

MATEMAATTISTEN TAITOJEN KEHITTYMINEN
ESIOPETUKSESTA NELJÄNNELLE LUOKALLE

Virpi Paukkeri

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma

Kevät 2013

Opettajankoulutuslaitos

Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Paukkeri, V. 2013. Matemaattisten taitojen kehittyminen esiopetuksesta neljännelle luokalle. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Kasvatustieteen pro gradu - tutkielma. 60 sivua.

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää lasten matemaattisten taitojen kehittymistä esiopetuksesta neljännelle luokalle. Keskeisenä tarkastelun kohteena oli aritmeettiset taidot (peruslaskutehtävien ratkaiseminen aikarajoitetussa tehtävässä). Toisen luokan aritmeettisten taitojen perusteella lapset (n = 494) jaettiin kolmeen alaryhmään: heikot, keskitasoiset ja hyvät taidot. Tarkoituksena oli selvittää, missä määrin kyseiset alaryhmät erosivat toisistaan eri ikävaiheissa ja eri matematiikan taitoalueilla. Näitä taitoalueita olivat lukujonotaidot, lukujen nimeäminen, aritmetiikka, aritmeettinen päättely ja kertolaskutaidon automatisoituminen. Tutkimuksessa tarkasteltiin myös sukupuolten välisiä eroja toisen luokan aritmetiikan tehtävässä. Lisäksi selvitettiin, missä määrin suoriutuminen matematiikan taitoalueilla oli yhteydessä saman ja eri ikävaiheen taitoihin. Tutkimus on osa Alkuportaatt-seurantatutkimusta, jossa on selvitetty kaikkiaan noin 2000 lapsen taitojen ja motivaation kehitystä yksilö- ja ryhmätiestien avulla neljällä paikkakunnalla.

Alaryhmien välillä havaittiin tilastollisesti merkitseviä eroja kaikilla tutkituilla matematiikan taitoalueilla ja ikävaiheissa. Korrelatiivisissa tarkasteluissa esiopetuksen ja ensimmäisen luokan lukujonotaitojen havaittiin olevan yhteydessä samaan aikaan mitattuihin aritmeettisiin taitoihin sekä myöhempisiin aritmeettisiin ja aritmeettisen päättelyn taitoihin. Nämä tulokset viittaavat kehityksellisten taitoerojen suhteellisen vahvaan pysyvyyteen. Poikia oli enemmän kuin tyttöjä sekä heikkojen että hyvien alaryhmässä. Tyttöjen ja poikien matemaattisessa suoriutumisessa ei havaittu tilastollisesti merkitsevää eroa koko otosta tarkasteltaessa, mutta pojat suoriutuivat tilastollisesti merkitsevästi paremmin hyvien alaryhmässä ja tytöt heikkojen alaryhmässä. Tulokset varhaisten matemaattisten taitojen merkityksestä myöhemmille matematiikan taidoille ohjaavat arvioimaan lasten matemaattista osaamista esiopetuksesta alkaen, jotta mahdolliset oppimisvaikeudet tunnistettaisiin varhain ja tuki osattaisiin kohdentaa heikoille taitoalueille.

AVAINSANAT: matemaattiset taidot, aritmeettiset taidot, lukujonotaidot, lukujen nimeäminen, aritmeettinen päättely, esiopetus, perusopetus

SISÄLTÖ

1 JOHDANTO	4
2 MATEMAATTISET TAIDOT JA NIIDEN KEHITTYMINEN	6
2.1 Matemaattisten taitojen jaottelua.....	6
2.2 Varhaisten matemaattisten taitojen kehittyminen	8
2.2.1 Varhaiset matemaattiset kyvyt	9
2.2.2 Lukujonotaidot.....	10
2.2.3 Luettelemalla laskeminen.....	13
2.3 Aritmeettisten taitojen kehittyminen	15
2.3.1 Peruslaskutehtävien hallinta	15
2.3.2 Laskustrategiat.....	18
2.3.3 Matemaattisten valmiuksien yhteys kouluiän matematiikan taitoihin	20
2.4 Sukupuolten väliset erot matemaattisissa taidoissa	22
2.5 Matemaattisten taitojen kehitykseen yhteydessä olevia tekijöitä.....	24
3 TUTKIMUSKYSYMUKSET.....	28
4 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS	29
4.1 Tutkittavat	29
4.2 Menetelmät.....	31
4.3 Aineiston analyysi	33
5 TULOKSET	36
5.1 Alaryhmien tunnistaminen ja kuvailu.....	36
5.2 Alaryhmien väliset erot aritmetiikassa ja muilla matematiikan taitoalueilla ...	37
5.3 Sukupuolten väliset erot aritmetiikan taidoissa 2. luokalla	41
5.4 Yhteydet matemaattisten taitojen välillä samassa ja eri ikävaiheissa.....	42
6 POHDINTA	45
6.1 Tulosten tarkastelua	45
6.2 Tutkimuksen merkitys, luotettavuus ja jatkotutkimushaasteet	49
LÄHTEET	55

