulehto[3]

[1]Tampereen yliopisto, [2]Tampereen teknillinen yliopisto, [3]Turun yliopisto

*Artikkelissamme käsittelemme matematiikan kirjallista kielentämistä ja miten opiskelijat kokevat sen yliopistomatematiikan opiskelussa. Kokeilussa hahmottelimme tehtävätyyppejä, joissa opiskelija voi käyttää tarkoituksenmukaisesti luonnollista kieltä, matematiikan symbolikieltä ja kuviokieltä. Kokeilimme tehtävätyyppejä yhdellä Tampereen teknillisen yliopiston insinöörimatematiikan kurssilla (115 opiskelijaa) ja yhdellä Turun yliopiston matematiikan kurssilla (48 opiskelijaa). Keräsimme kokeiluun osallistuneilta 1. vuoden opiskelijoilta palautteen siitä, miten he kokivat kielentämistehtävät yliopisto-opiskelussa.*

## JOHDANTO

Viime vuosikymmenten kuluessa useissa yliopistoissa, joissa opiskellaan matematiikkaa pää- tai sivuaineena, on havahduttu matematiikan opiskelutulosten heikkenemiseen (Silius, Pohjolainen, Kangas, Miilumäki & Joutsenlahti, 2011a; 2011b). Esimerkiksi vuonna 2005 Tampereen teknillisessä yliopistossa (TTY) aloittaneista opiskelijoista (n=1023) vain 57 % oli suorittanut kaikki ensimmäisen vuoden pakolliset matematiikan opintojaksot neljän vuoden kuluessa (Silius ym., 2011b). Hälyttävien tulosten vuoksi TTY:ssa aloitettiin 2000 – luvun alkupuolella kehittää matematiikan opetusta monipuolisilla tukitoimilla: matematiikan perustaitotesti, matematiikkajumppa ja matematiikkaklinikka (ks. Pohjolainen, Raassina, Silius, Huikkola & Turunen, 2006; Kangas, Silius, Joutsenlahti, Pohjolainen & Miilumäki, 2011).

Mainittujen matematiikan yliopisto-opetusta tukevien toimenpiteiden lisäksi aloitettiin syksyllä 2010 matematiikan harjoitusten kehittämistyö kahdella TTY:n matematiikan pakollisella kurssilla, joihin osallistui yhteensä 249 opiskelijaa (tarkemmin Kangas ym., 2011). Kehittämistyö perustui matematiikan kirjalliseen kielentämiseen, jota oli kehitetty ja kokeiltu siihen mennessä lukion ja peruskoulun matematiikan opetuksessa (Joutsenlahti, 2010). Kokeilun luennoitsijoiden mielestä kielentäminen oli toimiva tapa ohjata opiskelijoita perustelemaan ratkaisujaan ja he ilmoittivat saaneensa kielentämistehtävistä ideoita, joita he voivat soveltaa tulevaisuudessakin harjoitustehtäviä laatiessa. Kokeilun osallistuneet opiskelijat kokivat luonnollisen kielen käytön selkeyttävän ratkaisuja: 61,2 % kyselyyn vastanneista opiskelijoista (n=160) koki luonnollisen kielen käytön tehtävien ratkaisuissa positiivisena (negatiivisena 12,5 %). (Kangas ym., 2011.)

Opetuksen kehittämistyön seuraavana vaiheena konstruoitiin matematiikan kirjallisen kielentämisen mallien pohjalta tehtävätyyppejä, joita kokeiltiin syksyllä 2012 Tampereen teknillisessä yliopistossa (TTY) Insinöörimatematiikka 1:n kurssilla (n=115) tutkija Jussi Kankaan johdolla ja Turun yliopistossa (TY) Analyysi 1:n kurssilla (n=48) yliopistonlehtori Petteri Harjulehdon johdolla. Kielentämistehtäviä laati mainittujen luennoitsijoiden lisäksi tutkija Hanna Sarikka.

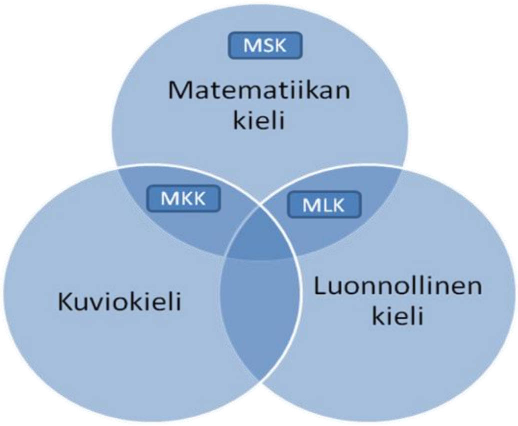
Tutkimustamme voi kuvata yliopiston matematiikan opetuksen kehittämistutkimuksena (Edelson, 2002) kirjalliseen kielentämiseen perustuvien tehtävien suunnittelun osalta. Uusien tehtävätyyppien kokeilusta saadaan monipuolista tietoa opetuksen edelleen kehittämiseksi ja tehtävien jatkokehittelyyn. Keräsimme opiskelijoiden ratkaisut kielennystehtäviin sekä kysyneet opiskelijoiden näkemyksiä kirjallisesta kielentämisestä Likert-asteikollisilla väittämillä ja avoimilla kysymyksillä. Tässä artikkelissamme rajoitumme esittelemään uusia matematiikan kirjalliseen kielentämiseen perustuvia tehtävätyyppejä ja vastaamaan kysymykseen minkälaisena työtapana kokeiluun osallistuneet opiskelijat kokivat kirjallisen kielentämisen matematiikan opiskelussa.

## MATEMATIIKAN KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN

Matematiikan kielentämisen perusteita on käsitelty useissa Joutsenlahden aikaisemmin ilmestyneissä artikkeleissa (esim. Joutsenlahti, 2010). Matematiikan kielentämisellä tarkoitamme matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla pääsääntöisesti suullisesti tai kirjallisesti (Joutsenlahti, 2010; vrt. Høines, 2000). Matemaattisella ajattelulla tarkoitamme tässä yhteydessä matemaattisen tiedon (konseptuaalisen, proseduraalisen tai strategisen) prosessointia, jota ohjaavat ajattelijan metakognitiot (Joutsenlahti, 2010; Sternberg, 1996).

Tässä yhteydessä käytämme käsitettä ”kieli” laajassa merkityksessä: kieli sisältää puhutun ja kirjoitetun kielen lisäksi kuvat, ilmeet, eleet sekä mm. matematiikan symbolikielen (Orpana, 1993; Joutsenlahti, 2003). Edellä kuvattu ”kieli” voidaan nähdä monipuolisena merkitysten rakentajana oppimisprosessissa (Lemke, 2002). Multisemioottisessa lähestymistavassa kieleksi voidaan ymmärtää laajasti esimerkiksi merkityksiä kantavien sanojen (luonnollinen kieli), symbolien (esimerkiksi matemaattinen symbolikieli), kuvien tai toimintojen muodostamat omat ”kielet” (Lemke, 1997).

Matematiikan tehtävien ratkaisuprosessin esittämisessä voidaan käyttää matematiikan symbolikieleen (matemaattiset lausekkeet, laskutoimitukset jne.), kuviokieleen (esimerkiksi geometriset kuviot) ja luonnolliseen kieleen (tavallisesti äidinkieltä), perustuvia representaatioita (Joutsenlahti & Kulju, 2010; Chronaki & Christiansen, 2005). Kuviossa 1 on esitetty malli mainituista kielistä matemaattisen ajattelun ja sen ilmaisun välineinä. Tehtävän ratkaisija voi liikkua eri kielten välillä (koodin vaihto) sen mukaan, mikä auttaa häntä itseään parhaiten ratkaisemaan ongelman tai dokumentoimaan ratkaisuprosessia muille ymmärrettävään muotoon (Joutsenlahti & Rättyä, 2011). Ilmaisun monimuotoisuus on luontevaa myös matematiikassa, sillä matemaatikoillakaan ei ole yhtenäistä tapaa toimia matematiikan kielellä, vaan siinä on yksilöllisiä eroja ja kulttuurieroja (ks. Chronaki & Christiansen, 2005, 27). Candia Morganin mukaan (2001, 233–235) monipuolinen kirjoittaminen matemaattisten tehtävien ratkaisuissa edistää matematiikan oppimista, kehittää matemaattista ymmärtämistä, parantaa oppilaiden asenteita matematiikkaa kohtaan ja helpottaa opettajan arviointityötä. Kuitenkin Matemaattisen ajattelun näkyväksi tekeminen kirjoittamalla saattaa olla opiskelijalle vaativa suoritus (ks. Triandafillidis & Potari, 2005).




KUVIO 1 Matematiikan tehtävien ratkaisuissa mahdollisesti esiintyvät kielet. Lyhentein merkityt alueet ovat matematiikan luonnollinen kieli (MLK), matematiikan symbolikieli (MSK) ja matematiikan kuviokieli (MKK) (Joutsenlahti & Kulju, 2010).

Matematiikan kirjalliseen kielentämiseen on kehitetty viisi perusmallia: standardi-, kertomus-, tiekartta-, kommentti- ja päiväkirjamalli. Mainitut mallit on esitelty perusteellisemmin aikaisemmissa julkaisuissa (esimerkiksi Joutsenlahti, 2010). Edellä kuvattuja malleja on kokeiltu Suomessa peruskoulun, lukion ja yliopiston matematiikan opetuksessa.

## KIELENTÄMISTÄ HYÖDYNTÄVIÄ MATEMATIIKAN TEHTÄVÄTYYPPEJÄ

Perinteisesti yliopistomatematiikan tehtävien ratkaisut on esitetty vain matematiikan symbolikielen avulla eli ne ovat olleet standardimallin mukaisia. Edellä kuvatuista kirjallisen kielentämisen malleista tehtävien kehittelyn pohjaksi valittiin kertomus-, kommentti- ja tiekarttamallit. Näiden mallien sisällä haluttiin saada opiskelija liikkumaan kuvion 1 kielten välillä niin, että ratkaisun ”punainen lanka” etenisi korrektilla tavalla. Toisin sanoen opiskelija joutuisi tekemään koodinvaihtoa matematiikan symbolikielestä luonnolliseen kieleen ja päinvastoin.

Alustavasti hahmottelimme neljä tehtävätyyppiä:

1. **Koodinvaihtotehtävät**: matematiikan symbolikielellä esitetyt ratkaisut (todistukset) kuvataan luonnollisella kielellä (ja päinvastoin). Myös kuviokieli on mahdollinen.

**Esimerkki**: ks. tehtävänasettelu kuviossa 3.

2. **Täydennystehtävät:** ratkaisusta (matematiikan symbolikielellä, luonnollisella kielellä tai kuviokielellä) puuttuu os(i)a, jotka täydennetään.

**Esimerkki:** Täydennystehtävä ja ratkaisusta tehtävä (Petteri Harjulehto)

*Täydennä seuraava ratkaisu; lisää tarvittavat välivaiheet, perustelut ja loppuun yhteenveto. Keksi ratkaisulle tehtävänanto.*

*Ratkaisu:*

$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$

$|y| \leq |x-y| + |x|$

*Tällöin*

$|x| - |y| \leq |x-y|$ *ja* $-|x-y| \leq |x| - |y|$.

3. **Virheen etsintä:** annetusta ratkaisuprosessista etsitään virheelliset (puutteelliset) kohdat ja korjataan (täydennetään) ne.

**Esimerkki**: Koodinvaihto-, virheen etsintä- ja täydennystehtävä (Hanna Sarikka)

*Etsi seuraavasta todistuksesta virhe. Perustele välivaiheet.*

*Todistetaan, että* $4 = 2$. *Olkoon* $a = b = 2$, *jolloin*

$a = b$

$\Leftrightarrow a^2 = ab$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = b(a-b)$

$\Leftrightarrow a + b = b$

$\Leftrightarrow 2 + 2 = 2$

$\Leftrightarrow 4 = 2$

4. **Ratkaisusta tehtävä:** annetaan ratkaisu (matematiikan symbolikielellä, luonnollisella kielellä tai kuviokielellä) ja sen pohjalta pitää laatia mahdollinen tehtävä, jonka ratkaisu on annettu (esim. mitä todistettiin).

**Esimerkki:** Koodinvaihtotehtävä ja ratkaisusta tehtävä (Petteri Harjulehto)

*Lue oheinen todistus ja laadi sille tehtävänanto. Muista kirjoittaa huolellisesti oletukset.*

*Todistus.*

*Merkitään, että* $p = \inf\{f(x) : x \in (a, b)\}$. *Tämä on olemassa,*

*koska funktion arvojoukko on alhaalta rajoitettu. Olkoon* $\varepsilon > 0$. *Tällöin on*

*olemassa luku* $xp \in (a, b)$ *siten, että*

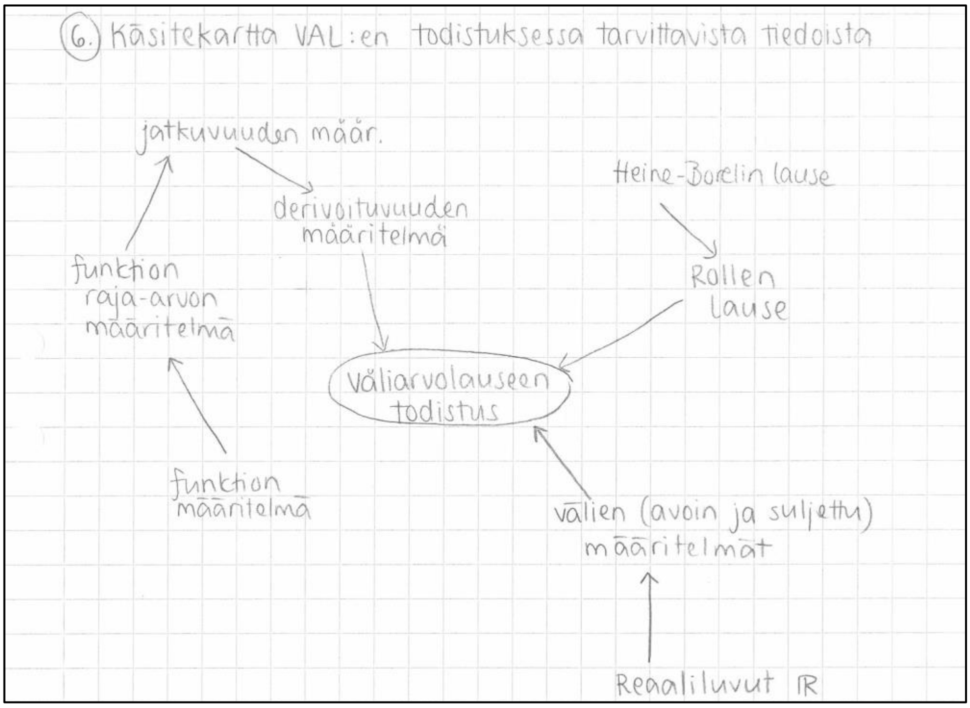
$p \leq f(xp) < p + \varepsilon$.

*Oletusten perusteella pätee, että* $f(x) \leq f(xp)$ *kaikilla* $xp < x < b$. *Tällöin*

*siis pätee, että*

$p \leq f(x) < p + \varepsilon$ *kaikilla* $xp < x < b$.

*Väite seuraa tästä.*




KUVIO 2 Opiskelijan tekemä ratkaisu tehtävänantoon *"Mitä tietoja (määritelmiä, lemmoja ja lauseita) tarvitaan väliarvolauseen todistamiseen? Valitse keskeisimmät ja piirrä käsitekartta."*

Edellä kuvatuista neljästä perustehtävätyypistä voi varioida lukuisia uusia tehtävätyyppejä. Kuviossa 2 on esimerkkinä tehtävä, jossa ratkaisijan pitää hahmottaa tunnetun todistuksen käsitteellinen tausta ja lisäksi kuvata käsitteiden välisiä suhteita. Useissa tehtävissä on mukana koodin vaihto matematiikan symbolikielestä luonnolliseen kieleen tai päinvastoin.

**OPETUSKOKEILUN TOTEUTUS**

Opetuskokeilu toteutettiin syksyllä 2012. Tampereen teknillisessä yliopistossa kielentämiskokeilu tehtiin Insinöörimatematiikan ensimmäisellä kurssilla, joka on kaikille opiskelijoille pakollinen kurssi ja käsittelee matematiikan peruskäsitteitä logiikan ja joukko-opin osalta sekä esittelee funktion, funktion raja-arvon ja derivaatan käsitteet. Kokeiluun osallistuvaan ryhmään kuului 115 opiskelijaa eri tekniikan aloilta, mutta pääasiassa ryhmään kuului rakennustekniikan ja konetekniikan opiskelijoita. Turun yliopistossa kielentämiskokeilu tehtiin matematiikan pääaineopiskelijoiden Analyysi 1 –kurssilla, joka on opiskelijoiden ensimmäinen kurssi yliopistossa. Kurssi käsittelee lukujonon raja-arvoa, funktion raja-arvoa, jatkuvuutta ja derivaattaa. Kielentämiskokeiluun osallistui 48 opiskelijaa.

Molemmissa yliopistoissa kielentämiskokeilu tehtiin ensimmäisen vuoden peruskurssilla. Kokeiluun osallistuneista opiskelijoista suurin osa oli juuri aloittanut opiskelun yliopistossa ja ei ollut vielä tottunut yliopistotason matematiikkaan. Useat opiskelijat tulivat suoraan lukiosta ja heille niin kutsutun ”matematiikkakuilun” ylittäminen lukion matematiikasta yliopiston matematiikkaan oli haastavaa. Siksi osallistuminen opetuskokeiluun ja ”uuden” opiskelumetodin kokeileminen saattoi olla heille hämmentävää.

**Kielentämistehtävä**

Kerro omin sanoin, miten

a) funktion derivaatta kuvaa funktion kulkua ja miksi derivaatan nollakohdat ovat ns. kriittisiä pisteitä

b) ja miten funktion toinen derivaatta liittyy näihin kriittisiin pisteisiin.

Ratkaise lisäksi funktion $f(x) = x^3 - 12x + 1$ kriittiset pisteet ja tutki niiden laatu sekä kulkukaavion että toisen derivaatan avulla perustellen kaikki välivaiheet omin sanoin.

a) Funktion derivaatta kuvatoon funktiossa tangentilla, eli kulmakertoimena jossakin pisteessä. Derivaatan nollakohdat ovat kriittisiä pisteitä, koska kun derivaatta on 0, niin myös funktion kulmakerroin on 0. Tässä pisteessä funktio voi muuttua positiivisesta negatiiviseksi tai toisinpäin. Tätä muutosta voidaan kutsua ns. kriittiseksi pisteeksi.

b) Funktion toisella derivaatalla voidaan kertoa funktion lokaalien ääriarvojen tyyppi, eli onko lokaali minimi vai maksimi ilman derivaatan arvojen laskemista nollakohtien ympäristössä

KUVIO 3 Esimerkki opiskelijan kielentämistehtävän ratkaisusta (osasta).

Sekä TTY:ssa että TY:ssa kokeilussa mukana olleiden kurssien opiskelijat saivat viikoittain laskuharjoitustehtäviensä ohella ratkaistavakseen yhden kielentämistehtävän. Tehtävän tekeminen oli opiskelijoille vapaaehtoista, mutta tehdyt tehtävät kartuttivat harjoituksista saatavien pisteiden määrää. Tehtävät palautettiin kirjallisesti. Kuviossa 3 on esimerkki opiskelijan kielentämistehtävän ratkaisusta, jossa hän on omin sanoin kuvaa annettujen käsitteiden merkitystä.

Tampereen ja Turun kurssien lopuksi molempien kurssien opiskelijoita pyydettiin vastaamaan kielentämistä käsittelevään kyselyyn. Halusimme selvittää mitä opiskelijat ajattelivat kielentämisestä ja kielentämistehtävistä. Seuraavassa luvussa esittelemme kyselyn tuloksia.

## KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN OPISKELIJOIDEN KOKEMANA

Taulukossa 1 on kirjallista kielentämistä koskevien väittämien vastausjakaumat. Väitteissä ei ollut neutraalia vaihtoehtoa (esim. ”en osaa sanoa”), vaan ainoastaan kaksi erimielisyyttä ja kaksi samanmielisyyttä kuvaava vaihtoehtoa.

TAULUKKO 1 Kirjallista kielentämistä koskevien väittämien frekvenssit Tampereen teknillisen yliopiston ja Turun yliopiston opiskelijoiden (N=116) näkemyksiä kirjallisesta kielentämisestä yliopisto-opiskelussa (f on frekvenssi, % on prosenttiosuus)

| | Erimieltä | | Samaa mieltä | |
|---|---|---|---|---|
| Osio | f | % | f | % |
| Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua. | 22 | 19,0 | 94 | 81,0 |
| Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa. | 56 | 48,3 | 60 | 51,7 |
| Kirjoittaminen sanallisesti auttaa minua ymmärtämään tehtävää paremmin. | 19 | 16,4 | 97 | 83,6 |
| Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä. | 13 | 11,2 | 103 | 88,8 |
| Opettajan on helpompi arvioida sellaista tehtävää, jossa on käytetty luonnollista kieltä ja kommentointia. | 18 | 15,5 | 98 | 84,5 |

Kirjallista kielentämistä luonnollisen kielen avulla piti yli 80 % vastaajista (N=116) hyödyllisenä tehtävän ratkaisun, oman ymmärtämisen ja tehtävän arvioimisen kannalta (vrt. Morgan, 2001). Sen sijaan noin puolet vastaajista koki kirjoittamisen olevan helppoa, mutta toinen puoli vaikeaksi (vrt. Triandafillidis & Potari, 2005).

Avoimia kysymyksiä kyselyssä oli kaksi kappaletta: 1. *Kerro vapaasti miten suhtaudut epämuodollisen luonnollisen kielen käyttöön matematiikan tehtävien ratkaisuissa? Miten voisit itse hyödyntää sitä omissa ratkaisuissasi?* ja 2. *Kerro vapaasti mitä sait irti kurssin aikana ratkaisemistasi kielentämistehtävistä?* Kysymysten asettelu oli sellainen, että opiskelijoiden vastaukset sulautuivat toisiinsa eikä kysymysten vastausten välille tullut selvää eroa. Tämän takia vastausten analysoinnissa kysymykset on sulautettu yhteen. Sekä Turun että Tampereen vastaukset on käsitelty samassa. Monet vastaukset sopivat moneen teemaan samanaikaisesti. Esimerkiksi muutama sellainen opiskelija, joka ilmoitti kielentämisen olevan potentiaalinen keino oppia tehtäviä syvällisemmin, ilmoitti seuraavassa lauseessa kielentämistehtävien olleen täysin turhia. Tällaisiin vastausten ristiriitaisuuksiin prosenttien laskemisessa ei ole puututtu vaan vastaus laskettiin molempiin teemoihin mukaan.

Taulukossa 2 on esitetty avoimien kysymysten vastauksista sisällönanalyysin avulla esille nousseita teemoja. Useimmin esiintynyt teema oli, että *kielentämistehtävien tekeminen johtaa käsitteiden sisäistämiseen/ymmärtämiseen*. Selkeästi harvemmin esiintyi vastauksissa teemoja (ks. taulukko 2): *kielentämistehtävä pakottaa oppimaan, myöhempi hyöty opiskelussa, tehtävien vaikeus, opiskelijoiden myöntämä laiskuus ja/tai symbolikielen käyttö on parempaa matematiikkaa kuin luonnollisen kielen.*

TAULUKKO 2 Opiskelijoiden avointen kysymysten vastausten (N=163) teemat ja niiden suhteelliset osuudet

| Teema | Vastausten prosenttiosuus (%) |
|---|---|
| Kielentämistehtävien tekeminen johtaa käsitteiden sisäistämiseen/ymmärtämiseen | 75,5 |
| Kielentämistehtävä pakottaa oppimaan | 16,0 |
| Myöhempi hyöty opiskeluissa | 11,7 |
| Tehtävien vaikeus | 11,7 |
| Opiskelijoiden myöntämä laiskuus | 10,4 |
| Symbolikielen käyttö on parempaa matematiikkaa kuin luonnollisen kielen käyttö | 9,2 |
| Kielentämistehtävät ovat turhia | 5,5 |

Mielenkiintoista avointen kysymysten vastauksista oli huomata se, että kielentäminen oli valtaosalle opiskelijoista täysin vieras käsite. Tähän osaltaan vaikutti uuden sanan ”kielentäminen” käyttäminen, mutta muutenkin opiskelijoiden vastauksista kävi ilmi, että luonnollisen ja matematiikan kielen sekoittaminen matematiikan tehtävien ratkaisuissa oli vierasta. Muutamat opiskelijat ilmoittivat, ettei lukiossa saanut käyttää luonnollista kieltä matematiikan tehtävien ratkaisuissa lainkaan. Useat vastaajat tunsivat luonnollisen kielen käyttämisen olevan haastavaa vaikkakin hyödyllistä (vrt. taulukko 1).

Opiskelijoiden vastauksissa toistui se, että tehtävän selittäminen ja kommentointi luonnollisella kielellä auttoi ymmärtämään asiaa syvällisemmin ja toisaalta taito selittää ratkaisu luonnollisella kielellä (omin sanoin) mittasi asian todellista ymmärtämistä. Tämä taito nähtiin hyvänä asiana. Sillä matematiikan opiskelussa ei riitä, että opettelee ulkoa matemaattiset kaavat ja algoritmit tai harjoittelee esimerkkitehtävien mallien avulla, vaan opiskeltavien asioiden merkityksiä on ymmärrettävä erilaisissa konteksteissa.. Hyvin kommentoitua tehtävänratkaisua on helpompi lukea myöhemminkin ja ratkaisumallin ymmärtäminen helpottuu. Tämän takia monet opiskelijat aikoivat hyödyntää kielentämistä tulevaisuudessakin – esimerkiksi tenttiin kerrattaessa. Erään opiskelijan kommentti: *”Kielentämistehtävistä oppi paljon, sillä piti ajatella mitä laskussa oikeasti tehdään ja miten se voidaan selittää luonnollisella kielellä. Näissä tehtävissä ajatteli myös paljon enemmän kuin normaaleissa laskutehtävissä.”*

Osassa vastauksia luonnollisen kielen käyttäminen nähtiin eräänlaisena primitiivisenä alkuaskeleena matematiikan tehtävän ratkaisussa. Luonnollisen kielen käyttämisellä nähtiinkin olevan lähinnä välinearvo syvemmän ymmärtämisen saavuttamiseen ja pelkän matematiikan symbolikielen sujuvaan käyttämiseen: mitä vähemmän tarvitsee selitellä välivaiheita luonnollisella kielellä sitä paremmin osaa matematiikkaa. Näissä vastauksissa matematiikka nähdään täysin omana kielenään. Matematiikkaa ei osaa kunnolla, jos ei osaa ilmaista itseään ainoastaan matematiikan symbolikielen avulla. Luonnollista kieltä ei siis nähty matematiikan kielen osana. Jos luonnollinen kieli olisi esitelty opiskelijoille matematiikan kielen eräänä osa-alueena kuvio- ja symbolikielen rinnalla (vrt. kuvio 1), olisivat mielipiteet voineet olla erilaisia. Nyt kielentämistehtävät oli eroteltu muista tehtävistä hyvin selkeästi, mikä osaltaan erotti sen perinteisistä matematiikan tehtävistä. Muun muassa tästä johtuen sellaisille opiskelijoille, joille matematiikan symbolikieli on helppoa, kielentämisestä ei ollut hyötyä. Heille kielentämistehtävät tuntuivat turhilta ja aikaa vieviltä.

Monet opiskelijat käyttivät sanaa ”pakko” (ks. taulukko 2), kun he kuvailivat kielentämistehtävistä saatuja hyötyjä. Oli *pakko opetella*, *pakko ymmärtää* ja *pakko* *käyttää aikaa*. Kielentämistehtävät pakottivat opiskelijat avaamaan ajatuksiaan ja kertomaan, mitä ratkaisussa tapahtuu. Heidän oli *pakko* asettua lukijan ja opettajan asemaa. Heidän oli *pakko* ajatella opittavaa asiaa toisesta näkökulmasta. Tämä pakottaminen oli opiskelijoiden mielestä lopulta hyvä asia ja auttoi heitä oppimaan. Eräs opiskelija kommentoi kielentämistä näin: *" Joutui pohtimaan, kuinka selittää itsestään selvänä pidettyjä asioita. Samalla oli pakko ymmärtää käsiteltävän tehtävän asiat myös teoreettisella tasolla, pelkkä ulkoa tekeminen ei auttanut."*

Kokonaisuudessaan opiskelijoiden palaute oli hyvin positiivista. Taulukoista 1 ja 2 on nähtävissä, että yli kolme neljäsosassa vastauksia nähtiin kirjallisen kielentämisen auttavan opiskelijoita ymmärtämään opittavaa asiaa paremmin. Kielentämistehtävät olivat heidän mielestään hyödyllisiä, joskin vaivaloisia. Negatiivista palautetta tuli lähinnä siitä, että ei ymmärretty tehtävänantoa tai tehtävä oli liian vaikea. Joidenkin opiskelijoiden mielestä kielentäminen luonnollisen kielen avulla oli turhaa, mutta valtaosa näki metodin auttavan ymmärtämään vaikeita asiakokonaisuuksia opiskelussa. Tosin motivaation riittäminen kaiken sen vaivan eteen, mitä syvällinen oppiminen tarvitsisi, on asia erikseen. Erään opiskelijan kommentti: *"Luonnollisen kielen käytöllä voi selventää muuten ehkä epäselviksi jääviä vaiheita. Sen käytön avulla voisin myöhemmin tajuta helpommin mitä olen ajatellut tehtävää ratkaistessani."*

## KESKUSTELUA

Kenelle kielentämistehtävistä on hyötyä? Monien opiskelijoiden mielestä kielentämistehtävät mittasivat asian todellista ymmärtämistä ja auttoivat sisäistämään opittavaa asiaa paremmin, kun oli "pakko" selvittää itselleen mistä oikeasti on kyse. Kielentämistehtävät siis kannustavat syvälliseen oppimiseen – asian todelliseen sisäistämiseen. Suoritusorientoituneelle opiskelijalle kielentämistehtävä voi puolestaan olla enemmänkin oppimista haittaava, koska ei riitä, että opettelee tietyn ratkaisumallin ulkoa. Kielentämisen vaatiminen tällaiselta opiskelijalta voi sekoittaa ja hämmentää. Opettajalle omin sanoin ilmaistut tehtävien ratkaisut ovat selkeitä indikaattoreita siitä, miten opiskelijat ovat ymmärtäneet keskeiset käsitteet ja algoritmit. Siksi kirjallinen kielentäminen tuo tärkeän lisän opiskelijoiden arviointiin ja toisaalta opetuksen suunnitteluun.

Kielentämistehtäviä pitäisi ratkaista jo peruskoulu- ja lukiovaiheessa. Esittelemämme tehtävätyypit sopisivat mukailtuna mielestämme myös yleissivistävän koulun harjoitustehtäviin. Erityisesti lukio-opinnoissa ja ylioppilaskirjoituksissa sallittujen CAS-laskinten (ja jatkossa ehkä tietokoneympäristöt) vaativat uudenlaisia tehtäviä ja toisaalta uudenlaista ratkaisujen dokumentointikulttuuria, jotta niiden käyttö on mielekästä. Voisiko kirjallisen kielentämisen ajattelumalli olla eräs kokeilemisen arvoinen kehittämissuunta? Silloin se olisi valmiiksi tuttu tapa toimia opiskelijoille yliopistossakin.

**LÄHTEET**

Edelson, D. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *The Journal of the Learning Sciences 11*(1), 105-121.

Chronaki, A., & Christiansen, I. (2005). Challenging perspectives on mathematics classroom communication: from representations to context, interactions, and politics. Teoksessa A. Chronaki & I. Christiansen (toim.), *Challenging perspectives on mathematics classroom communication* (s. 3–48). Greenwich, Connecticut: IAP-Information Age.

Høines, M. (2000). *Matematik som språk. Verksamhetsteoretiska perspektiv*. Kristianstad: Liber AB.

Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa M. Asikainen, P. E. Hirvonen & K. Sormunen (toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa* (s. 3–15). Joensuu: University of Eastern Finland (Reports and Studies in Education, Humanities, and Theology 1).

Joutsenlahti, J., & Kulju, P. (2010). Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (toim.) *Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009. Tampere*: Tampereen yliopisto, 77–89. (Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja. A 31).

Joutsenlahti, J., & Rättyä, K. (2011). Matematiikan kielentämisen tutkimuksen lähtökohtia kielen näkökulmasta Sanan lasku -projektissa. Teoksessa H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (toim.) *Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta: Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Tampereella 14.–15.10.2010. Tampere*: Tampereen yliopisto, Kasvatustieteiden yksikkö, 171–187.

Kangas, J., Silius, K., Joutsenlahti, J., Pohjolainen, S., & Miilumäki, T. (2011). Matematiikkaa omin sanoin: kielentämisen käyttö matematiikan korkeakouluopetuksessa ja sen tukena. Teoksessa H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (toim.) *Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta: Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Tampereella 14.–15.10.2010* (s. 188–196). Tampere: Tampereen yliopisto, Kasvatustieteiden yksikkö.

Lemke, J. (1997). Teaching all the languages of science: words, symbols, images, and actions. *Aprender a Hablar Ciencia*. Barcelona: Paidos. [http://www-personal.umich.edu/~jaylemke/papers/barcelon.htm] (Luettu 24.6.2013)

Lemke J. (2002) Mathematics in the Middle: Measure, Picture, Gesture, Sign, and Word. Teoksessa M. Anderson, A. Saenz-Ludlow, S. Zellweger & V. Cifarelli (toim.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (s. 215–234). Ottawa: Legas Publishing.

Morgan, C. (2001). The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. Teoksessa P. Gates (toim.), *Issues in mathematics teaching* (s. 232–244). London: Routledge Falmer.

Orpana, T. (1993). Kielen perusluonne, lapsen kielellinen kehitys ja äidinkielen opetus. Teoksessa T. Orpana & M.-L. Pynnönen & M.-L. Koli (toim.), *Luokanopettaja äidinkielenopettajana* (s. 1–15). Tampere: Tampereen yliopisto.

Pohjolainen S., Raassina H., Silius K., Huikkola M., & Turunen E. (2006). *TTY:n insinöörimatematiikan opiskelijoiden asenteet, taidot ja opetuksen kehittäminen*. Tampere: Tampereen teknillinen yliopisto, Matematiikan laitos. Tutkimusraportti 84.

Silius, K., Pohjolainen, S., Kangas, J., Miilumäki, T., & Joutsenlahti, J. (2011a). What can be done to bridge the competency gap between upper-secondary school and university mathematics? Teoksessa *Education Engineering (EDUCON), 2011 IEEE*, 428-436.

Silius, K., Pohjolainen, S., Kangas, J., Miilumäki T., & Joutsenlahti, J. (2011b). Korkeakoulumatematiikka teekkarin kompastuskivenä? Teoksessa M. Mäkinen ym. (toim.), *Korkeajännityksiä: Kohti osallisuutta luovaa korkeakoulutusta* (s. 242–265). Tampere: Tampere University Press.

Sternberg, R. (1996). What is mathematical thinking? Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.), *The nature of mathematical thinking*(s. 303–318). Mahwah (NJ): Erlbaum.

Triandafillidis T. A., & Potari D. (2005). Integrating different representational media in geometry classrooms. Teoksessa A. Chronaki & I. Christiansen (toim.), *Challenging perspectives on mathematics classroom communication* (s. 79–108). Greenwich, Connecticut : IAP-Information Age.

# VALTAKUNNALLISEN KOKEEN KUUDENNEN LUOKAN ONGELMANRATKAISUTEHTÄVIEN JA OPPILAIDEN RATKAISUPROSESSIEN ANALYSOINTIA

Henry Leppäaho[1], Harry Silfverberg[2] ja Jorma Joutsenlahti[3]

[1]Jyväskylän yliopisto, [2]Turun yliopisto, [3]Tampereen yliopisto

*Opetushallituksen tutkimuksessa (Niemi & Metsämuuronen, 2010) kerättiin vuonna 2008 laaja ja monipuolinen aineisto (N = 5560) kuudennen luokan oppilaiden vastauksista matematiikan koulukokeiden tyyppisiin tehtäviin. Saatujen tulosten kannalta erityistä huolta herättivät oppilaiden ongelmanratkaisutehtävien heikohkot tulokset. Tähän asti edellä mainittua aineistoa on tarkasteltu lähinnä kvantitatiivisin menetelmin. Tässä tutkimuksessamme pyrimme tutkimuksen osa-aineiston (N = 600) ja kvalitatiivisten menetelmien avulla antamaan aiempaa yksityiskohtaisemman kuvan oppilaiden ratkaisuprosesseista kokeen neljässä ongelmanratkaisutehtävässä. Tarkastelemme esimerkkien kautta strategioiden vaihtelua eri tehtävissä ja arvioimme tehtävien soveltuvuutta ongelmanratkaisun evaluointiin.*

## JOHDANTO

Laajalla otannalla tehdyt valtakunnalliset kokeet ongelmanratkaisutehtävineen antavat parhaimmillaan luotettavaa tietoa oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen yleistasosta. Opetushallituksen (OPH) vuonna 2008 keräämässä aineistossa (Niemi & Metsämuuronen, 2010; N = 5560) ongelmanratkaisutaitoa vaativien kahden viimeisen tehtävän ratkaisuprosentit jäivät huolestuttavan heikoiksi. Esimerkiksi toiseksi viimeisessä tehtävässä ratkaisuprosentti oli alle 50 % ja viimeisessä tehtävässä alle 17 % (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010, 140). Voi olla, että oppilaat kokivat vaikeina tehtävät, jonka tyyppisiä he eivät kenties olleet aikaisemmin kohdanneet, vaikka heillä olisikin ollut kaikki tarvittava tieto ja taito ratkaisun löytämiseksi. Toisaalta tehtävät olivat kokeen lopussa, joten ehkä kaikki oppilaat eivät ennättäneet pohtia tehtäviä tarpeeksi. Tehtävätyypeistä tuottamistehtävät ja sisältöalueista geometrian tehtävät osattiin heikoiten (Niemi, 2010, 52-54).

Artikkelin tarkoituksena on luoda alustava katsaus 6. luokkalaisten valtakunnallisen kokeen matematiikan ongelmanratkaisutaitoa arvioiviin tehtäviin ja esitellä aineistosta valikoitujen esimerkkien avulla oppilaiden ongelmanratkaisuprosessien piirteitä edellä mainituissa tehtävissä. Tutkimme oppilaiden tekemien merkintöjen perusteella heidän valitsemiaan ongelmanratkaisutapoja ja tehtävien suorituksessa mahdollisesti ilmenneitä vaikeuksia sekä virhepäätelmiä. Etsimme siis laadullisia eroja, jotka voivat selittää sitä, miksi ongelmanratkaisutehtävien keskimääräinen suoritustaso alkuperäisessä OPH:n kartoituksessa jäi niin alhaiseksi. Tällainen tieto osaltaan auttaa suunnittelemaan korjaavia toimenpiteitä asiantilan parantamiseksi.

Tarkemmin sanoen artikkelissa: 1) Kuvaamme, millaisilla tehtävillä 6.-luokkalaisten oppilaiden matemaattista ongelmanratkaisutaitoa arvioitiin. 2) Arvioimme, missä määrin mainitut tehtävät täyttivät hyville ongelmanratkaisutaitoa mittaaville tehtäville jäljempänä esitettävät kriteerit. 3) Esittelemme esimerkkejä siitä, millaista variaatiota oppilaiden kirjallisissa ratkaisuprosesseissa esiintyi ja millaiseen argumentaatioon ratkaisuprosessien tulkintamme perustui.

## ONGELMANRATKAISUTAITO JA -STRATEGIAT

Matematiikan ja matemaattisen ongelmanratkaisutaidon välillä on tiivis yhteys, jota esimerkiksi Halmos (1980) kuvaa toteamalla, että ongelmien ratkaiseminen on ”matematiikan sydän”. Matematiikassa *ongelma* määritellään tehtävätilanteeksi, jonka ratkaisemiseksi yksilö joutuu yhdistelemään hänelle tuttuja tietoja uudella tavalla. Jos hän voi heti tunnistaa tehtävän suorittamiseen tarvittavat toimenpiteet, on tehtävä hänelle rutiinitehtävä – eikä enää ongelma. Tehtävän ongelmallisuus on siis aina sidottu henkilöön ja aikaan. (Kantowski, 1980, 195; Pehkonen & Zimmermann, 1990, 39–40.) Pedagogisessa mielessä ongelman on aiheutettava yksilössä tietoista ja päämäärähakuista toimintaa, joka tähtää tavoiteltavaan tulokseen ilman välittömästi havaittavia keinoja (Haapasalo, 1985, 32). Ongelman ja tilanteen on siis motivoitava yksilöä, jotta hän aloittaa *matemaattisen ongelmanratkaisun*. Lester ja Kehle (2003, 510) määrittelevät matemaattisen ongelmanratkaisun ajatteluprosessiksi. Tässä prosessissa ratkaisija pyrkii ymmärtämään ongelmatilannetta käyttämällä matemaattista tietoansa ja tekee yrityksiä hankkiakseen uutta tietoa tästä tilanteesta, kunnes hän ratkaisee epätietoisuuden.

Yksilön ongelmanratkaisutaito liittyy keskeisesti matemaattisen osaamisen *strategiseen kompetenssiin* samoin kuin matemaattiseen ajatteluun (esim. Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Stanic & Kilpatrick, 1988; Schoenfeld, 1985). Strateginen kompetenssi viittaa kykyyn muotoilla, ratkaista ja esittää matemaattisia ongelmia. (Kilpatrick ym., 2001, 124). Tämä tulee esille erityisesti ongelmanratkaisutehtävissä, joissa tehtävän ratkaisuun tarvittavien strategioiden valintaa ja hallintaa ohjaavat opiskelijan metakognitiot. Ne muotoutuvat opiskelijan aikaisemmista ongelmanratkaisutehtävistä saamien kokemusten mukaan. *Mukautuvalla päättelyllä* tarkoitetaan kykyä loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selittämiseen ja todistamiseen (Kilpatrick ym., 2001, 16). Oppilaan mukautuva päättely tulee esille muun muassa todistamis- ja konstruointitehtävissä sekä opiskelijan kyvyssä selittää esimerkiksi avoimien tehtävien ratkaisuja. Oppilaan matemaattista ajattelua voidaan havainnoida koulussa pääasiassa kahden prosessin, ongelmanratkaisun ja käsitteen muodostumisen, avulla (Stanic & Kilpatrick, 1988; Joutsenlahti, 2005). Edellä mainittuja prosesseja on pidetty oppijan kulloisenkin matemaattisen ajattelun tason keskeisinä tunnusmerkkeinä. Matemaattinen ongelmanratkaisu liittyy kiinteästi matemaattiseen ajatteluun (mm. *strategic competence* Kilpatrick ym., 2001) ja toisaalta ongelmaratkaisuprosesseja voidaan käyttää pedagogisena lähestymistapana uusien matemaattisten käsitteiden opiskelussa, mutta näiden yhteys ei ole suoraviivaisesti ”kaksisuuntainen”: ongelmanratkaisun ei tarvitse aina liittyä käsitteenmuodostukseen.