1 JOHDANTO

Ensimmäisinä kouluvuosina huomio kohdistuu usein luku- ja kirjoitustaidon kehittämiseen matematiikan jäädessä vähemmälle huomiolle. Tutkimustulokset kuitenkin osoittavat, että matematiikan taitojen tukemiseen ja opetukseen panostamisesta jo esi- ja alkuopetuksen aikana on hyötyä myös tulevaisuutta ajatellen. Lasten varhaiset matemaattiset taidot nimittäin ennustavat myöhempää matemaattista suoriutumista (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi 2004; Lerkkanen, Rasku-Puttonen, Aunola & Nurmi 2005).

Matemaattisten taitojen kehittyminen alkaa hyvin varhain. Lapsilla ajatellaan jopa olevan synnynnäisiä valmiuksia hahmottaa lukumääriä (Wynn 1998, 11). Varhaisten matemaattisten taitojen kehityksessä on keskeistä vuorovaikutus ympäristön kanssa. Myöhemmin taitojen kehityksessä korostuu harjoittelun ja opetuksen merkitys. (Aunio, Hannula & Räsänen 2004, 217.) Matemaattisten taitojen kehittymisellä on hierarkkinen luonne: osataidot rakentuvat aikaisempien taitojen ja tietojen varaan (Geary 2000, 15; Hannula & Lepola 2006, 131; Kinnunen, Lehtinen & Vauras 1994, 61; Mattinen 2006, 32).

Tässä tutkimuksessa keskeisenä tarkastelun kohteena on aritmeettiset taidot. Geary (2000, 13) sisällyttää aritmeettisiin taitoihin peruslaskutoimitusten hallinnan ja sanallisten ongelmien ratkaisutaidon. Butterworthin (2005, 15) mukaan aritmeettisten taitojen kehittyminen ilmenee kasvavana ymmärryksenä lukumääristä ja kasvavana kykyä käsitellä lukumääriä. Aritmeettisten taitojen kehitykseen vaikuttavat olennaisesti myös ne strategiat, joita lapsi oppii käyttämään tehtävien ratkaisemiseen (Kinnunen ym. 1994, 60). Huomion kohteena tässä tutkimuksessa on aritmeettisten taitojen lisäksi lukujonotaidot, lukujen nimeäminen, aritmeettinen päättely ja kertolaskujen automatisoituminen. Lukujonotaitojen on havaittu olevan keskeinen ennustava tekijä aritmeettisten taitojen kehityksessä (Aunola ym. 2004; Hannula & Lepola 2006; Kinnunen ym. 1994). Aritmeettisten taitojen rinnalla tässä tutkimuksessa käytetään käsitteitä aritmetiikka ja aritmetiikan taidot, joilla viitataan

erityisesti koulussa opetettaviin ja arvioituihin sekä koulun tavoitteiden suunnassa määriteltyihin aritmeettisiin taitoihin.

Sukupuolten välisiä eroja tarkasteltaessa on havaittu, ettei tyttöjen ja poikien välillä ole merkitsevää eroa matemaattisessa suoriutumisessa (Aunola ym. 2004; Dowker 1998; Herbert & Stipek 2005; Hyde, Lindberg, Linn, Ellis & Williams 2008; Kupari & Törnroos 2004). Poikien menestymisessä on kuitenkin osoittautunut olevan suurempaa vaihtelua kuin tyttöjen menestymisessä (Hyde ym. 2008), mikä näkyy esimerkiksi siinä, että taitavien joukossa on enemmän poikia (Hyde & Mertz 2009). Tässä tutkimuksessa tyttöjen ja poikien matemaattista suoriutumista tarkastellaan toisen luokan aritmetiikan tehtävässä.

Kansainvälisissä tutkimuksissa on havaittu maiden välillä olevan huomattavia eroja matemaattisessa suoriutumisessa. Eroja on selitetty muun muassa matematiikan opetuksen rakenteella, määrällä ja laadulla, kulttuurisilla asenteilla matemaattista osaamista kohtaan sekä kieleen liittyvillä tekijöillä. (Towse & Saxton 1998, 135; ks. myös Geary 1995, 34). Kansainvälisesti vertailtuna suomalaisten lasten ja nuorten matematiikan osaaminen on korkeatasoista, mutta matematiikka-asenteissa olisi parantamisen varaa (Kupari, Sulkunen, Vettenranta & Nissinen 2012, 25, 50). Matemaattisten taitojen tukemisen ja arvioinnin lisäksi koulussa olisi tärkeää kiinnittää huomiota motivaation herättämiseen ja myönteisen asenteen luomiseen matematiikkaa kohtaan.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on tarkastella matemaattisten taitojen kehittymistä esiopetuksesta neljännelle luokalle. Tavoitteena on selvittää alaryhmäanalyysin avulla, missä määrin aritmeettisilta taidoiltaan heikkojen, keskitasoisten ja hyvien ryhmät eroavat toisistaan eri ikävaiheissa ja eri matematiikan taitoalueilla. Lisäksi selvitetään, missä määrin aritmeettisissa taidoissa on sukupuolten välisiä eroja 2. luokalla. Tutkimuksessa tarkastellaan myös matematiikan taitoalueiden välisiä yhteyksiä samassa ja eri ikävaiheissa. Tutkimusaineisto koostuu Alkuportaattutkimuksessa käytetyistä matematiikan ryhmä- ja yksilötesteistä. Tarkastelussa on mukana noin 500 lasta, joiden taitoja mitattiin esiopetusvuoden sekä ensimmäisen, toisen, kolmannen ja neljännen luokan keväällä.

2 MATEMAATTISET TAIDOT JA NIIDEN KEHITTYMINEN

Matemaattiset taidot koostuvat useista osataidoista, jotka rakentuvat hierarkkisesti aikaisempien taitojen ja tietojen varaan (Geary 2000, 15; Gelman & Gallistel 1978, 74; Hannula & Lepola 2006, 131; Kinnunen ym. 1994, 61; Mattinen 2006, 32). Matemaattisten taitojen varhainen pohja rakentuu jo paljon ennen kouluikää (Aunio ym. 2004, 217; Geary 2000, 12). Taitojen kehityksessä korostuu ympäristön kanssa tapahtuvan vuorovaikutuksen lisäksi harjoittelun ja opetuksen merkitys (Aunio ym. 2004, 217). Ennen kouluikää kehittyneet taidot ovat pohjana koulun alkuvaiheen perustaitojen oppimiselle ja näiden taitojen automatisoituminen on pohjana myöhemmälle matemaattiselle ongelmanratkaisulle (Ahonen, Lamminmäki, Närhi & Räsänen 1995, 183).

2.1 Matemaattisten taitojen jaottelua

Tutkijat ovat jaotelleet matemaattisia taitoja ja niiden kehittymistä eri tavoin. Yhteistä kaikissa jaotteluissa on matemaattisten taitojen kehittymisen hierarkkinen luonne. Varhemmin opitut taidot ovat edellytyksenä uusien, monimutkaisempien taitojen kehittymiselle. Seuraavaksi esitellään eri tutkijoiden jaotteluja matemaattisista taidoista.

Matemaattiset taidot on usein jaettu primaareihin ja sekundaareihin taitoihin (Aunio ym. 2004, 199; Geary 1995, 24; Geary 2000, 12). *Primaarit taidot* ilmenevät lapsilla kaikissa kulttuureissa ilman formaalia opetusta, kun taas sekundaarien taitojen kehitys vaihtelee eri kulttuurien välillä (Geary 2000, 12–13). Primaarien taitojen kehityksen taustalla ovat synnynnäiset tekijät (Aunio ym. 2004, 199). Nämä taidot kehittyvät lapselle luonnollisissa tilanteissa, vuorovaikutuksessa sosiaalisen ympäristön kanssa. Primaareja taitoja ovat esimerkiksi hyvin pienten lukumäärien havaitseminen, lukumäärien suhteellinen hahmottaminen sekä yksi yhteen -