Ongelmanratkaisutaidolla tarkoitetaan yksilön kykyä ratkaista ongelmia, joihin tarvitaan matemaattisen tiedon soveltamista erilaisia ratkaisumalleja ja strategioita monipuolisesti hyväksi käyttäen. Leppäahon (2007) mukaan matemaattinen ongelmanratkaisutaito voidaan jaotella seuraaviin osa-alueisiin: 1) motivaatio ja muut affektiiviset tekijät, 2) luku- ja kirjoitustaito, 3) matemaattiset taidot, 4) taito käyttää ongelmanratkaisustrategioita ja heuristiikkoja, 5) valitsemisen taito (selektiivisyys), sekä 6) taito yhdistää ongelman tulkinta kokonaisratkaisuksi. Mitä useampia valmiita ongelmaan sovellettavissa olevia malleja ja strategioita henkilö hallitsee, sitä taitavampi ongelmanratkaisija hän on. Matemaattista ongelmanratkaisutaitoa voidaan kehittää harjoittamalla siihen kuuluvia osataitoalueita. (Leppäaho, 2007, 50–51.)

Ongelmanratkaisuun tarvitaan *ongelmanratkaisustrategioita*. Näitä ovat esimerkiksi: ongelman jakaminen pienempiin osiin, takaperin työskentely, yleistäminen ja testaus, algebralliset menetelmät, ongelman vertaaminen samantyyppisiin ongelmiin, ongelman yksinkertaistaminen, järjestelmällinen listaus, apupiirroksen tekeminen ongelmasta, kaavan etsiminen ongelmasta, kokeilu ja taulukointi (esim. Hammouri, 2003; Schoenfeld, 1985).

Millainen olisi sitten hyvä tehtävä ongelmanratkaisutaidon arvioinnin kannalta? Tässä tutkimuksessa määrittelimme edellä mainitun kirjallisuuden perusteella hyvän ongelmanratkaisutehtävän seuraavasti:

- tehtävä motivoi ja houkuttelee oppilasta ratkaisuyritykseen;
- ongelma itsessään on uskottava;
- tehtävän annon tulee olla selkeä ja yksiselitteinen, vaikka ratkaisuja olisikin useita erilaisia;
- ratkaisijan tulisi päästä soveltamaan ongelmanratkaisutaitojen edellä mainittuja osa-alueita 2-6 monipuolisesti;
- yhden taitoalueen yksittäisen tiedon puute ei saisi estää tehtävän ratkaisuyritystä kokonaan.

Yhtenäisen, kaiken kattavan teorian laatiminen ongelmanratkaisutehtävien arviointiin on mahdotonta, koska ongelmatehtävän vaativuus on ratkaisija- ja tilannesidonnaista (ks. esim. edellä oleva ongelman määritelmä). Matemaattisten ongelmien ratkaisuprosessin arviointiin on kuitenkin kehitetty erilaisia lähestymistapoja. Tutkimuskäytössä tavanomainen metodi on pyrkiä saattamaan ongelmanratkaisuun sisältyvä kokeilu-, valinta- ja päätöksentekoprosessi näkyväksi ns. ääneen ajattelulla (Montague & Applegate 1993). Metodin kirjallisessa vastineessa ”think-aloud on paper” ongelmanratkaisijaa pyydetään mahdollisimman tarkoin kirjaamaan ajattelunsa paperille. Koulumatematiikan ongelmien ratkaisujen pisteittämiseen on kehitetty myös ongelmanratkaisuprosessin edistymistä kuvaavia taksonomioita perustuen esimerkiksi SOLO- (vrt. Collis ym., 1986) ja Wilsonin taksonomioihin (Charles, Dester & O’ Daffer, 1987; Szetela & Nicol, 1992).

Tutkimuksen perustuessa yksinomaan tuotettuun kirjalliseen aineistoon, kuten tässä, tutkija pääsee perille tutkittavansa ajattelusta vain siltä osin, kuinka selkeästi hän on esittänyt ongelmanratkaisuprosessinsa vaiheet ja kielentänyt tekemänsä ratkaisut. Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan tässä yhteydessä matemaattisen ajattelun ilmaisemista luonnollisen kielen, kuviokielen tai matemaattisten merkintöjen avulla kirjallisesti (vrt. Joutsenlahti, 2009). Joistakin tuloksista voidaan sellaisenaan päätellä taustalla olleet virhepäätelmät.

## MENETELMÄT

Tutkimusluvan saatuamme noudimme OPH:n arkistosta valtakunnallisen kokeen vastauspapereista 600 kappaleen otoksemme. Koska alkuperäinen aineisto oli jaoteltu lääneittäin ja kouluittain, pystyimme valikoimaan otoksemme alueellisesti samassa suhteessa alkuperäiseen aineistoon verrattuna. Kukin kolmesta tutkijasta otti aluksi noin 200 vastauspaperia tarkempaan tarkasteluun. Sähköpostitse ja puhelimitse tapahtuneen yhteydenpidon lisäksi, kokoonnuimme yhdessä arviomaan aineistosta tekemiä havaintojamme.

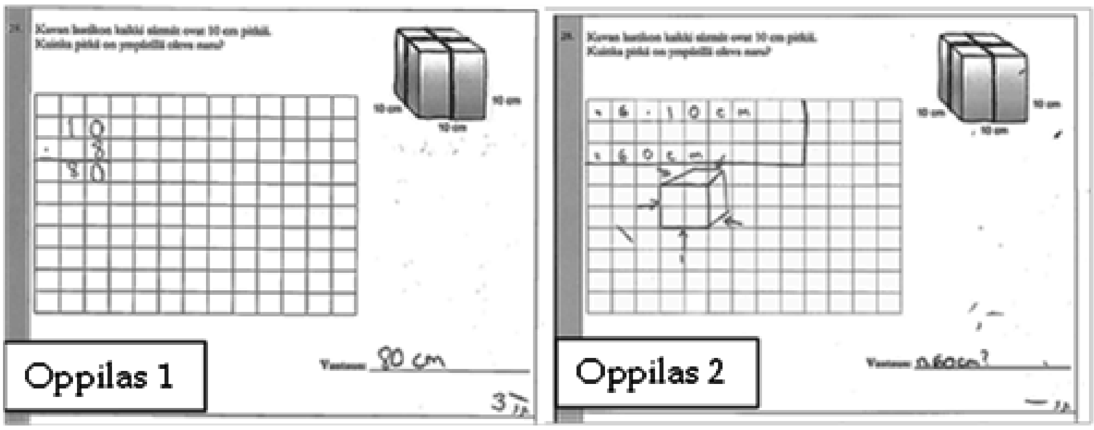
Tehtäväanalyysissamme keskityimme neljään ongelmanratkaisutaitojen mittareiksi tarkoitettuun tehtävään: 28, 29, 30 ja 31. Analyysimme pohjana toimivat edellisessä kappaleessa mainitut kriteerit hyvälle ongelmanratkaisutehtävälle. Motivaation ja muiden affektiivisten tekijöiden todellista vaikutusta ja tehtävien uskottavuutta emme pysty arvioimaan pelkkien vastauspaperien perusteella. Tehtävän kiinnostavuutta ja innostavuutta arvioimme vain tehtävän muotoilun osalta luottaen omaan asiantuntemukseemme ja kokemukseemme siitä, millaiset tehtävät motivoivat tämän ikäisiä oppilaita. Oppilaiden kirjallisten vastausten perusteella pyrimme selvittämään oppilaiden ratkaisuprosessia ja matemaattisen ajattelun kulkua.

## TULOKSET

Esittelemme aluksi tarkastelemamme koetehtävät, joilla 6.-luokkalaisten oppilaiden matemaattista ongelmanratkaisutaitoa arvioitiin. Samassa yhteydessä kuvaamme esimerkkitapausten avulla, kuinka oppilaiden kirjalliset ratkaisuprosessit etenivät kokeen neljässä ongelmanratkaisutehtävässä. Esimerkit on valittu siten, että ne edustaisivat mahdollisimman hyvin otoksesta tekemiämme havaintoja. Tämän luvun lopussa olevassa taulukossa 1 on esitetty yhteenveto kokeessa käytettyjen tehtävien sijoittumisesta ongelmanratkaisutaidon osa-alueille.

*Tehtävä 28: Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10cm pitkiä. Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?*

Kertolaskun perusteella Oppilas 1 (kuvio 1) hahmotti tehtävätilanteen oikein: naru kulkee kertaalleen kunkin laatikon (kuution) sivutahkon yli ja kaksi kertaa kannen ja pohjan yli. Piilossa olevat tahkot on siten ymmärretty vastaavan näkyvissä olevia vastakkaisia tahkoja. Laskutoimitus 8x10 on oikein ja vastaukseen on lisätty yksikkö. Oppilas 1 on saanut niukasta, mutta oikeasta ratkaisuesityksestään täydet pisteet. Oppilas 2 (kuvio 1) piirtää apupiirroksen, mutta ei tarkastele huolella narun kulkua laatikon sivutahkojen. Hän hahmottaa tehtävätilanteen väärin ajatellessaan, että nauru kiertää vain kertaalleen laatikon kuuden sivun yli ja ratkaisee tehtävän kertomalla 6x10 *cm*. Itse kertolasku on suoritettu oikein yksiköiden kanssa, mutta siitä huolimatta tulos on arvioitu 0 pisteen arvoiseksi.

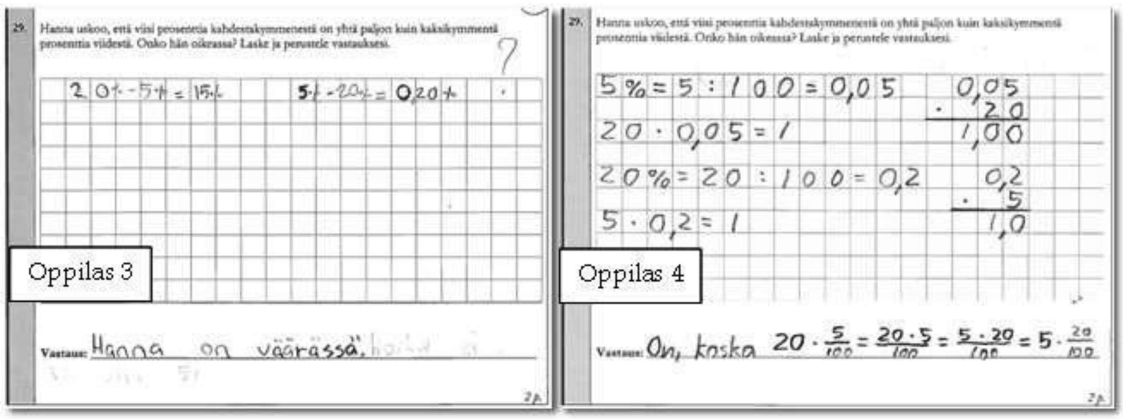



KUVIO 1 Kahden oppilaan vastaukset tehtävään 28

Tehtävänanto on yksiselitteinen eikä yksittäisen tiedon puute estä ratkaisuyritystä. Oppilaan on kyettävä päättelemään kuvasta, että naru kulkee kertaalleen kahden kuvassa piilossa olevan sivun takaa ja kahteen kertaan laatikon pohjan yli. Tehtävätilanne on osittain epätodellinen eikä välttämättä vaikuta uskottavalta tarkalle havainnoijalle. Oppilas 2 pohtinee oikeutetusti merkintöjen *"n ja ?"* perusteella: *Kuinkahan naru solmitaan, jos solmua varten ei ole yhtään narua jäljellä?* Tosiasiassa tehtävä ei vaadi juurikaan 6.-luokkalaiselta ongelmanratkaisutaitoa, vaan sen pitäisi olla heille rutiinitehtävä, sillä kuution tunnistaminen, yhteen ja vähennyslaskutaidot ovat tavoitteena jo 2. luokalla (Opetushallitus 2004, 159-160). Näiden taitojen avulla tehtävä on ratkaistavissa, kunhan oppilas vain hahmottaa miten naru on kierretty laatikon ympärille.

*Tehtävä 29: Hanna uskoo, että viisi prosenttia kahdestakymmenestä on yhtä paljon kuin kaksikymmentä prosenttia viidestä. Onko hän oikeassa?*

Oppilaan 3 (kuvio 2) piirtämä iso kysymysmerkki viestii, että prosenttikäsite ja prosenttilasku ovat hänelle epäselviä. Tämä johtaa tehtävänannossa annettujen lukujen summittaiseen vähentelyyn ja virheelliseen tulokseen.



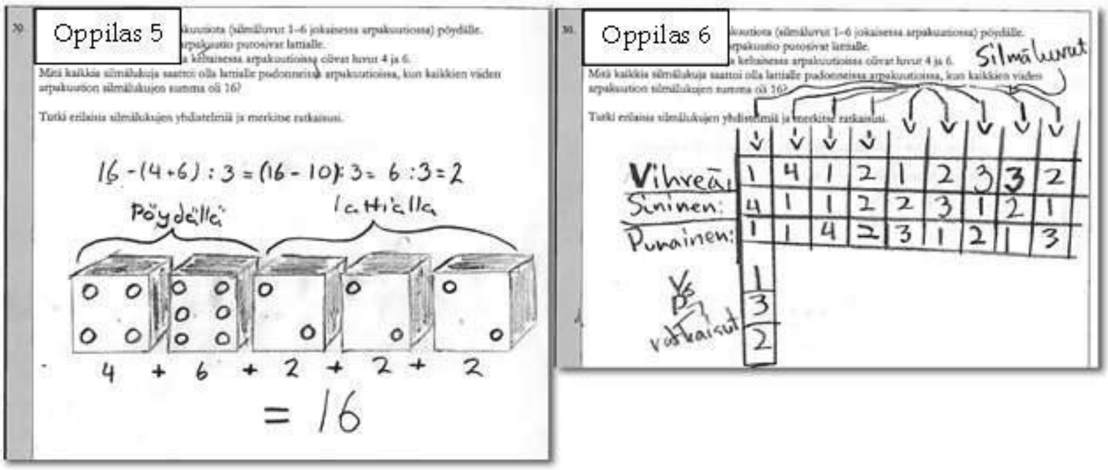

KUVIO 2 Kahden oppilaan vastaukset tehtävään 29

Tehtävä 29 mittaakin tässä tilanteessa enemmän oppilaan prosenttilaskun hallintaa kuin ongelmanratkaisua. Oppilas 4 (kuvio 2) hallitsee tehtävän vaatiman matemaattisen taidon, prosenttilaskun ja saa ratkaisustaan täydet 2 pistettä. Huomattakoon, että vastausrivin esityksessä on jo selvästi matemaattisen todistamisen aineksia!

Tehtävänanto on yksiselitteinen, mutta yksittäisen tiedon tai taidon puute estää ratkaisuyrityksen. Tehtävä 29 on ns. rutiinilasku, jos oppilas osaa prosenttilaskun ja kykenee vertaamaan kahta tulosta. Tehtävä 29 ei siis toimi kovin hyvin ongelmanratkaisutaidon mittarina, vaikka se sisältääkin luetun ymmärtämistä ja matemaattisten taitojen hallintaa (ks. taulukko 1).

*Tehtävä: 30. Ida heitti viisi eriväristä arpakuutiota (silmäluvut 1-6 jokaisessa arpakuutiossa) pöydälle. Vihreä, sininen ja punainen arpakuutio putosivat lattialle. Pöydälle jääneissä mustassa ja keltaisessa arpakuutiossa olivat luvut 4 ja 6. Mitä kaikkia silmälukuja saattoi olla lattialle pudonneissa arpakuutioissa, kun kaikkien viiden arpakuution silmälukujen summa oli 16? Tutki erilaisia silmälukujen yhdistelmiä ja merkitse ratkaisusi.*

Oppilas 5 (kuvio 3) on soveltanut ratkaisussaan matemaattisia taitojaan muodostaen ongelmasta lausekkeen. Lisäksi hän on laatinut selkeän apupiirroksen ja käyttää siinä luonnollista ja numeerista kieltä. Oppilas 5 on havainnut, että kahden pöydällä olevan arpakuution yhteenlaskettu silmäluku on 10. Hän on päätellyt, että lattialla olevien arpakuutioiden silmälukujen summa täytyy olla 6. Matemaattinen ajattelu ei kuitenkaan ole Oppilaalla 5 kovin luovaa, vaan hän tyytyy vain yhteen ratkaisuun, saaden yhden pisteen kolmesta, eikä edes yritä kartoittaa muita ratkaisuja merkintöjensä perusteella. Oppilas 6 on käyttänyt ratkaisustrategiana lattialla olevien kolmen arpakuution silmälukuyhdistelmien selvittämiseen taulukointia (kuvio 3). Hän on löytänyt tehtävän vaatimukset täyttävät 10 erilaista vaihtoehtoa, mikä on hieno suoritus 6.-luokkalaiselta. Oppilaan 6 vastaus on oiva osoitus taulukoinnin tehokkuudesta ratkaisustrategiana ja oppilas ansaitseekin ratkaisustaan täydet pisteet. Vastauksen verbaalinen laatu jää sen sijaan niukaksi, sillä pöydällä olevien arpakuutioiden tilaa ei mainita mitenkään eikä ratkaisujen lukumäärää ilmoiteta erikseen.




KUVIO 3 Kahden oppilaan vastaukset tehtävään 30

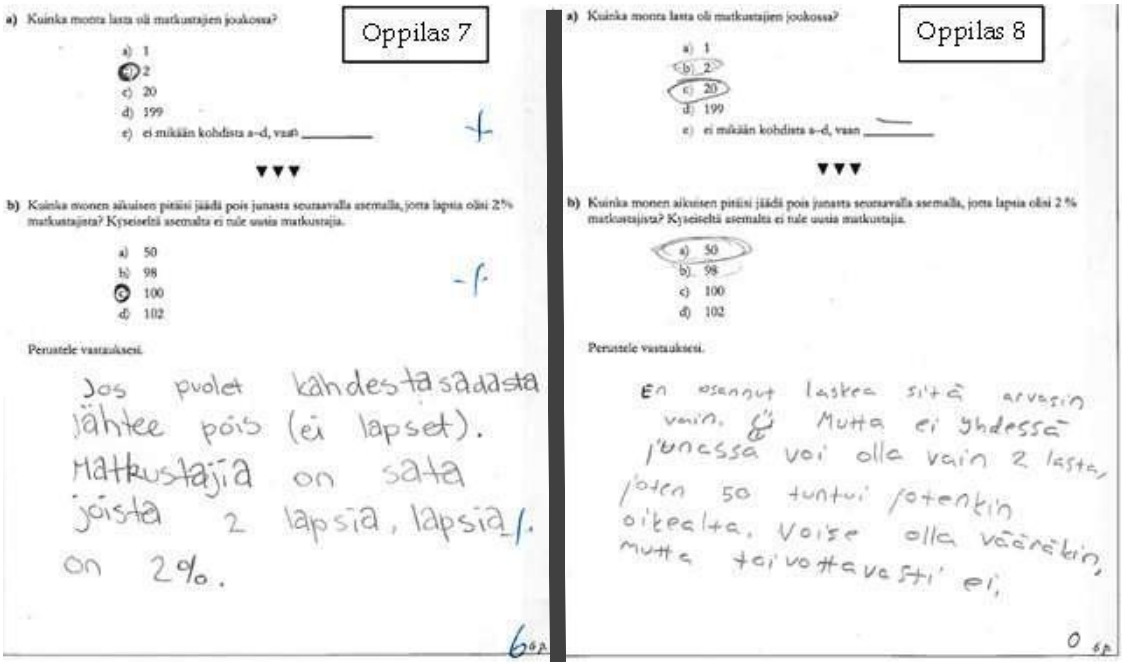
Tehtävä 30 on esimerkki hyvästä ongelmanratkaisutehtävästä. Tehtävänanto on yksiselitteinen eikä yksittäisen tiedon puute estä ratkaisuyritystä. Lisäksi ratkaisussa tarvitaan kaikkia ongelmanratkaisutaidon osa-alueita (ks. edempänä oleva taulukko 1). Tehtävä vaatii oppilaalta tehtävään tutustumista ja sen tutkimista. Muista tehtävistä poiketen oppilas voi valita ratkaisustrategiakseen muunkin tavan kuin taulukoinnin. Tehtävän konteksti on oppilaalle tuttu, sillä jokainen alakoululainen on varmasti pelannut lautapelejä. Uskoaksemme tehtävä mielletään ennemminkin matemaattiseksi aivojumpaksi kuin varsinaiseksi todellisen elämän ongelmatilanteeksi. On hieman vaikea kuvitella todellista tilannetta, jossa silmälukujen summa tiedettäisiin, mutta yksittäisten arpakuutioiden silmäluvut eivät olisi näkösällä.

*Tehtävä 31: Jokeritehtävä (oikeasta vastauksesta lisäpisteitä). Junassa oli 200 matkustajaa, joista 1% oli lapsia ja loput aikuisia.*

*a. Kuinka monta lasta oli matkustajien joukossa: a) 1 b) 2 c) 20 d) 199 e) ei mikään kohdista a-d, vaan ___________*

*b. Kuinka monen aikuisen pitäisi jäädä junasta pois seuraavalla asemalla, jotta lapsia olisi 2%: a) 50 b) 98 c) 100 d) 102*

Kuviossa 4 Oppilas 7 valitsee oikeat vaihtoehdot tehtävän 31 *a* ja *b* kohdista. Kirjallinen perustelu on ”kristallinkirkas” kuvaten hänen matemaattista ajatteluaan ja ratkaisuprosessiaan. Oppilaan 8 perustelusta (kuvio 4) selviää, että hän ei ole osannut prosenttikäsitettä. Tämä estää ratkaisuprossin aloituksen ja vie arvaus-strategiaan. Kirjoitettu perustelu osoittaa, kuinka tarkasti oppilaat pohtivat tehtävätilanteen mahdollisuutta: *"Mutta ei junassa voi olla vain 2 lasta,…"*




KUVIO 4 Kahden oppilaan vastaukset tehtävään 31

Tehtävä 31 oli jokeritehtävä ja sen oikein ratkaisemisella oli mahdollista saada muihin kokeen ongelmanratkaisutehtäviin verrattuna noin kaksinkertainen pistemäärä. Tehtävänanto on selkeä, mutta se viestii myös tehtävän vapaaehtoisuudesta ja niinpä moni otoksemme vastaaja oli jättänyt jokeritehtävän tekemättä. Tämä selittänee osittain tehtävän alhaista ratkaisuprosenttia (< 17%). Tehtävä 31 (samoin kuin tehtävä 29) kietoutuu prosenttikäsitteen ympärille ja se rajoittaa oppilaan ongelmanratkaisutaitojen monipuolista arviointia (taulukko 1). Oppilaat, jotka eivät osanneet prosenttilaskua, olivat auttamattomasti "ulkona" näistä tehtävistä. Tehtävän 31 *a* ja *b* kohdat sisälsivät molemmat neljä vaihtoehtoa, joten oikean vastauksen ja 2 pistettä saattoi saada 25 % todennäköisyydellä arvaamalla. Erilaisten ratkaisustrategioiden käyttöä tällä tehtävällä on vaikea mitata, sillä oppilaalla ei ollut mahdollisuutta tehdä tehtävässä 31 valintoja ratkaisutavasta. Tehtävän perustelu sen sijaan vaati oppilaalta kirjallista esitystä omasta ajattelustaan.

Taulukossa 1 on esitetty, kuinka kokeen tehtävät sijoittuvat tehtävänannon ja oppilaiden vastausten perusteella havaittavissa oleville ongelmanratkaisutaidon osa-alueille 2-6. Todettakoon, että osa-aluetta *1) motivaatio ja muut affektiiviset tekijät* ei voida arvioida käytettävissä olevan aineiston perusteella, sillä se olisi edellyttänyt oppilaiden haastattelua ja itse koetilanteen seurantaa.

TAULUKKO 1 Tehtävien sijoittuminen matemaattisen ongelmanratkaisutaidon osa-alueille 2-6

| *Tehtävän sijoittuminen matemaattisen ongelmanratkaisutaidon osa-alueille 2-6* | *Tehtävä* *t. 28* | *t. 29* | *t. 30* | *t. 31* |
|---|---|---|---|---|
| 2) Luku- ja kirjoitustaito | x | x | x | x |
| 3) Matemaattiset taidot | x | x | x | x |
| 4) Taito käyttää ongelmanratkaisustrategioita ja heuristiikkoja | | | x | |
| 5) Valitsemisen taito (selektiivisyys) | | | x | |
| 6) Taito yhdistää ongelman tulkinta kokonaisratkaisuksi | x | | x | x |

Tehtävässä 30 oppilas pääsi soveltamaan kaikkia taulukossa 1 esitettyjä ongelmanratkaisutaidon osa-alueita. Sen sijaan tehtävässä 29 tarvittiin 6.-luokkalaiselta pääasiassa vain luetun ymmärtämistä ja matemaattisia taitoja (prosenttilaskun osaamista).

## POHDINTA

Opetushallituksen kokeen matemaattisen ongelmanratkaisutaidon arvioinnissa painottui prosenttikäsitteen hallinta. Tehtäväanalyysin perusteella tehtävät 29 ja 31 vaativat prosenttilaskun hallintaa, ennen kuin tehtävän ratkaisemisen pystyi aloittamaan. Aihepiiri on toki perusteltu, sillä luokkien 3-5 keskeisiin sisältöihin kuuluu desimaaliluvun, murtoluvun ja prosentin välinen yhteys. (Opetushallitus, 2004, 161-164). Tutkimuskirjallisuuden perusteella matemaattinen ongelmaratkaisutaito on kuitenkin hyvin laaja-alainen taito (esim. Schoenfeld, 1985; Kilpatrick ym., 2001; Lester & Kehle, 2003; Leppäaho, 2007) ja sen arvioiminen on haasteellista.

Tehtävänantojen tarkastelussa koetehtävän 28 pitäisi olla opetussuunnitelman perusteella 6.-luokkalaiselle rutiinitehtävä, mutta tässä tutkimuksessa esitelty esimerkki (kuvio 1, Oppilas 2) osoittaa, että tehtävätilanteen hahmottaminen kuvankin avulla saattaa olla vaikeaa. Tehtävä 30 vastasi parhaiten hyvälle ongelmanratkaisutehtävälle tässä tutkimuksessa asetettuja kriteerejä. Tehtävän 31 perustelukohta edellytti oppilaalta oman ajattelun verbalisointia paljastaen samalla, oliko tehtävän *a* ja *b* kohtien ratkaisuvaihtoehdot valittu arvaamalla vai ongelmanratkaisuprosessiin perustuen.

Tarkastamiemme vastauspaperien perusteella oppilaiden vaikeutena ongelmanratkaisutehtävissä oli yleensä tehtävätilanteen hahmottaminen ja ratkaisuyrityksen aloittaminen. Useissa vastauspapereissa ratkaisua ei edes yritetty tai tehtävän vastaustilaan oli piirrelty vain jotain (esim. kukkia, kissa, tms.) Tämä osoittaa, että kokeen tekemiseen oli ainakin näillä ”piirtelijöillä” riittävästi aikaa, mutta viestii myös tehtävien vaikeudesta.

Alkuvaiheessa olevaa tutkimushankettamme on tarkoitus jatkaa. Tavoitteena on valottaa, mitä aineistoltaan suuren ja kvantitatiivisen tutkimuksen numeeristen tulosten taustalta löytyy. Tutkimuksemme on myös ”kouluesimerkki” siitä, kuinka oppimisen tutkimuksessa tutkimusmenetelmien valinnoilla on merkitystä samasta aineistosta saatuun tietoon. Kvantitatiivisin menetelmin toteutettu OPH:n laaja tutkimus (Niemi & Metsämuuronen, 2010) antaa tilastollisesti monipuolisen kokonaiskuvan 5560 kuudesluokkalaisen matematiikan osaamisesta eri puolilla Suomea. Kvalitatiivinen tutkimuksemme ei pysty tutkimusmenetelmänsä vuoksi tarjoamaan samaa kokonaiskuvaa aineistosta. Sen tarkoituksena onkin antaa viitteitä siitä, millaisten tehtävien kautta matemaattista ongelmanratkaisutaitoa voidaan arvioida valtakunnallisessa kokeessa ja miten laadullinen ongelmanratkaisuprosesseja koskeva tieto voidaan hyödyntää kerätyn kvantitatiivisen aineiston ohessa laajastakin otannasta.

**LÄHTEET**

Collis, K.F., Romberg, T.A., & Jurdak, M.E. (1986). A Technique for Assessing Mathematical Problem-Solving Ability. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(3), 206-221.

Charles, L., Lester, F., & O’Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving.* Reston (VA): NCTM.

Haapasalo, L. (1985). *Ongelmakeskeisen matematiikanopetuksen metodiikka*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetusmoniste 10.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519–524.

Hammouri, H. (2003). An investigation of undergraduates’ transformational problem solving strategies: Cognitive/metacognitive processes as predictors of holistic/analytic strategies. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 28*(6), 571–586.

Joutsenlahti J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä*. Tampere. (Acta Universitatis Tamperensis 1061). Väitöskirja.

Joutsenlahti, J. (2009). Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työssä. Teoksessa R. Kaasila (toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008* (s. 71–86). Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9. Rovaniemi: Lapin yliopisto.

Joutsenlahti, J., & Vainionpää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset* *peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (s. 137-148). Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Opetushallitus.

Kantowski, M.G. (1980). Some Thoughts on Teaching for Problem-Solving. Teoksessa *NCTM Yearbook 1980* (s. 195–203). Reston (VA): NCTM.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (toim.) (2001). *Adding it up.* Washington DC: National Academy Press.

Leppäaho, H. (2007). *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi.* University of Jyväskylä. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 298.

Lester, F. K., Jr., & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. Teoksessa R. Lesh, & H. Doerr (toim.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (s. 501–517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Montague, M., & Applegate, B. (1993). Middle School Students' Mathematical Problem Solving: An Analysis of Think-Aloud Protocols. *Learning Disability Quarterly*, 16(1), 19-32.

Niemi, E. K. (2010). Matematiikan oppimistulokset 6. vuosiluokan alussa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (s. 17-70). Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Opetushallitus.

Niemi, E. K., & Metsämuuronen J. (toim.) (2010). *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008.* Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Opetushallitus.

Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*: Oppivelvollisille tarkoitetun perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, perusopetuksen valmistavan opetuksen opetussuunnitelman perusteet, lisäopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.

Pehkonen, E., & Zimmermann, B. (1990). *Probleemakentät matematiikan opetuksessa ja niiden yhteys opetuksen ja oppilaiden motivaation kehittämiseen. Osa 1. Teoreettinen tausta ja tutkimusasetelma.* Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 86.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. London: Academic Press.

Szetela, W., & Nicol, C. (1992). Evaluating Problem Solving in Mathematics. *Educational Leadership, 49*(8), 42-45.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Teoksessa R. Charles, & E. Silver (toim.), *The* *teaching and assessing of mathematical problem solving* (s. 1–22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

# SUOMALAISTEN JA CHILELÄISTEN ALALUOKKIEN OPETTAJIEN ESILLE TUOMIA USKOMUKSIA ONGELMANRATKAISUSTA

Liisa Näveri[1], Paulina Araya[2], Erkki Pehkonen[1], Anu Laine[1] ja Markku S. Hannula[1]

[1]Helsingin yliopisto, [2]Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile

*Ongelmanratkaisua pidetään yleisesti keinona kehittää matemaattista ajattelua (esim. Schoenfeld, 1985). Suomessa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (OPS, 2004) oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen parantaminen ja siten matemaattisen ajattelun kehittäminen on tärkeänä tavoitteena matematiikan opetuksessa. Tässä artikkelissa kartoitetaan suomalaisten ja chileläisten 3. luokkien opettajien esille tuomia uskomuksia ongelmanratkaisusta sekä kartoitetaan opettajien kertomien esimerkkien avulla toteutuneita käytäntöjä. Niin käsityksissä ongelmista ja ongelmanratkaisusta kuin myös toteutuneissa käytännöissä on eroa maiden välillä.*

## JOHDANTO

Matematiikan oppimisen tavoitteena tulisi olla kaikissa ikäryhmissä matemaattisen ajattelun kehittyminen (OPH, 2004). Oikeiden oppimistapojen luomiseksi tämän tulisi olla tavoitteena jo alakoulusta lähtien. Siitä mitä matemaattinen ajattelu on ja minkälaiset periaatteet parhaiten edistävät sen oppimista, on erisuuntaisia näkemyksiä.

Ongelmanratkaisua pidetään kansainvälisesti keskeisenä matemaattisen ajattelun kehittymiselle (esim. Mason, Burton & Stacey, 1982; Schoenfeld, 1985; Stanic & Kilpatrick, 1988). Ongelmanratkaisua on kuvattu kirjallisuudessa monien eri ongelmanratkaisumallien avulla (mm. Polya, 1945; le Blanc, Proudfit & Putt, 1980; Mason ym., 1982; Schoenfeld, 1985; Aebli, 1985). Opettajan rooli on ratkaiseva toteutettaessa opetussuunnitelman tavoitteita ja miten ongelmanratkaisutilanteet toteutetaan luokassa (Pehkonen, 1991). Tähän vaikuttavat opettajan käsitykset opetustilanteista (esim. Grouws, Good & Dougherty, 1990).

Tässä artikkelissa tarkastellaan suomalaisten ja chileläisten kolmannen luokan opettajien käsityksiä siitä, mikä on ´ongelma´, mitä on ´ongelmanratkaisu´ ja mikä on ongelmanratkaisun merkitys matematiikan oppimisessa. Lisäksi tutkitaan, millaisia esimerkkejä opettajat antavat ongelmista sekä miten ja kuinka usein he käyttävät niitä oppitunneilla.

### Teoreettista taustaa

Aikaisempien tutkimusten perusteella on huomattu, että opettajien käsitykset ovat kaikkein tärkeimmät, kun yritetään ymmärtää opetustilannetta (mm.

Grouws ym., 1990). Siten seuraavaksi tarkastellaan ongelman, ongelmanratkaisun ja opettajien käsitysten määrittelyä, jotka ovat keskeisiä tämän tutkimuksen kannalta.

Modernin ongelmanratkaisututkimuksen arvioidaan alkavan George Polyasta (Polya, 1945). Kirjassaan hän esitti ns. Polyan mallin matemaattiselle ongelmanratkaisulle, johon perustuvia ongelmanratkaisumalleja on myöhemmin kehitetty useita (mm. le Blanc ym., 1980; Mason ym., 1982; Schoenfeld, 1985; Aebli, 1985).

**Ongelma.** Ongelmakäsitteen määrittelyssä on vaihtelua. Kirjallisuudessa laajalti käytetty ongelman luonnehdinta liittää sen tehtävään (esim. Kantowski, 1980): Tehtävän sanotaan olevan *ongelma*, jos sen ratkaiseminen vaatii, että ratkaisijan on yhdisteltävä hänelle ennestään tuttua tietoa uudella tavalla. Jos ratkaisija voi heti tunnistaa ne toimenpiteet, jotka tarvitaan tehtävän ratkaisemiseen, niin kyseessä on hänelle *rutiinitehtävä* (tai standarditehtävä tai harjoitustehtävä). Ongelmakäsite on siten suhteellinen ja sidottu henkilön senhetkiseen osaamiseen.

Haapasalo (1997) liittää ongelman tilanteisiin, jotka aiheuttavat tietoista ja päämäärähakuista toimintaa, ns. heuristisia prosesseja. Näillä prosesseilla tähdätään ongelmatilanteen ratkaisun löytymiseen. Leppäaho (2007) liittää ongelman tehtävätilanteeseen, jota yksilö ei pysty ratkaisemaan, mutta hänellä on valmiudet ratkaisun saavuttamiseen ajattelun ja opiskelun avulla. Le Blanc, Proudfit ja Putt (1980) ovat identifioineet alakoulussa käytetyn 1980-luvulla kahdenlaisia ongelmia: sanallisesti kuvaillut arkielämään liittyvät tehtävät, joita ratkaistaan matematiikan keinoin ja prosesseihin liittyvät ongelmat, joiden ratkaiseminen vaatii strategian käyttämistä tai ei-algoritmista lähestymistapaa. Ongelman voidaan siten määritellä liittyvän tehtävään tai tilanteeseen.

**Ongelmanratkaisu.** Ongelmatehtäviä korostavissa määrittelyissä ongelmanratkaisuksi nimitetään sitä tapahtumaa, jossa ongelmaa ratkaistaan. Polya (1945) esitti kirjassaan jo yli 60 vuotta sitten ratkaisijalle neliportaisen ongelmaratkaisumallin, jonka vaiheet ovat: Ongelman ymmärtäminen, Ratkaisun suunnitteleminen, Ratkaisun toteuttaminen ja Tarkastelu. Tämän mallin kaavamaisuutta Mason, Burton ja Stacey (1982) ovat purkaneet yhdistämällä Polyan mallin kaksi keskimmäistä vaihetta kehäksi, jossa ongelman ratkaisuvaihe ja palaaminen aloitustilanteeseen vuorottelevat, kunnes ratkaisu on löytynyt. Aebli sisällyttää uuden käsitteen muodostamisen ongelmanratkaisuun (Aebli, 1985). Polyan ja Aeblin ajattelut eroavat siinä, käytetäänkö tietoa uudessa ympäristössä, jolloin on kysymys käsitteen laajennuksesta, vai muodostetaanko uutta käsitettä.

Ongelmatilannetta korostavissa tarkasteluissa ongelmanratkaisulla tarkoitetaan heuristisia prosesseja, mikä Haapasalon (1997) mukaan on yhteisnimitys strategioille ja niitä sääteleville metakognitioille.

**Opettajien käsityksistä.** Opettajan käsitys matematiikasta, matematiikan opettamisesta ja siten myös matemaattisesta ajattelusta säätelee hänen ratkaisujaan ja toimintatapojaan (Pehkonen, 1991). Vaikka oppiminen on yksilöllinen tapahtuma, niin kouluympäristössä se tapahtuu aina vuorovaikutuksessa opettajan ja muiden oppilaiden kanssa. Opettajan tulee luoda oppimisympäristö, joka mahdollistaa laadukkaan oppimisen (mm. Grouws ym., 1990). Opettajan omat käsitykset ja uskomukset matematiikasta sekä sen opettamisesta ja oppimisesta vaikuttavat opettajan tekemiin päätöksiin luokassa (esim. Pajares, 1992; Calderhead, 1996; Speer, 2008). Jotta ymmärrettäisiin opettajien päätöksiä, on tärkeää tietää, mitä opettajat ajattelevat opettamisesta ja tavoista auttaa oppilaita oppimaan, ts. on tärkeää tietää opettajien käsityksiä.

Käsitys on käsitteenä ongelmallinen, koska sitä ei ole selkeästi määritelty (mm. Furinghetti & Pehkonen, 2002). Ymmärrämme tässä esityksessä käsitykset tiedostettuina uskomuksina, siten että on painotettu uskomusten kognitiivista komponenttia (Pehkonen, 1998).

Kyselylomaketta käyttäen voimme tavoittaa ainoastaan opettajien esille tuomia käsityksiä (espoused) ongelmasta ja ongelmanratkaisusta. He saattavat toimia käytännössä täysin eri tavoin sen tähden, että heidän käsityksensä siitä, mitä ongelma ja ongelmanratkaisu ovat, poikkeavat toisistaan. He käyttävät puheessa käsitteitä ´ongelma´ ja ´ongelmanratkaisu´, mutta heidän käsityksensä niistä saattavat poiketa toisistaan. Tämän huomasi jo mm. Ernest (1989) kirjoittaessaan kahdenlaisista opettajien käsityksistä, nimittäin esille tuomista (espoused) ja toteuttamista (enacted).

**Aikaisempaa suomalaista tutkimusta.** Sivunen & Pehkonen (2009) kuvasivat postikyselyn tuloksia, jossa keravalaiset luokanopettajat olivat keväällä 2006 kohderyhmänä. Kaikille (luokat 1–6) Keravan alakoulun luokanopettajille annettiin kyselylomake, mutta vastaus saatiin vain 42 opettajalta vastausprosentin ollessa 41 %. Opettajien mukaan ongelmanratkaisu matematiikassa tarkoittaa vaihtelevia ongelmia, ratkaisustrategioita, matematiikkaa arkielämän tilanteissa, oppilaiden omaa ajattelua ja aikaisemmin opittujen taitojen soveltamista. Opettajien käsityksissä ongelmanratkaisun opettamisesta matematiikassa painottuivat konkreetit ja käytännölliset lähestymistavat.

### Tutkimuskysymykset

Tässä tarkastellaan Suomessa ja Chilessä alakoulun kolmannen luokan opettajien käsityksiä siitä, mikä on ongelma, mitä on ongelmanratkaisu ja mikä on ongelmanratkaisun merkitys matematiikan oppimisessa. Siis tutkimuskysymykset voidaan muotoilla seuraavasti: (1) Mitä opettajat ymmärtävät ongelmalla? (2) Mitä opettajat ymmärtävät ongelmanratkaisulla? (3) Minkälaisia esimerkkejä opettajat antavat ongelmista? (4) Miten opettajat käyttävät ongelmia tunneilla? (5) Kuinka usein opettajat käyttävät ongelmia tunneillaan?

## TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tämä tutkimus on osa laajempaa Suomen Akatemian rahoittamaa 3-vuotista (2010–13) tutkimusprojektia (projekti #1135556), jossa Chilen ja Suomen opettajien erilaisia toimintatapoja ja oppilaiden ymmärtämisen ja suoritusten kehittymistä vertaillaan, kun kolmannelta luokalta lähtien käytetään kerran kuukaudessa ongelmia. Projektissa pyritään kehittämään malli oppilaiden matematiikan ymmärtämisen tason parantamiseksi matematiikanopetuksessa ongelmanratkaisutehtävien avulla. Tutkimuksen taustaselvityksiin liittyy tässä raportoitava kysely 3. luokan opettajille. Kysely Suomessa toteutettiin valtakunnallisena postikyselynä ja Chilessä Santiagon alueella.

### Mittari

Kyselylomake laadittiin tätä tarkoitusta varten. Suljettujen väitteiden (15) lisäksi oli avoimia kysymyksiä (9), ts. ne edellyttivät tuottamisvastausta. Ongelmaväitteet oli muodostettu le Blanc´n (1980), Kantowskin (1980) ja Aeblin (1985) teorioiden pohjalta (kts. Taulukko 1) ja ongelmanratkaisuväitteet oli muodostettu le Blanc´n (1980), Kantowskin (1980) ja Polyan (1945) teorioiden pohjalta (kts. Taulukko 2). Lisäksi suljettujen väitteiden viimeisenä kohtana oli avoin kysymys: Mitä muuta mielestäsi ongelmalla tarkoitetaan ja mitä muuta mielestäsi ongelmanratkaisu on? Väitteistä ´Ongelma on sanallinen tehtävä, jossa oppilas soveltaa aikaisempia tietojaan´ ja ´Ongelma on päätellen ratkaistava sanallinen tehtävä´ ja ongelmanratkaisu on ´Sanallisten tehtävien ratkaisemista yhdessä oppilaiden kanssa´ vastausprosenteista (Taulukko 1 ja Taulukko 2) voidaan päätellä vastaajien käsitys ongelman ja ongelmanratkaisun luonteesta.

Englanninkielisessä lomakkeessa (nimeltään ´Teachers questionnaire on problem-solving´), joka lähetettiin Chileen, avainkäsitteistä käytettiin käännöksiä: concept of problem, verbal task, solving methods of a task, to solve a task, problem task.

### Koehenkilöt

Suomen peruskouluista valittiin satunnaisotannalla 100 koulua, joiden rehtoreille lähetettiin marraskuun 2010 puolivälissä postitse kysely pyytäen heitä antamaan se koulunsa 3. vuosiluokan opettajalle. Jos 3. luokkia oli useita, niin siinä tapauksessa valittaisiin 3A luokka. Ensimmäinen postitus tuotti 43 vastausta, joten tarvittiin uusintakysely joulukuun alussa. Nyt saatiin vastaus kaikkiaan 63 koulusta (siis vastausprosentti 63 %).

Kaikkiaan 63 vastaajasta oli naisia 51 ja miehiä 12. Opettajista vain 7 on erikoistunut matematiikkaan ja 28 alku- ja/tai erityisopetukseen. Opettajina he ovat suurelta osin varsin kokeneita, sillä keskimääräinen opettajana toimimisen aika on 16 vuotta vaihteluvälin ollessa 2kk – 35 v.

Chileläiset tutkijat keräsivät aineiston Santiagon alueelta saaden vastauksen 87 opettajalta. Heistä 55 oli naisia ja 32 oli miehiä. Opettajista on matematiikkaan erikoistuneita 15. Chileläiset tutkimukseen osallistuneet ovat toimineet opettajina keskimäärin 12 vuotta vaihteluvälin ollessa 1-35 vuotta.

### Aineistonkäsittelymenetelmät

Kymmenkunta vastauspaperia käsiteltiin ja tehtiin karkea luokittelu vastauksista, jotta ne voitaisiin kirjoittaa SPSS-tiedostoksi tilastollista käsittelyä varten. Laadullinen analysointi tehtiin aineistolähtöisesti sisällönanalyysiä käyttäen.

## TULOKSIA

Seuraavaksi käsitellään tuloksia tutkimuskysymyksittäin. Koska lomaketta käyttäen voimme tavoittaa ainoastaan opettajien esille tuomia käsityksiä (espoused) ongelmasta ja ongelmanratkaisusta, on suljettujen väitteiden lisäksi pyydetty esimerkkejä ongelmasta ja ongelmanratkaisusta. Tällä tavoin nähdään, missä merkityksessä opettajat käyttävät ongelma- ja ongelmanratkaisu-käsitteitä. Tässä projektiin liittyvässä osatutkimuksessa opettajien esille tuomia (espoused) käsityksiä ongelmasta ja ongelmanratkaisusta analysoidaan opettajien suljettuihin väitteisiin liittyvistä vastauksista ja toteuttamista (enacted) heidän käyttämiensä tehtävien perusteella.

### Mikä on ongelma?

Kysyttäessä, miten opettajat luonnehtivat ongelmakäsitettä matematiikan oppimiseen liittyvässä ongelmanratkaisussa, saadaan vastauksista alla näkyvä jakauma (Taulukko 1). Opettajia pyydettiin numeroimaan tärkein ja toiseksi tärkein vaihtoehto. Suluissa ovat vastausten prosenttiosuudet tässä järjestyksessä, siis (1 valinta, 2 valinta).

Molemmissa maissa korostui väittämä ´ongelma on sanallinen tehtävä, jossa oppilas soveltaa aikaisempia tietojaan', Suomessa (40 %, 24 %) ja Chilessä (42 %, 49 %) tai ´joka ratkeaa päätellen´, Suomessa (25 %, 30 %) ja Chilessä (50 %, 44 %). Suomalaisille opettajille ongelma oli myös ´tehtävä, johon ei ole ratkaisua tiedossa´ (22 %, 19 %). Vastaava tulos chileläisille opettajille oli (7 %, 3 %).

Ongelma käsitettiin Suomessa myös asiaksi, jonka haluaa selvittää, ja johon liittyvissä käsityksissä ei riitä aikaisemman tiedon käyttäminen, vaan tiedoissa on aukkoja. Suomalaisten opettajien vastausprosentit olivat (12 %, 19 %). Vastaavat prosenttiosuudet chileläisten opettajien vastauksissa olivat (0 %, 4 %).

Vastauksissa ilmeni myös vastaajan käsitys Aeblin (1985) teorian mukaisesta uuden tiedon rakentamisesta:

> Oppilaan tulee selvittää uuttakin asiaa, tai uudesta monimuotoisemmasta näkökulmasta.

TAULUKKO 1 Opettajien valinnat kysymykseen "Mikä on ongelma?" N=150

| | 1 valinta (%) | | 2 valinta (%) | |
|---|---|---|---|---|
| Annetut vaihtoehdot kysymykseen | Suomi | Chile | Suomi | Chile |
| Ongelma on sanallinen tehtävä, jossa oppilas soveltaa aikaisempia tietojaan. | 40 | 42 | 24 | 49 |
| Ongelma on päätellen ratkaistava sanallinen tehtävä. | 25 | 50 | 30 | 44 |
| Ongelma on tehtävä, johon minulla ei ole ratkaisua tiedossani. | 22 | 7 | 19 | 3 |
| Ongelma on asia, jonka haluan selvittää, ja johon liittyvissä käsityksissä minulla on aukkoja. | 12 | 0 | 19 | 4 |
| Mitä muuta mielestäsi ongelmalla tarkoitetaan. | 1 | 1 | 8 | 0 |

Vaihtoehdossa, mitä muuta ongelmalla tarkoitetaan, suomalaiset vastaajat toivat esille näkökulman ongelmakäsitteen suhteellisuudesta ja riippuvuudesta oppilaan senhetkiseen osaamiseen:

> Ongelma matematiikassa on kaikkea edellä mainittuja asioita, riippuen luokan/ oppilaan matemaattisista tiedoista/taidoista ja kyvyistä.

Yhteenvetona voidaan todeta, että suomalaisten 3. luokkalaisten opettajien käsitys jakaantui eri vastausvaihtoehtojen välille ja että chileläisten opettajien keskuudessa korostui ongelma sanallisena tehtävänä.

**Kolmannen luokan opettajien käsityksiä ongelmanratkaisusta**

Kysyttäessä, mitä on ´ongelmanratkaisu´ matematiikassa, saatiin vastauksista Taulukossa 2 oleva jakauma.

Valtaosa opettajista valitsi vastausvaihtoehdon: ´Oppilaiden ohjaamista etsimään itse ratkaisunsa käsillä olevaan ongelmaan´. Vastausprosentit olivat suomalaisilla opettajilla (52 %, 23 %) ja chileläisillä opettajilla (39 %, 15 %). Tästä on esimerkkinä suomalaisen opettajan käyttämä opetusmenetelmä perusteluineen:

> Yhteistoiminnallisuutta käytän myös mielelläni, koska silloin oppilaat alkavat puhua matematiikkaa.

Useiden opettajien mielestä se on myös ´aikaisempien tietojen käyttämistä ongelman ratkaisemiseksi´, vastausprosenttien ollessa suomalaisilla opettajilla (31 %, 25 %) ja chileläisillä opettajilla (10 %, 20 %).

TAULUKKO 2 Opettajien valinnat kysymykseen "Mitä on ongelmanratkaisu?" N=150

| | 1 valinta (%) | | 2 valinta (%) | |
|---|---|---|---|---|
| Annetut vaihtoehdot kysymykseen | Suomi | Chile | Suomi | Chile |
| Oppilaiden ohjaamista etsimään itse ratkaisunsa käsillä olevaan ongelmaan. | 52 | 39 | 23 | 15 |
| Aikaisempien tietojen käyttämistä ongelman ratkaisemiseksi. | 31 | 10 | 25 | 20 |
| Tehtävän ehtojen määrittämistä ja ratkaisutavan valitsemista. | 14 | 16 | 25 | 10 |
| Menettelytapojen ja menetelmien harjoittelua. | 3 | 15 | 12 | 16 |
| Sanallisten tehtävien ratkaisemista yhdessä oppilaiden kanssa. | 0 | 20 | 13 | 38 |
| Löydetyn ratkaisun arvioimista. | 0 | 1 | 2 | 1 |
| Mitä muuta mielestäsi ongelmanratkaisu on. | 0 | 0 | 0 | 0 |

Chileläisten opettajien ensisijainen valinta jakaantui pääasiassa ohjaamisen ja sanallisten tehtävien ratkaisemisen välille. Toissijaisena valintana Chilessä sanallisten tehtävien ratkaiseminen korostui (vastausprosentti 38 %).

> Problem-solving method known to all. Example: Juan has 12 balls, he should divide it into three friend, but Juan wants the older friend has two more balls, and the middle one has a ball more than the youngest child. How many balls each receive?

Suomalaisilla opettajilla ongelmanratkaisu ´sanallisena tehtävänä, jota ratkaistaan yhdessä oppilaiden kanssa´ ilmeni vain toissijaisena vaihtoehtona ratkaisuprosenttien ollessa ( 0 %, 13 %). Useiden opettajien mielestä ongelmanratkaisu on myös ´aikaisempien tietojen käyttämistä ongelman ratkaisemiseksi´, suomalaisilla opettajilla (31 %, 25 %) ja chileläisillä opettajilla (10 %, 20 %). Muutaman suomalaisen 3. luokan opettajan mielestä ongelmanratkaisu on ´menettelytapojen ja menetelmien harjoittelua´ (3 %, 12 %). Chileläisten opettajien mielestä tämä vaihtoehto on tärkeämpi (15 %, 16 %).

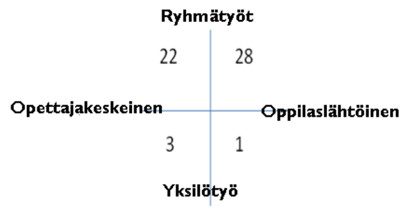
Suomalaisista opettajista 40 % valitsi väitteen ´ongelma on sanallinen tehtävä, jossa oppilas soveltaa aikaisempia tietojaan´ ensisijaiseksi vaihtoehdoksi ja lisäksi 24 % opettajista valitsi vaihtoehdon toissijaiseksi vaihtoehdoksi. Chileläisistä opettajista vastaavat luvut olivat 42 % ja 49 %. Kuitenkin väitteessä ongelmanratkaisu on ´sanallisten tehtävien ratkaisemista yhdessä oppilaiden kanssa´ suomalaisten opettajien ensisijainen ja toissijainen valinta oli 0 % ja 13 % sekä chileläisten opettajien vastaavasti 20 % ja 38 %. Siis, koska kukaan suomalaisista vastaajista ei ensisijaisesti valinnut vaihtoehtoa, että ´ongelmanratkaisu on sanallisten tehtävien ratkaisemista yhdessä oppilaiden kanssa´, voidaan päätellä että suomalaiset opettajat pitävät ongelmanratkaisua enemmänkin aikaisempien tietojen soveltamisena. Sen sijaan chileläisten opettajien vastauksissa jälkimmäisessä väitteessä valitsi 20 % opettajista ensisijaisena ja 38 % opettajista toissijaisena vaihtoehtona, joten heille ongelmanratkaisu on enemmänkin sanallisten tehtävien ratkaisemista yhdessä oppilaiden kanssa.

Vastaavasti voidaan päätellä väitteistä ´ongelma on päätellen ratkaistava sanallinen tehtävä´, missä suomalaisten opettajien vastausprosentit olivat (25,30) ja chileläisten opettajien (50, 44) ja toisena väitteenä ´sanallisten tehtävien ratkaisemista yhdessä oppilaiden kanssa´, missä suomalaisten vastausprosentit olivat (0, 13) ja chileläisten vastausprosentit (20, 38). Tuloksena saadaan, että suomalaiset opettajat korostivat ongelmanratkaisustrategiana päättelyä.

Yhteenvetona voidaan todeta, että ongelmanratkaisuna Suomessa nostettiin esille aikaisempien tietojen soveltaminen sekä päättely, kun taas Chilessä sanallisen tehtävän ratkaiseminen korostui.

**Miten opettajat käyttävät ongelmanratkaisua tunneilla?**

Kysyttäessä ´Millä tavoin käytät ongelmanratkaisua matematiikan tunneillasi?´ saadaan käsitys käytetyistä työtavoista. Kun suomalaiset vastaukset luokitellaan kahden työtapoihin liittyvän ominaisuuden mukaan (yksilötyö – ryhmätyöt; opettajakeskeinen - oppilaslähtöinen), saadaan seuraava nelikenttä (KUVIO 1):




KUVIO 1 Luokkahuonekäytännöt.

Toisen tutkijan luokitellessa samat vastaukset itsenäisesti, saatiin yksimielisyysprosentiksi 93 %. Seuraavassa on esitetty esimerkit luokitteluperusteista: Opettajakeskeiseksi ryhmätyöksi arvioitiin seuraava vastaus *´Tehtävän tekeminen yhdessä taululle on usein palkitsevaa´*, kun taas oppilaslähtöinen ryhmässä tapahtuva lähestymistapa on luokassa, jota kuvataan seuraavasti *´Ryhmässä 3-4 oppilasta. He työskentelevät ensin yhdessä. Opettaja auttaa ratkaisussa, jos ryhmä ei pysty ratkaisemaan sitä´*. Opettajakeskeinen yksilötyö painottuu seuraavassa esimerkissä *´Luen ongelman oppilaille. Annan jokaiselle vastauslapun. Lopussa keskustelemme ongelmasta.´*, kun taas oppilaslähtöistä yksilötyötä kuvaa seuraava tilanne *´Viikon pähkinä. Me katsomme vastauksen viikon lopussa ja joskus palkitaan.´*

Yllä näkyvästä nelikentästä voimme nähdä ryhmätyön painottumisen, sillä valtaosa opettajista (50) sanoi toteuttavansa ongelmanratkaisua ryhmätyönä. Toisaalta opettajakeskeinen ja oppilaslähtöinen työskentely näytti olevan yhtä suosittua.

Chileläisistä opettajista 35 kertoi käyttävänsä arkipäivän tilanteisiin liittyviä tehtäviä kysyttäessä, miten he käyttävät ongelmanratkaisua matematiikan-tunnilla:

> We believe that depends on the content studied, however, any situation of everyday life is used to confront students with problem.

Luokkahuonekäytännöistä opettajat toivat esille samoja käytäntöjä kuin millä Kuviossa 1 nähdään suomalaisten opettajien toimivan. Prosenttiosuuksia ei voi samalla tavalla kuitenkaan laskea, koska vain 17 chileläisestä opettajaa kertoi tavasta, jolla toimii luokassa. Esimerkeissä näkyvät chileläisten opettajien vaihtelevat käytännöt:

> We work in the ´Problem of the Day´ in oral way.
>
> Most problems are solved at home.

**Millaisia esimerkkejä opettajat antoivat ongelmista?**

Me pyysimme myös opettajia antamaan esimerkkejä, joita he käyttävät mielellään ongelmanratkaisutunneillaan. Vastaukset voidaan luokitella viiteen luokkaan; voidaan käyttää työkaluna, matematiikkaa arkipäivän tilanteissa, sanalliset tehtävät, oppikirjan käyttäminen ja metatason esimerkit.

Suomalaisten opettajien tehtävät näyttävät vaihtelevan tavallisista soveltavaa tasoa olevista sanallisista tehtävistä tehtäviin, joiden voidaan ajatella olevan kolmasluokkalaisille ongelmia Kantowskin määrittelemällä tavalla:

> Kuinka paljon tarvitset paperia saadaksesi leikatuksi puvun kaavat?

Chileläisistä opettajista lähes kaikki antoivat esimerkkinä sanallisen tehtävän:

> If we have 2 cows. How many legs have? And if we have 6 – 8- 10 and so on. Until they find a regularity.

Osa suomalaisten opettajien käyttämistä ongelmatehtävistä oli samanlaisia kuin on oppikirjoissa ja opettajanoppaissa (11 %). Chileläisistä oppikirjoista ei vastaavanlaista analyysia ole tehty.

Oli myös muutamia opettajia, joiden pedagoginen ajattelu oli metatasolla. He halusivat auttaa oppilaitaan kehittämään ajatteluaan yhdessä eri vaihtoehtoja ja ratkaisumalleja pohtien:

Hedelmällistä on myös, kun pääsee keskustelemaan yksittäisen oppilaan kanssa hänen ongelmatehtävistään esim. matematiikan tunnin lisätehtävävaiheessa.

Using concrete materials that can help visualize solutions and to make relationships between different content.

Ongelmanratkaisusitkeyden kehittämistä korosti yksi opettaja:

Luottamista epävarmuuden edessä.

**Kuinka usein opettajat käyttävät tunneillaan ongelmatehtäviä?**

Suomen alakoulujen 3. luokkalaisten opettajista 79 % kertoi käyttävänsä ongelmanratkaisua matematiikan tunneilla vähintään kerran viikossa (38 % kaikilla tunneilla). Vastaavat luvut Chilessä olivat 95 % (80 % kaikilla tunneilla).

TAULUKKO 3 Opettajien vastaukset kysymykseen "Kuinka usein opettajat käyttävät tunneillaan ongelmatehtäviä?"

| | Suomi | Chile |
|---|---|---|
| Kaikilla tunneilla | 38 % | 80 % |
| Noin kerran viikossa | 41 % | 15 % |
| Kerran kuukaudessa | 2 % | 3 % |
| Satunnaisesti | 19 % | 2 % |
| En ollenkaan | 0 % | 0 % |

Chileläisten opettajien aktiivinen ongelmatehtävien käsittely selittynee heidän jokaisella tunnilla käyttämillään sanallisilla tehtävillä.

## JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

Matematiikan oppimisen tavoitteena alakoulusta lähtien tulisi olla matematiikan rakenteiden ymmärtäminen, ei mekaaninen laskeminen eikä muistinvarainen suorittaminen (OPH, 2004). Tähän päästään ohjaamalla oppilasta itse muodostamaan ratkaisunsa ja strategiansa esimerkiksi ongelmatehtävää ratkaistessaan. Tässä tutkimuksessa olemme tarkastelleet kolmasluokkalaisten suomalaisten ja chileläisten opettajien esille tuomia käsityksiä ongelmasta ja ongelmanratkaisusta. Kyselyn tuloksia tarkasteltaessa näyttää siltä, että opettajat pyrkivät käyttämään ongelmanratkaisutehtäviä opetuksessaan. Kukaan heistä ei ollut valinnut vaihtoehtoa ´ei koskaan´.

Toinen kysymys on, mitä opettajat tarkoittavat ongelmanratkaisulla ja ongelmanratkaisutehtävällä. Suomalaisten opettajien mukaan ongelmat matematiikassa tarkoittavat tehtäviä, joiden ratkaisua ei näe suoraan, vaan tarvitaan käsitteiden laajentamista tai uuden käsitteen muodostamista, tehtävien ollessa usein arkielämän tilanteista. Ratkaisustrategioista korostuivat päättely ja aikaisemmin opittujen taitojen soveltaminen. Opetusmenetelmänä korostui oppilaiden ohjaaminen.

Käsitteet antavat tutkijalle vahvuuden, mutta myös heikkouden. Kielellinen ilmaisu asettaa rajat tiedon välittämiselle – sanotaanhan, että ihminen on sanojensa vanki. Vaikka Chileen lähetetyssä englanninkielisessä kyselylomakkeessa käytettiin esimerkiksi sanoja problem-task ja verbal task, jolloin sanojen problem ja verbal rinnastaminen ei ole ollut perusteltua, niin lisäksi on saattanut käydä siten, että englanninkielistä problem-sanaa ja Suomen ongelma-sanaa ei ole käytetty synonyymeina, vaan chileläiset opettajat ovat rinnastaneet problem- ja task-sanat. Asia täsmentyy chileläisten opettajien haastatteluissa syksyllä 2013.

Verrattaessa Sivunen & Pehkonen (2009) –tutkimusta käsillä olevaan työhön on selkeitä täsmennyksiä havaittavissa, jotka puoltavat käsillä olevaa tutkimusta. Sivunen & Pehkonen saivat vain 41 % Keravan opettajista vastaamaan kyselyyn, joten tulos on lähinnä suuntaan antava pilottitutkimus, jossa on kaikki ala-asteen opettajat yhdessä. Tässä sen sijaan on koko Suomea koskeva satunnaisotos pohjana, jossa vastausprosentti oli 63 %. Lisäksi tämä tutkimus keskittyi vain 3. luokan opettajiin, joten tuloksia voidaan helpommin yleistää. Laadullisessa tarkastelussa on ongelmien ja ratkaisustrategioiden luokittelua voitu täsmentää. Sivunen & Pehkonen (2009) –tutkimuksessa esille tulleet vaihtelevat ongelmat ja ratkaisustrategiat täsmentyivät tässä tutkimuksessa. Ongelmanratkaisussa arkielämän tilanteet ja aikaisemmin opittujen taitojen soveltaminen korostuivat molemmissa tutkimuksissa.

Esimerkiksi Hughes (1986), Grey ja Tall (1993) sekä Fuson (1992) ovat tutkineet lapsen tapaa oppia matematiikkaa. Ymmärtääkseen matematiikkaa on tärkeää, että lapsi voi itse luoda omat oppimisstrategiansa. Koska ongelmanratkaisu on keino kehittää matemaattista ajattelua (esim. Shoenfeld, 1985) ja oppilaan on vaikea muuttaa vääriä oppimistapoja myöhemmin, siksi myös alakouluopettajien tulisi ymmärtää, mitä ongelma ja ongelmanratkaisu tarkoittavat.

## LÄHTEET

Aebli, H. (1985). *Zwölf Grundformen des Lehrens* (2. painos). Stuttgart: Klett-Cotta.

Ernest, P. (1989). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. Teoksessa P. Ernes (toim.), *Mathematics Teaching: The State of the Art*. London: The Falmer Press.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Belief. Teoksessa G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (toim.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (s. 39–57). Dordrecht: Kluwer.

Grouws, D.A., Good, T.A., & Dougherty, B.I. (1990). Teachers conceptions about problem solving and problem-solving instruction. Teoksessa G.Booker, P.

Cobb, & T. de Mendicuti (toim.), *Proceedings of the 14th annual conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education* (s. 135-142). Mexico: PME

Haapasalo, L. (1997). Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 51–79). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & koulutuksen tutkimuslaitos.

Kantowski, M.G. (1980). Some Thoughts on Teaching for Problem Solving. Teoksessa S. Krulik & R.E. Reys (toim.), *Problem Solving in School Mathematics. NCTM Yearbook 1980.* (s. 195–203). Reston (VA): Council.

Leppäaho, H. (2007). M*atemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen perus-koulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arvioiminen.* Jyväskylä: University Printing House.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.

Le Blanc, J.F., Proudfit, L., & Putt, I.J. (1980). Teaching Problem Solving in the Elementary School. Teoksessa Krulik, S. & Reys, R.E. (toim), *Problem Solving in School mathematics* (s. 104-116). NCTM Yearbook 1980. Reston, Va: NTCM.

Opetushallitus (2004). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. http://www.oph.fi/ops/perusopetus/pops_web.pdf

Pehkonen, E. (1991). Developments in the understanding of problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 23/2, 46-50.

Pehkonen, E. (1993). What are Finnish teacher educators' conceptions about the teaching of problem solving in mathematics? *European Journal for Teacher Education, 16*(3), 237–256.

Pehkonen, E. (1998). On the concept "mathematical belief". Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.), *The State-of-Art in Mathematics-Related Belief Research. Results of the MAVI activities* (s. 37–72). University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 195.

Pehkonen, E. (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu* 6/03, 35-38.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. (2. painos). New York: Doubleday.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Sivunen, M., & Pehkonen, E. (2009). Finnish Elementary Teachers' Conceptions on Problem Solving in Mathematics Education. Teoksessa J. Maass & W. Schlöglmann (toim.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education* (s. 75–86). Rotterdam: Sense Publishers.

# AIKUISEN OPPIJAN MATEMATIIKKA-AHDISTUKSEN MERKKEJÄ

Päivi Perkkilä

Kokkolan yliopistokeskus Chydenius, Jyväskylän yliopisto

*Artikkelissa tarkastellaan 29 aikuisen oppijan matematiikka-ahdistuksen merkkejä sekä etsitään keinoja matematiikka-ahdistuksen korjaamiseen. Tutkimusaineisto on osa suurempaa aineistoa (n=150), joka sisältää opettajien ja opettajiksi opiskelevien matematiikkasuhdetta kuvaavia tarinoita. Kohderyhmästä 68 tekivät myös peruslaskutaitojen hallintaan liittyvän kartoituksen. Kartoituksessa heikoimmin menestyivät juuri ne (n=29), joilla oli negatiivisia ja ahdistavia matematiikan oppimiskokemuksia varhaisina kouluvuosina. Opettajiksi opiskelevien ja opettajien matematiikan taitojen sekä matematiikkasuhteen kartoittaminen olisi tärkeää, sillä he ovat vaikuttamassa lasten ja nuorten tulevaisuuteen myös matematiikan taitojen osalta. Kartoitusten perusteella opiskelijoille tulisi laatia korjaavia ohjelmia.*

## JOHDANTO

Matematiikka on läsnä jokapäiväisessä elämässämme, vaikka emme sitä aina niin tiedostakaan. Heikot matematiikan taidot saattavat vaikeuttaa ammattiin valmistumista ja aiheuttaa työttömyyttä ja syrjäytymistä. Matematiikan osaamattomuus ilmenee juuri peruslaskutaidoissa, joita tarvitaan niin arkielämässä kuin jatko-opinnoissa (Jung, Ikäheimo, & Korhonen, 2013). Matematiikasta syrjäytymisellä, mm. laskutaidottomuudella on merkittäviä yhteiskunnallisia vaikutuksia. Esimerkiksi Britanniassa on arvioitu, että heikon laskutaidon aiheuttamat vuosittaiset kustannukset ovat lähes 2,4 miljardia puntaa. Nämä kustannukset johtuvat lisääntyneistä opetuskustannuksista, koulupudokkuudesta, heikommasta tuottavuudesta, huonoimmista palkoista ja suuremmasta työttömyydestä. Jos tätä arvioitaisiin suhteutettuna Suomen väkilukuun ja ottamalla huomioon suomalaisnuorten paremmat oppimistulokset, niin vastaava kustannus olisi meillä lähes 80 miljoonaa euroa vuodessa. Vaikka Suomessa on OECD:n PISA-tutkimusten mukaan heikkoja laskijoita vähemmän kuin muualla, niin joka 20. kadulla kulkija ja noin 5-7 % koululaisista kokee yksinkertaistenkin laskutoimitusten suorittamisen ylivoimaiseksi. (Räsänen, 2012.)

Keväällä 2012 opetushallitus arvioi peruskoulunsa päättävien oppilaiden matematiikan oppimistuloksia. Tulosten perusteella voidaan nähdä, että matematiikan taidot ovat laskussa kaikilla osa-alueilla. Tämä noudattaa viime vuosien kansallisten arviointitutkimusten linjaa. Erityisen huolestuttavaa on se, että osaamisen tason heikkeneminen näkyy jo yksinkertaisissa luvuissa ja laskutoimituksissa sekä päässälasku- ja prosenttilaskutaidoissa. Näitä taitoja tarvitaan niin arkielämässä kuin myös jatko-opinnoissa. Tulokset kertovat matematiikan perustan murenemisesta. (Rautapuro, 2013.) Edellä mainitut osa-alueet ovat peruskoulun matematiikan alaluokkien sisältöjä. Perusta näiden matematiikan sisältöjen osaamiseen luodaan alaluokkien aikana. Jotta matematiikan osaamisen perustasta tulisi vahva, olisi peruskäsitteiden osaamisen kiinnitettävä erityistä huomiota.

Opettajalla on keskeinen rooli oppilaan matematiikan oppimisessa. Opettajan oma matematiikka-ahdistus vaikuttaa opettamiseen, oppilaiden asenteisiin ja suoriutumiseen matematiikassa. Monet luokanopettajiksi opiskelevista pelkäävät matematiikan oppimistilanteita ja uskovat, että he eivät voi oppia matematiikkaa. (Wilson & Gurney, 2011; Bates, Kim, & Latham 2011.) Opettajankoulutuksessa olisi tunnistettava opiskelijoiden negatiiviset asenteet matematiikkaa kohtaan ja pyrittävä tukemaan heidän matematiikan oppimista ja opettamista. Tehdyn tutkimuksen tavoitteena oli tunnistaa luokanopettajaksi opiskelevien aikuisten ja opettajina toimivien matematiikka-ahdistuksen merkkejä, tarkastella opettajankoulutuksen mahdollisuuksia tunnistaa matematiikka-ahdistuksesta/pelosta kärsiviä opiskelijoita sekä tuoda ehdotuksia opiskelijoiden ja opettajan työssä olevien tukemiseen.

## MATEMATIIKKA-AHDISTUS

Matematiikan välttäminen on tyypillinen matematiikka-ahdistuksen merkki. Hyvin korkeasta matematiikka-ahdistuksesta kärsiville ihmisille on ominaista, että he eivät luota matematiikan taitoihinsa ja heidän asenteensa matematiikkaa kohtaan on negatiivinen. (Ashcraft, 2002.) Matematiikka-ahdistusta koskevan tutkimuksen uranuurtajien, Richardson ja Suinnin (1972), mukaan matematiikka-ahdistus näkyy matemaattisissa suoritustilanteissa negatiivisina tunnetiloina kuten jännityksenä ja ahdistuksen tunteina. Nämä tunnetilat vaikeuttavat tai estävät esimerkiksi lukumäärien käsittelyä ja matemaattisten tehtävien ratkaisua niin arkielämän kuin akateemisissakin tilanteissa.

Matematiikka-ahdistuksen syntyyn vaikuttavia tekijöitä voidaan luokitella ympäristöllisiin, henkilökohtaisiin tai kognitiivisiin syihin (Rubinstein & Tannock, 2010). Toistuvat epäonnistumisen kokemukset kuten myös positiivisen tuen puute, heikko itseluottamus, pelko oppimis- ja koetilanteissa aiheuttavat pahimmillaan ahdistuneisuutta matematiikkaa kohtaan. Tällaiset kokemukset voivat vaikuttaa koulutusmahdollisuuksiin ja työllistymiseen. (Räsänen, 2012.)

Opettajien uskomukset matematiikkaa kohtaan vaikuttavat myös oppilaiden uskomuksiin matematiikasta, matematiikan oppimisesta ja opettamisesta. Banduran (1997) Minäpystyvyys -teoria antaa tukea sille, että opettajan uskomuksilla omiin kykyihinsä on vaikutusta oppilaan oppimiseen ja menestykseen. Bandura määrittelee minäpystyvyyden uskomuksena omiin kykyihinsä suoriutua annetuista tehtävistä. Minäpystyvyysuskomukset määrittelevät kuinka yksilö tuntee, ajattelee, motivoi itseään ja käyttäytyy.

Ihmisellä tulee olla voimakas minäpystyvyyden tunne ennen kuin hän lähtee soveltamaan oppimaansa. Opettajan minäpystyvyyden tunne matematiikkaa kohtaan tulisi olla vahva, jotta hän pystyisi tarjoamaan oppilaille mielekkäitä, motivoivia ja kannustavia matematiikan oppimistilanteita.

Tässä artikkelissa matematiikka-ahdistuksella tarkoitetaan heikkoa peruslaskutaitojen hallintaa ja tämän seurauksena syntynyttä itseluottamuksen puutetta, josta voi seurata kehäilmiönä ahdistuksen tunteita.

## TUTKIMUKSEN METODOLOGIA

### Tutkimusaineisto

Artikkelin tutkimusaineisto (n=29) on osa isompaa aineistoa (n=150), joka on kerätty vuosina 2011–2012 erilaisissa matematiikan opetukseen ja oppimiseen liittyvissä koulutustilaisuuksissa. Koulutustilaisuuksiin osallistui luokanopettajia, erityisopettajia ja luokanopettajiksi opiskelevia. Tutkimukseen osallistujat (n=150) ovat kirjoittaneet esseen 'Minä ja matematiikka', jossa he kuvailevat kokemuksiaan matematiikasta, matematiikan oppimisesta ja opettamisesta. Osa tutkittavista (n=68) teki myös peruslaskutaitojen hallintaan liittyvän ALVAn eli "Ammattilaskennan valmiuksien kartoituksen" (Ikäheimo, 2010). ALVA- kartoituksen tehneistä (n=68) erottui 29 tutkittavan joukko, joiden peruslaskutaitojen valmiudet olivat heikot tai melko heikot. Tutkimusjoukossa oli 12 lastentarhanopettajaa, 6 aineenopettajaa (ei matematiikanopettajia), 2 koulunkäyntiavustajaa, yo-merkantti, yo-merkonomi, sosionomi (AMK), 2 artesaania, päivähoitaja, nuoriso-ohjaaja, kasvatustieteen opiskelija ja kampaaja. Nämä kaikki opiskelivat luokanopettajiksi. Tutkimusjoukon ikäjakauma oli 28–48 vuotta. Tutkittavilla oli opettajakokemusta 4 kuukaudesta 6 vuoteen.

### Tutkimusmenetelmät

Tutkimusaineisto koostuu tutkittavien (n=29) esseistä 'Minä ja matematiikka' sekä peruslaskutaitojen hallintaan liittyvästä ALVA-kartoituksesta. 'Minä ja matematiikka' -esseessä tutkittavia pyydettiin pohtimaan mitä on matematiikka, matematiikan oppiminen ja opettaminen. Kirjoittaminen tuli alkaa metaforalla "Matematiikka on kuin …". Cassel ja Vincent (2011) ovat käyttäneet metaforia tutkimusaineiston kokoamisessa tutkiessaan opettajiksi opiskelevien näkemyksiä matematiikan ja luonnontieteiden opettamisesta. Tutkittavat voivat metaforien avulla ilmaista ajatuksiaan itsestään, toisista ihmisistä ja maailmasta yleensä. Lisäksi metaforien avulla voidaan saada selville olennaisia asioita ihmisten uskomuksista. Metaforia on käytetty mm. opetuskäytänteiden ymmärtämistä koskevissa tutkimuksissa (Cassel & Vincent, 2011). Tässä tutkimuksessa tutkittavat voivat paljastaa epäsuorasti metaforan avulla näkemyksiään matematiikasta, ja samalla metafora 'Matematiikka on kuin …' vie myös ajattelua kohti kokemuksia matematiikan oppimisesta ja opettamisesta.

'Minä ja matematiikka' – esseet analysoitiin NVivo-ohjelmalla, jonka avulla luokiteltiin tutkittavien kokemuksia matematiikasta yleensä, matematiikan oppimisesta ja opettamisesta. Essee-aineisto on pyritty analysoimaan fenomenologista tutkimusotetta mukaillen. Aineistoa analysoidessaan tutkija on sulkeistanut itsensä kaikesta muusta ja pyrkinyt lukemaan ja analysoimaan esseitä mahdollisimman avoimesti. "Matematiikka on kuin …" -metafora näytti vapauttaneen tutkittavat kirjoittamaan hyvinkin avoimesti ajatuksiaan matematiikan olemuksesta, oppimisesta ja opettamisesta. Analysoinnin ensimmäisessä vaiheessa kirjoitelmista etsittiin aineistolähtöisesti yhteisiä teemoja, joilla tutkittavat kuvasivat suhdettaan matematiikkaan. Tämän jälkeen kirjoituksista löydetyt teemat yhdistettiin niiden sisältöjen perusteella yleisemmiksi teemakokonaisuuksiksi eli pääteemoiksi. Pääteemoiksi nimettiin seuraavat kolme teema-aluetta: matematiikan luonne, matematiikan oppiminen ja matematiikan opettaminen.

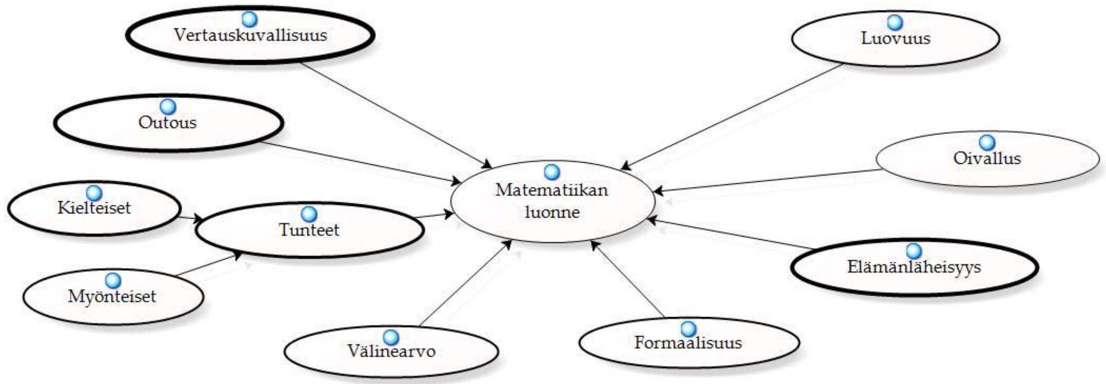
Osa tutkimukseen osallistujista täytti peruslaskutaitojen hallintaan liittyvän ALVA-kartoituksen (Ikäheimo, 2010). ALVA-kartoitus on tarkoitettu tehtäväksi ammatillisten opintojen alussa ja sen avulla voidaan kartoittaa peruskoulun matematiikan keskeisten osa-alueiden hallintaa. Kartoitus sisältää seuraavat osiot: 10-järjestelmä, päässälaskuja, desimaaliluvun käsite, murtolukulaskuja, desimaali- ja murtolukuja, yksiköitä, suuruusluokan arviointia, yksiköiden muunnoksia, yhtälöitä ja verrantoja, prosenttilaskentaa sekä kokonaisia ja osia. Lisäksi kartoituksessa on jokaisen tehtäväosion kohdalla tilaa omille kommenteille. Tällä kartoituksella haluttiin saada selville tutkittavien matematiikan perustaitojen hallintaa.

## TUTKIMUKSEN TULOKSET

'Minä ja matematiikka' -esseen tutkimustulokset esitellään ensin ja sitten ALVA-kartoituksen tulokset aihealueittain. 'Minä ja matematiikka' -esseen tutkimustuloksia on havainnollistettu kuvioilla 1-3. Kuvioissa 1-3 eri teemojen painottuneisuutta on kuvattu kuvion reunojen vahvennuksilla. Mitä tummempi reuna sitä painottuneemmin teema nousi kirjoitelmissa esille.

### Matematiikan luonne

Kuviossa 1 on kuvattu tutkittavien näkemyksiä matematiikan luonteesta.

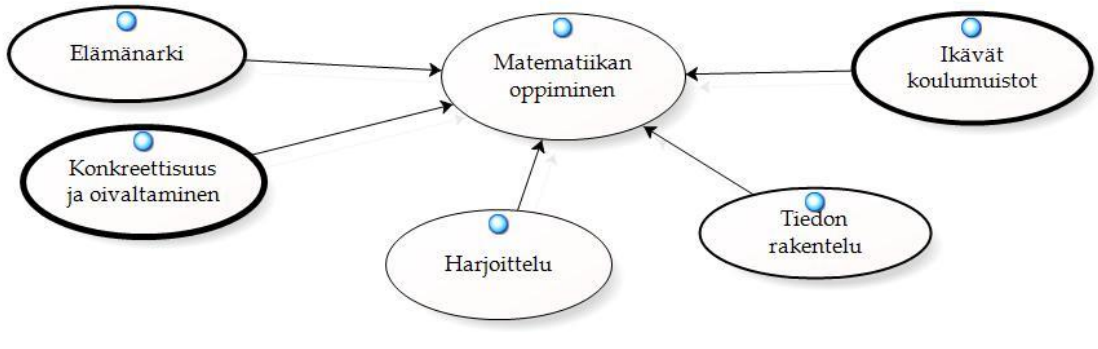



KUVIO 1 Matematiikan luonne

Matematiikan luonteessa painottui vertauskuvallisuus eniten. Nämä vertaukset olivat sellaisia, että niitä ei voinut yhdistää selkeästi mihinkään muuhun teemaan. Matematiikan outous ja elämänläheisyys painottuivat tutkittavien kirjoituksissa yhtä voimakkaana. Tunteiden kohdalla kielteiset tunteet nousivat voimakkaammin esille kuin myönteiset tunteet. Matematiikan välinearvo, formaalisuus ja luovuus eivät olleet kovin voimakkaasti esillä.