vastaavuuden perusteet. *Sekundaarit taidot* puolestaan vaativat kehittyäkseen harjoittelua, oppimista ja organisoitua opetusta (Aunio ym. 2004, 199; Geary 2000, 15). Sekundaareihin taitoihin Geary (2000, 13) sisällyttää lukuihin, luettelemalla laskemiseen sekä laskumenetelmien oppimiseen ja niiden käyttöön liittyvät taidot. Oleellisia varhaislapsuudessa harjoiteltavia matematiikkaan liittyviä taitoja ovat muun muassa huomion kiinnittäminen lukumääriin ja lukujonotaidot sekä ymmärrys kardinaalisuudesta (laskettavan joukon viimeinen lukusana merkitsee koko joukon lukumäärää), ordinaalisuudesta (lukusanojen on oltava tietyssä järjestyksessä) ja yksi yhteen -vastaavuudesta (Aunio ym. 2004, 217).

Kinnusen kollegoineen (1994, 61) esittämässä luokittelussa matemaattisten taitojen kehityksen osataidoiksi katsotaan *matemaattisloogiset taidot* kuten joukkojen vertailu ja lukumäärän säilyvyyden ymmärtäminen, *lukujonotaidot*, *aritmetiikkaa koskevat faktatiedot ja strategiset valmiudet*. Varhemmat taidot ovat edellytyksenä myöhemmille taidoille. Esimerkiksi lukukäsitteen matemaattisen sisällön ymmärtämiseen ja lukujonotaitojen kehittymiseen tarvitaan matemaattisloogisia valmiuksia, kun taas sujuva lukujonon hallinta mahdollistaa aritmeettisten operaatioiden ja strategioiden käytön.

Ahonen ym. (1995, 184) ovat jakaneet matemaattisten taitojen kehittymisen neljään vaiheeseen. *Esikielellisten kykyjen* -vaiheessa kahden ensimmäisen ikävuoden aikana lapsi oppii kuulo- ja näköaistia käyttäen erottelemaan pieniä lukumääriä. *Varhaisten numeeristen taitojen* -vaiheessa, 2–4-vuotiaana, lapsi oppii lukusanat ja oppii havaitsemaan muutoksia pienissä lukumäärissä. *Luonnollisten aritmeettisten taitojen* -vaiheessa, 3–7 vuoden iässä, lapselle kehittyy ymmärrys yksi yhteen -vastaavuudesta, kardinaalisuuden ja ordinaalisuuden periaatteista sekä lukumäärien säilyvyydestä. Lisäksi lapsi oppii laskuoperaatioiden peruseriaatteet. *Formaalit matemaattiset taidot* kehittyvät lapsella 6–7 vuoden iässä. Tällöin luettelemalla laskeminen automatisoituu ja sisäistyy muistirakenteiksi. Myös laskumenetelmien oppiminen ajoittuu tähän vaiheeseen. (Ahonen ym. 1995, 184.)

Vainionpää, Mononen ja Räsänen (2003, 293–297) ovat jäsentäneet matemaattisia taitoja seuraavien neljän osa-alueen kautta: lukujenluettelutaito, laskutaito, lukukäsitteet ja suhdekäsitteet. Taitojen kehittymisen alkuvaiheessa osa-alueet ovat erillisiä, mutta myöhemmin ne kytkeytyvät toisiinsa muodostaen matemaattisia taitokokonaisuuksia. *Lukujenluettelutaito* on taitoa tuottaa lukusanoja oikeassa järjestyksessä ja liikkua sanojen muodostamassa ketjussa eteenpäin tai taaksepäin. Lukujenluettelu- ja lukujonotaitojen kehittyminen on keskeinen edellytys lukukäsitteen ja laskutaidon oppimiselle. *Lukukäsite* pitää sisällään erilaisia osataitoja, joita ovat kyky havaita ja erotella määriä, käsitys siitä, mitä voidaan laskea sekä ymmärrys yksi yhteen -vastaavuudesta, kardinaalisuudesta, järjestyksen merkityksettömyydestä ja lukumäärän säilyvyydestä. Näiden osataitojen oppiminen ei näyttäisi olevan niin vahvasti yhteydessä kielen oppimiseen kuin muut matemaattisten taitojen osa-alueet. *Laskutaitoon* sisältyvät esineiden lukumäärän laskeminen, lukumäärän määrittäminen lisäämisen tai vähentämisen jälkeen sekä lukumäärien vertailu laskemalla. *Suhdekäsitteillä* tarkoitetaan erilaisia muutoksia ja suhteita kuvaavia käsitteitä. Näistä käytetään myös nimityksiä vertailukäsitteet tai avaruudelliset ja ajalliset käsitteet. Keskeisiä suhdekäsitteitä ovat muun muassa enemmän, vähemmän, suurempi, pienempi, ennen ja jälkeen. Suhdekäsitteiden omaksumiseen tuo haasteen se, ettei niille ole olemassa suoraan tarkasteltavissa olevia kohteita, vaan ne edellyttävät useamman kohteen samanaikaista mielessä pitämistä. Suhdekäsitteiden ymmärtäminen ja käyttäminen edellyttävät aina päättelyä. Niiden hallinta näyttäisikin olevan vahvasti yhteydessä kielelliseen päättelykykyyn ja yleiseen älykkyyteen.