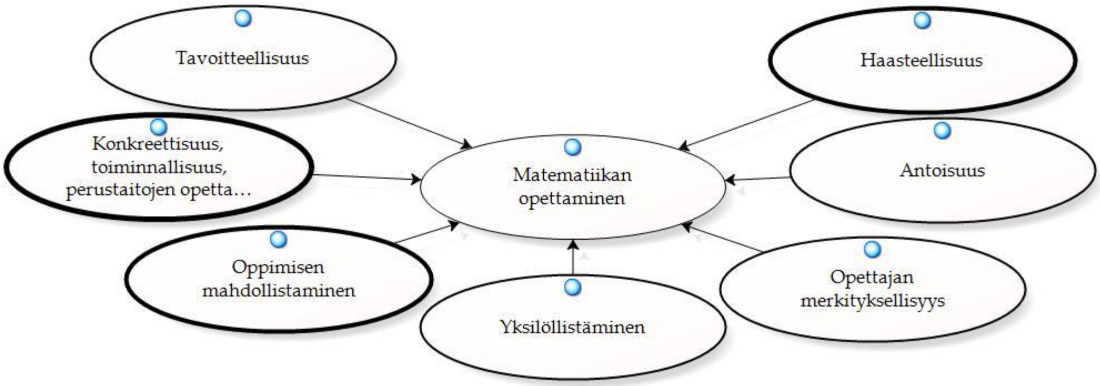
**Matematiikan oppiminen ja opettaminen**

Matematiikan oppimisessa nousi esille voimakkaimmin konkretian ja oivaltamisen merkitys. Lähes yhtä vahvana tulivat esille ikävät koulumuistot. Seuraavaksi eniten painottui matematiikan yhteys elämänarkeen. Kuviossa 2 on kuvattu tutkittavien kokemuksia matematiikan oppimisesta.




KUVIO 2 Kokemuksia matematiikan oppimisesta

Tutkittavat kirjoittivat paljon matematiikan oppimiseen ja opettamiseen liittyvistä kokemuksistaan. Matematiikan opettamisen haasteellisuus ja konkreettisuus, toiminnallisuus ja perustaitojen opettaminen painottuivat kirjoitelmissa eniten. Matematiikan opettaminen nähtiin samalla kertaa sekä haasteellisena että konkreettisena perustaitojen opettamisena sekä oppimisen mahdollistamisena (kuvio 3).

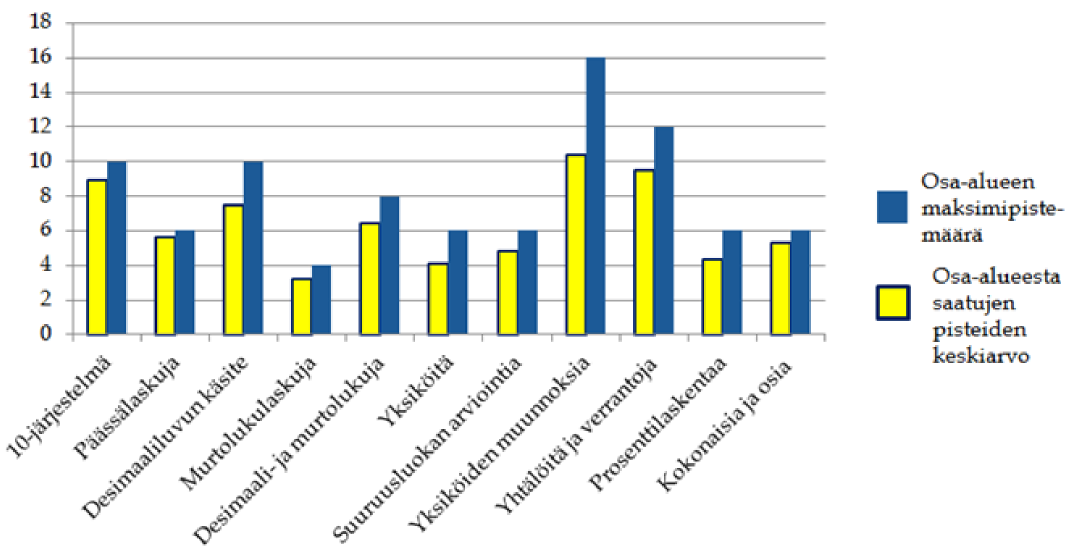



KUVIO 3 Näkemyksiä matematiikan opettamisesta

Tutkittavat näkivät, että matematiikkaa tulisi opettaa ja oppia konkreettisten välineiden avulla toiminnallisesti. Nykyisen oppimiskäsityksen (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet, 2004) mukaisesti tutkittavat halusivat nähdä opettajan oppimisen mahdollistajana.

**ALVA-kartoitus**

Opiskelijat kirjoittivat ALVA-kartoituksen tehtäväosioiden viereen tuntemuksiaan lyhyesti. Tyypillisiä kommentteja olivat: ”En muista!”; ”Meniköhän se näin?” tai ”En osaa”. ALVA-kartoituksessa paljastui, että kartoituksen tehneistä (n=68) 29 tutkittavalla oli melko heikot tai heikot peruslaskutaidot, ja heidän pistemääriensä keskiarvo oli 70/90. Kuvion 4 pylväsdiagrammissa on esitetty yhteenveto ALVA-kartoituksen tuloksista osa-alueittain. Mittayksiköiden muunnokset ovat desimaaliluvun käsitteen hallinnan ja yhtälöiden ja verrantojen ohella erityisen heikkoja osa-alueita. Heikkoudet mittayksikkömuunnosten ja desimaaliluvun käsitteen hallinnassa antavat viitteitä myös puutteista 10-järjestelmän hallinnassa.




KUVIO 4 ALVA-kartoituksen tulokset osa-alueittain

Muiden ALVA-kartoitukseen osallistuneiden pistemäärien keskiarvo oli 84,4/90 ja vain yksi kartoitukseen osallistuneista sai täydet 90 pistettä. Huolestuttavinta tuloksissa on se, että kaikki puutteelliset osa-alueet ovat suurimmaksi osaksi alaluokkien ja osaksi yläluokkien helppoja sisältöjä. Näyttäisi siltä, että 10-järjestemän ja peruslaskutaitojen hallintaan tulisi kiinnittää entistä enemmän huomiota sekä ala- että yläluokilla.

**YHTEENVETO TUTKIMUSTULOKSISTA**

Heikosti ALVA-kartoituksessa menestyneet kirjoittivat matematiikan opetuksesta ikään kuin ulkopuolisena, outona, ei heitä koskevana didaktisena retoriikkana:

> Matematiikka on arkipäivää, vaikka se tuntuisi välillä pilvissä hipovalta tieteen alalta, jota ymmärtääkseen tulee olla vähintään professori. (1148AO /ALVA 72/90)

Kielteiset tunteet näyttivät olevan yhteydessä heikkoon suoriutumiseen ALVA-kartoituksessa sekä kouluaikaisiin matematiikan kokemuksiin. Tuloksissa painottuivat omien koulumuistojen suuri merkitys etenkin ala-asteella:

> Matematiikan oppiminen itselleni on ollut todella vaikeaa. Alakoulussa en hahmottunut käsitteiden välisiä yhteyksiä. Yläkoulussa putosin kärryiltä. (1155AO /ALVA 74/90)

> Matematiikka on kuin ala-asteen koepaperi, jossa viimeisellä sivulla on vaikein tehtävä. En ymmärrä mitään, paniikissa silmäilen tehtäviä ja aina lopuksi saan kuitenkin hyväksytyn arvosanan. (1161AO /ALVA 68/90)

Matematiikan opettamisessa tutkittavat painottivat ymmärtämisen merkitystä mutta samanaikaisesti näkivät matematiikan opetuksen haasteellisena etäisenä:

> Matematiikan opettaminen on vaikeaa. …pystyn (tällä hetkellä) opettamaan osin mekaanista laskutaitoa, jolle ei välttämättä ole yhteyttä konkreettiin maailmaan. (1160AO/ ALVA 62/90)

> Ilmapiirin tulee olla välitön, jossa kukaan ei joutuisi toteamaan, että tipuin kyydistä jo kauan sitten. Opettajan tulee pitää huolta, että tällaista tilannetta ei satu, vaan tunneilla tehdään virheitä, nauretaan ja yritetään. Matematiikka tulee olla osa arkipäivää (niin kuin se onkin, mutta siten, että siitä tulee tunneillakin). (1152AO /ALVA 74 /90)

Tutkimuksen yhtenä tavoitteena oli tunnistaa aikuisen oppijan matematiikka-ahdistuksen merkkejä. Tuloksista nousi selkeästi esille, että tutkittavien itseluottamus matematiikkaa kohtaan on heikko (vrt. Ashcraft, 2002). Heikko itseluottamus matematiikka kohtaan ilmeni sekä heikkona menestyksenä ALVA-kartoituksessa että matematiikkaan kohdistuvana etäisyyden tunteena kirjoituksissa. Etäisyyden tunteella tarkoitetaan tässä sitä, että opiskelijat kirjoittivat matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta ikään kuin ulkopuolisena, ei heitä koskettavana. He eivät kyenneet antamaan omakohtaisia esimerkkejä matematiikan oppimis- ja opetustilanteista vaikka kaikilla tähän tutkimukseen osallistuneista opiskelijoista oli käytännön kokemusta matematiikan opettamisesta koulussa. Sekä Richarson ja Suinn (1972) että Räsänen (2012) tuovat esille matematiikka-ahdistuksen negatiivisen vaikutuksen esimerkiksi koetilanteissa suoriutumisessa. Kirjoituksissa näkyi myös matematiikan oppimisen ja opettamisen haasteellisuus. Myös Wilson ja Gurney (2011) ovat nostaneet esille matematiikka-ahdistuksen negatiivisen vaikutuksen opetustilanteisiin. Tutkimustulokset antavat viitteitä siitä, että matematiikka-ahdistuksen merkkejä voidaan tunnistaa juuri kirjoittamisen ja matematiikan taitojen kartoituksen avulla.

## POHDINTA JA JOHTOPÄÄTÖKSET

Epämiellyttävillä kokemuksilla matematiikan parissa on kauaskantoisia seurauksia. Osa syrjäytyy matematiikasta jopa niin, että se vaikuttaa ammatinvalintaan (ks. Jung, Ikäheimo, & Korhonen, 2013). Ahdistuneisuus antaa oikeutuksen luovuttaa matematiikan kohdalla. Myös aikuisten matematiikkasuhdetta olisi hyvä tutkia. Monet aikuiset tarvitsisivat tukea matematiikka-ahdistuksesta selviämiseen. Matematiikka-ahdistuksesta kärsivillä aikuisilla on useimmiten ongelmia matematiikan perustaidoissa. Jotta heidän osaamisensa taso voitaisiin nostaa ja itseluottamuksensa matematiikkaa kohtaan voitaisiin palauttaa, olisi hyvä, että heidän matematiikan taitonsa kartoitettaisiin huolella ja heille laadittaisiin korjaava terapeuttinen ohjelma, jossa he voisivat rakentaa matematiikan käsitteitä uudelleen ja tarkastella aikaisempia matematiikkakokemuksiaan. Näin vahvistettaisiin myönteisiä matematiikan oppimiskokemuksia, mm. toiminnallisten oppimiskokemusten avulla. (Jung, Ikäheimo, & Korhonen, 2013; Bates, Kim & Latham, 2011.) Erityisesti opettajankoulutuksessa olisi huolehdittava opiskelijoiden matematiikan taitojen ja matematiikkasuhteen kartoittamisesta. Opiskelijoille tulisi laatia korjaavia ohjelmia, joiden avulla voitaisiin vahvistaa matematiikan osaamista ja matematiikka-itsetuntoa. Matematiikka-ahdistuksen tiedostamiseen voitaisiin käyttää biblioterapiaan perustuvia menetelmiä kuten esimerkiksi reflektoivia oppimispäiväkirjoja (vrt. Wilson & Gurney, 2011). Erityisen tärkeää olisi sellainen esiopettajien ja luokanopettajien sekä erityisopettajien täydennyskoulutus, jossa selvitettäisiin osallistujien matematiikkakokemukset ja matematiikan taidot sekä annettaisiin tarvittaessa korjaavaa opetusta.

## LÄHTEET

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science,* 11(5), 181-184.

Bandura, A. (1997). *Self efficacy: The Exercise of control.* New York: W.H. Freeman.

Bates, A. B., Kim, J., & Latham, N. (2011). Linking pre-service teachers mathematics self-efficacy and mathematics teaching efficacy to their mathematical performance. *School Science and Mathematics,* 111(7), 325-333.

Cassel, D. & Vincent, D. (2011). Metaphors reveal preservice elementary teachers views of mathematics and science teaching. *School Science and Mathematics,* 111(7), 319-324.

Ikäheimo, H. (2010). *ALVA, Ammattilaskennan valmiuksien kartoitus.* Helsinki: Opperi. http://www.opperi.fi/10_testit/104_ammattikoulu.html

Jung, N., Ikäheimo, H., & Korhonen, H. (2013). Oppimisen iloa – Nean matikka. *Dimensio*, 1/2013, 40-43.

Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Helsinki: Opetushallitus.

Rautapuro, J. 2013. *Hyödyllinen pakkolasku. Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2012.* Helsinki: Opetushallitus.

Richarson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counselling Psychology,* 19(6), 551-554.

Rubinstein, O., & Tannock, (2010). Mathematics anxiety in children and developmental dyscalculia. *Behavioural and Brain Functions,* 6(46), 1-13.

Räsänen, P. (2012). Laskemiskyvyn häiriö eli dyskalkulia, *Duodecim,* 128, 1168–1177.

Wilson, S., & Gurney, S. (2011). ”My self-esteem has risen dramatically”: A case-study of pre-service teacher action research using bibliotherapy to address mathematics anxiety. Teoksessa J. Clark, J. Kissane, B., Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (toim.) *Mathematics traditions and [new] practices* (Proceedings of the 3-4th annual conferences of the Mathematics Education Research Group of Australasia and the 23rd biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers, Alice Springs, 804-812), Adelaide, SA: AAMT & MERGA.

# ONGELMANRATKAISUTEHTÄVÄT LUOKANOPETTAJAN AMMATILLISEN KEHITTYMISEN TUKENA

Päivi Portaankorva-Koivisto, Liisa Näveri, Laia Saló i Nevado,
Erkki Pehkonen ja Anu Laine

Helsingin yliopisto

*Eräs keino tukea opettajan ammatillista kehittymistä on houkutella häntä käyttämään avoimia ongelmanratkaisutehtäviä opetuksessaan. Tässä projektissa ongelmanratkaisutunteja on lähes joka kuukausi ja osallistuvat luokanopettajat Chilessä ja Suomessa teettävät niitä tunneillaan. Artikkeli kuvaa erään projektimme suomalaisen opettajan ammatillista kehittymistä. Haastatteluaineiston avulla kuvataan hänen käsityksiään matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta, sekä hänen pedagogisia tavoitteitaan ja opetusfilosofiaansa. Oppitunneilla kuvattuun videoaineistoon nojautuen tehdään havaintoja hänen käytänteistään ja toiminnastaan ongelmanratkaisun ohjaajana.*

## JOHDANTO

Tämä artikkeli liittyy Suomen Akatemian rahoittamaan kolmivuotiseen seurantatutkimukseen 2011–2013 Suomi-Chile (projektinumero #135556). Projektin tavoitteena on kehittää oppilaiden matemaattista ymmärtämistä ja ongelmanratkaisutaitoja, sekä opettajien työskentelymenetelmiä avoimien ongelmatehtävien avulla. Tutkimusprojektin suomalaisessa koeryhmässä on tänä vuonna kaikkiaan seitsemän opettajaa ja heidän oppilaansa Helsingin lähikunnista. Kolmen lukuvuoden ajan, kolmannesta luokasta viidenteen luokkaan, keskimäärin kerran kuukaudessa koeryhmän luokkien tunneilla työskennellään yhden avoimen ongelmatehtävän parissa ja samat tehtävät tehdään myös Chilessä.

Tässä artikkelissa kuvaamme yhden tutkittavan luokanopettajan ammatillista kehittymistä avoimien ongelmanratkaisutehtävien käytössä perustuen ongelmanratkaisutunneilta kuvattuihin videoihin ja opettajan viimekeväiseen (2012) haastatteluun.

## OPETTAJAN AMMATILLINEN KASVU

Opettajan ammatillisessa kasvussa voidaan nähdä kehittymistä sekä matemaattisten taitojen että matematiikan opetuksen näkökulmasta. Ammatillista kehittymistä voidaan tutkia mm. selvittämällä opettajan näkemyksiä oppilaan matemaattisesta ajattelusta ja sen kehittämisestä, havainnoimalla opettajan toimintaa matematiikan tunnilla tai kysymällä opettajan kokemuksia omasta ammatillisesta kasvustaan.

Kun tarkastellaan opettajan toimintaa oppitunnilla, voidaan tehdä havaintoja opettajasta matemaattisten tilanteiden tulkitsijana ja kuuntelijana (vrt. Ainley &

Luntley, 2007). Havaitaan esimerkiksi, kuinka hyvin opettaja huomioi ja tunnistaa oppilaiden matemaattisen diskurssin, kykenee organisoimaan opetustaan syntyvien matematiikan oppimista tukevien tilanteiden mukaan, ja kuinka herkästi opettaja tulkitsee oppilaittensa matemaattiset haasteet. Opettajan oppituntityöskentelyssä havaitaan myös missä määrin hän rohkaisee oppilaiden autonomiaa, hyödyntää oppilaiden aikaisempaa tietoa ja antaa tilaa oppilailleen väitellä ja etsiä konsensusta (vrt. Taylor ym., 1997).

Kun puhutaan avoimien ongelmien käyttämisestä opetuksessa, keskustelun keskiössä on opettajien pedagoginen sisältötieto (ks. Shulman, 1986), mutta avoimien ongelmien käyttäminen haastaa myös opettajia muuttamaan roolinsa luokassa. Opettaja ei ole enää tiedon välittäjä, vaan oppimisen opas ja helpottaja sekä oppimisympäristöjen suunnittelija. Tämä tarkoittaa, että opettajien tulee puhua vähemmän ja kuunnella syvemmin oppilaitaan. Opettajien tulee tarjota strukturoituja polkuja uusiin käsitteisiin, sallia tilaisuuksia oppijoille ajatella, keskustella ja tehdä omia kysymyksiään, sekä tukea metakognition kehittymistä Metakognition kehittyminen sisältää itsesäätelyn, valvonnan ja kontrollin taitoja, mutta myös virheiden ja väärinkäsitysten tunnistamisen. (Schoenfeld, 1992; vrt. Joutsenlahti, 2005).

Eräs pedagogisen sisältötiedon komponenteista on opettajien opetuksessaan soveltama koulumatematiikan didaktinen rakenne (vrt. Neubrand & Neubrand 2004). Hyvin usein nämä didaktiset rakenteet ovat kovin henkilökohtaisia ja riippuvat opettajien omista kokemuksista. Jos voisimme kehittää opettajille sopivia didaktisia rakenteita, ts. rakenteita, jotka he ovat valmiita omaksumaan, voisi tästä löytyä tapa auttaa opettajia kehittämään omaan opetustaan (ks. Pehkonen, 2007). Yhtä tärkeää on ottaa opettajat mukaan kokeilemaan, kehittämään ja suunnittelemaan ongelmanratkaisutehtäviä, eikä vain toteuttamaan niitä (Watson & Mason, 2007; Watson, 2008).

## OPETTAJA ONGELMANRATKAISUTEHTÄVIEN KÄYTTÄJÄNÄ

Avoimet ongelmanratkaisutehtävät voivat toimia ammatillisen kehittymisen virittäjinä. Lin (2006) toteaa, että kun opettajan tiedot, uskomukset ja asenteet kehittyvät, niin kehittyvät myös hänen käytännön taitonsa. Vähitellen opettajan taidot kontrolloida oppimista, herättää oppilaiden motivaatiota ja seurata oppimisprosessia kehittyvät. Lisäksi opettaja kehittyy lähteiden, kuten kirjallisuuden, käytössä ja oppii hyödyntämään kollegoittensa kanssa käytyjä keskusteluja ammattitaitonsa kehittämisessä. Kun opettaja harjaantuu ongelmanratkaisutehtävien käytössä, hän oppii tunnistamaan oppilaittensa ymmärtämistä ja oppimista, selvittämään oppimisen vaikeuksia ja tunnistamaan oppilaiden erilaisia oppimistyylejä.

Avoimien ongelmatehtävien käyttö opetuksessa edellyttää opettajalta rohkeutta muuttaa työtapojaan. Applebaum ja Leikin (2007) havaitsivat, että vaikka tutkittavien opettajien keskuudessa matemaattiset tutkimus- ja ongelmanratkaisutehtävät arvostettiin korkeimmalle, niitä ei kuitenkaan haluttu käyttää. Opettajat valitsivat perinteisiä tehtäviä ja johdattelivat oppilaitaan kohti tyypillisiä ratkaisuja, koska kokivat epävarmuutta ongelmanratkaisutehtävien kanssa, ja peläten, että oppilaat eksyvät ratkaisujen paljouteen tai menevät sekaisin tehtävien sopivuudesta kulloiseenkin tilanteeseen. Opettajat haluavat tuntea olonsa turvalliseksi sekä matemaattisesti että pedagogisesti. (Leikin & Levav-Waynberg, 2007.)

Franke, Carpenter, Levi ja Fennema (2001) esittävät viisi tasoa, joilla voidaan kuvata opettajan sitoutumista oppilaan matemaattiseen ajatteluun. Ensimmäisellä tasolla (1) opettaja ei usko, että oppilaat osaavat ratkaista ongelmatehtäviä ennen kuin heitä on opetettu siihen. Tähän nojautuen opettaja ei järjestä oppilailleen tilaisuuksia ratkoa ongelmia, ei kysy, miten he ne ratkaisivat, eikä hyödynnä riittävästi oppilaittensa matemaattista ajattelua opetuksen järjestelyissä. Toisella tasolla (2) opettaja uskoo, että oppilaat osaavat ratkaista tehtävän ilman varta vasten opetettua strategiaa, ja uskoo, että on olemassa useita erilaisia ratkaisuja. Hän kuitenkin valitsee tehtävät muilla perusteilla kuin oppilaitten matemaattista ajattelua silmällä pitäen, ja luottaa siihen, että oppilaille kannattaa näyttää mallia. Kolmannella tasolla (3) opettaja uskoo, että oppilaille on hyödyksi ratkoa tehtäviä omalla tavallaan. Hän antaa oppilailleen erilaisia ongelmatehtäviä ratkottavaksi ja lisäksi tilaisuuksia keskustella ratkaisuista. Hän myös kuuntelee oppilaitaan. Neljäs taso jakautuu oikeastaan kahdeksi tasoksi. Tasolla (4a) opettaja ajattelee, että oppilaan matemaattisen ajattelun kehityksen tulisi ohjata opetusta. Hän antaa oppilailleen mahdollisuuksia ratkoa ongelmia ja käyttää tietoaan oppilaitten matemaattisesta ajattelusta opetuksensa suunnittelussa. Tasolla (4b) opettaja tietää, miten opetus tulisi parhaalla mahdollisella tavalla suunnitella tukemaan matemaattista ajattelua. Tämä opettaja luo tilanteita, joissa oppilaitten matemaattinen ajattelu kehittyy ja käyttää yksilöistä saamaansa tietoa opetuksensa suunnitteluun.

## ONGELMANRATKAISUTEHTÄVÄT MUUTTUVAT KÄYTÖSSÄ

Vaikka opettaja olisikin valmis ottamaan avoimia ongelmatehtäviä opetukseensa, ei tämä kuitenkaan vielä takaa sitä, että niitä käytettäisiin tehtävien suunniteltujen tavoitteiden mukaisesti. Tzur (2008) havaitsi tutkimuksessaan, että jo opetuksensa suunnitteluvaiheessa jotkut opettajista eivät tyytyneet tehtäviin alkuperäisessä muodossaan, vaan halusivat sovittaa ne omiin tavoitteisiinsa ja mielikuviinsa oppilaiden oppimisesta. Mikäli opettaja taas aloitti opetuksen muuttamatta tehtävää etukäteen, hän saattoi kuitenkin muuttaa sitä hyvin pian huomatessaan, etteivät oppilaat edistyneetkään ratkaisussaan toivotulla tavalla. Toisinaan opettaja käytti tehtävää opetuksessaan mielestään alkuperäisen suunnitelman mukaisesti, mutta tutkijat eivät olleet tunnistaa sitä samaksi tehtäväksi, koska opettaja ei ollut itse sisäistänyt tehtävän ideaa ja esitti sen osin virheellisesti.

Syitä siihen, että opettaja muokkaa ongelmanratkaisutehtäviä voivat olla: (a) opettajan käsitykset siitä, mitä tehtävällä on suunniteltu tavoiteltavan, (b) opettajan kyky käyttää tehtävää pedagogisena välineenä tai (c) opettajan näkemys siitä, miten uusi matemaattinen idea opitaan ja mikä ongelmanratkaisutehtävän rooli on tässä tapahtumassa. (Tzur, 2008.)

Useasti opettajat ajattelevat, että oppilailla ei ole asiasta aikaisempaa tietämystä, he opettavat aiheita irrallisina toisistaan ja tekevät vain vähän linkityksiä aiheiden välille. Tehdessään kysymyksiä luokalle, he tekevät niitä vaikeusjärjestyksessä, eivät anna vaihtoehtoja, eivätkä haasteita ja edellyttävät oppilaittensa työskentelevän itsenäisesti. Proseduraalisen tiedon painottamista he perustelevat opetussuunnitelmilla, rajoitetulla ajalla, resurssien puutteella, oppilaiden heikolla motivaatiolla ja huonolla käytöksellä. (Swan, 2007).

Opettaja siis kokee, että hänen on muutettava ongelmanratkaisutehtäviä. Tehtävät eivät ehkä hänen mielestään sinällään sovellu opettajan omiin näkemyksiin tai kokemuksiin. Hän arvelee, että oppilaat eivät osaa tai menevät sekaisin tai edistyvät liian hitaasti. Niinpä hän yksinkertaistaa tehtäviä kysymyksillä ja selityksillä tai rajoittaa tehtäviin käytettävää aikaa. (Swan, 2007).

## MENETELMÄ

Artikkelissa käytetty aineisto koostuu projektiin kuuluvan yhden opettajan puolistrukturoidusta haastattelusta keväällä 2012 ja sitä edeltävästä opettajan koulupäivän havaintomuistiinpanoista, joita käytettiin haastattelun tukena, sekä projektin aikana ongelmanratkaisutunneilta kuvatuista oppituntivideoista. Haastattelussa keskeisiä teemoja olivat: taustatiedot, mitä on matematiikka ja lapsen matemaattinen ajattelu, opettajan omat matematiikan oppitunnin käytänteet, osallistuminen projektiin ja siihen kohdistuvat odotukset sekä opettajan ammatillinen kehittyminen. Aineisto analysoitiin teoriaohjaavasti sisällönanalyysinä. Tämä tarkoitti sitä, että aikaisemmassa tutkimuksessa ilmenneet havainnot opettajan ammatillisesta kehittymisestä otettiin analyysissä mukaan rakenteellisena tukena, mutta aineiston annettiin kuitenkin avata näille ilmiöille uusia ulottuvuuksia (Tuomi & Sarajärvi, 2009). Aluksi haastattelu litteroitiin niiltä osin kuin se tutkimuksen tavoitteiden kannalta oli keskeistä. Sen jälkeen oppituntivideot katsottiin useaan kertaan läpi, ja tutkimuskysymyksen kannalta oleelliset kohdat litteroitiin. Haastatteluaineistosta poimittiin opettajan esittämiä näkemyksiä matematiikasta ja matemaattisesta ajattelusta ja siitä, miten hän niitä soveltaa opetuksessaan sekä kohtia, joissa opettaja kuvaa opetusfilosofiaansa. Videoaineiston analyysissä keskityttiin tarkastelemaan ongelmanratkaisutuntien eri vaiheita ja avoimien ongelmatehtävien muuttumista opettajan toiminnan seurauksena.

Tämän tarkastelun tutkimuskysymyksenä on: *Millä tavoin opettajan haastattelussa esiin nostamat näkemykset omasta opettajuudestaan näkyvät hänen toiminnassaan ongelmanratkaisutunneilla?* Artikkelissa ei siis perehdytä opettajan todellisiin matemaattisiin ja pedagogisiin valmiuksiin, vaan keskipisteenä on opettajan toiminta oppitunnilla ensinnäkin hänen itsensä tulkitsemana ja toiseksi kirjoittajien havainnoimana.

**Tutkittava**

Opettaja oli haastatteluhetkellä työskennellyt noin 20 vuotta opettajana ja viimeiset 8 vuotta pääkaupunkiseudulla noin 630 oppilaan koulussa, jossa henkilökuntaa on lähes 80. Toimintaympäristönä kyseinen koulu on monipuolinen. Siellä toimii kielikylpy- ja musiikkiluokkia, harjaantumisopetusta, vaikeasti vammaisten opetusta, autismiluokkia ja yleisopetuksen erityisluokkia. Koulun oppilaista useat ovat maahanmuuttajaoppilaita, henkilökuntaan kuuluu eri äidinkielten ja uskontojen opettajia ja opettajakunta on mukana monissa hankkeissa (mm. KiVa-koulu ja Liikkuva koulu). Opettajan omalla luokalla on 17 oppilasta (11 poikaa ja 6 tyttöä). Opettaja kertoi lähteneensä mukaan projektiin rehtorin ehdotuksesta, mutta mielellään. Tavoitteinaan hän kuvaa olleen oman ammattitaidon kehittäminen, tilaisuus oppia erilaisia tapoja opettaa matematiikkaa ja mahdollisuus saada oppilailleen vaihtelua.

**Esimerkkejä projektin avoimista ongelmanratkaisutehtävistä**

Avoin ongelmanratkaisutehtävä on tehtävä, jonka ratkaiseminen vaatii, että ratkaisijan on yhdisteltävä ennestään tuttua tietoa hänelle uudella tavalla. Avoimessa ongelmanratkaisutehtävässä joko alku- tai lopputilanne tai molemmat sisältävät useita vaihtoehtoja. (ks. Pehkonen, 2004.) Seuraavassa esitellään kolme artikkelin tulososassa esiin tulevaa projektin avointa ongelmanratkaisutehtävää: lipputehtävä (3. kokeiluongelma, 1/2011), aritmagon -tehtävä (4. kokeiluongelma, 2/2011) ja tikut ja herneet -tehtävä (10. kokeiluongelma, 2/2012).

Lipputehtävä:

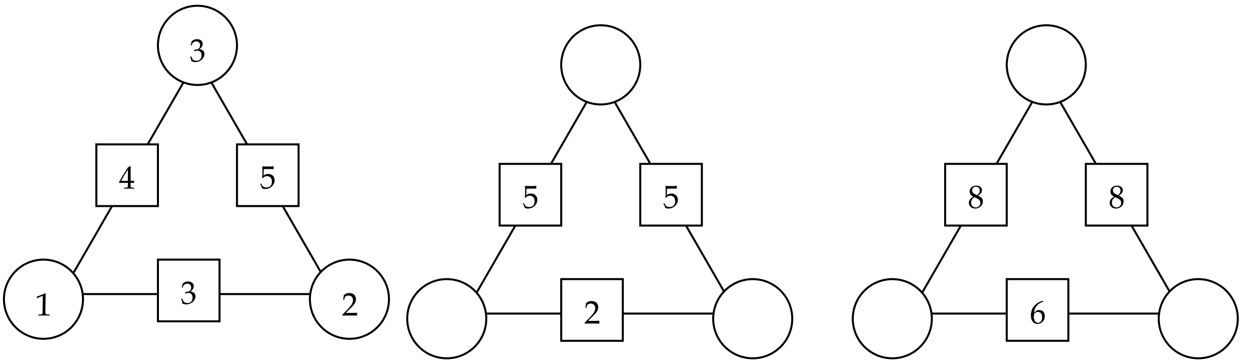
Tehtävänäsi on suunnitella lippuja. Lippujen tulee olla raidallisia ja saat käyttää vain kolmea väriä. Suunnittele niin monta lippua kuin keksit.

Aritmagon -tehtävä:

Aritmagonissa kolmion jokaisessa kulmassa on luku, ja kahden kulman lukujen summa merkitään niitä yhdistävälle sivulle. Ratkaise kulmiin tulevat luvut.

Yritä keksiä menetelmä, jolla voi aina ratkaista aritmagonin kulmissa olevat luvut, kun sivujen luvut on annettu ja sivuilla on kaksi samaa lukua.

Laadi yksi helppo ja yksi vaikeampi aritmagon -tehtävä.




Tikut ja herneet :

Rakennetaan kolmiulotteisia kappaleita käyttäen cocktail-tikkuja särminä ja herneitä kärkipisteinä. Esimerkiksi kuution rakentamiseen tarvitaan 12 cocktail-tikkua ja 8 hernettä. Rakenna kolmiulotteisia kappaleita, joihin tarvitaan vähemmän tikkuja kuin 12. Joka särmällä on vain yksi tikku. Tutki rakentamiasi kappaleita ja kirjaa taulukkoon kappaleisiin käyttämiesi tikkujen ja herneiden lukumäärä. Miksi tässä on kaikki mahdolliset kappaleet, joissa on alle 12 tikkua? Tutki, mitä kolmiulotteisia kappaleita saat rakennettua (a) enintään 16 tikulla, (b) entä enintään 24 tikulla, (c) tai enintään 32 tikulla, … Tutki rakentamiasi kappaleita ja kirjaa taulukkoon kappaleeseen käyttämiesi tikkujen ja herneiden määrä. Miten tiedät, että tässä olet rakentanut kaikki mahdolliset kappaleet jokaisessa tapauksessa (a)–(c)?

## TULOKSIA

### Opettajan toimintaa taustoittavat piirteet haastatteluun perustuen

Opettajan näkemyksiä matemaattisesta ajattelusta ja matematiikasta kuvastavat eksaktius ja luovuus.

> Matemaattinen ajattelu on yks tapa hahmottaa maailmaa. Matematiikkaan mun mielestä niinku liittyy tämmönen niinku tietynlainen struktuuri ja järjestelmällisyys ja tarkkuus ja tämmösiä, tämmösiä ominaisuuksia. Ja sitten toisaalta niinku luovuus just tässä ongelmanratkaisussa, että tavallaan niinku tarkastellaankin eri näkökulmista ja niinku jotain vallitsevaa ongelmaa voidaan niinku lähteä ihan uudella tavalla ajattelemaan ja miettimään. Että vaikka matematiikka on hirveen eksaktia tietyssä määrin niin kuitenkin sitt siin on mahdollisuus sitt etsiä niit eri näkökulmia.

Hän tunnustaa epävarmuuden aineenhallinnassaan ja haluaa kyseenalaistaa sääntöjä ja määritelmiä.

> Mutt kyll mä aina niissä koulutuksissa, mulle aina pitää vääntää rautalangasta kaikki niinku jotkut ihan perusasiatkin. […] Mä niinku aina välillä niinku asetan kyseenalaiseksi, ett onks tää sääntö nyt niinku välttämättä oltava voimassa vai voidaanks tätä ajatella jollain muulla tavalla?

> […] Esimerkiks ku on nää Platonin kappaleet. […] Miks niitten kappaleiden pitää olla just semmosia? […] Mikä tekee kappaleesta kappaleen? […] Ett miksei siin voi olla sitt näit ulokkeita? […] Milloin se on vielä kappale ja milloin se on jotain muuta, milloin se on sitten se häkkyrä? [Viittaa Tikut ja herneet –ongelmanratkaisutuntiin.]

Matemaattista ajattelua opettaja haluaisi kehittää nimenomaan juuri kyseenalaistamalla ja avoimin mielin ”heittäytymällä ongelman kimppuun.”

> On tiettyy säännönmukaisuutta ja struktuuria. […] Kertolasku on se mikä se on. […] Mutta sitten sitä itse ajatteluprosessia ja ajattelutapaa niinku just sillä kyseenalaistamisilla ja uusilla näkökulmilla ja ettei niinku tarjoillakaan valmiita vastauksia, vaan lähetään niitä ite etsimään. […] Ja niinku tavallaan ikään kuin heittäytymällä niinku sen ongelman kimppuun, tietämättä että mitä siitä välttämättä syntyy ja se lopputulos voi olla jotain ihan muuta mitä on koskaan tullut ajatelleeksikaan.

Luovia ideoita arvostaessaan opettaja törmää oppitunneillaan ennakoimattomiin tilanteisiin.

> Ja sitt mä niinku huomaan sen että lapset lapset keksii semmosia ratkaisuja, mitä itelle ei tulis ikinä mieleenkään. […] Että lasten niinku ajattelu voi olla toisaalta paljon niinku tämmöstä niinku sääntökeskeistä ja toisaalta sitten taas ne voi päästä paljon niinku semmosiin sfääreihin, mitä niinku aikuinen ei, ei tu ajatelleeksi.

Hän toimii näissä tilanteissa mieluummin kannustaen kuin vastauksien oikeellisuutta pohtien.

> Mä yleensä annan siitä positiivista palautetta. […] Tavallaan mä en niinku sillä tavalla arvota sitä, ett onks se oikein tai väärin. […] Kyll mä niinku hyväksyn paljon semmosia vastauksia, mitä joku ehkä ajattelis että ei toi nyt oo mikään oikee vastaus.

Opettajan opetusfilosofiaa kuvaa oppilaiden huomioiminen. Hänelle vuorovaikutus oppilaiden kanssa on läsnäoloa ja hän käyttää paljon aikaa tunnin alusta virittäytymiseen ja asioiden pohjustamiseen. Keskeistä hänelle luokkatyössä on toiminnallisuus ja kokemuksellinen oppiminen.

> Mä jotenkin luotan siihen, että se omasta kokemuksesta oppiminen on hirveen arvokasta. […] Ja just toi, että pääsee itse tekemään, sen sijaan, että mä pelkästään vaan demonstroisin, niin mä mieluummin niinku laitan lapset tekemään.

Opetuksessaan hän ei halua edetä kiiruhtaen, vaan oppilaita kuunnellen ja heihin luottaen.

> Helpommin reagoi siihen, mitä sillä hetkellä tapahtuu. […] Luotan prosessiin ja oppilaan omaan kokemukseen. […] Jos ei me tänään keritä jotain asiaa, niin ehkä huomenna tai joskus myöhemmin. […] Luotan siihen, että ku lapset itse

> tarkistaa, niin ne niinku sitten on ittellensä rehellisiä. […] Luotan myös siihen lapsen omaan niinku käsitykseen siitä omasta osaamisestaan.

**Opettajan toimintaa kuvaavat piirteet videomateriaaliin perustuen**

Ongelmanratkaisutuntien alkua kuvaa opettajan melko vähäinen valmistautuminen etukäteen. Hän kertoo siitä tunnin aikana tutkijoille.

> Kyll ne syntyy yleensä siitä hetkestä että mikä on meneillään.

Strukturoimattomuus näkyy sekä tehtävien pohjustamisessa että tehtävien esittämisessä.

> Tuijottelepa hetken aikaa niitä numeroita ja mieti mikä idea on siinä, ett just noi numerot on siellä ympyröissä. (Aritmagon -ongelmanratkaisutunti)

> Teidän tehtävä on sitte lähtee suunnittelemaan lippuja. Siinä on muutama ehto. Saa käyttää kolmea väriä ja niiden pitää olla raidallisia lippuja. Valitse kolme väriä, joita käytät ja sitten pitää olla joka lipussa kolme raitaa, ei sanota että minkä muotoisia ne raidat ovat tai mihin suuntaan te saatte itse päättää sen. Saa olla ihan mielikuvituslippuja, jos se muistuttaa jonkin maan lippuja niin ei se haittaa. Saa olla ihan mielikuvituslippuja. Saa työskennellä vieruskaverin kanssa. (Lippu-ongelmanratkaisutunti)

> Tää tikku ja herne menee aika kivasti tällai yhteen. Me lähdetään näistä rakentelemaan. […] ja idea on se että me rakennellaan erilaisia kappaleita. […] Mä vähän selvitän teille mistä on kysymys. Mä rakennan nyt yhden kappaleen ja voitte kattoo, mikä siitä tulee. […] Nyt mulla on yks herne ja yks tikku ja mä laitan toisen herneen tähän toiseen päähän ja sitt mä lähden tästä rakentaan eri suuntaan. [opettaja rakentaa neliön] Mikä tästä nyt tuli?

> Oppilaat: Neliö.

> Mutt neliö ei ookaan kolmiulotteinen eli tää on kaksulotteinen. Täss on tonne suuntaan ja tonne suuntaan niinku leveys ja syvyys, mutt nyt jotta tästä tulis kolmiulotteinen, mun pitää rakentaa tätä vielä tänne ylöspäin [oppilaat haluavat jo itse tehdä ja opettaja luovuttaa] No, sopiiks mä näytän tän verran. [opettaja laittaa yhden tikun ylöspäin] Eli tää on nyt keskeneräinen eli sen pitää olla niinku ehjä sen muodon. (Tikut ja herneet –ongelmanratkaisutunti)

Mutta myös tehtävien ohjaamisessa ja purkamisessa oli puutteita ja toisinaan syntyi väärinkäsityksiä, jotka muuttivat ongelmatehtävän toiseksi. Kun oppilaat keksivät itse aritmagon –tehtäviä, he valitsivat isoja lukuja, negatiivisia lukuja, käyttivät yhteenlaskun sijasta vähennyslaskuja ja muokkasivat annettua lähtötilannetta vapaasti useisiin eri suuntiin.

Tilanne 1 (Aritmagon -ongelmanratkaisutunti)

> Opettaja: Voiks kahdesta vähentää viittä?

Tilanne 2 (Aritmagon -ongelmanratkaisutunti)

Opettaja: Onks tämmönen mahdollista ratkaista, ku tuoll on nolla tuolla alhaalla? 2 + 2 ei ole 0”

Oppilas: 2 – 2 = 0

Opettaja: Jos aattelee sen miinuslaskuna. … Hyvä te, te ootte viisaita.

Eikä opettaja tohtinut uskaltanut puuttua ratkaisujen laadukkuuteen.

> Sulla on kaikki erilaisia siellä on erivärisiä kaikenlaista muotoa ja kuviota. Siellä on erilaisia muotoja mitä te ootte käyttäneet kolmioita ja tähtiä ja ympyröitä. Mutta kolmea väriä, hyvä. (Lippu-ongelmanratkaisutunti)

Samoin kävi Tikut ja herneet-ongelmanratkaisutunnilla.

> Eli ei näistä tullut nyt suljettuja, se lähti elämään omaa elämäänsä. Mutt kato, miten makee tää on. Siis nää on ihan mielettömän hienoja.

## POHDINTA

Vaikka ongelmanratkaisutunneilta kuvattu videomateriaali ei sinällään vastaa siihen, miten opettaja matematiikan opetustaan toteuttaa, monet hänen haastattelussa esiin tuomansa piirteet on silti havaittavissa näilläkin tunneilla. Oppituntivideoilta havaitaan, että opettaja tulkitsee tilanteet oppilaantuntemukseensa nojaten, ei substanssitietoon tai pedagogiseen sisältötietoon tukeutuen (vrt. Ainley & Luntley, 2007). Hän arvostaa luovia ratkaisuja ja ennakkoluulotonta työskentelyä ja nauttii oppilaitten työskentelyn seuraamisesta. Franken ym. (2001) esittämiin viiteen tasoon verrattuna, opettaja vaikuttaisi aineistonkeruuhetkellä toimivan ongelmanratkaisutunniksi suunnitellulla tunnilla tasojen 2 ja 3 välimaastossa. Hän toteuttaa sovittua tehtävää, mutta organisoi tehtävät pikemminkin taatakseen oppilaille vaihtelua ja virkistystä kuin kehittääkseen oppilaiden matemaattista ajattelua. Hän antaa oppilaille autonomiaa (vrt. Taylor ym., 1997), mutta se perustuu useilla tunneilla pikemminkin ennakkovalmistelujen vähäisyyteen kuin tavoitteelliseen ongelmanratkaisutaitojen ja metakognitiivisten taitojen kehittämiseen. Hän näyttää oppilaille tarvittaessa mallia, mutta kuten Tikut ja herneet –ongelmanratkaisutunnilla keskeneräiseksi jäänyt malli antaa rakennelmien laatimiseen hyvin erilaisen lähtökohdan kuin valmiiksi tehty malli. Niinpä avoimet ongelmanratkaisutehtävät muuttuvat jo ennen tehtävään ryhtymistä (vrt. Tzur, 2008; Swan, 2007).

Opettaja luo tunneille ilmapiirin, jossa oppilaat saavat itsenäisesti muokata tehtäviä aikaisempien kokemustensa perusteella ja keskustella eri vaihtoehdoista (vrt. Taylor ym., 1997), mutta kannustamiseen ja oppilaiden tukemiseen nojautuva, kokemuksellisuutta painottava opetus johtaa helposti siihen, että tehtävät saavat hyvin strukturoimattomia, vapaita muotoja ja opettaja ei tohdi puuttua ratkaisujen laadukkuuteen. Joissain tilanteissa nämä yllättävät ratkaisut haastavat myös opettajan aineenhallinnan ja pedagogisen sisältötiedon (ks. Shulman, 1986).

Opettajan myönteinen asenne matematiikkaa kohtaan ja halu kyseenalaistaa matematiikan totuuksia ovat rohkaisseet opettajaa mukaan projektiin. Hän on innostunut ja haluaa kehittää opetustaan. Tehtävien pohjustaminen ja tulosten purkaminen kehittyvätkin projektin aikana, esimerkiksi työskentelyn keskelle ilmaantuu välitarkistuksia ja –yhteenvetoja. Oppilaiden oivallusten käyttäminen matemaattisen ajattelun kehittämisen tukena osoittautuu opettajan mielestä kuitenkin vielä projektin tässä vaiheessa tarpeettomaksi.

Miten opettajia sitten halutaan kannustaa ongelmatehtävien käyttämiseen? Ongelmanratkaisutehtävä ei ole vain tehtävä. Se on työväline toisten työvälineiden joukossa, suunniteltu tiettyyn tarkoitukseen. Merkitykselliseksi ongelmanratkaisutehtävä tulee, kun siitä tulee osa matematiikan opetusta, opettajan ja oppilaiden työskentelyä (vrt. Franke ym., 2001, 4. taso). Tehtävällä itsellään ei myöskään ole omaa agendaa, vaan sen agenda on piilotettuna siihen, miten tehtävä aiotaan toteuttaa. On siis tärkeää tarkastella yhdessä opettajien kanssa sitä, miten ongelmanratkaisutehtäviä toteutetaan (vrt. Watson, 2008). Tärkeää on myös löytää näitä erilaisia toteutustapoja ja vertailla keskenään, millaista matematiikkaa ne kulloinkin tuottavat kuten tämän Suomi-Chile -projektin aikana tullaan tekemäänkin. (vrt. Laine ym., 2012)

Opettajan taidot sitouttaa oppilaansa ongelmanratkaisuun ovat keskeisiä, mutta yhtä tärkeää on, että aktiviteetin kautta löydetään jotain matemaattisesti mielekästä. Opettajalta edellytetään silloin myös matemaattista sujuvuutta, taitoa käyttää matemaattisia menetelmiä, erilaisia esitysmuotoja (representaatioita) ja esitystapoja. Tarvitaan myös kykyä nähdä yhteyksiä matematiikan osa-alueiden välillä ja tietoisuutta siitä, mitkä tavat ovat relevantteja kuhunkin ongelmanratkaisutehtävään. (vrt. Watson & Mason, 2007.) Sopivia didaktisia rakenteita kartoittamalla ja niiden vahvuuksista keskustelemalla voitaisiin auttaa opettajia kehittämään omaan opetustaan (ks. Pehkonen 2007). Mielenkiintoista on projektin päättyessä nähdä, onko kolmivuotinen kuukausittain toistuva avoimien ongelmanratkaisutehtävien käyttö ja näiden yhteydessä toteutuneet opettajatapaamiset muuttaneet opettajien näkemyksiä ongelmanratkaisun käytöstä matematiikan opetuksessa.

**LÄHTEET**

Ainley, J., & Luntley, M. (2007). The role of attention in expert classroom practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10* (1), 3–22.

Applebaum, M., & Leikin, R. (2007). Teachers' Conceptions of Mathematical Challenge in School Mathematics. Teoksessa J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (toim.) *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Seoul: PME* 2, 9-16.

Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Fennema, E. (2001). Capturing Teachers' Generative Change: A Follow-Up Study of Professional

Development in Mathematics. *American Educational Research Journal 38*(3), 653-689.

Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä-1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*. Tampere University Press.

Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E., Ahtee, M., Heinilä, L., & Hannula, M.S. (2012). Third-graders' problem solving performance and teachers' actions. Teoksessa *Proceedings of the ProMath meeting in Umeå* (ed. T. Bergqvist), 69–81. University of Umeå.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics 66*, 349-371.

Lin P-J. (2006). Conceptualizing teachers' understanding of students' mathematical learning by using assessment tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education 4*, 545-580.

Neubrand, M., & Neubrand, J. 2004. Innere Strukturen mathematischer Leistungen im PISA-2000-Test. Teoksessa *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000* (Hrsg. M. Neubrand), 87–108. Wiesbaden: VS-Verlag für Sozialwissenschaften.

Pehkonen, E. (2004). State-of-the-Art in Problem Solving: Focus on Open Problems. Teoksessa *ProMath Jena 2003. Problem Solving in Mathematics Education* (toim. H. Rehlich & B. Zimmermann), 93–111. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Pehkonen, E. (2007). Über "teacher change" (Lehrerwandel) in der Mathematik. Teoksessa *Mathematische Bildung - mathematische Leistung: Festschrift für Michael Neubrand zum 60. Geburtstag* (toim. Hrsg. A. Peter-Koop & A. Bikner-Ahsbahs), 349–360. Hildesheim: Franzbecker

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Osoitteesta: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.87.7976&rep=rep1&type=pdf

Shulman, L.S. 1986. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15* (2), 4–14.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: a design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 217–237.

Taylor, P.C., Fraser, B. J., & Fisher, D.L. (1997). Monitoring constructivist classroom learning environments. *International Journal of Educational Research*, 27(4), 293–302.

Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2009). Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

Tzur, R. (2008). A researcher perplexity: why do mathematical tasks undergo metamorphosis in teacher hands? Teoksessa O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (toim.) *International Group for the Psychology of Mathematics Education. Mathematical Ideas: History, Education, and Cognition. Proceedings of the Joint Meeting of PME32 and PME-NA XXX, México* 1, 139–146.

Watson, A. (2008). Task transformation is the teacher's responsibility. Teoksessa O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (toim.) *International Group for the Psychology of Mathematics Education. Mathematical Ideas: History, Education, and Cognition. Proceedings of the Joint Meeting of PME32 and PME-NA XXX, México* 1, 147–153.

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 205–215.

# MINÄKÄSITYS, MOTIVAATIO SEKÄ TUNTEET MATEMATIIKKAAN LIITTYEN: KOLMASLUOKKALAISTEN VERTAILUA SUOMESSA JA CHILESSÄ

Laura Tuohilampi[1] ja Valentina Giaconi[2]

[1]Helsingin yliopisto, [2]Chilen yliopisto

*Tutkimuksessa tarkasteltiin suomalaisten ja chileläisten kolmasluokkalaisten affektiivisten osa-alueiden tilaa. Huomattiin, että nämä ulottuvuudet ovat tässä ikävaiheessa hyvin positiivisia. Kulttuuriin viittaavia eroja maiden väliltä löytyi: osaamisen kokemuksen sekä yrittämisen suhteen suomalaisoppilaat erosivat chileläisistä, suomalaisten eduksi. Löytyi myös yhtäläisyyksiä: matematiikan oppiminen koettiin hyvin tärkeäksi molemmissa maissa. Kiinnostavia eroja olivat myös affektiivisten ulottuvuuksien erilaiset yhteydet suomalaisilla ja chileläisillä. Raportissa tarkastellaan näihin yhteyksiin liittyviä mahdollisuuksia sekä problematiikkaa.*

## JOHDANTO

Lukuisten tutkimusten mukaan affektiiviset ulottuvuudet, kuten minäkäsitys, motivaatio sekä tunteet, luovat pohjaa matematiikan oppimiselle (ks. esim. Op 't Eynde, De Corte, & Verschaffel, 2002; Leder, 2006; Hannula, 2011). Tiedetään lisäksi, että affektit muovautuvat iän ja kehityksen mukana (Harter, 1999). Pienillä lapsilla käsitys omista ominaisuuksista, asennoituminen sekä tunteiden tunnistaminen on tyypillisesti erittäin positiivisesti värittynyttä ja näin ollen herkästi epärealistista sekä eriytymätöntä. Positiivisuus lankeaa kaikkiin affektien osa-alueisiin. Kehityksen myötä asennoituminen, käsitys itsestä sekä käsitys omista tunteista tarkentuu sosiaalisen arvioinnin kautta. Käytännössä tämä arviointi vaikuttaa siten, että positiivisuus vähenee käsityksen tullessa realistisemmaksi. Matematiikassa asenteet saattavat kuitenkin muodostua liiankin kielteisiksi (esim. Hirvonen, 2012).

Tässä raportissa esitellään tuloksia tutkimuksesta, jonka tavoite oli vertailla matematiikkaan liittyvien affektiivisten osa-alueiden eroja ja yhtenevyyksiä Suomen ja Chilen erityyppisten kulttuurien välillä. Vaikka kumpikin maa voidaan lukea länsimaiseksi ja teollistuneeksi, on näiden kahden maan välinen suoritustaso matematiikassa raportoitu usein varsin erilaiseksi (esim. OECD, 2010).

Affektien kulttuurisissa vertailuissa on havaittu problematiikkaa (ks. esim. Lee, 2009). Esimerkiksi motivaatiolla näyttäisi olevan kulttuurista riippuva merkitys: siinä missä monissa länsimaisina pidetyissä maissa (Pohjois-Amerikka, monet Euroopan maat, Skandinavia) sisäinen motivaatio yhdistyy voimakkaasti haluun oppia, on monissa Aasian maissa ulkoisella motivaatiolla vahva yhteys oppimistuloksiin. Tämä taas voi johtua ajatuksesta, että ulkoinen motivaatio kertoo halusta oppia yhteisön hyväksi, kun taas sisäinen motivaatio on pikemminkin itsekeskeinen syy (Hofstede & Hofstede, 2005). Vastaavasti affektien eri osa-alueiden yhteys suoritustasoon matematiikassa näyttäisi kulttuurista riippuvalta (Lee, 2009). Joissakin kulttuureissa, kuten Suomessa, vähäinen matematiikkapelko on yhteydessä hyviin suorituksiin, kun taas toisissa (kuten Japanissa ja Koreassa; Lee, ibid.) hyviä suorituksia havaitaan matematiikkapelosta huolimatta. Tällöin matematiikkapelko saatetaan nähdä luonnollisena osana oppimista. Kuitenkin näissäkin maissa suurempi suhteellinen matematiikkapelko saattaa olla yhteydessä matalampaan suoritustasoon vähemmän pelkoa kokeviin verrattuna.

Affektien ja suoritustason välisten yhteyksien erilaisuus eri kulttuureissa ei sinänsä välttämättä ole ongelma, mutta siitä tulee sellainen, jos yhteyksiä tutkitaan ja raportoidaan käsittäen niiden merkitykset yhtenevinä. Onkin esitetty (esim. Bodas & Ollendick 2005), että osasyy ristiriitaisille tuloksille koskien toisaalta affekteja sellaisenaan, toisaalta koskien affektien ja suoritustason yhteyksiä, on eräänlainen vääristynyt subjektiivisuus: jos käytettävät käsitteet ja mittarit on muodostettu jonkin kulttuurisen ryhmän viitekehyksestä käsin, saattaa tutkimusasetelma tuottaa harhaanjohtavia tuloksia toisenlaista kulttuurista ryhmää tutkittaessa.

Tässä raportissa käsitellään näitä subjektiivisen mittauksen aiheuttamia haasteita, esitellään kahden toisistaan eroavan kulttuurin affektiivisten osa-alueiden eroja ja yhtenevyyksiä ja arvioidaan näiden merkityksiä. Tutkimus on osa laajempaa tutkimusprojektia, joka tarkastelee oppilaiden ja opettajien kehittymistä Suomessa ja Chilessä kognitiivisesti sekä affektiivisesti kolmivuotisen avoimiin ongelmiin keskittyvän intervention seurauksena.

## TEORIATAUSTAA

Tutkimuksessa käsitellyt käsitteet pohjautuvat käytettyyn mittariin. Mittari käsittää affektien *kognitiivisen ulottuvuuden* (käsitykset omasta osaamisesta, itseluottamuksesta sekä matematiikan vaikeudesta), *emotionaalisen ulottuvuuden* sekä *motivationaalisen ulottuvuuden*.

*Kognitiivinen ulottuvuus* pitää sisällään uskomukset ja käsitykset (tiedostamattomat ja tiedostetut). Nämä on tyypillisesti erotettu tiedon käsitteestä, pitäen uskomuksia ja käsityksiä yksilöstä riippuvina, subjektiivisina rakennelmina, joille yksilö itsekään ei aina löydä selkeitä perusteluja (McLeod, 1992; Op't Eynde et al., 2002).

*Emotionaalinen ulottuvuus* on määritelty Hannulan (2011) toimesta "tyypillisiksi emotionaalisiksi reaktioiksi tyypillisiin matematiikan oppituntien tilanteisiin" (s. 45, käännös suomenkielisen kirjoittajan). Juuri emotionaalinen ulottuvuus on monissa tutkimuksissa todettu oppilailla varsin negatiiviseksi, erityisesti alakouluikäisiä vanhemmilla oppilailla (esim. McLeod, 1992; Metsämuuronen, 2010).

*Motivaatio* heijastaa yksilöllisiä arvoja ja toiveita ja selittää yksilön tekemiä valintoja. Motivaation ollessa luonteeltaan vapaavalintainen, ei siihen liittyen voida tehdä arvioita sen hyvyydestä tai huonoudesta (Op 't Eynde et al., 2002). Motivaatioon liittyvässä tutkimuksessa on vallalla monenlaisia suuntauksia, tässä keskitytään Hannulan (2011) esittämään malliin, jossa motivationaalinen ulottuvuus on yhteydessä kognitiiviseen ja emotionaaliseen ulottuvuuteen. Nämä kolme yhdessä muodostavat mallissa affektirakenteen, jossa jokaisella ulottuvuudella on psyykkinen, fyysinen sekä sosiaalinen ilmenemismuotonsa. Ilmenemismuodot puolestaan riippuvat ilmiön kestosta (joko tilannekohtainen tai pysyvä: Hannula, 2011).

**Affektiivisten ulottuvuuksien kehittyminen**

Op 't Eynde et al (2002) toteavat uskomusten syntyvän siitä, mitä alun perin kerrotaan (what is first told). Jos siis uutta informaatiota annetaan, eikä mikään aiempi ole sen kanssa ristiriidassa, sitä pidetään herkästi totuutena. Harter (1999) on tutkimuksissaan todennut samaa: yleinen minäkuva näyttäytyy kehityksen alkupuolella (lapsuudessa) epärealistisen positiivisena. Lähtökohta on siis, että omaa erinomaisuutta pidetään totuutena niin pitkään, kunnes jokin uusi tieto (tai kokemus) asettuu ristiriitaan tämän totuuden kanssa. Sosiaalistuminen saa aikaan tarkempaa arviointia itsestä, perustuen oman toiminnan aiheuttamiin reaktioihin toisissa; Harterin (ibid.) mukaan tämä kehitysvaihe sijoittuu varhaisille kouluvuosille. Tämä itsetuntemuksen paraneminen ei kuitenkaan ole negatiivinen, vaan pikemminkin välttämätön osa kehitystä, sillä ellei lapsi saa kokemusta sekä positiivisten että negatiivisten puolien tunnistamisessa esimerkiksi sosiaalisesti puutteellisesta ympäristöstä johtuen, on hänen vaikea oppia tunnistamaan eri asioiden merkityksiä (mikä voi puolestaan johtaa järjestäytymättömään käytökseen sekä vaikeuksiin motivaatiossa tavoitteiden jäsentymättömyydestä johtuen).

Tässä tutkimuksessa käsiteltävät kolmasluokkalaiset ovat useimmiten tasolla, jossa ymmärretään itseen liittyvän sekä positiivisia että negatiivisia puolia, sekä ymmärretään itsen koostuvan sekä omasta kokemuksesta että siitä, millaisena tuo ”itse” muille näyttäytyy. Osa oppilaista saattaa kyetä jo tarkempaankin erotteluun, kuten positiivisuuden ja negatiivisuuden havaitsemiseen kapeammalla alueella, esimerkiksi kouluun liittyvissä suorituksissa (hyvä matematiikassa, huono äidinkielessä) (Harter, 1999).

Uskomukset ja käsitykset muodostuvat yksilöllisten kokemusten ja arviointien pohjalta. Nämä käsitykset ovat usein hyvin pysyviä, ja vaativat muuttuakseen merkittävän ja avoimen ristiriidan jonkin uuden kokemuksen kanssa. Tämän uuden kokemuksen tuoma ajatus *joko* muuttaa aiemman käsityksen, *tai* se hylätään, *tai* se hyväksytään osaksi aiempaa uskomusrakennetta: yksilö voi siis pitää uskomusrakenteessaan ristiriitaisiakin käsityksiä, joko asettamalla nämä täysin erilaisiin konteksteihin tai pienentämällä jommankumman merkitystä (Chapman, 2002).

**Suomi ja Chile**

Tutkimuksen kohdemaat eroavat muun muassa sosioekonomisissa sekä koulutukseen liittyvissä asioissa. Chilessä on yksi maailman matalimmista Gini-indekseistä [6] (0.52 vuonna 2009, Suomessa 0.27 vuonna 2008). Tämä epätasaisuus tulonjaossa johtuu suurelta osin segregoituneesta koulutusjärjestelmästä (Valenzuela, Bellei & De Los Rios 2009). Chilessä vähemmistö kouluista on julkisia ja täten maksuttomia, kun taas Suomessa lähes kaikki koulut ovat tällaisia. Suomessa kolmasluokkalaisten viikkotuntimäärä on maailman alhaisimpia (23 tuntia on minimi), Chilessä viikkotuntimäärä on OECD maiden korkein (38 tuntia). Suomessa opettajilla tulee olla ylempi korkeakoulututkinto, Chilessä tätä ei vaadita. Suomalaiset opettajat ovat yhteiskunnassa melko arvostettuja ja palkkaus on mediaanin yläpuolella, Chilessä puolestaan palkat ovat noin puolet OECD-maiden keskiarvosta, eikä opettajaopintoihin pyrkivillä ole välttämättä juurikaan aiempaa koulutusta. (OECD 2011).

Mitä tulee alakoululuihin Suomessa, Niemen (2010) tutkimuksessa todettiin suomalaisopettajien olevan tyytyväisiä oppikirjoihin, materiaaleihin sekä täydennyskoulutukseen. Muutosta sen sijaan toivottiin oppilaiden asenteisiin liittyen: oppilaiden toivottiin suhtautuvan opiskeluun positiivisesti. Opettajat toivoivat myös pienempiä luokkakokoja, joskin Suomessa luokkakoot ovat pienehköjä moniin maihin verrattuna (keskimäärin 19 oppilasta / luokka, OECD, 2012). Chilessä luokkakoon keskiarvo on 40, mikä on OECD-maiden suurimpia (OECD, 2012). Opettajien arvostus ei ole Chilessä korkealla, heidän työtään valvotaan jatkuvasti ja tiukasti: kouluissa on tarkastajat ja oppilaiden suoritukset julkistetaan kansallisesti.

Affektiivisten ulottuvuuksien yhteyksien puolesta Suomi asettuu samaan ryhmään Pohjois-Amerikan sekä monien Euroopan maiden kanssa. Lisäksi Suomessa suoritustaso kansainvälisissä vertailuissa on ollut korkea. Etelä-Amerikan maista puolestaan useat (Uruguay, Brasilia, Argentina, Peru, Chile) asettuvat OECD maiden keskitason alapuolelle, muodostaen näin Latinalaisen Amerikan ryhmän matematiikan suoritustason suhteen (OECD, 2010). Ramirezin (2005) tutkimuksessa huomattiin chileläisten oppilaiden käsityksen matematiikan vaikeudesta, tulevaisuuden koulutukseen liittyvien

---

[6] Gini-indeksi mittaa tulojen jakautumisen epätasaisuutta valtiotasolla: arvo 0 kuvaa täydellisen tasaista jakautumista, jossa jokainen saa saman osuuden tuloista, arvo 1 kuvaa maksimaalista epätasaisuutta, jossa yhdelle henkilölle tulee kaikki tulot.

odotusten sekä uskomusten matematiikassa menestymisen syistä olevan yhteydessä suoritustasoon. Mikä yllätyksellistä, matematiikasta pitäminen oli tutkimuksessa yhteydessä matalaan suoritustasoon. Tämän katsottiin johtuvan siitä, että paremmin menestyvissä luokissa on pidetty korkeampaa vaatimustasoa. Ramirez (ibid.) havaitsi chileläisillä myös liioiteltua käsitystä omista kyvyistä, mikä myös johtunee vähäisen vaatimustason yhteydestä itseluottamukseen ja toisaalta vaatimattomaan oppimiseen. Lisäksi chileläisillä havaittiin ainakin seuraavia faktoreita: matematiikasta pitäminen, matematiikan tärkeys, matematiikan kokeminen vaikeaksi sekä onnen ja lahjakkuuden merkitys matematiikassa. Näistä ensimmäinen kuuluu selkeästi emotionaaliseen ulottuvuuteen, kolme muuta sisältynevät kognitiiviseen ulottuvuuteen. Suomalaisilla sen sijaan on havaittu ne faktorit, joita mittarissa erityisesti mitataan (ks. kuvailu mittarista Menetelmä-kappaleessa).

## MENETELMÄ

Aineisto kerättiin mittauksessa, joka suoritettiin Suomessa syys-lokakuussa 2010 ja Chilessä maalis-huhtikuussa 2011. Tuolloin oppilaat kävivät kummassakin maassa kolmatta luokkaa. Kyselyyn vastasi Suomessa 466, Chilessä 901 oppilasta, yhteenlaskettu otos oli siis kooltaan 1367 oppilasta. Kysely oli muokattu versio Hannulan ja Laakson (2011) kehittämästä kyselystä, joka puolestaan pohjautui useaan aiempaan instrumenttiin (ks. tarkempi kuvaus kyselyn kehittymisestä Tuohilampi, Hannula, Giaconi, Laine & Näveri, hyväksytty). Kysely sisälsi 25 väitettä koskien oppilaiden pystyvyyden tunnetta (self-competence), itsevarmuutta (self-confidence), matematiikan kokemista vaikeaksi (difficulty of mathematics) matematiikasta pitämistä (enjoyment of mathematics), oppimisorientaatiota (mastery goal orientation), sekä yritteliäisyyttä (effort). Mittauksessa käytettiin kolmiportaista Likert-tyyppistä asteikkoa (totta, osittain totta, ei totta). Kyselyssä oli sekä suoria väitteitä (”Matematiikka on helppoa”) että käänteisiä väitteitä (”Minä en ole kovin hyviä matematiikassa”).

Kyselystä saatua aineistoa analysoitiin tarkastelemalla oppilaiden affektiivisia rakenteita sekä arvioimalla affektiivisten ulottuvuuksien tasoa sekä näiden välisiä yhteyksiä. Näistä ensimmäistä tutkittiin faktorianalyysin avulla: Aineistosta laskettiin kummallekin maalle erikseen eksploratiivisia faktorimalleja (ulottuvuuksien lukumäärää ei päätetty etukäteen, vaan toimittiin aineistolähtöisesti), minkä lisäksi tarkasteltiin, kuinka soveltuvia kummankin maan faktoriratkaisut olivat käytettäessä konfirmatorista lähestymistapaa (tarkasteltiin niiden ulottuvuuksien reliabiliteettia, joita mittari oli suunniteltu mittamaan). Affektiivisten ulottuvuuksien tasoa tarkasteltiin laskemalla kullekin ulottuvuudelle jakaumat sekä vertailemalla näitä maiden kesken. Mittaria, aineistoa sekä käytettyjä analyyseja on kuvattu tarkemmin artikkelissa Tuohilampi, Hannula, & Varas (hyväksytty).

**TULOKSIA**

Muodostettaessa faktorimalleja saatiin kummallekin maalle kaksi ratkaisua, joista toinen perustui ominaisarvoihin (ominaisarvo > 1), toinen scree-kuvion ehdotukseen (tulkinnan apuna Leech, Barret & Morgan, 2008). Suomalaisten ensimmäinen malli koostui seuraavista faktoreista: *pystyvyyden tunne*, *itsevarmuus*, *matematiikasta pitäminen*, *oppimisorientaatio* sekä *yritteliäisyys*. Toisessa, tiiviimmässä mallissa faktoreiksi muodostuivat *osaaminen ja varmuus* (pystyvyyden tunne + itsevarmuus + matematiikan kokeminen vaikeaksi), *matematiikan arvostaminen* (matematiikasta pitäminen + oppimisorientaatio) sekä *panostus* (itsevarmuus + oppimisorientaatio + yritteliäisyys). Ensimmäinen malli selitti 56%, toinen 47% vaihtelusta.

Chileläisten ensimmäinen malli koostui kuudesta faktorista: *käänteinen minäkäsitys* (käänteiset väitteet pystyvyyden tunteesta); *hauskuus ja helppous* (suora väite pystyvyyden tunteesta + suorat väitteet matematiikasta pitämisestä + suorat väitteet matematiikan kokemisesta vaikeaksi), *oppimisorientaatio*, *yritteliäisyys*, *epämiellyttävyys* (käänteiset väitteet matematiikasta pitämisestä + käänteiden väite matematiikan kokemisesta vaikeaksi) sekä *itsevarmuus*. Toiseen malliin jäi kolme faktoria: *päättäväisyys* (oppimisorientaatio + pystyvyyden tunne), *hauskuus ja helppous* (yritteliäisyys + suorat väitteet pystyvyyden tunteesta + suorat väitteet matematiikasta pitämisestä + suorat väitteet matematiikan kokemisesta vaikeaksi + itsevarmuus) sekä *käänteinen käsitys matematiikasta* (kaikki käänteiset väitteet). Ensimmäinen malli selitti 49%, toinen 36% vaihtelusta.

Seuraavaksi tarkasteltiin faktoreiden frekvenssijakaumia. Jakaumat olivat yleisesti ottaen positiivisia, eikä suuria eroja maiden välillä löytynyt. Suomessa oppilaat olivat kuitenkin joidenkin faktoreiden suhteen positiivisempia. Taulukossa 1 näkyvissä frekvenssit (prosentteina), summamuuttujiin liittyvät reliabiliteetit (Cronbachin alfat), keskiarvot sekä t-testin merkitsevyysarvot mittarin alkuperäisten muuttujien osalta. Taulukossa 2 näkyvissä vastaavat tiedot t-testin merkitsevyysarvoa lukuun ottamatta chileläisten eksploratiivisen faktorianalyysin tuloksena saatujen uusien muuttujien osalta. Taulukoissa on niiden muuttujien osalta, jotka kuvastavat negatiivista ominaisuutta (kuten matematiikan kokeminen vaikeaksi), taulukoitu jakauma samansuuntaiseksi positiivisten muuttujien kanssa, toisin sanoen suuri frekvenssi luokassa ”korkea” tarkoittaa jokaisen muuttujan kohdalla positiivista asiaa.

TAULUKKO 1 Teoreettisten muuttujien frekvenssit suomalaisilla ja chileläisillä

| Summa-muuttuja (%) | | matala | keski-taso | korkea | Cron-bachin alfa | keski-arvo | p-arvo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pystyvyyden tunne | Suomi | 6 | 36 | 58 | .794 | 2,60 | <0,001 |
| | Chile | 10 | 67 | 23 | .577 | 2,23 | |
| Itsevarmuus | Suomi | 2 | 39 | 59 | .653 | 2,64 | 0,761 |
| | Chile | 2 | 37 | 62 | .625 | 2,65 | |
| Matematiikan kokeminen vaikeaksi (käännetty) | Suomi | 7 | 53 | 39 | .710 | 2,31 | <0,001 |
| | Chile | 11 | 70 | 19 | .509 | 2,07 | |
| Matematiikasta pitäminen | Suomi | 6 | 28 | 66 | .832 | 2,56 | 0,165 |
| | Chile | 2 | 37 | 62 | .684 | 2,52 | |
| Oppimis-orientaatio | Suomi | 1 | 10 | 90 | .792 | 2,84 | <0,01 |
| | Chile | 0 | 15 | 85 | .658 | 2,78 | |
| Yritteliäisyys | Suomi | 2 | 40 | 58 | .606 | 2,62 | <0,001 |
| | Chile | 2 | 66 | 32 | .554 | 2,41 | |

TAULUKKO 2 Faktorianalyysin löytämien muuttujien frekvenssit chileläisillä

| Summamuuttuja (%) | matala | keskitaso | korkea | Cronbachin alfa | keskiarvo |
|---|---|---|---|---|---|
| Käänteinen minäkäsitys (käännetty) | 11 | 60 | 29 | .574 | 2,17 |
| Hauskuus ja helppous | 2 | 62 | 36 | .544 | 2,43 |
| Epämiellyttävyys (käännetty) | 11 | 41 | 48 | .744 | 2,31 |

## JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

Frekvenssijakaumista huomattiin, että affektiiviset ulottuvuudet ovat kaiken kaikkiaan hyvin positiivisia kolmasluokkalaisten kyseessä ollessa. Suomalaisten huomattiin olevan hieman positiivisempia pystyvyyden tunteen, matematiikan vaikeaksi kokemisen, oppimisorientaation sekä yritteliäisyyden suhteen. On kiinnostavaa pohtia, mikä voisi olla näiden pienten erovaisuuksien rooli pyrittäessä selittämään chileläisten ja suomalaisten väliltä löytyviä suorituseroja matematiikassa. Onko affektiivisten rakenteiden eroavaisuudella, tai niiden hienoisella mataluudella suomalaisiin nähden vaikutusta chileläisten tulevaan oppimiseen? Entä kulkeeko kausaliteetti toiseen suuntaan: matalampi suoritustaso tuo esiin eroja affektirakenteissa? Lisäksi erot keskiarvoissa ovat eroja luvuissa, mutta mikä on niiden taustalla oleva kokemus? Tulosten perusteella suomalaisten affektiivinen rakenne vaikuttaisi positiivisemmalta kuin chileläisten, mutta eron suuruutta tai siihen liittyvää merkitystä on vaikeampi arvioida.

Tutkimuksessa yllättävä tulos olivat chileläisten oppilaiden parista löytyneet käänteiset faktorit. Havaittiin, että eri tavoin mittaamalla saatiin erilaisia frekvenssejä, esimerkiksi matematiikasta pitämisen suhteen (emotionaalinen ulottuvuus) matalassa luokassa oli chileläisistä vain 2 prosenttia, kun taas chileläisten omassa emootioihin viittaavassa epämiellyttävyys-faktorissa matalaan luokkaan sijoittui 11 prosenttia oppilaista. Harzingin (2006) mukaan chileläinen kulttuuri on ekspressiivisempää ja ajattelu moniulotteisempaa suomalaiseen kulttuuriin ja ajatteluun verrattuna”. Käänteisten faktorien olemassaolo saattaa täten selittyä chileläisten “relativismilla”: esitämme hypoteesin, että Chilessä on luonnollista olla asioista vaihtelevaa mieltä, riippuen siitä, mitä kautta asia on kulloinkin ilmaistu. On kuitenkin myös mahdollista, että ilmiö liittyy chileläisten matalampaan suoritustasoon, sillä Metsämuuronen (2012) on tutkimuksessaan huomannut vastaavia käänteisiä (siis epäsuorista väitteistä muodostuvia) faktoreita esiintyvän suoritustasoltaan matalimman kymmenen prosentin joukossa eri puolilla maailmaa. Kysymykseksi jää: voiko matala suoritustaso ja sen mukanaan tuoma käänteinen ajattelutapa sinänsä olla kulttuurinen ilmiö?

Suomalaisten ja chileläisten väliltä löytyi myös yhtäläisyyksiä: esimerkiksi matematiikan oppiminen koettiin hyvin tärkeäksi molemmissa maissa. Tämän tiedetään jatkuvan myöhempinä kouluvuosina, sillä myös yläaste- ja lukioikäiset kokevat matematiikan enimmäkseen tärkeäksi (Hirvonen, 2012). Alkuvuosien positiivinen käsitys matematiikan tärkeydestä säilyy, koska riittävää konfliktia uskomuksen muuttumiseen ei ilmeisesti tule matematiikan ollessa yleisesti arvostettu oppiaine. Tällä voi olla ikäviäkin seurauksia: Tuohilampi & Hannula (2011) ovat havainneet, että korkealle asetettu tavoite aiheuttaa pikemmin ahdistumista kuin onnistumista, ellei kokemus omasta osaamisesta ole realistisessa määrin lähellä tätä tavoitetta. Tuolloin seurauksena voi olla lannistumista ja matematiikan opiskelusta luopumista.

Huomionarvoista tutkimuksessa oli lisäksi se, että suomalaisoppilailla matematiikkaan liittyvät tunteet olivat erillään yritteliäisyydestä, toisin kuin chileläisillä. Jos yrittämistä jatketaan mielihyvästä huolimatta, saattavat nämä kaksi irtautua toisistaan täysin oppilaan uskomusrakenteessa: oppilas saattaa ajatella, että mielihyvä ei kuulu oppimiseen tai koulukontekstiin, tai ettei ponnistelu tuota mielihyvää. Tämä irtautuminen saattaa johtaa tilanteeseen, jossa riittävää ristiriitakokemusta uskomusrakenteessa ei myöhemmin synny, ja näin ollen negatiivisen käsityksen muuttuminen ei mahdollistu. Tähän liittyen on syytä olettaa, että affektiivisten osa-alueiden, kuten matematiikasta pitämisen sekä pystyvyyden tunteen, kääntyminen negatiiviseksi ala-asteen aikana saattaa aiheuttaa tarpeetonta rasitusta oppimiseen liittyen tulevina vuosina. Onkin syytä pohtia, miten asiaan voisi kiinnittää huomiota alaluokkien opetuksessa. Niemen (2010) mukaan suomalaisissa luokissa on vahva oppikirjapainotteisuus, minkä lisäksi opetus on usein opettajajohtoista ja -keskeistä. Jos opetusta johtaa ja sen keskiössä on ennen kaikkea opettaja sekä oppikirja on mietittävä, suodaanko oppilaille riittävästi mahdollisuuksia oma-aloitteiseen, luovaan ja tutkivaan toimintaan kehitysvaiheessa, jossa usko omiin kykyihin ja ideoihin on vielä korkealla, samoin kuin halukkuus ja into kokeilla, ideoida ja yrittää? Tähän liittyvä toinen pohdinnan arvoinen kysymys liittyykin siihen, kuinka nämä mahdollisuudet saadaan taattua oppilaille.

Kaiken kaikkiaan tutkimuksessa saatiin arvokasta tietoa tutkimukseen osallistuvien matematiikkaan liittyvistä affektiivisista ominaisuuksista: nämä ominaisuudet ovat pääosin vielä kolmasluokkalaisten kohdalla positiivisia, mutta kulttuurien välisiä eroja vertailtaessa näyttäisi tarvittavan varovaisuutta faktorien mahdollisista erilaisista merkityksistä johtuen.

Uusittaessa mittaus keväällä 2013 päästään analysoimaan affektiivisen rakenteen myöhempää tilaa. Tiedossa on, että viidenteen luokkaan mentäessä matematiikkakäsitykset ainakin Suomessa huononevat rajusti (ks. esim Metsämuuronen, 2010). On kiinnostavaa, onko tämä muutos vähemmän dramaattinen kokeiluun osallistuneilla oppilailla kuin verrokeilla tai suomalaisoppilailla yleisesti.

**LÄHTEET**

Bodas, J., & Ollendick, T. H. (2005). Test anxiety: A cross-cultural percpective. *Clinical Child and Family Psychology Review*, *8*(1), 65-88.

Chapman, O. (2002). Beliefs structure and inservice high school mathematics teacher growth. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics education?* (pp. 177-193). Kluwer Academic Publishers, Hollanti.

Hannula, M. S. (2011). The structure and dynamics of affect in mathematical thinking and learning. Teoksessa M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Toim.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-60). Rzeszów, Puola: ERME.

Hannula, M. S., & Laakso, J. (2011). The structure of mathematics related beliefs, attitudes and motivation among Finnish grade 4 and grade 8 students. Teoksessa B. Ubuz (Toim.) *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3. (pp. 9-16). Ankara, Turkki: PME.

Harter, S. (1999). *The Construction of the Self. A Developmental Perspective*. The Guildford Press, New York.

Harzing, A-W. (2006). Response styles in cross-national survey research: A 26-country study. *The International Journal of Crosscultural Management, 6*(2), 243-266.

Hirvonen, K. (2012). *Onko laskutaito laskussa? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011*. Helsinki: Opetushallitus.

Hofstede, G., & Hofstede, G. J. (2005). *Cultures and Organizations. Software of the Mind.* McGraw-Hill, US.

Lee, J. (2009). Universals and specifics of math self-concept, math self-efficacy, and math anxiety across 41 PISA 2003 participating countries. *Learning and Individual Differences 19*, 355-365.

Leech, N. L., Barret, K. C., & Morgan, G. A. (2008). *SPSS for intermediate statistics*. Psychology press: New York.

Leder, G. C. (2006). Affect and mathematics learning. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Toim.), *New mathematics education and practice* (pp. 203-208). Sense Publishers: Netherlands.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grows (Toim.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 575-596). MacMillan, New York.

Metsämuuronen, J. (2010). Osaamisen ja asenteiden muutos perusopetuksen 3.-5. luokilla. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (Toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*. (s. 93-136). Helsinki: Opetushallitus.

Metsämuuronen, J. (2012). Challenges of the Fennema-Sherman Test in the International Comparisons. *International Journal of Psychological Studies*, *4*(3), 1-22.

Niemi, E. (2010). Matematiikan oppimistulokset 6. vuosiluokan alussa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (Toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008.* (s. 17-70). Helsinki: Opetushallitus.

OECD (2010), *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I).*

OECD (2011). *Education at a Glance 2011: OECD indicators*, OECD Publishing.

OECD (2012). *Education at a Glance 2012: OECD Indicators*, OECD Publishing.

Op′ t Eynde, P., de Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics education?* (pp. 13-37). Kluwer Academic Publishers: Hollanti.

Ramírez, M. (2005). Attitudes toward mathematics and academic performance among chilean 8th graders. *Estudios Pedagógicos*, *31*(1),97-112.

Tuohilampi, L., & Hannula, M. S. (2011). High expectations, low confidence – discrepancy in self-image as a reason for displeasure in mathematics. Teoksessa B. Ubuz (Toim.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, p. 406. Ankara, Turkki: PME.

Tuohilampi, L., Hannula, M., & Varas, L. (hyväksytty). 9-year old students' self-related belief structures regarding mathematics: a comparison between Finland and Chile. Hyväksytty julkaisuun: *Proceedings of the 18th Conference of the Mathematical Views*. Helsinki: MAVI.

Tuohilampi, L., Hannula, M. S., Giaconi, V., Laine, A., & Näveri, L. (hyväksytty). Comparing the structures of 3rd graders' mathematics-related affect in Chile and Finland. Hyväksytty julkaisuun: Proceedings of the 8th CERME conference. Antalya, Turkki: ERME.

Valenzuela, J.P., Bellei, C., & De Los Ríos, D. 2009. Evolución de la segregación socioeconómica de los estudiantes chilenos y su relación con el financiamiento compartido [Evolution of the socioeconomic segregation of Chilean pupils and their relation to the shared funding policy]. Teoksessa

*Evidencias para Políticas Públicas en Educación*. (pp. 231-284). FONIDE, Ministerio de Educación.