2.2 Varhaisten matemaattisten taitojen kehittyminen

Matemaattisten taitojen oppimista tukevat lasten synnynnäiset valmiudet hahmottaa lukumääriä sekä ympäristö, jonka kulttuuriin sisältyy erilaisia matemaattisia sisältöjä ja tilanteita (Aunio ym. 2004, 198). Matemaattislooginen ajattelu, kuten joukkojen vertailu ja lukumäärän säilyvyyden ymmärtäminen, alkaa kehittyä jo

varhaislapsuudessa lapsen toimiessa erilaisissa arkipäivän tilanteissa ja esineympäristöissä (Kinnunen ym. 1994, 56). Lapsi jäsentää ja ymmärtää ympäristöään sekä oman toimintansa kautta että omaksumalla kulttuurilleen ominaisia käsitteitä ja ajattelumalleja vuorovaikutuksessa muiden kanssa. Seuraava tarkastelu kohdistuu matemaattisten taitojen kehittymiseen varhaislapsuudesta alkaen. Näin mahdollistuu kokonaiskuvan saaminen hierarkkisesti rakentuvista matemaattisista taitokokonaisuuksista.

2.2.1 Varhaiset matemaattiset kyvyt

Aunio kollegoineen (2004, 200–201) esittää lukumäärän hahmottamisen jakautuvan kahteen eri prosessiin. Ensimmäinen on *hyvin pienten lukumäärien (1–3) tarkka havaitseminen*, jota esiintyy jo puolivuotiailla vauvoilla (Aunio ym. 2004, 201; Wynn 1998, 11). Tällaisia havaintoja on saatu, kun vauvoille on esitetty pieniä lukumääriä näkö- ja kuuloärsykkein (Wynn 1998, 5–7). Varhain esiintyvää laskematta tapahtuvaa lukumäärien hahmottamista kutsutaan *subitisaatioksi* (Räsänen 1999, 336). Subitisaatiokyky rajoittuu aikuisillakin neljään yksikköön (Butterworth 2005, 6). Toinen Aunio ym. (2004, 201) esittelemä prosessi on *lukumäärien suhteellinen hahmottaminen*. Kun lukumäärä kasvaa, hahmottaminen muuttuu epätarkaksi ja suhteelliseksi. Suhteellisen hahmottamisen tarkkuus siis vähenee määrän kasvaessa. Mitä suurempia lukumäärät ovat, sitä suurempi täytyy olla niiden ero, jotta ne voitaisiin havaita.

Edellä esitetyt kaksi lukumäärän hahmottamisen muotoa eivät edellytä harjoittelua tai kielen oppimista. Niiden oletetaan muodostavan primaarien taitojen perustan yhdessä yksi yhteen -vastaavuuden ymmärtämisen kanssa. (Aunio ym. 2004, 201; ks. myös Vainionpää ym. 2003, 295.) Mattinen (2006, 21) tähdentää, että varhaiset kyvyt eivät muutu hetkessä erilaisten tietojen ja taitojen hallinnaksi, vaan lapsen käsitys lukumäärästä rakentuu näiden synnynnäisten numeeristen kykyjen pohjalta.