# SCIENCE TEACHING AND LEARNING

# ALOITTAVIEN YLIOPISTO-OPISKELIJOIDEN NÄKEMYKSIÄ FYSIIKASTA JA FYSIIKAN OPPIMISESTA FYSIIKAN PERUSOPINTOJEN AIKANA

Mervi A. Asikainen, Antti Viholainen ja Pekka E. Hirvonen

Itä-Suomen Yliopisto

*Tässä tutkimuksessa selvitettiin fysiikan opintoja aloittavien yliopisto-opiskelijoiden näkemyksiä fysiikasta ja fysiikan oppimisesta Colorado Learning Attitudes about Science Surveyn (CLASS) avulla. Kyselyn perusajatuksena on verrata opiskelijoiden vastauksia suotuisiin, eksperttiryhmän 42 väittämään antamiin vastauksiin. Tutkimus toteutettiin Fysiikan peruskurssien I-IV aikana lukuvuonna 2011–2012. Opiskelijat vastasivat kyselyyn ensimmäisen peruskurssin alussa (N=98), toisen peruskurssin lopussa (N=52) ja neljännen peruskurssin lopussa (N=38). Tulosten mukaan opiskelijoiden suotuisten vastausten määrä oli matala kaikissa kyselyissä: 55 % ensimmäisessä, 54 % toisessa ja 62 % viimeisessä mittauksessa. Voidaan todeta, että suomalaisopiskelijat saavuttavat yhdysvaltalaisopiskelijoiden alkutason opiskeltuaan vuoden yliopistossa. Väittämien yksityiskohtaisessa tarkastelussa havaittiin, että tiettyjen väittämien suotuisat osuudet kasvoivat lukuvuoden aikana, mutta toisten väittämien osuudet pysyivät lähes muuttumattomina. Tulosten perusteella vaikuttaa siltä, että opiskelijoiden näkemykset fysiikasta ja fysiikan oppimisesta voivat muuttua fysiikan perusopintojen aikana. Muutosta tulisi kuitenkin seurata yksittäistä kurssia pidemmällä aikavälillä.*

## JOHDANTO

Fysiikan yliopisto-opintojaan aloittavalla opiskelijalla on useiden vuosien mittainen kokemus fysiikan opiskelusta. Kaikki suomalaisessa koulujärjestelmässä opiskelleet opiskelijat ovat suorittaneet vähintään perusopetuksen oppimäärään sisältyvän fysiikan sekä yhden pakollisen lukiokurssin. Lisäksi monet ovat opiskelleet useita fysiikan syventäviä lukiokursseja. Kaikki suoritetut opinnot ovat muokanneet opiskelijoiden näkemyksiä ja odotuksia fysiikasta, fysiikan opiskelusta ja oppimisesta.

Muodostuneet näkemykset ja odotukset ovat tärkeitä, sillä ne ratkaisevat sen, mihin seikkoihin opiskelijat suuntaavat huomionsa opetuksessa ja oppimateriaaleissa ja millaisia opiskelumenetelmiä he käyttävät rakentaessaan ymmärrystään fysiikasta. Opiskelijan käyttämät opiskelumenetelmät vastaavasti vaikuttavat siihen, kuinka syvällinen ymmärrys opiskeltavasta asiasta opiskelijalle muodostuu. (Roth, 1994; Redish, Saul, & Steinberg, 1998) Jos opiskelijan mielestä ilmiöiden ja käsitteiden ymmärtämiseen keskittyvät tehtävät ovat tärkeitä, opiskelija panostaa niihin pyrkien ymmärtämään opiskeltavan asian. Jos taas opiskelija pitää yksityiskohtia tärkeinä, pyrkii hän painamaan ne mieleensä.

Pitkittäistutkimuksissa on havaittu, että opiskelijoiden epistemologiset eli tietoon, tietämiseen ja tiedonhankintaan liittyvät näkemykset eivät ole staattisia, vaan ne kehittyvät lukio- ja yliopisto-opintojen aikana (Baxter Magolda, 2004; King & Baxter Magolda, 1996). Opintojen alkuvaiheessa ne ovat usein melko naiiveja, mutta sofistikoituvat opintojen edetessä. Esimerkiksi opintojaan aloittavan fysiikan opiskelijan oppimisnäkemyksissä opettajan rooli korostuu, kun taas pidemmälle opinnoissa edistynyt opiskelija näkee oppimisen tapahtuvan opiskelijan oman tiedonmuodostusprosessin kautta (ks. Redish ym. 1998).

Vaikka matematiikkaan liittyvät näkemykset ja uskomukset ovat kiinnostaneet kotimaisia tutkijoita jo vuosikymmenten ajan (mm. Erkki Pehkonen ja Markku Hannula), suomalaisten opiskelijoiden näkemyksiä fysiikasta ja fysiikan oppimisesta ei ole juuri tutkittu. Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää Itä-Suomen yliopiston opiskelijoiden näkemyksiä fysiikasta ja fysiikan oppimisesta. Tutkimuksessa haetaan vastauksia seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

1. Millainen on Itä-Suomen yliopistossa fysiikan perusopinnot aloittavien opiskelijoiden näkemysten taso fysiikasta ja fysiikan oppimisesta?
2. Miten opiskelijoiden näkemykset fysiikasta ja fysiikan oppimisesta muuttuvat fysiikan perusopintojen aikana?

Tutkimuskysymyksiin vastattiin Colorado Learning Attitudes About Science Survey (CLASS) kyselyn avulla (Adams, Perkins, Podolefsky, Dubson, Finkelstein, & Wieman, 2006). Kyselyn perusajatuksena on opiskelijoiden vastausten vertaaminen eksperttiryhmän vastauksiin. Aiemmissa tutkimuksissa on havaittu, että fysiikan perusopinnot aloittavien opiskelijoiden näkemykset ovat CLASS-kyselyllä mitattuina hyvin samanlaisia yliopistosta riippumatta (Adams ym., 2006), joten on mielenkiintoista verrata tässä tutkimuksessa saatua CLASS-testin tulosta tavanomaiseen yhdysvaltalaisessa yliopistossa saatuun tulokseen.

Aiemmissa tutkimuksissa on havaittu, että aloittavien yliopisto-opiskelijoiden näkemykset taantuvat eli siirtyvät kohti naiivia näkemystä fysiikan peruskurssien aikana, ellei opetuksessa kiinnitetä erityistä huomiota opiskelijoiden näkemyksiin oppimisen taustatekijöinä (mm. Perkins, Gratny, Adams, Finkelstein, & Wieman, 2005). On mielenkiintoista selvittää noudattavatko tutkittujen suomalaisopiskelijoiden näkemykset samaa suuntausta. Opiskelijoiden näkemyksiä fysiikasta ja fysiikan oppimisesta pyritään ymmärtämään myös syvällisemmin tarkastelemalla eniten ja vähiten muuttuvia yksittäisiä väittämiä.

## TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

### Tutkimusmenetelmä

Tutkimus toteutettiin Colorado Learning Attitudes About Science Surveyn (CLASS) avulla (Adams ym., 2006). Tämä 42 väittämää sisältävä

Likert-asteikollinen kysely on kehitetty hyödyntäen aiemmin kehitettyjä opiskelijoiden fysiikkaa ja fysiikan oppimista mittaavia kyselyitä, Maryland Physics Expectations Survey (MPEX) (Redish ym. 1998), Views of Nature of Science Questionnaire (VNOS) (Lederman, Abd-El-Khalick, Bell, & Schwartz, 2002) ja Views About Science Survey (VASS) (Halloun & Hestenes, 1998). Kyselyä on käytetty useissa kansainvälisissä tutkimuksissa (Adams ym., 2006; Bates ym., 2011; Perkins ym., 2006). Tätä kyseistä tutkimusta varten kysely suomennettiin artikkelin kirjoittajien toimesta; suomenkieliset väittämät löytyvät liitteestä A.

Kyselyn väittämistä on faktorianalyysin avulla muodostettu seuraavat kahdeksan klusteria, joille on annettu parhaiten sisältöä kuvaavat nimet: 1. Kiinnostus, 2. Yhteys arkielämään, 3. Yleinen ongelmanratkaisutaito, 4. Luottamus ongelmanratkaisutaitoon, 5. Ongelmanratkaisutaidon kehittyneisyys, 6. Ymmärtämisen eteen tehtävä ponnistelu, 7. Käsitteellinen ymmärrys ja 8. Käsitteellisen ymmärryksen soveltaminen. (Adams ym., 2006)

Suotuisien vastausten osuuksia ja niiden muuttumista voidaan tarkastella sekä yleisellä tasolla että klustereittain. Testin kehittäjien mukaan noviisinäkemyksenä voidaan pitää suotuisten vastausten alle 50 jäävää prosenttiosuutta ja eksperttinäkemyksenä yli 80 prosenttiosuutta (Adams ym., 2006). Ymmärtääksemme tulokset syvällisemmin tarkastelemme myös yksittäisten väittämien suotuisten osuuksien suurimpia ja pienimpiä muutoksia.

**Tutkimuksen kohderyhmä, aineistonkeruu ja -analyysi**

Tutkimuksen kohderyhmänä oli Fysiikan peruskurssien I-IV opiskelijat Itä-Suomen yliopiston Joensuun kampuksella lukuvuonna 2011–2012. Kurssin opiskelijat ovat fysiikan pää- tai sivuaineopiskelijoita, ja heillä on vaihteleva määrä fysiikan lukio-opintoja; keskimäärin opiskelijat ovat suorittaneet 6 lukiofysiikan kurssia. Ensimmäinen aineisto kerättiin paperilomakkeella Fysiikan peruskurssi I:n ensimmäisellä luentokerralla taustatietokyselyn yhteydessä (N=98). Toinen ja kolmas aineisto kerättiin Fysiikan peruskurssien II (N=49) ja IV (N=33) lopussa sähköisellä lomakkeella. Kahdella jälkimmäisellä kerralla vastaamisesta palkittiin kahdella laskuharjoituspisteellä. Lisäksi kolmannen kyselyn vastaajien kesken arvottiin kaksi pientä palkintoa. Vastausprosentit olivat pieniä, sillä keskimääräinen vuosittainen osallistujamäärä kursseilla on 105 opiskelijaa. Kurssien opetus toteutettiin tavanomaisella tavalla eikä siihen tehty muutoksia opiskelijoiden näkemysten huomioimiseksi tai haastamiseksi.

Opiskelijoiden näkemysten kehittymisen tarkastelemiseksi vastaajien joukosta valittiin ne vastaajat, jotka olivat vastanneet kaikkiin kyselyihin. Näitä vastaajia oli 18 kyselyjen pienten vastausprosenttien vuoksi. Osaltaan tämän otoksen pienuuteen vaikutti se, että kaikki opiskelijat eivät suorita kaikkia fysiikan peruskursseja samana lukuvuotena eivätkä suositellussa järjestyksessä.

Aineiston analysoitiin laskemalla opiskelijoiden vastauksista suotuisten vastausten kokonaisosuus ja osuudet kahdeksassa klusterissa eksperttien vastauksia kriteereinä käyttäen.

## TULOKSET

### Opiskelijoiden näkemykset fysiikan perusopintojen alussa

Opiskelijoiden suotuisten vastausten prosenttiosuudet fysiikan perusopintojen alussa on esitetty taulukossa 1. Suotuisten vastausten kokonaisosuus on matala, 55 %, ja opiskelijaryhmä jää noviisinäkemyksen tasolle klustereissa *Ongelmanratkaisutaidon kehittyneisyys* ja *Käsitteellisen ymmärryksen soveltaminen*. Vahvimpia klustereita *Yhteys arkielämään* ja *Yleinen ongelmanratkaisutaito*, joissa opiskelijat pääsevät 70 % tasolle.

TAULUKKO 1 CLASS-kyselyn tulokset klustereittain fysiikan perusopintojen alussa Itä-Suomen yliopistossa (UEF) ja yhdysvaltalaisessa tutkimusyliopistossa (LSRU)

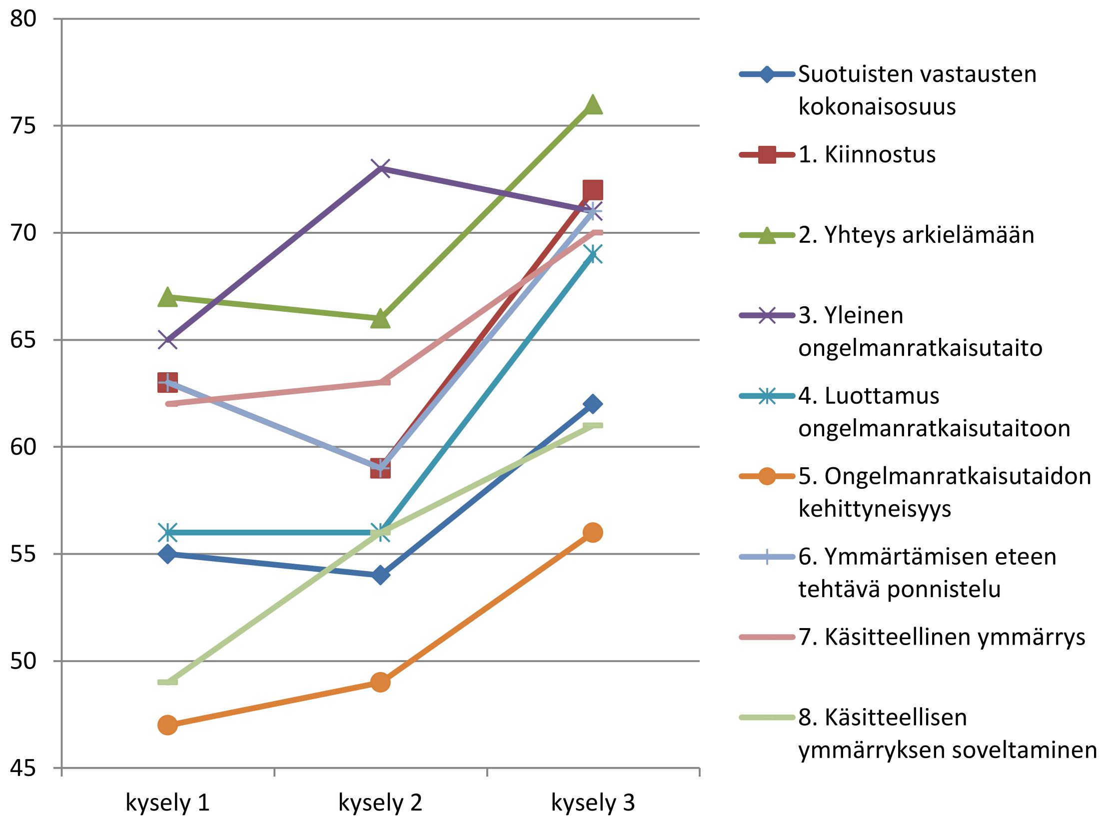
| | Suotuisten vastausten osuus % | |
|---|---|---|
| Klusteri | UEF (N=98) | LSRU (N=397) |
| Suotuisten vastausten kokonaisosuus | 55 | 65 |
| 1. Kiinnostus | 65 | 67 |
| 2. Yhteys arkielämään | 70 | 72 |
| 3. Yleinen ongelmanratkaisutaito | 71 | 71 |
| 4. Luottamus ongelmanratkaisutaitoon | 57 | 73 |
| 5. Ongelmanratkaisutaidon kehittyneisyys | 45 | 61 |
| 6. Ymmärtämisen eteen tehtävä ponnistelu | 63 | 73 |
| 7. Käsitteellinen ymmärrys | 54 | 63 |
| 8. Käsitteellisen ymmärryksen soveltaminen | 41 | 53 |

Verrattaessa suomalaisopiskelijoiden tuloksia tyypillisen yhdysvaltalaisopiskelijaryhmän tuloksiin havaitaan, että yhdysvaltalaisopiskelijoiden suotuisten vastausten osuudet ovat korkeampia sekä kokonaisosuutta tarkasteltaessa että lähes kaikissa klustereissa. Yhdysvaltalaisopiskelijoiden näkemykset ylittävät naiivin näkemyksen tason kaikissa klustereissa. Suomalaisopiskelijoiden suotuisten vastausten osuudet ovat 16 prosenttiyksikköä matalammat kuin yhdysvaltalaisryhmän osuudet ongelmanratkaisutaitoon liittyvissä klustereissa 4 ja 5.

**Opiskelijoiden näkemysten kehittyminen lukuvuoden aikana**

*CLASS-testin tulokset lukuvuoden aikana*

Opiskelijoiden suotuisten vastausten prosenttiosuuksien kehittyminen esitetään kuviossa 1. Suotuisten vastausten kokonaisosuus pieneni hieman lukuvuoden puolivälin kyselyssä, mutta nousi lukukauden toisella puoliskolla ollen 62 % lukukauden lopussa. Klusterit 1, 2 ja 6 käyttäytyivät samalla tavalla ensin laskien ja sitten nousten lukukauden aikana. Klustereissa 4, 5, 7 ja 8 sitä vastoin huomataan nouseva suuntaus lukukauden aikana. Yleiseen ongelmanratkaisutaitoon liittyvä klusteri 3 nousi lukukauden puoliväliin mentäessä, mutta laski lukukauden lopun kyselyssä.




KUVIO 1 Opiskelijoiden suotuisten vastausten prosenttiosuuksien kehittyminen lukuvuoden aikana (N=18)

Tarkasteltaessa suotuisten prosenttiosuuksien kehittymistä koko lukuvuoden aikana havaitaan opiskelijoiden näkemysten siirtyneen kohti eksperttinäkemystä kaikissa klustereissa. Suurimmat parannukset tapahtuivat klustereissa *Luottamus ongelmanratkaisutaitoon* ja *Käsitteellisen ymmärryksen soveltaminen*. *Yhteys arkielämään* -klusterin prosenttiosuus oli klustereista korkein, 76 %. Lisäksi klusterit 2, 3, ja 7 saavuttivat 70 % tason. Lukukauden lopussa naiiveiksi (alle 50 % taso) luokiteltuja klustereita ei ollut lainkaan, mutta ongelmanratkaisutaidon kehittyneisyyteen ja käsitteellisen ymmärryksen soveltamiseen liittyvien klustereiden prosenttiosuudet olivat edelleen matalat, 56 % ja 61 %.

*Eniten muuttuneet väittämät*

Seuraavaksi tarkastellaan niitä yksittäisiä väittämiä, joissa suotuisten vastausten osuuksissa tapahtui suurimmat muutokset fysiikan perusopintojen aikana (taulukko 2). Viidessä väittämässä muutos oli nouseva ja yhdessä laskeva.

TAULUKKO 2 Väittämät, joiden suotuisten vastausten osuuksissa tapahtui suurimmat muutokset fysiikan perusopintojen aikana

| Väittämä ja suotuisa eksperttimäinen vastaus | Suotuisten vastausten osuus % | | | |
|---|---|---|---|---|
| | kysely 1 | kysely 2 | kysely 3 | Δ |
| 7. Kun fyysikkojen tietous karttuu, monet tänä päivänä tuntemamme fysiikan ajatukset osoittautuvat todennäköiseksi virheellisiksi. *en osaa sanoa* | 61 | 3 | 28 | -33 |
| 14. Opiskelen fysiikkaa omaksuakseni tietoa, josta on hyötyä myös opiskelun ulkopuolisessa elämässä. *samaa mieltä* | 56 | 72 | 89 | +33 |
| 17. Fysiikan ymmärtäminen tarkoittaa yleensä sitä, että pystyy muistamaan jotakin aikaisemmin lukemaansa tai näkemäänsä. *eri mieltä* | 28 | 39 | 61 | +33 |
| 24. Minun on ymmärrettävä fysiikan kaavat hyvin ennen kuin osaan käyttää niitä oikein. *samaa mieltä* | 72 | 89 | 100 | +28 |
| 38. Fysiikan asioita voidaan selittää myös ilman matemaattisia kaavoja. *samaa mieltä* | 28 | 50 | 67 | +39 |
| 40. Jos ajaudun umpikujaan fysiikan tehtävän ratkaisemisessa, en todennäköisesti selviä siitä omin avuin. *eri mieltä* | 33 | 50 | 61 | +28 |

Taulukon 2 väittämien suotuisten vastausten osuudet osoittavat, että opiskelijoiden tietyissä fysiikkaan ja fysiikan oppimiseen liittyvissä näkemyksissä tapahtui suotuisia muutoksia lukuvuoden aikana. Kaikki vastaajat kokivat fysiikan kaavojen merkityksen ymmärtämisen tärkeänä niiden soveltamisessa (väittämä 28), ja kaksi kolmesta vastaajasta näki, että fysiikkaa voidaan selittää myös ilman kaavoja. Näkemys, jonka mukaan fysiikan ymmärtäminen perustuu muistamiselle (väittämä 17), vähentyi lukuvuoden aikana, mutta oli edelleen melko yleinen.

Suurin osa vastaajista näki fysiikan opiskelun tarpeelliseksi opiskelujen ulkopuolisen elämän vuoksi (väittämä 14). Myös opiskelijoiden luottamus omaan suoriutumiseen tehtävien pulmatilanteissa koheni (väittämä 40), vaikka luottamus ei olekaan vielä eksperttitasoa.

Suotuisten *en osaa sanoa* -vastausten määrä pieneni fysiikan tiedon luonteeseen liittyvässä väittämässä 7. Tässä väittämässä kaikki vastausvaihtoehdot olivat yhtä suosittuja lukukauden lopussa.

*Samoina pysyneet väittämät*

Taulukossa 3 tarkastellaan niitä väittämiä, joiden suotuisten vastausten osuudet eivät muuttuneet fysiikan perusopintojen aikana. Näiden väittämien esittämät näkemykset liittyvät fysiikan oppimiseen ja fysiikan tehtävien merkitykseen fysiikan oppimisessa.

Kuten taulukosta 3 havaitaan, enemmistö vastaajista ei pitänyt kaavojen ja esimerkkitehtävien ratkaisujen muistamista (väittämät 21 ja 29) tärkeänä fysiikan tehtävien ratkaisemisessa. Suurin osa opiskelijoista myös ymmärsi, että fysiikan tehtävän voi ratkaista oikein useammalla kuin yhdellä tavalla (väittämä 10). Kuitenkin noin puolet vastaajista koki suuren tietomäärän muistamisen isona fysiikan oppimisen ongelmana (väittämä 1). Opiskelijoiden enemmistö pyrki liittämään omaksuttavan tiedon aiemmin omaksuttuun ulkoa opettelun sijasta (väittämä 42). Fysiikan tehtävien analysointiin hyvänä fysiikan oppimisen tapana korostavaan väittämään 33 tuli vain vähän suotuisia *en osaa sanoa* -vastauksia. Suurin osa opiskelijoista oli tämän väittämän kanssa samaa mieltä kaikissa kyselyissä.

## POHDINTAA

Tässä tutkimuksessa selvitettiin opiskelijoiden näkemyksiä fysiikasta ja fysiikan oppimisesta ensimmäisen lukuvuoden aikana CLASS-kyselyn avulla. Tutkimus toteutettiin Itä-Suomen yliopiston Joensuun kampuksella. Tuloksia verrattiin tavanomaisiin samassa opintojen vaiheessa olevien yhdysvaltalaisopiskelijoiden tuloksiin. Kyselyn tulosten syvälliseksi ymmärtämiseksi tutkimuksessa tarkasteltiin myös eniten ja vähiten muuttuneita yksittäisiä väittämiä.

Suomalaisopiskelijoiden suotuisten eli eksperttinäkemyksen mukaisten vastausten kokonaisosuus oli 55 % lukukauden alussa, 54 % lukukauden puolivälissä ja 62 % lukukauden lopussa. Ensimmäisen lukukauden aikana jouluun mennessä opiskelijat pääsivät vain hieman yli naiivina pidettävän 50 %

tason yläpuolelle, mutta ylsivät lähes tyypilliseen 65 % yhdysvaltalaistulokseen (Adams ym. 2006) lukukauden lopussa. Suomalaisopiskelijoiden näkemykset saavuttavat siis yhdysvaltalaisopiskelijoiden alkutason vasta yhden vuoden yliopisto-opiskelun jälkeen.

TAULUKKO 3 Väittämät, joiden suotuisten vastausten osuuksissa tapahtui pienimmät muutokset fysiikan perusopintojen aikana

| Väittämä ja suotuisa eksperttimäinen vastaus | Suotuisten vastausten osuus % | | | |
|---|---|---|---|---|
| | kysely 1 | kysely 2 | kysely 3 | Δ |
| 1. Valtavan tietomäärän muistaminen on minulle iso fysiikan oppimisen ongelma. *eri mieltä* | 56 | 56 | 56 | 0 |
| 10. Fysiikan tehtävän voi ratkaista yleensä vain yhdellä tavalla oikein. *eri mieltä* | 78 | 83 | 78 | 0 |
| 21. Jos en muista kaavaa, johon fysiikan koetehtävän ratkaiseminen perustuu, en pysty tekemään juuri mitään tehtävän ratkaisemiseksi. *eri mieltä* | 83 | 67 | 83 | 0 |
| 29. Oppiakseni fysiikkaa minun tarvitsee vain muistaa esimerkkitehtävien ratkaisut. *eri mieltä* | 89 | 78 | 89 | 0 |
| 33. Fysiikan tehtävien huolellinen ja yksityiskohtainen tarkastelu on minulle hyvä tapa oppia fysiikkaa. *en osaa sanoa* | 6 | 0 | 6 | 0 |
| 42. Opiskellessani fysiikkaa pyrin yhdistämään omaksuttavan tiedon siihen mitä jo tiedän sen sijaan että vain opettelisin uuden asian ulkoa. *samaa mieltä* | 83 | 67 | 83 | 0 |

Aiempien tutkimusten mukaan suotuisten vastausten kokonaisosuus yleensä pienenee noin 10 prosenttia yhden lukukauden mittaisen ensimmäisen fysiikan peruskurssin aikana (Adams ym., 2006). Suomalaisryhmällä tämä negatiivinen muutos oli alle 2 prosenttia samanpituisella aikavälillä tarkasteltuna. Vaikka klusterien suotuisat osuudet kokivat sekä positiivisia että negatiivisia muutoksia lukukauden puolivälin kyselyssä, muutokset olivat positiivisia seitsemässä klusterissa kahdeksasta koko lukuvuoden aikana. Tämän tutkimuksen tulosten mukaan näkemykset ovat dynaamisia ja niiden muuttumista tulee tarkastella yhtä lukukautta pitemmällä aikavälillä.

Lukukauden alun kyselyn tulokset kertovat myös suomalaisesta fysiikan koulu- ja lukio-opetuksesta. Suurimmalle osalle opiskelijoista fysiikan perusopinnot ovat ensimmäinen kosketus yliopistofysiikkaan, joten fysiikkaan ja fysiikan oppimiseen liittyvät näkemykset ovat muodostuneet koulu- ja lukiokokemusten pohjalta. Fysiikan opintojaan aloittavat opiskelijat pääsivät suotuisten vastausten kokonaisosuudessa vain hieman naiivin tason yläpuolelle. Klustereittain tarkasteltuna opiskelijat jäivät naiiville tasolle ongelmanratkaisutaidon kehittyneisyydessä ja käsitteellisen ymmärryksen soveltamisessa, mitä voitaneen pitää huolestuttava tuloksena. Näiden klusterien suotuisten vastausten mataluutta selittävät tiettyjen yksittäisten väittämien suotuisten vastausten pienet prosenttiosuudet. Esimerkiksi vain 17 % opiskelijoista vastasi suotuisasti eli kielteisesti väittämään 8 *Ratkaistessani fysiikan tehtävää etsin kaavan, joka sisältää tehtävässä annetut muuttujat, ja sijoitan arvot siihen*. Lisäksi vain hieman alle puolet opiskelijoista koki yleensä pystyvänsä päättelemään miten fysiikan tehtävät ratkaistaan (väittämä 34).

Näyttäisi siis siltä, että suomalaisen fysiikan koulu- ja lukio-opetuksen pohjalta näkemykset fysiikan oppimisesta ja opetuksesta eivät muodostu toivotunlaisiksi, ja erityisesti käsitteellinen ymmärrys ja ongelmanratkaisukyky eivät kehity toivottavalle tasolle. Väitteen varmistamiseksi jatkamme aineistonkeruuta ja -analysointia lukuvuonna 2012–2013. Aiheeseen liittyen on myös valmistunut pro gradu -tutkielma (Saarela 2013), jossa on selvitetty ensimmäisen vuosikurssin lukiolaisten näkemyksiä fysiikasta ja fysiikan oppimisesta samaa CLASS-kyselyä käyttäen.

Adamsin ym. (2006) mukaan edes oppimisen tutkimukseen perustuvalla yliopiston fysiikan perusopetuksella ei pystytä vaikuttamaan opiskelijoiden näkemyksiin, ellei opiskelijoiden näkemyksistä eksplisiittisesti keskustella opetuksessa. Yksittäisten väittämiä koskevat tuloksemme kuitenkin osoittavat, että osa näkemyksistä voi muuttua eksperttinäkemysten suuntaan, vaikka eksplisiittistä keskustelua ei käytäisikään, sillä myös opetuksen käytänteet vaikuttavat opiskelijoiden näkemyksiin. Toisaalta osa näkemyksistä voi olla luonteeltaan pysyvämpiä, jolloin niihin vaikuttaminen vaatisi suorempia opetuksen keinoja. Yleisellä tasolla näyttää kuitenkin siltä, että pysyvää muutosta ei välttämättä tapahdu yhden kurssin tai lukukauden aikana, vaan se tapahtuu pitemmän ajanjakson aikana.

Pidemmän aikavälin tarkastelua tukevat myös Batesin ym. (2011) tulokset, sillä he ovat havainneet opiskelijoiden fysiikkaa ja fysiikan oppimista koskevien näkemysten vähitellen kehittyvän myöhempien yliopisto-opintovuosien aikana eksperttinäkemyksen suuntaan. Tätä ei kuitenkaan pidä tulkita siten, ettei näkemyksiin tarvitse kiinnittää huomiota fysiikan opintojen alussa; fysiikkaa ja fysiikan oppimista koskevat näkemykset ovat tärkeitä fysiikan opetuksen osatekijöitä, jotka vaikuttavat fysiikan kiinnostavuuteen ja fysiikasta muodostuvaan ymmärrykseen. Arvellaan, että vähäinen kiinnostus fysiikan opiskelua kohtaan voi selittyä opiskelijoiden naiiveilla näkemyksillä fysiikasta ja sen oppimisesta (Perkins ym., 2005). Jos opetuksella pystytään muuttamaan näitä näkemyksiä eksperttinäkemyksen suuntaan, se helpottaa ja monipuolistaa fysiikan oppimista, laajentaa kuvaa fysiikasta ja voi lisätä opiskelijoiden kiinnostusta fysiikkaa kohtaan. Sofistikoituneet tietoon, tietämiseen ja tiedonhankintaan liittyvät näkemykset ovat välttämättömiä fysiikan syvälliseksi ymmärtämiseksi (Roth, 1994; Stathopoulou & Vosniadou, 2006). Täten jo peruskoulun ja lukion fysiikanopettajien tulisi selvittää opiskelijoidensa näkemyksiä fysiikan ja fysiikan oppimisen luonteesta, tiedostaa niiden merkitys oppimisessa ja pyrkiä ottamaan huomioon ne opetuksessaan.

**LÄHTEET**

Adams, W. K., Perkins, K. K., Podolefsky, N. S., Dubson, M., Finkelstein, N. D., & Wieman, C. E. (2006). New instrument for measuring student beliefs about physics and learning physics: The Colorado Learning Attitudes about Science Survey. *Physical Review Special Topics – Physics Education Research, 2*(1), 010101. DOI:10.1103/PhysRevSTPER.2.010101

Bates, S. P., Galloway, R. K., Loptson, C. & Slaughter, K. A. (2011). How attitudes and beliefs about physics change from high school to faculty. *Physical Review Special Topics – Physics Education Research, 7*(2), 020114 (2011). DOI:10.1103/PhysRevSTPER.7.020114

Baxter Magolda, M. B. (2004). Evolution of a Constructivist Conceptualization of Epistemological Reflection. *Educational Psychologist, 39*(1), 31–42.

Halloun, I, & Hestenes, D. (1998). Interpreting VASS dimensions and profiles for physics students. *Science & Education, 7*(6), 553-577.

King, P. M., & Baxter Magolda, M. B. (1996). A developmental perspective on learning. *Journal of College Student Development, 37(*2), 163–173.

Lederman, N. G., Abd-El-Khalick, F. Bell, R. L., & Schwartz, R. S. (2002). Views of nature of science questionnaire: Toward valid and meaningful assessment of learners' conceptions of Nature of Science. *Journal of Research in Science Teaching*, *39*(6), 497–521.

Perkins, K.K., Gratny, M.M., Adams, W.K., Finkelstein, N.D., & Wieman, C.E. (2006). Towards characterizing the relationship between students' interest in and their beliefs about physics. *AIP Conference Proceedings, 818*, 137–140.

Redish, E. F., Saul, J. M., & Steinberg, R. N. (1998). Student expectations in introductory physics. *American Journal of Physics, 66*(3), 212–224.

Roth, W.-M. (1994). Physics students' epistemologies and views about knowing and learning. *Journal of Research in Science Teaching, 31*(1), 5–30.

Saarela, J. (2013). Lukiolaisten näkemyksiä fysiikasta ja fysiikan oppimisesta. Pro gradu –tutkielma. Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto.

Stathopoulou, C., & Vosniadou, S. (2007). Exploring the relationship between physics-related epistemological beliefs and physics understanding. *Contemporary Educational Psychology*, *32*, 255–281.

## LIITE A. CLASS-KYSELYN VÄITTÄMÄT

1. Valtavan tietomäärän muistaminen on minulle iso fysiikan oppimisen ongelma.

2. Ratkaistessani fysiikan tehtävää yritän päätellä mikä olisi lopputuloksen järkevä arvo.

3. Pohdin usein arkielämääni liittyvää fysiikkaa.

4. Fysiikan oppimiseksi on tärkeää tehdä paljon tehtäviä.

5. Vaikka mielestäni ymmärrän tietyn fysiikan aiheen, on minulla ongelmia aiheeseen liittyvien tehtävien ratkaisemisessa.

6. Fysiikan tieto koostuu lukuisista irrallisista aiheista.

7. Kun fyysikkojen tietous karttuu, monet tänä päivänä tuntemamme fysiikan ajatukset osoittautuvat todennäköisesti virheellisiksi.

8. Ratkaistessani fysiikan tehtävää etsin kaavan, joka sisältää tehtävässä annetut muuttujat, ja sijoitan arvot siihen.

9. Mielestäni opin hyvin fysiikkaa lukemalla fysiikan tekstin (esim. luentomateriaalit tai oppikirjan luvut) yksityiskohtaisesti.

10. Fysiikan tehtävän voi ratkaista yleensä vain yhdellä tavalla oikein.

11. En ole tyytyväinen ennen kuin ymmärrän tarkasteltavien fysiikan asioiden/systeemien toiminnan periaatteet.

12. En voi oppia fysiikkaa, ellei opettaja selitä asioita hyvin luennolla/harjoituksissa.

13. Fysiikan kaavat eivät auta minua ymmärtämään fysiikkaa, sillä ne ovat vain laskemista varten.

14. Opiskelen fysiikkaa omaksuakseni tietoa, josta on hyötyä opiskelun ulkopuolisessa elämässä.

15. Jos en onnistu ratkaisemaan fysiikan tehtävää ensimmäisellä yrityksellä, yritän yleensä keksiä toisenlaisen toimivan ratkaisun.

16. Lähes jokainen pystyy ymmärtämään fysiikkaa, jos vain tekee töitä sen eteen.

17. Fysiikan ymmärtäminen tarkoittaa yleensä sitä, että pystyy muistamaan jotakin aikaisemmin lukemaansa tai näkemäänsä.

18. Jos käytän kahta eri tapaa fysiikan tehtävän ratkaisemiseen, voin saada tulokseksi kaksi eri arvoa, jotka ovat molemmat oikeita.

19. Ymmärtääkseni fysiikan sisältöjä keskustelen niistä ystävieni ja muiden opiskelijoiden kanssa.

20. Jos en pysty ratkaisemaan fysiikan tehtävää viidessä minuutissa joko luovutan tai pyydän joltakulta apua.

21. Jos en muista kaavaa, johon koetehtävän ratkaiseminen perustuu, en pysty tekemään juuri mitään tehtävän ratkaisemiseksi.

22. Jos haluan käyttää yhden fysiikan tehtävän ratkaisumenetelmää toisen tehtävän ratkaisemisessa, tehtävien täytyy olla hyvin samanlaisia.

23. Jos ratkaistessani fysiikan tehtävää saan hyvin erilaisen tuloksen kuin odotin, luotan silti tulokseen enkä yritä ratkaista tehtävää uudestaan.

24. Minun on ymmärrettävä fysiikan kaavat hyvin ennen kuin osaan käyttää niitä oikein.

25. Pidän fysiikan tehtävien ratkaisemisesta.

26. Fysiikassa matemaattiset kaavat ilmaisevat suureiden välisiä riippuvuuksia.

27. On tärkeää, että maan hallitus antaa virallisen hyväksynnän uusille tieteellisille ajatuksille ennen kuin ne voidaan hyväksyä laajasti.

28. Fysiikan oppiminen muuttaa näkemystäni siitä miten maailma toimii.

29. Oppiakseni fysiikkaa minun tarvitsee vain muistaa esimerkkitehtävien ratkaisut.

30. Päättelytaidot, joita käytän ymmärtääkseni fysiikkaa, voivat olla minulle hyödyllisiä arkielämässä.

31. Käytämme tätä väittämää sellaisten vastaajien vastausten hylkäämiseen, jotka eivät lue kysymyksiä. Valitse vaihtoehto 4 vastaustesi säilyttämiseksi.

32. Mielestäni on ajantuhlausta käyttää runsaasti aikaa fysiikan kaavojen lähtökohtien pohtimiseen.

33. Mielestäni muutamien tehtävien huolellinen, yksityiskohtainen tarkastelu on minulle hyvä tapa oppia fysiikkaa.

34. Pystyn yleensä päättelemään miten fysiikan tehtävät ratkaistaan.

35. Fysiikalla oppiaineena on hyvin vähän tekemistä sen kanssa mitä koen ja havaitsen todellisessa maailmassa.

36. Ratkaisen usein fysiikan tehtävän useammalla kuin yhdellä tavalla ymmärtääkseni asian paremmin.

37. Ymmärtääkseni fysiikkaa mietin myös omia kokemuksiani ja pyrin liittämään ne tarkasteltavaan aiheeseen.

38. Fysiikan asioita on mahdollista selittää ilman matemaattisia kaavoja.

39. Ratkaistessani fysiikan tehtävää pohdin sen taustalla olevaa fysiikkaa.

40. Jos ajaudun umpikujaan fysiikan tehtävän ratkaisemisessa, todennäköisesti selviä siitä omin avuin.

41. On mahdollista, että kaksi fyysikkoa suorittaa huolellisesti saman laboratoriokokeen saaden erilaiset tulokset, jotka ovat molemmat kuitenkin oikeita.

42. Opiskellessani fysiikka pyrin yhdistämään omaksuttavan tiedon siihen mitä jo tiedän sen sijaan että vain opettelisin tiedon ulkoa.

# CONTENT STRUCTURE OF PHYSICS LESSONS AND ITS RELATION TO STUDENT LEARNING GAINS

Jussi Helaakoski and Jouni Viiri

University of Jyväskylä

*Previous research implies that content structure is a potential determining factor with respect to differences in learning gains between different school classes. In our approach, content structure is defined as the overall structure of all knowledge elements and their connections presented during a lesson, and therefore provides a more micro-level perspective of lesson content compared to previous studies. In our overall project (Quality of Instruction in Physics, QuIP) we will analyse the content and content structure of 98 double lessons on the topic 'the connection between electrical energy and power' videotaped in lower secondary schools in Finland, Germany and Switzerland. The aim is to compare the content-related features of instruction in the three countries and to determine which aspects of content and content structure seem to be important to student learning. The analysis of the videos is done quantitatively with fixed 10-second coding intervals using a coding system developed earlier in this project. Based on the coding results, different measures to describe the content and content structure of the lessons are calculated. The results indicate that the number of knowledge elements and connections between elements positively correlate with student learning gains. Finally, the limitations of the results and implications for practice are discussed.*

## INTRODUCTION

One of the main goals of education is to guide students towards understanding a given subject matter so that they are then able to apply this knowledge in solving different kinds of subject-related problems. Intuitively, it is clear that in order to help students to develop a solid cognitive knowledge structure, teachers should pay specific attention to how they present subject matter to their students. That is, the *content structure* of the lessons should be considered carefully. However, little research has been conducted on the content structure of instruction and its relation to student learning. Müller and Duit (2004) found that the number of connections between concepts in instruction is connected with students' learning outcomes. Brückmann (2009) continued this work by developing a coding manual for coding the content structure of lower secondary level mechanics instruction. Brückmann analysed the content structure of mechanics lessons by coding physics concepts and contextual information and by building from this information so-called content structure diagrams. In our opinion, however, this approach provides only a surface-level view of content structure, as only the connections between different distinguishable lesson events are analysed. Preferably, the connections between different physics concepts should also be analysed, since student learning involves building a coherent cognitive structure between concepts and facts. This is supported also by the observation that the difficulty of physics tasks appears to be connected with the task complexity, meaning, for example, that tasks involving physics relations are more difficult than tasks involving just one or more individual facts (Kauertz, 2007).

When connections between concepts are analysed at a detailed, micro level, the need arises to formulate a more comprehensive, lesson-level model from them. One way of doing this could be to build concept maps (Novak & Gowin, 1984) based on the lessons. Physical concepts and objects found in the lessons could be used as nodes in a similar manner to conventional concept maps. However, the propositions (linking phrases) used in concept mapping would be problematic in more quantitative video analysis, as it would be difficult to achieve sufficient agreement between different coders regarding the precise formulation of the propositions. Another possibility would be to use the mind mapping technique, where the existence of connections alone would be analysed without propositions. There is, however, another intermediate means of analysing conceptual connections from lesson videos. Koponen and Pehkonen (2010) have conducted analyses of conceptual networks in which connections are limited to certain procedural rules: quantitative experiments, definitions, and logical deductions. In our opinion, this approach seems to be the best alternative when analysing large amounts of lesson video data.

The aim of our project is to analyse the content and content structure of physics lessons videotaped in Finland, Germany, and Switzerland under the QuIP project (Quality of Instruction in Physics), and to use the results of this video-based analysis to analyse the relationships between content and content structure and student learning gains. The main research question is therefore the following:

> What characteristics of the content and content structure of physics lessons are positively related to students' learning gains?

## SAMPLE AND METHODS

In this section, we will present the process of analysing knowledge elements and their connections identified from classroom videotapes and formulating conceptual networks based on this primary data. We will start, however, by briefly introducing the overall sample and the main features of the QuIP project data, as these are used also in this study.