Lasten numeeristen tietojen ja taitojen kehittymistä tukee *spontaani huomion kiinnittäminen lukumääriin* (Spontaneous Focusing on Numerosity eli SFON)

(Hannula 2005, 17). Osalle lapsista maailma on täynnä lukumääriä ja mahdollisuuksia harjoitella varhaisia matemaattisia taitoja, kun taas toiset lapset ovat lukumäärien sijaan kiinnostuneita väreistä, muodoista, tunnelmien vaihtelusta tai ympäristön kokonaisvaltaisesta hahmottamisesta (Aunio ym. 2004, 208; Hannula 2005, 12; Hannula & Lepola 2006, 132). Lapset, jotka kiinnittävät spontaanisti huomiota lukumääriin ympäristössään, saavat luontaisesti matemaattisten taitojen harjoitusta (Hannula 2005, 17). Lapsen herkkyys kiinnittää spontaanisti huomiota lukumääriin voidaan myös herättää. On viitteitä siitä, että spontaanin lukumäärien havainnointitaitumuksen vahvistuminen johtaa välillisesti lasten numeeristen tietojen ja taitojen kehittymiseen. (Mattinen 2006, 234.) Erot siinä, miten paljon lapset kiinnittävät huomiota lukumääriin ja käyttävät lukujen tunnistamisen taitoa omassa ympäristössään, selittävät eroja varhaisten matemaattisten taitojen kehityksessä. Huomion kiinnittäminen lukumääriin aktivoi laskemisprosesseja ja harjoittaa laskemista. (Hannula 2005, 12, 22.)

Sekundaarit laskemistaidot edellyttävät harjoittelua, tarkkaavaisuuden kohdentamista ja ylläpitoa sekä useampien suoritusten ja taitojen yhtäaikaista koordinoitua (Aunio ym. 2004, 201). Gearyn (2000, 15) mukaan sekundaarien taitojen kehittyminen edellyttää hyvin organisoitua ja kohdennettua opetusta ja toistuvia harjoituksia. Sekundaarien taitojen kehittymiseen vaikuttavat myös yhteiskunnassa vallitsevat kulttuuriset asenteet matemaattista osaamista kohtaan (Geary 1995, 34). Lasten matemaattisissa taidoissa tapahtuu jo peruskoulua edeltävien vuosien aikana huomattavaa kehitystä primaareista kyvyistä monimutkaisempien sekundaarien taitojen hallintaan (Geary 2000, 12).

2.2.2 Lukujonotaidot

Lukujonoon liittyvä oppiminen on keskeinen osa pienten lasten matemaattisen ajattelun kehitystä. Lukujonotaidot voidaan luokitella yksinkertaisempiin ja kehittyneempiin taitoihin sen perusteella, miten vaativia kognitiivisia operaatioita ne sisältävät (Kinnunen ym. 1994, 59). Tässä luokituksessa otetaan yleensä huomioon

neljä näkökohtaa: suunta (eteenpäin tai taaksepäin), lukualue (alle tai yli kymmenen), millaisin askelin ”liikutaan” (yksi tai useampi) ja millaista työmuistin kuormitusta edellytetään (yksi tai useampi asia pidettävä samanaikaisesti mielessä). Lukujonotaitojen kehityksen ensimmäinen vaihe on numerosanojen oppiminen loruna, jossa yksittäisillä sanoilla ei ole merkitystä tai varsinaista matemaattista sisältöä (Aunio ym. 2004, 203; Räsänen 1999, 346–347; Vainionpää ym. 2003, 295). Tässä vaiheessa lapsi saa tietoa lukusanojen noudattamasta järjestyksestä. Vähitellen lorusta muodostuu lista sanoja, kun sanat opitaan erottamaan toisistaan. Näitä sanoja aletaan luetella esineiden kohdalla, vaikka lapsella ei ole ymmärrystä laskemisen tarkoituksesta. Jo kaksivuotiailla lapsilla on havaittu olevan huomattava pyrkimys sanoa yksi lukusana yhden esineen kohdalla (Gelman & Gallistel 1978, 87). Vähitellen lapsi oppii käyttämään lukujonoa luetellen lukuja ja osoitellen samanaikaisesti sormella esineitä tai kuvia. Näin lapselle muodostuu jo hyvin varhain käsitys siitä, että lukusanoilla on lukumäärään liittyvä merkitys. (Räsänen 1999, 346–347; Vainionpää ym. 2003, 295.) Aikataulussa, jolla lapset oppivat yhdistämään lukujen luettelemisen esineiden laskemiseen, on suuria yksilöllisiä eroja (Aunio ym. 2004, 203).

Lukujonotaitojen kehityksen edetessä lapsi alkaa hyödyntää luettelemalla laskemista lukumäärän määrittämiseen (Aunio ym. 2004, 203). Lapsi siis ymmärtää, että laskemisella on tulos, eikä se ole vain erillinen toiminto. Jotta lapsi voi edetä yhteen- ja vähennyslaskuissa kehittyneempiin laskustrategioihin, hänen tulee osata aloittaa lukujen luettelu myös muusta kohdasta lukujonoa kuin ykkösestä. Kun lapsi ymmärtää lukujen olevan toisiinsa merkityksellisesti liittyviä, esimerkiksi suuremman luvun muodostuvan sitä pienempiä lukuja yhdistämällä, hän on saavuttanut lukujonotaitojen edistyneimmän vaiheen. Tällöin lukujonotaidot sekä yhteen- ja vähennyslaskutaidot tukevat vahvasti toisiaan. Lapsella on taito liikkua lukujonossa kahteen suuntaan eripituisia askelia käyttäen. (Aunio ym. 2004, 203.)

Kinnunen kollegoineen (1994, 58) tähdentää, että lukujonon tuottamiseen tarvitaan sääntöjen konstruointia. Osatakseen luetella lukusanoja esimerkiksi viiteenkymmeneen, lapsella tulee olla tieto siitä, miten lukusanat tuotetaan kunkin

kymmenylityksen jälkeen. Koska lukusanoja on kielessä paljon, niiden oppiminen ilman tuottamissääntöjen hallintaa olisi ylivoimaisen työlästä. Tyypillisesti lapsi osaa ensin luetella luvut yhdestä kymmeneen, mutta kymmenen jälkeiset luvut hän vielä luettelee eri kerroilla vaihtelevassa järjestyksessä. Tyypillinen virhe on se, että lapsi luettelee lukuja seuraavasti: yhdeksäntoista, kymmenentoista. Vuorovaikutuksen myötä lapselle kehittyy vähitellen ymmärrys lukujonon rakentumisesta. Hän oppii liittämään sanan loppuosaksi ”kymmentä” (kaksikymmentä, kolmekymmentä jne.) ja edelleen lisäämään lukusanat yhdestä yhdeksään (kaksikymmentäyksi, kaksikymmentäkaksi jne.). (Kinnunen ym. 1994, 58.)

Koulutulokkaiden havaittiin Kinnusen ym. (1994, 66) tutkimuksessa hallitsevan tyypillisesti hyvin lukujen luettelon ja yksinkertaisen eteenpäin ja taaksepäin laskemisen. Lapset osasivat myös soveltaa lukujen luettelutaitoaan esineiden lukuisuuden määrittämisessä. Aunolan ym. (2004, 708) tutkimustulosten mukaan esiopetuksiän lukujonotaidot ennustivat sekä matemaattisen suoriutumisen tasoa että myöhempää kehityksen nopeutta. Vastaavanlaisia tuloksia lukujonotaitojen merkityksestä saivat Kinnunen ym. (1994, 75) tutkiessaan lasten matemaattisten taitojen kehitystä esiopetuksesta ensimmäiselle luokalle. Koulutulokkaan lukujonotaitojen taso ennusti aritmeettisten taitojen kehitystä koulussa. Koponen (2008, 37) havaitsi 9–11-vuotiaita koskeneessa tutkimuksessaan lukujen luettelutaidon ja nopean nimeämisen ennustavan sujuvan laskutaidon kehittymistä. Myös Hannula ja Lepola (2006, 145) havaitsivat lukujonotaitojen olevan muihin valmiuksiin verrattuna voimakkaimmin yhteydessä myöhempisiin aritmeettisiin taitoihin. Fazion (1999, 42) tutkimuksessa lukusanojen muistaminen ja mieleen palauttaminen oli vaikeaa niille lapsille, joilla oli kielellisiä erityisvaikeuksia. Kinnusen ym. (1994, 60) mukaan lukujonotaitojen taso ja automatisoituminen ovat merkityksellisiä sen kannalta, millaisiin ja kuinka nopeisiin aritmeettisiin suorituksiin lapsi kykenee.