### Sample and data collection of the QuIP project

The total sample of the QuIP project included 103 classes from the final years of lower secondary education (47 classes in Germany, 31 in Switzerland and 25 in Finland). The overall sample size of the QuIP project was 2,135 students (Germany 1,193, Switzerland 560, and Finland 382) and the average student age was 15.9 years (Germany 16.1, Switzerland and Finland 15.6). For each of the classes in the study, pre- and post-tests were carried out and a double lesson of the same topic (the connection between electrical energy and power) was videotaped between the tests. The tests consisted of multiple-choice tasks, open-ended questions, and calculations. The test was developed and the results analysed by Cornelia Geller of the German QuIP team in Essen (see Geller et al., 2010). A range of other data was also collected (e.g., student and teacher background information, students' motivation and cognitive ability, and teachers' pedagogical content knowledge). This other data was not used in the analysis of this paper and is therefore not presented here.

**Formulating conceptual networks from classroom videos**

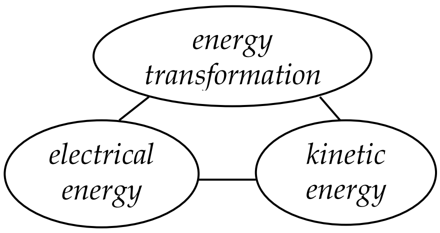
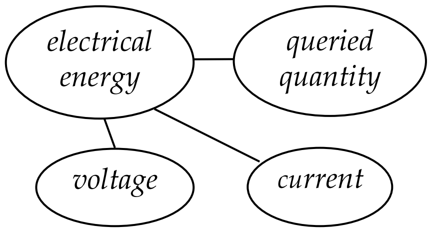
The first step in the process of converting videotaped lessons into conceptual networks was to code the knowledge elements and their connections using a coding system. As the QuIP video data is based on lessons conducted on the topic of electrical energy and power, the contents of the coding system were defined accordingly. The development of the system and the coding categories are presented in more detail in a previous paper by the authors (Helaakoski & Viiri, 2011). The main coding categories used and the number of subcategories per coding category are presented in Appendix A. In spring 2010, the corresponding author trained two student assistants, one Finnish and one German, to analyse the QuIP videos using this coding system. The coding is carried out in 10-second intervals using Videograph[7] software and is based on spoken sentences, as it is in these that connections between concepts are made. Although the coding is predominantly based on different fixed categories (see Appendix A), some transcription is also required in order to reveal how different concepts within a given sentence are connected. The inter-rater agreement of the video coding was checked based on six double lessons using Cohen's kappa, and the values in the different coding categories were between 0.51 and 0.78. All of the categories that were used to formulate conceptual networks had a higher inter-rater agreement than 0.60 and, therefore, this kind of analysis can be considered reliable (Reyer, 2005).

The process of formulating conceptual networks from the classroom videos is explained in Table 1. The video coding converts the first stage – the original talk of the teacher and students – into categorized data and a summarized transcription, which gives a condensed formulation of the original sentences. After that, concept maps can be formulated based on the sentences. This phase can, in most cases, be omitted in practice, but it is presented here for clarity. In the fourth and final phase the connections between the knowledge elements are coded into a matrix in Excel. Once the lesson has been thus analysed, the matrix

[7] http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/videograph/enhtmStart.htm

contains information on the conceptual network of the lesson and can be used to calculate different measures of its content structure.

TABLE 1 The stages involved in converting lesson dialogues into conceptual networks

<table>
<tr><th>Stage</th><th>Description and practical example</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Original lesson dialogue<br><u>Example (breaks between 10-second intervals marked with |)</u>:<br>Teacher: Kinetic energy was in this demonstration transformed into electrical energy. | What quantities are used to define electrical energy? Student: Voltage and current. Teacher: Voltage and current. | And what else?</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Coding and transcription based on the coding system<br><u>Example</u>:<br>Interval 1 (coding): A11 (energy transformation)<br>Interval 1 (transcription): energy transformation–(kinetic energy → electrical energy)<br>Interval 2 (coding): A1 (electrical energy), CIV (queried quantity), BI3 (current), BII3 (voltage)<br>Interval 2 (transcription): electrical energy –? queried quantity, – (voltage, current)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Conceptual networks based on individual sentences<br><u>Example</u>: Sentence 1:<br>
<br>Sentence 2:<br>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Connectivity matrix based on the sentences<br><u>Example</u>:<br>
<table>
<tr><th></th><th>A1</th><th>A5</th><th>A11</th><th>BI3</th><th>BII3</th></tr>
<tr><td>A1 (electrical energy)</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A5 (kinetic energy)</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A11 (energy transformation)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>BI3 (current)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>BII3 (voltage)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

### Calculating different measures related to content structure

The objective of this paper was to determine which aspects of content and content structure seem to be important to student learning. In order to do so, we first needed to create different measures that would summarise the important features of the lesson content and content structure from the video coding data. The coding data provides information on key features of the lessons, such as overall time used for instruction and time used for conceptual instruction. The time used for conceptual instruction refers to the total instruction time minus the time used for individual/group work, organizational talk and content-related talk without explicit presence of concepts, etc. In other words, it is the time when the teacher is actively dealing with the content of the lesson with the whole class. In addition, by combining data from the different conceptual categories, it is possible to calculate the overall frequency of physics concepts and the so-called concept density (number of concepts per minute of conceptual instruction) together with the number of different topic-related physics concepts presented during the lesson.

The various measures of lesson content and content structure mentioned above provide information about the use of concepts during the lesson. In addition, data from the connectivity matrix (Table 1, stage 4) gives information about the connections between the concepts. Furthermore, category GII gives information about the types of conceptual connections established. The connections can be divided roughly into two groups: argued connections (e.g., experimental or mathematical connections) and stated connections (without clear reasoning). One possible measure of learning outcomes is the percentage of argued structures, as one could expect that the more the connections would be explicitly argued, the better the students would be able to learn them. Finally, the number of macro-level connections (category HI) is also a potential measure of student learning outcomes.

## RESULTS

To date, video coding of the double lessons of the QuIP project has been completed and the whole data set of 103 classes is available. Five classes were, however, excluded from further analysis; three due to videotaping error and two due to very short overall instruction time. The content and content structure measures discussed above were calculated for the remaining 98 classes and correlated with the average learning gains of those classes using Pearson's correlation coefficient *r*. The results are presented in Table 2.

Most of the measures of lesson content and content structure had a small or moderate positive correlation with the learning gains of the classes. Not very surprisingly, overall instruction time was not significantly correlated with student learning gains. However, the time used for conceptual instruction was significantly correlated with learning gains, as were overall frequency of physics concepts during the videotaped lessons and concept density (concept frequency divided by the time used for conceptual instruction). These correlations are, nevertheless, relatively small. Slightly higher and statistically more significant correlation with learning gains were found with variables related to the overall conceptual structure of lessons. The highest correlations were observed with the number of different concepts and the number of different conceptual connections. Both of these aspects describe from different viewpoints the broadness of the conceptual network of the lessons. Relatively similar correlation with learning gains was observed with the overall frequency of connections between physics concepts. Interestingly, the number and percentage of argued conceptual connections were not significantly correlated with learning gains. Finally, the frequency of linkages drawn from the current instruction to earlier or upcoming lessons or courses (so-called macro-level connections) also correlated significantly with student learning gains.

TABLE 2 Correlations between average learning gains of the classes (see Geller et al., 2010) and different measures of lesson content and content structure

| Measure of content and content structure | Correlation with average learning gains (98 classes) |
|---|---|
| Overall instruction time | 0.10 |
| Time used for conceptual instruction | $0.22^{*}$ |
| Frequency of physics concepts | $0.25^{*}$ |
| Concept density | $0.22^{*}$ |
| Number of concepts | $0.36^{***}$ |
| Connections between physics concepts | $0.28^{**}$ |
| Connection density | $0.20^{*}$ |
| Number of connected concept pairs | $0.31^{**}$ |
| Number of argued structures | 0.10 |
| Percentage of argued structures | 0.05 |
| Number of macro-level connections | $0.25^{*}$ |

$^{*}$ $p < 0.05$, $^{**}$ $p < 0.01$, $^{***}$ $p < 0.001$

## DISCUSSION AND CONCLUSIONS

In this paper we have presented the process of creating conceptual networks based on videotaped lessons and possible measures that can be used to describe the content and content structure of lessons. These measures were then correlated with the average learning gains of the classes. The results indicate that, of the studied measures, those with the greatest impact on student learning are the amount of time used for conceptual instruction, the number of physics concepts presented during that time, and the number of connections established between the concepts. The findings are in line with those of Müller and Duit

(2004), who argued that linkages between concepts are connected to learning outcomes. It is worth noting that the number of concepts and the number of connections are strongly correlated ($r = 0.92$, $p < 0.001$). Thus, these two aspects tell the same story from two viewpoints. The present study and that of Müller and Duit (2004) were both carried out at the lower secondary level and based on relatively narrow physics topics. Future research should therefore verify the results with respect to other topics, subjects and school levels.

The next stages of our project will involve, on one hand, a more qualitative analysis of the conceptual networks of the QuIP data and, on the other hand, a further mathematical analysis using measures calculated based on graph theory (see Koponen & Pehkonen, 2010). In the further analysis, the effect of student background variables (such as socioeconomic status, motivation, and quantitative and non-verbal cognitive abilities) will also be controlled.

The results of this study imply that focusing on whole-class conceptual instruction is of considerable importance to student learning. In particular, key concepts and their connections should be emphasized. Overall, the role of the teacher seems to be crucial in supporting student learning. However, these results should not be used to argue against more student-oriented and innovative teaching methods. Based on our experience from the QuIP project, the teaching in all of the three countries under study is dominantly teacher-centred and, therefore, reformed teaching approaches might support student learning even better. Additionally, it should be kept in mind that the samples in the participating countries were not randomly selected, which places a further limitation on the generalizability of the results. The complexity of the teaching/learning setting presents an ongoing challenge to teachers, teacher educators and educational researchers alike.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We extend our sincere thanks to Vesa B. Moate for his assistance in language editing this paper and to the Finnish Graduate School of Mathematics, Physics, and Chemistry Education, the Ellen and Artturi Nyyssönen Foundation, and the Emil Aaltonen Foundation for funding this project.

## REFERENCES

Brückmann, M. (2009). *Sachstrukturen im Physikunterricht. Ergebnisse einer Videostudie*. Berlin: Logos.

Geller, C., Neumann, K., & Fischer, H. E. (2010). Was Mittelstufenschüler über Elektrizität wissen – ein Ländervergleich. In D. Höttecke (Ed.) *GDCP: Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik* (pp 389–391). Berlin: Lit.

Helaakoski, J. & Viiri, J. (2011). Content and content structure of physics lessons and their relation to students' learning gains. In H. Silfverberg & J.

Joutsenlahti (Eds.) *Integrating Research into Mathematics and Science Education in the 2010s. Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association 14.–15.10.2010 in Tampere* (pp. 292-311). School of Education, University of Tampere.

Kauertz, A. (2007). *Schwierigkeitserzeugende Merkmale physikalischer Leistungstest-aufgaben*. Dissertation, University of Duisburg-Essen.

Koponen, I. T. & Pehkonen, M. (2010). Coherent knowledge structures of physics represented as concept networks in teacher education. *Science & Education*, *19*(3), 259–282.

Müller, C. T. & Duit, R. (2004). Die unterrichtliche Sachstruktur als Indikator für Lernerfolg – Analyse von Sachstrukturdiagrammen und ihr Bezug zu Leistungsergebnissen im Physikunterricht. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, *10*, 146–160.

National Research Council (1999). *How people learn: brain, mind, experience, and school*. Committee on Developments in the Science of Learning. Washington, DC: National Academy Press.

Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1984). *Learning how to learn*. New York and Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Reyer, T. (2005). Qualitative video-analysis applied to classroom studies – a first-steps workshop. In H. E. Fischer (Ed.) *Developing standards in research on science education* (pp. 39–45). London: Taylor & Francis.

## APPENDIX A. OVERVIEW OF VIDEO CODING SYSTEM CATEGORIES

TABLE A1 Main coding categories of the coding manual for content and content structure. The number of subcategories per main category is given in brackets.

| Category | Description and number of subcategories |
|---|---|
| 0 | General (*9 subcategories*) |
| A | Energy (*15 subcategories*) |
| BI | Electric quantities: current (*5 subcategories*) |
| BII | Electric quantities: voltage (*5 subcategories*) |
| BIII | Electric quantities: others (*8 subcategories*) |
| CI | Other quantities: location-related (*6 subcategories*) |
| CII | Other quantities: time and mass (*4 subcategories*) |
| CIII | Other quantities: power and force (*8 subcategories*) |
| CIV | Other quantities: miscellaneous (*9 subcategories*) |
| D | Equations (*14 subcategories*) |
| EI | Objects & technical: circuit-related concepts (*6 subcategories*) |
| EII | Objects & technical: others (*25 subcategories*) |
| F | Symbols, units, and examples (*6 subcategories*) |
| GI | Micro-structure: number of linked concepts (*7 subcategories*) |
| GII | Micro-structure: type of connection (*14 subcategories*) |
| HI | Macro-structure: distant connections (*6 subcategories*) |
| HII | Macro-structure: beginning of a lesson event (*2 subcategories*) |

# PEDAGOGICAL ASPECTS IN FINNISH SCIENCE EDUCATION RESEARCH PUBLICATIONS

Päivi Kinnunen[1], Jarkko Lampiselkä[2], Lauri Malmi[1] and Veijo Meisalo[2]

[1]Aalto University, [2]University of Helsinki

*This pilot study provides an overview on which pedagogical aspects of the instructional process Finnish chemistry and physics education researchers have focused on in recent years. We have categorized 19 research papers published during 2008-2010 at the national conferences. For categorization we used a typology derived from the multi-layered didactic structure that extends the didactic triangle. The results suggest most research papers report on studies on some aspect of the instructional process at the course or teaching-organization level. On the contrary, studies discussing society level aspects of the instruction are few. The most studied aspects are teachers' pedagogical actions, students' understanding of some aspect of the content, and the learning outcomes. We conclude with our experiences of applying and developing this typology.*

## INTRODUCTION

Having an understanding of the various pedagogical aspects of the science education process is important for teachers and researchers who aim at developing education systematically. Individual researchers or research groups must often focus on some particular aspects of science education at a time. However, the larger community of researchers has a possibility to gain a versatile view on the different aspects of the field. This on-going meta-study on published research papers aims at providing an overview of the pedagogical aspects that have been studied in Finnish science education research in recent years. The overview will help to build the big picture of what the Finnish researchers study, and more importantly, what are the less studied areas of science education. Identifying these less studied areas may provide ideas for new interesting and relevant research topics.

Our main research question is: *which pedagogical aspects of the instructional process Finnish chemistry and physics education researchers have focused on in the recent years?* We also aim at providing evidence that a previously developed typology of educational research papers does work outside its original context (computer science education).

An overview of the previous categorization studies in STEM-education field suggests that the existing categorizations focus on research quality related issues, topic of the paper, and how the research has been conducted. Authors' nationality and citation counts have also been of interest to some researchers.

Ebye and Schmidt (2001) were particularly interested in the quality of the research papers. The authors wanted to trigger discussion of quality criteria in chemistry education research and categorized papers, for instance, according to used methods, the quality of research questions, and theory-relatedness. Similarly, the quality has interested researchers also in the computer science education. Randolph et al. (2007, 2008) surveyed the research settings in a variety of publication forums in computing education, and made many critical comments on their quality.

The topic and scope of the paper has been a popular base for categorizing papers and providing an overview of what has been studied in the field. McDermott and Redish's (1999) study gives an overview of the broad areas that have been studied in physics education research. In science education several researchers have also taken the topic of the paper as one of the categorization criteria (Lee, Wu and Tsai 2009; Tsai, Wu, Lin and Liang 2011; Tsai and Wen 2005). In computing education research, Fincher and Petre (2004) divided the field into 10 subfields, identifying work carried out, for instance, in student understanding, teaching methods, assessment, and educational technology. Later on Pears et al. (2005) clustered these categories into three broader areas, and added a category that presents papers investigating the field itself (our current paper is an example of such a paper). Moreover, they also added another dimension, which presents the influence of the paper in the field, as the authors' overall goal was to identify core readings in computing education research. Simon (2007) analysed computing education research papers in 4 dimensions: Context defines the curricular area of the work; Theme presents what the paper is about, such as assessment, or teaching/learning techniques; Scope defines whether the work concerns a single course, or program or even many institutes, and finally Nature presents the general character of the paper, i.e., whether it presents experimental work, studying collected research data in non-experimental setting, analysing existing data sources or simply reporting something. Simon's system has been used to analyse a large pool of computing education research papers. See, for example, Simon et al. (2008) and references therein for analysis within the whole computing education research field, and Sheard et al. (2008) for similar analysis of research within programming education context. Similarly, Tsai and Wen (2005) and Lee et al. (2009) used the type of the research (e.g., empirical, theoretical) as a base for categorization.

Whereas the previous systems were mainly used to analyse literature in terms of *what* has been researched, others have looked deeper in *how* the research has been carried out. Malmi et al. (2010) compared computing education research papers with earlier work of Glass et al. (2004) who had analysed the generic research goals (descriptive, formulative, evaluative research), as well as research framework and analysis methods in computer science, software engineering and information systems areas. Malmi et al. (2010) also looked at the theoretical underpinnings of the papers.

Similar, but independent work has also been carried out in engineering education research, where many different aspects of papers have been categorized, including topic of research, theoretical framework, collected data, citations (Wankat 2004), author data and nature of the paper (Osorio & Osorio 2002). A massive undertaking was carried out by Jesiek et al. (2011) who analysed in total 2173 papers in three major engineering education conferences and journals, focussing on authors' origin, collaboration between the authors, research topics and their co-occurrence in papers.

These above discussed typologies categorize research papers, for instance, based on the results or the used research method, whereas the typology we use in the present paper focuses on the pedagogical aspect of the research paper. To our best knowledge such a typology has not been used in science education context, and thus our categorization work provides a new viewpoint to recent science education research publications. The current paper is a report on the on-going research project. On this first phase we focus on recent Finnish science education publications. The paper is organized, as follows. Firstly, we introduce and elaborate on the development of the typology that we use in this study. Next we present the data collection and paper categorization procedures, followed by the results and our experiences of developing and using the typology. We also elaborate on some of the challenges we faced when categorizing the papers.

## TYPOLOGY FOCUSING ON THE PEDAGOGICAL ASPECT OF THE PUBLICATION

In this study we further develop an existing typology that takes the pedagogical focus of the research paper as a starting point (Kinnunen 2009; Kinnunen, Meisalo, & Malmi, 2010). The typology is based on the didactic triangle first introduced by J. F. Herbart in early 19th century (see, e.g. Peterssen 1989). The didactic triangle is a framework that brings forward the entity of the instructional process: it discusses the role of students and teachers and their relations to the content as well as to each others during the instructional process. The triangle has proven to be a viable theoretical tool. For instance, Bergman (2006) took the Herbart's original triangle and added the fourth node, community, to the structure thus creating a tetrahedron, which highlights the role of community as an equal part among teacher, student, and content in learning. Kansanen and Meri (1999) and Kansanen (2003) have elaborated the Herbart's triangle further by adding an additional relation to it that emphasizes the teacher's pedagogical actions (arrow A, Figure 1). Further, Toom (2006) took Kansanen and Meri's (1999) and Kansanen's (2003) model as a starting point and created a model of teacher's tacit pedagogical knowing. Goodchild and Sriraman (2012) discussed the origins of the didactic triangle and its use in modern learning environments focusing on mathematics education.

The typology we use in this study derives the categories from the multi-layered structure that is based on the Kansanen and Meri's (1999) and Kansanen's (2003) version of the didactic triangle (Figure 1). In the multi-layered structure model the original triangle is elaborated so that it can be used to analyse not only course level aspects of the instructional process but also teaching organization and society level aspects (Figure 2). In addition, the model has also an additional relation (arrow B in Figure 2) to emphasize the students' perceptions and experiences of the pedagogical activities (Kinnunen, 2009; Kinnunen, Meisalo & Malmi, 2010). In this study we further develop the model by adding an arrow C (Figure 2) to emphasize teachers' reflections on their own pedagogical actions.

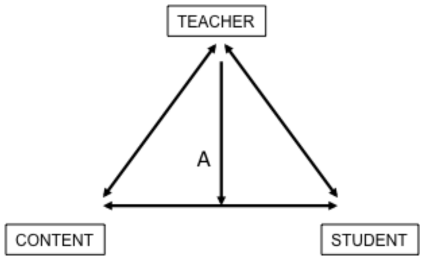



FIGURE 1 Didactic triangle (Kansanen, 2003; Kansanen & Meri, 1999)

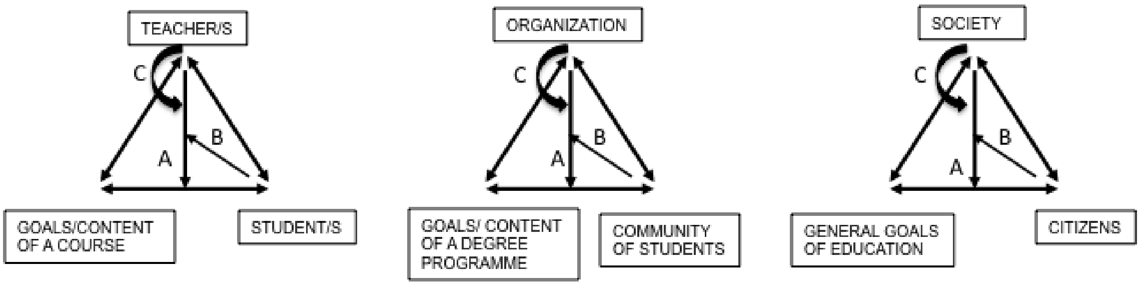



FIGURE 2 Multi-layered didactic structure

The typology has eight main categories (see Table 1) that are derived from the nodes and arrows of the multi-layered structure (Figure 2). Each of the categories can be further discussed either at a course, teaching organization, or society level (or even at an international level) thus highlighting the *scope* of the research. In this paper we have also observed which *educational level,* i.e., primary/secondary/tertiary education, the research is focusing on. The new aspects of the typology compared to its previous version (Kinnunen, 2009; Kinnunen et al. 2010) are category 7.4 and the educational levels.

The research papers that discuss some aspect of the instructional process can be categorized to one or more categories. Also, it is possible to separate main and side foci of the paper if some foci have clearly a bigger role than some other foci. For example, the paper by Vihma and Aksela (2008) discusses how the computer simulations (Category 7.3, scope=course; simulations are used during the lesson to scaffold students' learning) affect students' understanding on a certain topic (5.3, course; to what degree students' understanding improved), and how useful students regarded the simulations for their learning (8, scope=course). All foci are emphasized equally in the paper so they are all marked as main foci. This study focused on the upper secondary school level.

The typology derived from the multi-layered didactic structure can be used for multiple purposes. First, it can provide an overview of what is being researched in the specific field and which aspects are less covered. Such information could be useful for designing new research projects, or allocating resources for research. Second, researchers may use the typology to analyse publications in some specific research area to identify relevant work.

**PROCEDURE**

Our aim was to gain an overview on which didactic aspects of the instructional process Finnish science education researchers have focused on in the recent years. For this pilot study we used the papers published at the national conferences as our data set. We acknowledge that focusing on national conferences will leave out considerably work by Finnish researchers such that is published in international forums. We, however, considered this choice appropriate, as this was a pilot study of applying the new typology in a new field. Moreover, these forums are more likely to be followed also by science teachers in schools than international publications, and thus the effect of the papers on teaching practice may be bigger.

We have delimited our data set both in publication venue wise, year of publication wise and topic wise: Firstly, we chose the papers published in the proceedings of two national conferences Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät (Malu) and Ainedidaktiikan päivät (AineD) during 2008 - 2010 as our data set. The papers published in the proceedings are peer reviewed long papers. Proceedings of Kasvatustieteen päivät are not included into the data set, because most science education related papers are published in the two previously mentioned conferences. Secondly, we used papers published in three years of time, because that time frame provided us sufficient number of papers for the pilot study and to make some tentative remarks on the pedagogical aspects the researchers have been interested in. Thirdly, we included only papers that discussed chemistry and physics education and delimited papers focusing on biology, technology, mathematics, or computing education out of our scope. We made this last delimitation based on our own professional interest towards these two fields. Altogether we found 19 papers (8 Malu, 11 AineD) that met our criteria and were thus included into the data set.

When classifying research in physics and chemistry education the problem of including or excluding a paper in the scope of these research areas becomes relevant. The problem appeared first in the form of pondering whether research on the society level - which we found to appear scarcely - is missing due to the fact that it might have been considered as sociological rather than educational research. This has obviously happened usually when the researchers themselves have selected the publication forum, rather than as a result of the classifiers' decision. A similar situation may also occur with research on students, which might be classified as psychological research. A somewhat different problem concerns borderline between mathematics education and science education as science uses much mathematics in theory as well as in applications. On the other hand, some measurements and managing measurement data with statistical methods might be more about mathematics than physics. One may also discuss even here the boundaries of physics and chemistry and biology remembering for instance the growing importance of biochemistry.

We used the inductive content analysis type reading (Patton, 2002) to analyse the data. The four authors of this paper read each of the papers individually and categorized them according to the typology, which was introduced in Section 3. Our goal in the content analysis was to aim at understanding the research holistically, not just sorting the articles by the abstract or the research questions. This meant that our analysis did not base merely on the content of the study design chapter but more holistic understanding on the entire article all the way from the objectives of the study to the results and discussions about the study. As we analysed the papers we made notes on the following aspects: 1) The pedagogical aspects the paper focuses on. The paper may focus on one or more pedagogical aspects at the same time. In some cases, some categories were deemed minor (side focus), if their role in the paper was smallish. 2) We also made notes whether the paper discussed course, teaching organization, or society level issues and on which school level (primary/secondary/tertiary) the paper focused on. The team categorized the papers reading them first individually and assigning them preliminarily to different categories. However, the individually made categorizations were tentative and we used them as a beginning point for discussion during which we compared the outcomes and discussed carefully the possible disagreements until an agreement was reached.

**RESULTS**

The distribution of the articles on different categories and educational levels is shown in Table 1 together with the number of the articles. Even though the data were not particularly extensive, some trends in research interests can be noticed instantly. Firstly, the research does not seem especially versatile. On the contrary, the researchers have focused mostly on students' understanding and attitudes and learning outcomes (Categories 5.1 and 5.3) and teachers' pedagogical activities (Category 7.3) whereas teachers themselves or any of their relationships to different aspects is studied less.

TABLE 1 Distribution of didactically oriented chemistry and physics research articles on different categories and educational level (only main foci included)

| Categories | Course | Organi-sation | Society | To-tal |
|---|---|---|---|---|
| 1. Goals and content | 2 | - | 1 | 3 |
| 2. Student(s)/community of students/ citizens of a nation | - | 2 | 1 | 3 |
| 3. Teacher(s)/organization/society-level educational bodies | - | 1 | - | 1 |
| 4. Relation between student(s)/community of students/citizens and teacher(s)/ organization/society-level educational bodies | - | - | - | 0 |
| 5. Relation between student(s) and goals and content | | | | |
| 5.1 The understanding of and attitude about goals and content that the student(s) /community of students/citizens have | 2 | 3 | 1 | 6 |
| 5.2 The actions (e.g. studying) the student(s)/community of students/citizens do to achieve the goals | - | 1 | - | 1 |
| 5.3 The results of the action of the student(s)/community of students/citizens | 4 | 2 | - | 6 |
| 6. Relation between teacher(s)/organization /society and goals/content | - | 1 | - | 1 |
| 7. Relation between teacher(s) and studying | | | | |
| 7.1 The conceptions of teacher(s)/ organization/society of students' understanding/attitude on goals/content. | - | - | - | 0 |
| 7.2 The conceptions of teacher(s)/ organization/society of students' actions towards achieving goals (e.g., studying) | - | - | - | 0 |
| 7.3 Pedagogical activities of teacher(s)/ organization/society | 4 | 3 | - | 7 |
| 7.4 Reflections of teacher(s)/organization /society on their own pedagogical actions | - | 2 | - | 2 |
| 8. Relation between student(s)/ community of students/citizens and teacher's/organization's/society's pedagogical means to enhance learning | 1 | - | - | 1 |
| Total | 13 | 15 | 3 | 31 |

Secondly, most studies focus on the course or on the organisational level (28 foci out of total 31) whereas only few studies focus on science education issues at the society level (3/31). This result might indicate that the teachers and the researchers are primarily interested in the developments and improvements of the educational environment in the local level rather than in the broader national or societal frame. It is understandable that firstly the researcher is interested in improving his or her own work or the teaching and the learning in the local community. Later on, when he or she is more experienced and has more connections to other researchers, it is easier to participate in studies and research projects in the national and the society level. Another likely reason for few society level studies is that they are rather frequent too, but they are reported elsewhere like in Scandinavian, European or international journals and therefore do not appear in our data.

Table 1 also gives some indications of the aspects of the instructional process that might be overlooked. For instance, there were only few studies that focus on the relationships between the actors, for example, the relation between a community of students and a teaching organisation (Category 4). This is, however, somewhat understandable because the relationship in this category does not contain the pedagogical aspect but the way the actors perceive each other instead. It is plausible, that investigations of this kind are done but in the field of general pedagogy instead of subject didactics. In addition, there were only few studies on teachers' conceptions of students' understanding about the goals and content of the course (Category 7.1) or teachers' reflections (Category 7.4). We aim at discussing the above in relation to the general trend in the national research policy in the context of our further research.

## OUR EXPERIENCES OF CLASSIFYING THE RESEARCH PAPERS USING THE MULTI-LAYERED DIDACTIC STRUCTURE

During the analysis, we combined the inductive content analysis type reading (Patton, 2002) with the developed categorisation system. After the reading and personal categorisations, we held peer discussions where final categorisation was made. If evaluators' original, tentative categorisations differed from each other, the final decision on which category the paper belongs to was made based by negotiation. We found out that this systematic but holistic reading combined with peer discussions is a functional method and produces meaningful categorisations. Also, we found out that a group with members with different backgrounds (science education, computer science education, education) added strengths and trustworthiness to the results. Thus, interaction among researchers appeared to be an essential part of successful analysis. In conclusion, it is recommended to use a procedure similar to ours if applying the developed categorisation system in the subsequent analysis.

The original categorisation scheme developed during the process, which begs the question about the stability of the results. We are aware of the possibility that the criteria used in the very first and the recently analysed papers may differ from each other in some extent. However, we think that some changes of the criteria are natural and are actually a necessary part of the evolvement and should not be taken as a threat to the categorisation scheme. Instead, we see that it improves the precision and accuracy of the developed categorisation. For example, during the process one new category was developed (Category 7.4) which in our view improved the resolution of the category 7. Moreover, during the latest analysis there has been a growing interest and need to develop another analysis level that would take the international component of the researches into consideration. We though acknowledge that any changes in the categorisation system imply that a number of previously categorized papers may need to be re-categorized. With a small number of papers this is not a problem, but in any large-scale classification project dealing with hundreds or thousands of papers, such work may be infeasible. Therefore a pilot study, like the present work, is a highly useful method. However, in spite of the challenges the evolving categorisation scheme poses, we strongly believe that the method reveals the big picture.

Our data pool consists of the publications of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association annual symposia. Different Finnish research institutions organise the symposium annually and take care of the publishing, which in turn implies that there is lack of coherent publishing style and a common publishing channel. Consequently, some proceedings are easily reached whereas others are not. It is suggested that the association could coordinate the publishing or at least collect the publication information about all proceedings in the webpages of the association. The best solution would be if all publications would be obtainable in an electronic format in the webpage of the association.

## CONCLUSIONS AND DISCUSSION

We conclude that our research approach yielded meaningful outcomes, although this is definitely to be considered as a pilot study and general interpretations have to wait for further developments. This pilot study provides an example how the multi-layered didactic structure based typology produces the type overview that previous typologies used in STEM-education have not provided. The typology we have developed and used gives ideas for less studied topics and thus helps to locate relevant new research areas. Whereas the previous categorisation studies (e.g. Lee, Wu and Tsai 2009; Tsai, Wu, Lin and Liang 2011; Tsai and Wen 2005) have taken a data driven approach to their analysis giving an overview of the existing studies. Therefore, it is difficult to compare the results of this pilot study to the results of previous categorisation studies in STEM-field since the approach used in them differs greatly from ours.

Our basic idea has been that to solve educational problems one has to consider the whole educational process and it is worthwhile to see if there are some aspects, which are left for minor interest in research. Although one can see that in Table 1 there are several areas where we have found few or no contributions, we want to leave more specific interpretations for further research.

This approach has been used in the field of computing education (Kinnunen, Meisalo, Malmi, 2010) as well as in engineering education research (Kinnunen, Malmi, accepted). The present study shows that the developed analysis method was applicable also within science education research. It was, however, found out that the interaction between the team members was most important here. We also acknowledge that for an individual paper our categorization may not be fully accurate. Certain problems were met when interpreting the roles of students/student teachers in research focusing on teacher education. They have in some studies the role of teachers, but they are obviously in the role of (university) students in some others. However, the general view over research foci appears to be reliable enough for our purposes giving the big picture of the field. Furthermore, some new aspects have to be observed when designing related research projects within science education research.

In science education research there is a much wider scale of student/learner ages than in computing education. There is also a much wider scale of educational institutions. These features bring some new features in the research design. It is also typical to sciences that if we want to have different categories for, e.g. chemistry education and physics education, the borderline between these is sometimes extremely difficult to draw. The same problem is found between physics and mathematics or biology and chemistry education etc.

We have to observe that our study focuses on pedagogical processes and does not consider the importance of the research topic or the effect size of the studied phenomenon. Furthermore, in the analysis of the categorized conference papers we have found that there have been frequent problems related to general quality aspects, which could lead to interesting further research. For instance, it is not uncommon that a paper gives answers to some research questions only with some questions put in the introductory part being completely forgotten.

Our project will proceed to analyse articles in the journal NorDiNa. This will allow further analysis of the emphasis and possible blind areas in science education research in Nordic countries and we are expecting to have a report on this step ready later this year. Other related projects will analyse papers in computing education research and engineering education research, which allows comparison between the fields in the future.

**REFERENCES**

Bergamin, P. (2006). Blended Learning: Die wiedergefundene Gemainschaft. Konzeptionelle Betrachtungen zur Umsetzung von Lernszenarien im Fernstudium auf Hochschlstufe. IFeL - Institut für Fernstudien- and eLearningforscung.

De Graaff, E., & Kolmos, A. (2010). Research methods in engineering education research. *Proc. of Joint International IGIP-SEFI Annual Conference 2010*.

Eybe, H., & Schmidt, H-J. (2001). Quality criteria and exemplary papers in chemistry education research. *Int. J. Sci. Educ., 23*(2), 209-225.

Fincher,S., & M. Petre. (2004). *Computer Science Education Research*. London: Taylor & Francis.

Glass, R., L., V. Ramesh, & I. Vessey. (2004). An analysis of research in computing disciplines. *Commun. ACM*. 47(6), 89-94.

Goodchild, S., & Sriraman, B. (2012). Revisiting the didactic triangle: from the particular to the general. *Zeitschrift für Didaktik der Mathematik 44*(5), 581-585.

Jesiek, B.K., Borrego, M., Beddoes, K., Hurtado, M., Rajendran, P., & Sangam D. (2011). Mapping global trends in engineering education research, 2005–2008. *Int. J. Eng. Educ., 27*(1), 77–90.

Kansanen, P. (2003). Studying-the Realistic Bridge Between Instruction and Learning. An Attempt to a Conceptual Whole of the Teaching-Studying-Learning Process. *Educational Studies, 29*(2/3), 221-232.

Kansanen, P., & Meri, M. (1999). The didactic relation in the teaching-studying-learning process. *TNTEE Publications, 2*(1), 107-116.

Kinnunen, P. (2009). Challenges of teaching and studying programming at a university of technology - Viewpoints of students, teachers and the university. Doctoral dissertation, TKK Research Reports in Computer Science and Engineering A, TKK-CSE-A4/09, Department of Computer Science and Engineering, Helsinki University of Technology, 2009.

Kinnunen, P., Meisalo, V., & Malmi, L. (2010). Have We Missed Something? Identifying Missing Types of Research in Computing Education. *Proc. of the sixth international workshop on Computing education research (ICER'10),* August 9–10, 2010, Aarhus, Denmark. ACM, New York. 13–22.

Kinnunen, P., & Malmi, L. (accepted for publication). Pedagogical Focus of Recent Engineering Education Research Papers, SEFI 2013.

Lee, M-H., Wu, Y-T., & Tsai, C-C. (2009). Research Trends in Science Education from 2003 to 2007: A content analysis of publications in selected journals. *Int. J. Sci. Educ., 31*(15), 1999-2020.

Malmi, L., Sheard, J., Simon, Bednarik, R., Helminen, J., Korhonen, A., Myller, N., Sorva, J., & Taherkhani, A. (2010). Characterizing research in computing education: a preliminary analysis of the literature. *Proc. of the sixth* *international workshop on Computing education research (ICER'10),* August 9–10, 2010, Aarhus, Denmark. ACM, New York. 3-12.

McDermott, L.C., & Redish, E. (1999). Resource Letter: PER-1: Physics Education Research. *Am. J. Phys., 67*(9), 775 – 767.

Osorio, N., & Osorio. M. (2002). Engineering education in Europe and the USA: An analysis of two journals, *Science and Technology Libraries, 23*(1), 49–70.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Thousand Oak.

Pears, A., Seideman, S., Eney, C., Kinnunen, P., & Malmi, L. (2005). "Constructing a Core Literature for Computing Education Research." *ACM SIGCSE Bulletin, 37*(4), 152-161.

Peterssen, W. H. (1989). *Lehrbuch Allgemeine Didaktik*, Munchen: Ehrenwirth.

Randolph, J., Julnes, G., Bednarik, R., & Sutinen, E., A. (2007). Comparison of the Methodological Quality of Articles in Computer Science Education Journals and Conference Proceedings, *Computer Science Education, 17*(4), 263-274.

Randolph, J., Julnes, G., Sutinen, E., & Lehman, S., A. (2008). Methodological review of computer science education research. *Journal of Information Technology Education, 7*, 135-162.

Sheard, J., Simon, Hamilton, M., & Lönnberg, J. (2008). Analysis of research into the teaching and learning of programming. *Proc. of the International Workshop on Computing Education (ICER'08),* Berkeley, San Francisco, USA.

Simon (2007). A Classification of Recent Australasian Computing Education Publications, *Computer Science Education, 17*(3), 155-169.

Simon, Carbone, A., de Raadt, M., Lister, R., Hamilton, M., & Sheard, J. (2008). Classifying computing education papers: process and results. *Proc. of the Fourth international Workshop on Computing Education Research* (ICER '08). ACM.

Toom, A. (2006). Tacit Pedagogical Knowing: At the Core of Teacher's Professionality. Doctoral dissertation. University of Helsinki, Faculty of Behavioural Sciences, Department of Applied Sciences of Education.

Tsai, C-C., & Wen, M.L. (2005). Research and trends in science education from 1998 to 2002: a content analysis of publication in selected journals. *J. Sci. Educ, 27*(1), 3-14.

Tsai, C-C., Wu, Y-T., Lin, Y-C., & Liang, J-C. (2011). Research Regarding Science Learning in Asia: An Analysis of Selected Education Journals. *The Asia-Pacific Education Researcher, 20*(2), 352-363.

Vihma, L., & Aksela, M. (2008). Tietokonesimulaatiot lukiolaisten kaasujen ymmärtämisen tukena, *Ainedidaktiikan päivät 08.02.2008 symposiumkirja*.

Wankat, P. (2004). Analysis of the first ten years of the Journal of Engineering Education. *J. Eng. Educ., 93*(1), 13–21.

# PRE-SERVICE TEACHERS' STRATEGIES OF LINKING PHYSICS CONCEPTS: ARE SIMPLE LOCAL RULES ENOUGH TO GENERATE COMPLEX CONCEPT NETWORKS?

Toni Purontaka[1], Ismo T. Koponen[2] and Juha Merikoski[1]

[1]University of Jyväskylä, [2]University of Helsinki

*In this study we analyse students' way to structure their knowledge of physics concepts and how they are related. The relationships of concepts are represented in form of concept maps. In order to analyse the role of basic knowledge ordering patterns in constituting the overall structure of the maps we study seven different models to describe physics students' knowledge structure utilizing the basic patterns as modelling parameters. The models ranged from straightforward calculation of triangles and edges to more complex models that take in account the transitivity as well as cycles and triangles. The conclusion that can be drawn is that students indeed tend to use some basic patterns in forming the key concepts and meaningful links between concepts.*

## INTRODUCTION

Understanding the structure of scientific knowledge is to large degree based on understanding what the key concepts are and how and why these concepts are connected. The structural relations between the concepts play also an essential role in establishing the meaning of concepts (Thagard, 1992; Bonjour, 1985). Structure also affects how concepts are introduced in teaching scientific knowledge, how concepts are acquired through teaching, and how the conceptual knowledge can be represented and transferred forward (O'Donnell, 2002). Furthermore, recent cognitively oriented research on learning has suggested that procedures of knowledge construction and processing which generate the complex knowledge structures may be simple ones, reducible to simple basic patterns. Of particular importance seems to be different types of hierarchies, cliques, transitive patterns and cycles (Kemp & Tenenbaum, 2008). These notions have encouraged the idea that such patterns may help in understanding the cognitive processes behind knowledge construction and may lead also to the development of computational models for cognitive processes (Kemp & Tenenbaum, 2008; Duong, Jo, Jung & Nguyen, 2009).

Concept maps, where concepts are nodes and links represent different types of connections between concepts, are found useful tools for representing structured knowledge (Author, 2010). Whenever a new concept is introduced to the body of knowledge in physics it links to already existing concepts. These links (or connections) between two concepts are here models or experiments. In both cases there are distinct set of concepts of the established body of knowledge that are connected to the newly introduced concept (for more details, see Author, 2010). There is also another useful feature of using concept maps as the tool to model knowledge. In physics there are often many different paths to introduce a new concept. In planning of teaching the order of concepts can vary and all the strategies can still be equally effective. That can be illustrated easily by concept maps as there are usually many paths linking node A to node B in a well-connected map. Concept maps can serve teachers in building their own understanding of the structure of the knowledge (of a topic of interest) as well as help them plan teaching in a way that introduces knowledge in a coherent way.

The goal of this study is to focus on structure of concept maps by taking a look on the basic "motifs" (patterns) that appear on maps. Such motifs (like triangular patterns) are then used as building blocks to create models of the maps, which are then tested by simulations. Similar measurements as to original, real concept maps are then done to these simulated networks to see to what degree the number of different patterns can explain the structure of the maps. These goals can be compressed into two research questions:

- Can the maps made by the physics students be modelled using the basic patterns so that the simulated graphs preserve some of the topological information found in the real world concept maps?
- What is the set of basic patterns that, when used as a modelling parameter, gives most accurate model?

**THEORY: Structure and Basic Motifs**

Experiments and models arguably provide the basic contexts, which connect concepts together (Nousiainen, 2012; Author, 2010). In (laboratory) experiments the concepts are connected through designing the experiment and through interpretation of the experimental data. In such experiments usually s small number of concepts are used to make a concept measurable. In the simplest case this leads to triangular pattern. Triangle is formed when connected concepts A and B are used to make concept C measurable. This forms connections A → C and B → C closing the triangle (since there already exits a connection A → B). There are cases where three or more concepts are explicitly needed to make another concept measurable. The graph theoretical patterns that are then formed are called k-stars, where k is the number of concepts that are connected to the concept that is wanted to make measurable. 3-star means there are three concepts linked to one concept. Another important patterns that arise from similar arguments are small cycles. A concept A can be used in defining two other concepts B and C. These concepts are then used to define another concept D. As a result we have a small cycle with four concepts. The definition of D requires explicitly concepts B and C and implicitly concept A. The same basic patterns are also found in the context of theoretical models.

These patterns or motifs discussed above are then expected to be found in conceptual systems that describe well the physical knowledge, regardless of the context where the connections between concepts are formed.

**Modelling**

As concept maps are mathematically graphs the study of them can leverage of the recent graph theoretical advancements (Albert & Barabási, 2002). A suitable model for the present study is provided so called exponential random graphs (Holland and Leinhardt 1981). Exponential random graphs (ERG) have a solid mathematical foundation, and equally importantly, they can also be derived from equilibrium statistical mechanics (Park & Newman, 2004). The simulation methods have enabled researchers to study more complicated ERGs and thus to study large and diverse real world networks.

We use ERGs here to model students' concept maps, in order to answer the posed research questions. Modeling is carried out using the Statnet package of R (Handcock, Hunter, Butts, Goodreau & Morris, 2008). It provides a well-established framework for modeling concept maps. The aim is to measure certain characteristical values of the concept maps and use these as modeling parameters, or in some case boundary conditions.

**THE EMPIRICAL DATA**

The physics teacher students did concept maps in their third or fourth year. The subject of the concept maps was electromagnetism. A total of 46 concept maps were analysed in this research. There were 20 different authors making concept maps from 2008 to 2010. Each student created two or more concept maps (which explains how 20 students created 46 maps.) A list of concepts to be used in the maps they were to produce was given to them (number of concepts will be constant). Students were required to justify the links made between any two nodes. They were to choose the direction of the connection as well as declare whether the connection is due an experimental procedure or theoretical relation between the two concepts.

Figure 1 shows an example of a concept map done by a physics student. The map has been chosen to be displayed here because it is a typical example of the maps researched in this study. There are some triangles in the graph, but also 4 concepts with only one link connecting them to other concepts. Many of the concepts are connected to others with very few links. This leads to chain-like formations. One of these chains can be observed going counter clockwise from below to right-hand side of the graph.

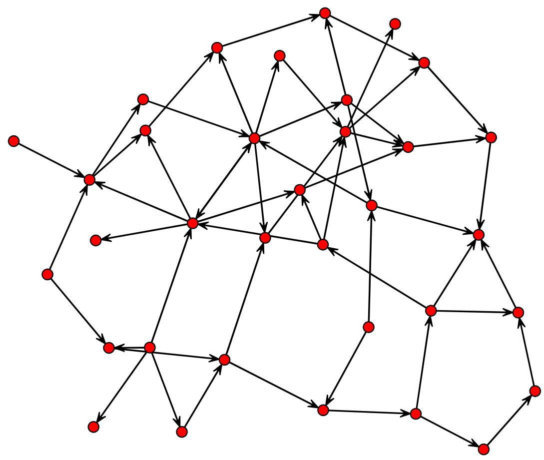


FIGURE 1 An example of a network based on a decent concept map drawn by a physics student. This same network is used as a base for modeling.

## METHOD OF ANALYSIS AND MODELLING

Original data was first processed so that the analysis software can make a use of it. The data from the concept maps made by the teacher students can now be included in an adjacency matrix. The concept maps were directional so adjacency matrices were not symmetrical. Some of the analysis steps require the symmetry of the adjacency matrix. The adjacency matrix is then converted to network (which is mathematically a graph) object by Statnet's build-in macros. Networks can then be modelled by giving the algorithm desired modelling parameters (Butts, 2008).

Values for statistical network variables such as density of edges, number of triangles, etc. were measured from the original empirical data. For example the density of edges of given network ”net” is given (among other information) as an output of Statnet command summary(net). A graph with typical statistical and topological properties was chosen to be modelled. These values were then used as modelling parameters for Statnet algorithms. The number of vertices was taken in as a boundary rule for the modelling.

The software used here consists of R- and Statnet-packages. R is an open source programming language and software environment for statistical computing. It provides tools for statistical analysis, including modelling, classification and clustering. Statnet is based on R and provides simulation capabilities for ERGs (Handcock et al., 2008). Simulations in Statnet make use of the Markov Chain

Monte Carlo (MCMC) algorithm. It samples from probability distributions based on constructing a Markov chain that has the desired distribution as its equilibrium distribution.

Besides the simple edge, triangle and small circle counting we looked at two important variables. Clustering coefficient measures the tendency to form closed triangles. It can be calculated with relative ease (Newman, 2003). A custom R algorithm was developed to calculate this. Another important parameter to look at is communicability betweenness. Communicability between nodes p and q in the network represents the probability that an arbitrary particle of piece of information of some kind travels from node p to node q. Communicability betweenness centrality (CBC) for a node r is defined as the weighted sum over walks involving node r (Estrada, Higham & Natano, 2009). Custom algorithms were developed to calculate these values.

Seven different models were studied in detail to model students' concept maps. Initially both directed and undirected networks were considered. Eventually only models 6 and 7 make use of the directness of the graphs. Note that the number of nodes was kept constant all the time since the real world concept maps had specific set of concepts. Some constraints can be placed in as modelling parameters. These include fixing the number of edges and degrees. The specifications for the studied models are listed in table 1.

Model 1 is based on constraining the number of triangles and edges (original network has 4 triangles and 55 edges). Triangles are the most important motifs as explained before, while edges (links) provide the connections between nodes.

TABLE 1 Model specifications.

| Model | Parameters |
|---|---|
| Model 1 | Triangles + edges |
| Model 2 | Triangles + 3-stars |
| Model 3 | Twopaths + 4-cycles + edges |
| Model 4 | 3-stars + 4-cycles + edges |
| Model 5 | Triangles + 3-stars + edges |
| Model 6 | Transitivity + 4- cycles + triangles + edges |
| Model 7 | Transitivity + 4- cycles + triangles + edges + constrains |

Model 2 adds so called 3-stars motifs where there is a node with edges to three other nodes. Both 3-stars and triangles are important in describing the hierarchical properties of the knowledge organization.

Model 3 a parameter linked to transitivity and small cycles were taken in consideration. Two-path is formed when there are edges from nodes i to j and j to k for some nodes i, j and k. 4-cycle is a set of 4 nodes i, j, k, l so that there are links (i,j), (j,k), (k,l) and (l,i). Knowledge organization in maps is assumed to feature triangles and k-stars rather than cycles. So this model is not expected to produce accurate and realistic results, but stands as an important reference.

Model 4 combines ideas from models 2 and 3. It can be considered (more so than others) experimental. The reason being that there is no clear physical justification of the model besides the fact that it combines parameters of the earlier models.

Model 5 is obtained by adding counting of edges to model 2. The purpose of this is to guide the simulation process to more realistic edge numbers. As it turns out simulated graphs produced by model 2 do share some topological properties with the real maps.

Model 6 builds on the ideas of model 3 combining transitivity + edges and transitivity + triangles. Thus model 6 pulls together many relevant motif counting variables.

Model 7 adds to model 6 a parameter to force at least one edge to all nodes as there are no isolate concepts.

**RESULTS**

1000 networks were produced in simulation of each model. Simulated graphs were used to determine the values for clustering coefficient and communicability betweenness. The network used as a base for models is not very dense with respect to links as there are 55 edges and 34 nodes. This usually leads to long walks that involve nodes with only two or three links. This can be seen in the figure 1 as well. The clustering coefficient of the network was 0.08. This is realistic and expected result. The same can be said about the average communicability betweenness over the nodes.

As can be seen in the parameters table (Table 2) the characteristic values of model 1 do fall in line with the maps. However, looking at how the links were distributed over the nodes (which is called link grade distribution) nodes with as many as 9 edges can be found, which is unrealistic. Model 2 should describe the hierarchy better than simply calculating the edges and triangles. The MCMC diagnostics look as promising for model 2 as they did for model 1. Densities vary around the observed values. After simulation triangle count matches observations of the real world graph. Simulated graphs seem well connected and realistic. The average number of links in the graphs increased by 12,7%. This is not a big surprise as edge count was not a parameter in this model. The averages of edge and 4-cycle density distributions of model 3 are not close to the values of the modeled network. This indicates a degenerate model. Interestingly this model seems to produce only very few triangles. Moreover, simulation did not produce enough acceptable graphs so that the communicability distribution could be determined.

TABLE 2 Characteristical parameters of the models.

| Model | Clustering | Error of C | $<\omega_r>$ | Error of $<\omega_r>$ |
|---|---|---|---|---|
| Model 1 | 0.07 | 0.04 | 0.010 | 0.005 |
| Model 2 | 0.04 | 0.03 | 0.091 | 0.003 |
| Model 3 | 0.08 | 0.04 | 0.103 | 0.009 |
| Model 4 | 0.13 | 0.03 | 0.109 | 0.004 |
| Model 5 | 0.09 | 0.04 | 0.097 | 0.003 |
| Model 6 | 0.08 | 0.04 | 0.098 | 0.004 |
| Model 7 | 0.04 | 0.03 | 0.093 | 0.005 |

In graphs produced by model 4 we noticed alarming topology. The CBC distribution has a spike, which is consistent with the topology of the simulated graph. Clustering coefficient is on average notably higher than the original graph. Looking at the MCMC diagnostics of the simulation it becomes clear that the model is degenerate. All this is evidence that the model indeed is degenerate and thus can be considered irrelevant for our purposes.

The model 5 gives somewhat surprising results. Characteristical parameters look promising as the means of clustering coefficient and communicability betweenness are in line with the original real world network. Still all parameter value distributions signal degeneracy of the model. Simulated graph also doesn't look satisfactory, as there is an isolated node, 4 nodes with only 1 edge and 53% of the nodes having exactly 3 edges.

Model 6 takes transitivity, 4-cycles, triangles and edges in as model parameters. Note that transitivity is applied for directed network. There is no clear evidence of degeneracy. Simulation produced graphs that look satisfactory expect for the isolates found in many simulations. A Simulated graph (in figure 2) in has 13 triangles and 71 edges compared to the 4 triangles and 55 edges of the real world network. Link grade distribution of the model is realistic on average.

As there are no isolate concept definitions in physics the number of isolates in the models should be limited to 0 by some boundary rule. That is done in model 7 by setting boundary rules that force minimum of one edge for each node. Adding boundary conditions tends to provoke minor increase in the number of edges in the modelling. A sample graph generated by the simulation of model 7 has 63 edges and 3 triangles. That is in line with the real world graph. The CBC distribution for a simulated network based on the model 7 is fairly similar with the real world graph. Both have few nodes with minimal CBC. Simulated graph doesn't yield to any nodes having CBC over 0.3. On the other hand the number of nodes with CBC over 0.2 is nearly identical (3 in real world graph to 4 in simulated). In the light of communicability betweenness simulating the model 7 produces realistic networks. Clustering coefficient is below what is found for real maps.

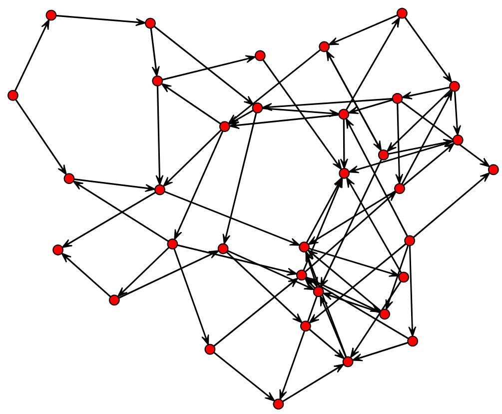


FIGURE 2 A Graph generated by simulating model 6.

**DISCUSSION AND CONCLUSIONS**

We have studied seven different models to describe physics students' knowledge structure. The models ranged from straightforward calculation of triangles and edges to more complex models that take in account the transitivity as well as cycles and triangles. Each model was simulated in order for us to compare the resulting graphs to concept maps done by physics students. Model that produced realistic (compared to students' concept maps) clustering coefficient and communicability betweenness values was considered relevant. Model 6 was the most accurate model by many means. The clustering and communicability values it produced were very close to those calculated of the real world graphs. This observation answers to the second research question. We have found the most accurate model (in the scope of our research).

The conclusion that can thus be drawn with some confidence is that students indeed use some basic motifs in relating the concepts, and these basic motifs confer to the maps the overall structure they have. That answers to the first research question. Simulated graphs that were produced by models that had basic motifs as their parameters do preserve some of the topological and hierarchical information of the real world concept maps and can thus be considered relevant.

This study has some meaningful implications for teachers as well as text book authors. In the future, the approach introduced in this article could be developed into a tool to help monitor students' meaningful learning. Students could make the concept maps using an online tool. The data would then be processed automatically using powerful computers and results would be visible to the teacher. The tool could pinpoint areas of the subject matter that have been generally poorly learned and thus require more attention from the teacher. The kind of modelling that was done in this article might also provide insight for text book authors in arranging content in such manner that it supports creation of basic cognitive motifs in learners mind.

Acknowledgements: This work was supported (ITK) by Academy of Finland, grant 1136582.

**REFERENCES**

Albert, R. & Barabási, A. L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics, 74*(1), 47-97.

BonJour, L. (1985). The structure of empirical knowledge. *Harvard Univ Pr*

Butts, C. T. (2008). Network: a package for managing relational data in r. *Journal of Statistical Software, 24*(2), 1-36.

Duong, T. H., Jo, G.S., Jung, J. J., & Nguyen, N. T. (2009). Complexity analysis of ontology integration methodologies: A comparative study. *Journal of Universal Computer Science*, *15*(4), 877-897.

Estrada, E., Higham, D. J., & Hatano, N. (2009). Communicability betweenness in complex networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 388*(5), 764-774.

Handcock, M. S. et al., (2008). Statnet: Software tools for the representation, visualization, analysis and simulation of network data. *Journal of Statistical Software, 24*(1), 1548.

Holland, P. W., & Leinhardt, S. (1981). An exponential family of probability distributions for directed graphs. *Journal of the American Statistical association, 76*(373), 33-50.

Kemp C., & Tenenbaum, J. B. (2008). The discovery of structural form. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *105*(31), 10687.

Koponen, I. T., & Pehkonen, M. (2010). Coherent knowledge structures of physics represented as concept networks in teacher education. *Science & Education*, *19*(3), 259–282.

Newman, M. E. J. (2003). The structure and function of complex networks. *SIAM review, 45*(2), 167–256.

Nousiainen, M. (2012). Coherence of pre-service physics teachers' views of the relatedness of physics concepts. *Science & Education, 22*, 1–21.

O'donnell, A. M., Dansereau, D. F., & Hall, R. H. (2002). Knowledge maps as scaffolds for cognitive processing. *Educational Psychology Review*, 14(1), 71–86.

Park, J., & Newman, M. E. J. (2004). Statistical mechanics of networks. *Physical Review E*, 70(6), 066117.

Thagard, P. (1992). Conceptual revolutions. *Princeton Univ Pr*

# DOES FOCUSING FORCES AS INTERACTIONS HELP STUDENTS TO IDENTIFY FORCES?

Antti Savinainen, Asko Mäkynen and Jouni Viiri

University of Jyväskylä

*Many students have difficulties with the force concept and constructing free-body diagrams (FBDs) after traditional physics instruction. It has been suggested that treating forces as interactions could help students to identify forces. We present an empirical study conducted in three Finnish upper secondary schools (n = 75) addressing the question whether the use of a visual-representation tool – an interaction diagram (ID) – helps students in identifying forces correctly. The students constructed IDs and FBDs in eight different situations after teaching the force concept in the first, mandatory physics course. The analysis of these data indicates that the use of IDs is beneficial in identifying forces when constructing FBDs.*

## INTRODUCTION

The force concept is at the heart of Newton's laws of motion and is a central concept in the theory of classical mechanics taught from lower secondary school to university level. However, research has shown that many students have difficulties with the force concept after instruction (e.g., Brookes & Etkina, 2009; Halloun & Hestenes, 1985; Hestenes, Wells, & Swackhamer, 1992; Savinainen & Scott, 2002). Moreover, it has been reported in the literature that students often have difficulties with constructing a free-body diagram (FBD) which is a standard representation used to show forces acting on a target object (McCarthy & Goldfinch, 2010; Whiteley, 1996). Many researchers have suggested that teaching forces as interactions would be helpful in teaching the force concept (e.g., Brown, 1989; Hellingman, 1992; Jimenez & Perales, 2002). One way to achieve this is by utilizing an interaction diagram (ID; Hatakka, Saari, Sirviö, Viiri, & Yrjänäinen, 2004) which is a visual tool for presenting interactions between objects (see Figure 1). There is good evidence that using a visual-representation tool such as the ID fosters students' conceptual understanding of Newton's third law (Hinrichs, 2005; Savinainen, Scott, & Viiri, 2005; Savinainen, Mäkynen, Nieminen, & Viiri, 2012). Moreover, it is plausible that if a student identifies interactions correctly in a given situation when using the ID, the ID might also facilitate in the identification of forces acting on a target object, and this way, help students to construct an FBD.

There is some previous research showing that students' quantitative problem solving in the context of forces is enhanced when they are guided to identify forces by first identifying interactions (Heller & Reif, 1984; Rosengrant, Van Heuvelen, & Etkina, 2009). However, the aforementioned studies were conducted at a college level and did not study the effect of a visual tool – such as the ID – on the quality of the FBDs. We address this question in our empirical study. Thus, our research question is as follows: does using IDs help students to identify forces when constructing FBDs?

Firstly, we discuss the ID used in this study and its relations with FBD. Secondly, we briefly discuss a teaching-learning sequence (TLS) which emphasizes the notion of interaction and the use of the IDs as a starting point in teaching the force concept and Newton's laws. Thirdly, we analyze empirical data gathered from three Finnish upper secondary school physics groups who followed the TLS. We focus on evaluating the relationship between the quality of IDs and students' ability to identify forces when constructing FBDs.

**The interaction diagram and its relation to the free-body diagram**

The ID shows both the target object and the objects interacting with it. However, it is important to note that the ID does not show the state of motion; it is indifferent with respect to constant velocity and acceleration situations because it does not contain any information on magnitudes of forces. In contrast, the FBD only shows forces acting *on* the target object, and it is possible to deduce the state of motion by checking whether the sum of force vectors adds up to the zero vector or not. Figure 1 shows examples of an ID and corresponding FBD when a block is pulled with a string along a table at constant velocity.

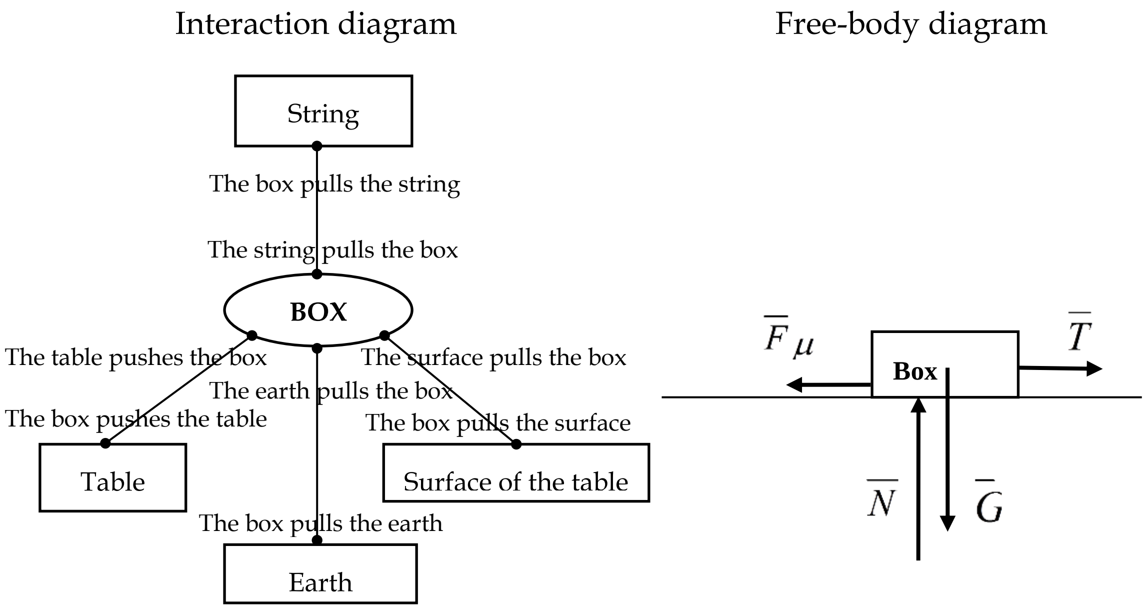



FIGURE 1 The ID and the corresponding FBD when a box is pulled with a string along a table at constant velocity

We note that it is helpful to separate the contact interaction into two components as is done in Figure 1. This separation facilitates a complete correspondence with the FBD: The number of interaction lines or arrows corresponds with the number of forces in the FBD. This is a very important feature of the ID as it allows a readily available way of checking that for each force there is a corresponding interaction. Hence, it is reasonable to assume that the likelihood of including extra forces in an FBD (such as an 'impetus' force along the direction of motion) is diminished. In the same way the ID has the potential of safeguarding missing force(s) in the FBD provided that *all* relevant interactions are identified.

## METHODS

### Participants

The participants of this study (n = 75, 45 females and 30 males; aged 16) consisted of three classes of Finnish upper secondary school students from three different sized schools (two from the countryside and one from a city). In addition, the admission limits in lower secondary school average academic performance varied between the schools. These factors provide diversity in terms of settings in which the study was implemented. Consequently, it is reasonable to assume that the participants represent Finland's student population better than selecting similar schools would have done.

The students had their first and only mandatory physics course (Physics 1) in fall 2006 and 2007. Physics 1 includes teaching time of approximately 30 lessons of 45 min each, or 18 lessons of 75 min each in one school, depending on the school timetable. The course addresses a general introduction to physics, elementary kinematics, the force concept, Newton's laws, the energy concept, waves and radiation, the basics of matter, fundamental interactions, and cosmology.

Three experienced teachers (over 10 years of teaching experience) from the three schools taught the three classes. In addition, all teachers used the textbook "Physica 1" (Hatakka et al., 2004), which utilizes an ID approach. All these teachers had used "Physica 1" earlier several times so they were familiar with the notion of ID. We combined the three classes into one group since we are not interested in possible differences between the schools in this paper (this will be addressed in future work).

### Teaching-learning sequence for the force concept

The TLS included an intervention material of five lessons (1 lesson = 45 min) addressing the force concept and Newton's third, first and second laws in this order. The intervention material contained teaching and practise exercises introducing the ID, Newton's third law and FBDs for the lessons and homework. The teachers received no special training whatsoever; instead, they were provided with the intervention material and a brief written description on how to implement the TLS.  We note that our aim in this paper is *not* to investigate the effectiveness of the TLS. Instead, the aim is to investigate the relationship between the IDs and the FBDs constructed by the students after the instruction which stressed the use of IDs in identifying forces. We present here the key activities in order to provide the reader with an idea of how the ID and FBDs were taught (in more detail, see Savinainen et al., 2012):

- Students work in pairs constructing IDs and identifying contact and distance interactions in three different situations.
- The force vector and FBD are introduced in terms of interaction force pairs, and the relationships *and* differences with the ID and the FBD are explicated.
- Newton's third law is introduced: Interaction is symmetric regardless of the state of motion.
- Students draw FBDs for the ID exercises that they constructed previously.
- Newton's first (N1 law) and second laws (N2 law) were introduced using a $(t, v)$-graph representing the velocity of a football. Students used the graph as a basis for constructing IDs and FBDs in the different stages of motion. The laws were defined after an experiment on a cart in a linear air-track.
- N1 and N2 laws were used to re-examine the earlier FBDs, which were constructed as a homework exercise.
- Students engaged with quantitative exercises on N1 and N2 laws using FBDs as a starting point.

**Data collection and analysis**

We utilized a one-group pretest-post-test design (Gall, Gall, & Borg, 2003, p. 389). The students took the 1995 version of the Force Concept Inventory (FCI; Hestenes et al., 1992; Halloun, Hake, Mosca, & Hestenes, 1995) as a pre-test. The FCI is a research-based multiple choice test which is widely used for evaluating students' conceptual understanding in the domain of the forces. The FCI does not address FBDs, but it includes seven questions (items 3, 5, 11, 13, 18, 29, 30) explicitly requiring the identification of forces. These questions were used to provide an estimate of students' initial ability to identify forces which is an essential skill in constructing FBDs. Students had encountered some instruction on the force concept in their lower secondary school studies. Hence, one might expect that they could answer at least some of the pre-test questions relatively well. However, our own experience and earlier research in this domain strongly suggest that students' conceptual understanding of the force concept is very limited prior to the upper secondary school physics (Savinainen & Scott, 2002).

The post-test questions were framed in eight physical contexts (see Table 1). The students were required to construct both the ID and the FBD in each situation, yielding to sixteen post-test questions altogether. The questions addressed various physical contexts as there is evidence that student understanding is context-dependent (Bao, Zollman, Hogg, & Redish, 2002; Palmer, 1997; Steinberg & Sabella, 1997). The post-test questions were derived from research literature and textbooks inspired by physics education research: This lends some support for the validity of the questions. We estimated the reliability of the sixteen post-test questions using the data provided by students who answered all the questions (n= 59): Cronbach's alpha was 0.81 indicating good reliability (George & Mallery, 2003, p. 231). Some of the post-test questions are included in Mäkynen (2013). We note that it would have made no sense to include IDs in the pre-test as the students had not encountered them in their prior studies.

TABLE 1 Post-test tasks on the IDs and FBDs

| Moment in teaching | Situation | State of motion |
|---|---|---|
| After teaching the ID and | Parachute | uniform motion |
| FBD | Cork in water | at rest |
| After completing teaching | Book on a table | at rest |
| of the force concept | Box lowered down by a rope | uniform motion |
| | A girl in an elevator going down | acceleration |
| As a part of the final exam | Ice hockey puck hit | acceleration |
| | Ice hockey puck sliding | deceleration |
| | Ice hockey puck is still | at rest |

The IDs were analyzed and classified into three quality categories: excellent, good and poor (Table 2).

TABLE 2 Classification of the quality of students' interaction diagrams

| Excellent | Good | Poor |
|---|---|---|
| All interacting objects identified.<br>Interaction line or two –headed arrow presented.<br>Type of interaction (contact or distance) identified *or*<br>A written explanation of interactions is presented. | All interacting objects identified.<br>Interaction line or two-headed arrow presented.<br>Type of interaction is not presented<br>*and*<br>No written expression of the interactions is presented. | At least one interaction is missing or an extra interaction is included.<br>*or*<br>Forces are identified instead of interactions<br>*or*<br>Diagram lacks essential features of an interaction diagram. |

The FBDs were classified into two categories:

- Good: Forces were identified correctly and the force vectors had correct directions
- Poor: Extra force(s) or a missing force(s) were included, direction of force(s) was incorrect, or no force vectors were used

It is worth noting that a good FBD may still be deficient from the point of view of physics: it is not required that relative magnitudes of the forces are correct. This is not a relevant feature in the present paper but it is addressed in a related study (Savinainen, Mäkynen, Nieminen, & Viiri, 2013). The Kappa statistic was evaluated by the authors AM and AS to determine consistency among the raters. Fifteen students were randomly selected: The total number of ID and FBD pairs analyzed was 117.

**RESULTS**

Students' pre-test average in seven force-identification questions on the FCI was only 25%, which is just above the level of guessing: the expected value of five alternatives is 20%. The results regarding the quality of students' IDs and FBDs are shown in Table 3. Note that the statistical unit is an ID and FBD pair sharing the same physical context (see Table 1). A total of 553 such pairs were constructed by 75 students (note that all students did not answer all eight questions). We included all cases when a student answered both the ID and FBD in a given situation. The interrater reliability for the raters in the case of IDs was found to be Kappa = 0.958 ($p < .0.001$) and in the case of FBDs Kappa = 0.869 ($p < .0.001$), both indicating excellent agreement.

TABLE 3 Crosstab for the ID and FBD pairs. The number of pairs is reported in parenthesis giving the total of 553 pairs

| | Poor FBD | Good FBD |
|---|---|---|
| Poor ID | 11% (63) | 5% (30) |
| Good ID | 5% (28) | 22% (119) |
| Excellent ID | 10% (58) | 46% (255) |

The $\chi^2$-test was conducted using the observed frequencies (not the percentages reported in Table 3). The *p*-value of $\leq 0.05$ was considered as statistically significant. The effect size was estimated using the correlation coefficient effect size *r* for a contingency table (Wilson, 2010), where 0.10 = small effect, 0.24 = medium effect, and 0.37 = large effect (McGrath & Meyer, 2006). The $\chi^2$-test showed that the quality of IDs was related to the quality of the FBDs ($\chi^2(2)$ =

94.6, $p < 0.001$, $r = 0.35$, 95% CI [0.30, 0.42]). The effect size indicates a medium effect.

Good or excellent ID provides a criterion for the correct identification of all interacting objects (Table 2) and good FBD means that all forces are correctly identified with correct directions. Using the former criterion shows that the interactions were correctly identified in 83% of all IDs (460 out of 553). Subsequently, using the latter criterion reveals that correct identification of the interactions resulted in the correct identification of forces in 81% of the cases (the *intersection* between correctly identified interactions and correctly identified forces is 374; this leads to 374 out of 460, which gives 81%). Conversely, 19% of all FBDs (86 out of 460) were poor when the interacting objects were correctly identified (i.e., good or excellent IDs). Furthermore, it was possible to identify forces correctly without correctly identifying the corresponding interactions but this was rare (7% of good FBDs).

We also checked cases when a student included one or more extra forces or missed at least one force in their FBDs (the poor FBD class also contained other types of mistakes, as explained earlier). Overall, 27% (149 out of 553) of all FBDs were poor. The majority of the poor FBDs (122 out of 149) included an extra force or a missed force; this is 22% of all FBDs.

## DISCUSSION

Our research question asked whether using IDs helps students to identify forces when constructing FBDs. On the basis of our data the answer is positive, since the clear majority (81%) of correct identification of interactions were accompanied with the correct identification of forces. On the other hand, correct identification of interacting objects in an ID did not always result in correct force identification, and there were some cases when the forces were correctly identified although the corresponding IDs were poor. The inspection of these cases revealed that some students had included reaction forces in their FBDs; the reaction forces were counted as extra forces. Hence, it appears that these students had difficulties to differentiate between IDs and FBDs. It is also possible that some students viewed constructing IDs and FBDs as separate tasks having little to do with each other. These difficulties should be taken into account in teaching: Care should be taken to help students to see how these two representational tools are related to each other, and how they differ from each other.

It can be argued that some discrepancy between the IDs and FBDs is expected. While being closely related, constructing IDs and FBDs entail different skills: for instance, the direction of a force vector cannot be deduced using only information embodied by the ID. Indeed, in some cases force vectors were correctly located, but with incorrect directions. To sum up, our results could be interpreted as follows: The *likelihood* of the correct identification of forces in an FBD is high *if* the student has identified interactions correctly in an ID.

Quite a large proportion (73%) of all the FBDs was of good quality indicating that the students managed to identify forces correctly in many cases. Comparing this result with the poor pre-test average (25%) on the force-identification questions suggests that substantial learning had taken place. Naturally, it cannot be determined whether or not this is a good learning outcome without any comparison data from regular Physics 1 courses; we address this question in a related study (Savinainen et al., 2013). However, there is a study at an upper secondary school level offering some comparison data: Whiteley (1996) reported that Advanced Level students (n = 117) had many deficiencies in their FBDs after instruction in mechanics. More specifically, up to 67% of his students included an extra force in the direction of the motion, whereas in our data the proportion of an extra force(s) or a missing force(s) was only 22%.

We believe that the ID approach outlined in this paper would be useful both for pre-service and in-service physics teachers. However, it might take some time for instructors who have never encountered IDs before, first, to see the value of the ID approach, and second, to implement the approach effectively in their physics courses.

## Conclusion

Earlier research has provided evidence that the ability to construct correct FBDs is related to successful quantitative problem solving in the domain of forces (Rosentgrant et al, 2009; Ayesh, Qamhieh, Tit, & Abdelfattah, 2010). Our research complements the aforementioned finding by providing evidence that using IDs (i.e., focusing forces as interactions) is helpful in identifying forces correctly when constructing FBDs.

## Acknowledgements

This work has been supported by a grant from the Rector of the University of Jyväskylä and the Academy of Finland (Project no. 132316). We also thank Pasi Nieminen for providing helpful comments regarding this article.

## REFERENCES

Ayesh, A., Qamhieh, N., Tit, N., & Abdelfattah, F. (2010). The effect of student use of the free-body diagram representation on their performance. *Educational Research 1*(10), 505– 511.

Bao, L., Zollman, D., Hogg, K., & Redish, E. F. (2002). Model Analysis of Fine Structures of Student Models: An Example with Newton's third law. *Physics Education Research: A Supplement to the American Journal of Physics., 70*(7), 766–778.

Brookes, D.T. & Etkina, E. (2009). "Force," ontology, and language. *Physical Review Special Topics: Physics Education Research 5*, 010110.

Brown, D.E. (1989). Students' concept of force: the importance of understanding Newton's third law. *Physics Education, 24*, 353–358.

Gall, M.D., Gall, J.P., & Borg, W.R. (2003). *Educational Research: An Introduction* (7th Edition). Boston: Allyn & Bacon.

George, D. & Mallery P. (2003). *SPSS for windows step by step: A Sample Guide & Reference*. Boston: Allyn & Bacon.

Halloun, I., Hake, R., Mosca, E., & Hestenes, D. (1995). Force Concept Inventory (Revised 1995). Password protected at <http://modeling.la.asu.edu/R&E/Research.html>. Accessed on May 25, 2012.

Halloun, I. & Hestenes, D. (1985). Common Sense Concepts about Motion, *American Journal of Physics, 53*(11), 1056–1065.

Hatakka, J., Saari, H., Sirviö, J., Viiri, J., & Yrjänäinen, S. (2004). *Physica 1*. Porvoo, Finland: Werner Söderström Oy.

Heller, J.I. & Reif, F. (1984). Prescribing Effective Human Problem-Solving Processes: Problem Solving in Physics Cognition and Instruction. *Cognition and Instruction, 1*(2), 177–216.

Hellingman, C. (1992). Newton's third law revisited. *Physics Education, 27*, 112–115.

Hestenes, D., Wells, M. & Swackhamer, G. (1992). Force Concept Inventory. *The Physics Teacher, 30*, 141-158.

Hinrichs, B. (2005). Using the system schema representational tool to promote student understanding of Newton's third law. In Marx, J., Heron, P., & Franklin, S. (Eds.), *AIP Conference Proceedings - 2004 Physics Education Research Conference*, 790 (pp. 117–120). New York: Melville.

Jiménez, J.D. & Perales, F.J. (2001). Graphic representation of force in secondary education:analysis and alternative educational proposals. *Physics Education, 36*, 227–235.

McCarthy, T. J. & Goldfinch, T. (2010). Teaching the concept of free body diagrams. In A. Gardner & L. Jolly (Eds.), *The 21st Annual Conference for the Australasian Association for Engineering Education*, Sydney 5-8 Dec 2010 (pp. 454–460). Australasian Association for Engineering Education.

McGrath, R.E. & Meyer, J.M. (2006). When effect sizes disagree: The case of *r* and *d*. *Psychological methods, 11*(4), 386–401.

Mäkynen, A. (2013). Interaction diagram and free-body diagram exercises. Retrieved May 25, 2013 from https://www.jyu.fi/edu/en/research/projects/inclass/Interaction%20diagram%20and%20free-body%20diagram%20exercises.pdf/view

Palmer, D. (1997). The effect of context on students' reasoning about forces. *International Journal of Science Education, 6*, 681-696.

Rosengrant, D., Van Heuvelen, A., & Etkina, E. (2009). Do students use and understand free-body diagrams. *Physical Review Special Topics: Physics Education Research 5*, 010108.

Savinainen, A., Mäkynen, A., Nieminen, P., & Viiri, J. (2012). An intervention using an Interaction Diagram for teaching Newton's third law in upper secondary school. In A. Lindell, A-L Kähkönen, & J. Viiri (Eds.), *Physics Alive. Proceedings of the GIREP-EPEC 2011 Conference* (pp. 123–128). Jyväskylä: University of Jyväskylä.

Savinainen, A., Mäkynen, A., Nieminen, P., & Viiri, J. (2013). Does using a visual-representation tool foster students' ability to identify forces and construct free-body diagrams? *Physical Review Special Topics: Physics Education Research 9*, 010104.

Savinainen, A. & Scott, P. (2002). Using the Force Concept Inventory to monitor student learning and to plan teaching. *Physics Education, 37*, 53–58.

Savinainen A., Scott P., & Viiri, J. (2005). Using a bridging representation and social interactions to foster conceptual change: Designing and evaluating an instructional sequence for Newton's third law. *Science Education, 89*, 175–195.

Steinberg, R. & Sabella, M. (1997). Performance on multiple-choice diagnostics and complementary exam problems. *The Physics Teacher, 35*, 150-155.

Whiteley, P. (1996).Using free body diagrams as a diagnostic instrument. *Physics Education, 31*(5), 309–313.

Wilson, D.B. (2010, February 15). Practical Meta-Analysis Effect Size Calculator. *The Campbell Collaboration*. Retrieved May 25, 2012, from http://www.campbellcollaboration.org/resources/effect_size_input.php.

## AUTHORS

Araya Paulina, Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile, pauaraya@ciae.uchile.cl

Asikainen Mervi, Itä-Suomen yliopisto, Fysiikan ja matematiikan laitos, mervi.asikainen@uef.fi

Eskelinen Pasi, Itä-Suomen yliopisto, Soveltavan kasvatustieteen ja opettajankoulutuksen osasto, pasi.eskelinen@uef.fi

Giaconi Valentina, Universidad de Chile, valevalog@gmail.com

Haapasalo Lenni, Itä-Suomen yliopisto, Soveltavan kasvatustieteen ja opettajankoulutuksen osasto, lenni.haapasalo@uef.fi

Hannula Markku S., Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, markku.hannula@helsinki.fi

Harjulehto Petteri, Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, petteri.harjulehto@utu.fi

Helaakoski Jussi, Jyväskylän yliopisto, Fysiikan laitos, jussi.t.helaakoski@student.jyu.fi

Hirvonen Pekka, Itä-Suomen yliopisto, Fysiikan ja matematiikan laitos, pekka.e.hirvonen@uef.fi

Hähkiöniemi Markus, Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, markus.hahkioniemi@jyu.fi

Joutsenlahti Jorma, Tampereen yliopisto, Kasvatustieteiden yksikkö, jorma.joutsenlahti@uta.fi

Kangas Jussi, Tampereen teknillinen yliopisto, Matematiikan laitos, jussi.kangas@tut.fi

Kinnunen Päivi, Aalto-yliopisto, Tietotekniikan laitos, paivi.kinnunen@aalto.fi

Koponen Ismo, Helsingin yliopisto, Fysiikan laitos, ismo.koponen@helsinki.fi

Laine Anu, Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, anu.laine@helsinki.fi

Lampiselkä Jarkko, Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, jarkko.lampiselka@helsinki.fi

Leppäaho Henry, Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, henry.leppaaho@oulu.fi

Malmi Lauri, Aalto-yliopisto, Tietotekniikan laitos, Lauri.Malmi@aalto.fi

Meisalo Veijo, Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, veijo.meisalo@helsinki.fi

Merikoski Juha, Jyväskylän yliopisto, Fysiikan laitos, juha.t.merikoski@jyu.fi

Mäkynen Asko, Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos,
Asko.Makynen@Kurikka.fi

Näveri Liisa, Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos,
liisa.naveri@helsinki.fi

Pehkonen Erkki, Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos,
Erkki.Pehkonen@helsinki.fi

Perkkilä Päivi, Jyväskylän yliopisto, Kokkolan yliopistokeskus Chydenius,
paivi.perkkila@chydenius.fi

Portaankorva-Koivisto Päivi, Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos,
paivi.portaankorva-koivisto@helsinki.fi

Purontaka Toni, Jyväskylän yliopisto, Fysiikan laitos, purontaka@gmail.com

Rowland Tim, University of Cambridge, UK, tr202@cam.ac.uk

Saló i Nevado Laia, Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos,
laia.salo@helsinki.fi

Sarikka Hanna, Tampereen teknillinen yliopisto, Matematiikan laitos,
hanna.sarikka@tut.fi

Savinainen Antti, Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos,
antti.savinainen@kuopio.fi

Silfverberg Harry, Tampereen yliopisto, Kasvatustieteiden yksikkö,
harry.silfverberg@utu.fi

Tuohilampi Laura, Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos,
laura.tuohilampi@helsinki.fi

Viholainen Antti, Itä-Suomen yliopisto, Fysiikan ja matematiikan laitos,
antti.viholainen@uef.fi

Viiri Jouni, Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, jouni.viiri@jyu.fi

Vilpponen Heikki, Itä-Suomen yliopisto, Soveltavan kasvatustieteen ja
opettajankoulutuksen osasto, heikki.vilpponen@uef.fi