Lukujonotaitojen hallinnan arviointi on tarpeen erityisesti silloin, kun selvitetään laskutaitoon liittyviä oppimisvaikeuksia (Räsänen 1999, 347). Usein vaikeuksien taustalla on lukujonotaitojen puutteellinen kehitys. Tällöin lapsi löytää

kardinaaliluvun, eli joukon lukumäärän, ainoastaan lukujen luettelemisen avulla. Sujuva peruslaskutaito kuitenkin edellyttää sitä, että lukujonoa osataan katkoa, laskeminen osataan aloittaa lukujonon mistä kohdasta tahansa ja lukujonossa osataan edetä eteen- tai taaksepäin. (Räsänen 1999, 347.)

2.2.3 Luettelemalla laskeminen

Numerojärjestelmän oppimisessa ja yksinkertaisten laskutoimitusten suorittamisessa keskeistä on *luettelemalla laskemaan* oppiminen (Ahonen ym. 1995, 185). Butterworth (2005, 7) toteaa, että luettelemalla laskemisen (counting) oppiminen tapahtuu vaiheittain noin neljässä vuodessa. Kehitys alkaa noin kaksivuotiaana kunnes noin kuuden vuoden iässä lapsella on jo melko laaja ymmärrys siitä, miten lasketaan. Gelman ja Gallistel (1978, 77–82) esittävät luettelemalla laskemista ohjaavan ja luonnehtivan viisi periaatetta. Näistä kolme ensimmäistä käsittelevät sitä, miten lasketaan. Ensimmäinen on *yksi yhteen -vastaavuuden periaate*, jossa jokainen laskettava esine lasketaan vain yhden kerran. Lapsen tulee pitää mielessä jo laskemansa esineet sekä vielä laskematta olevat esineet. Toinen on *järjestyksen pysyvyyden periaate*, mikä tarkoittaa sitä, että lukusanojen on oltava tietyssä järjestyksessä. Kolmas periaate on *kardinaalisuus*. Sillä tarkoitetaan sitä, että viimeinen luku laskettavassa sarjassa on merkityksellinen ja se ilmoittaa joukon koon tai esineiden määrän. Kardinaalisuuden ymmärtäminen edellyttää kahta ensimmäistä, eli yksi yhteen -vastaavuuden ja järjestyksen pysyvyyden hallintaa. Kardinaalisuuden periaatteen lapset alkavat ymmärtää noin kolmen ja puolen vuoden iässä (Mattinen, Hannula & Lehtinen 2006, 157). Sen omaksuminen tapahtuu vaiheittain ja hyvin yksilöllisessä tahdissa (Vainionpää ym. 2003, 296). Edellä mainittujen periaatteiden lisäksi Gelman ja Gallistel mainitsevat *abstraktioperiaatteen* ja *järjestyksen merkityksettömyyden periaatteen*. Abstraktioperiaate pitää sisällään tietoisuuden siitä, että minkä tahansa joukon lukumäärä voidaan laskea. Järjestyksen riippumattomuus taas on sitä, että laskettavien yksiköiden järjestyksellä ei laskemisessa ole väliä. Riippumatta laskemisjärjestyksestä joukon kardinaaliluku on sama. (Gelman & Gallistel 1978, 77–82.)

Jonoon järjestettyjen esineiden laskeminen on suhteellisen yksinkertainen ja mekaaninen tapahtuma, kun taas epämääräisessä järjestyksessä olevien esineiden laskeminen vaatii jo jotain toiminnallista strategiaa, joka perustuu yksi yhteen suhteeseen asettamiseen (Kinnunen ym. 1994, 58). Tavallisesti esine nimetään lukujonon seuraavalla luvulla ja siirretään sivummalle muiden jo laskettujen esineiden joukkoon. Tällaisen strategian käyttö edellyttää yksi yhteen -vastaavuuden hallinnan lisäksi lukumäärän säilyvyyden käsitteen hallintaa. Esineiden määrä säilyy siis samana myös sen jälkeen, kun joukon jokainen esine on siirretty uuteen asetelmaan. Clementsin (2004, 19–20) mukaan 3–5 vuoden iässä lapselle kehittyy taito laskea suurempia joukkoja vaikka ne ovat erilaisissa asetelmissa, eikä lapsen tarvitse koskea esineisiin tai siirtää niitä pois laskemisen aikana. Lasten täytyy oppia, että viimeinen lukusana, jonka he sanovat laskeessa, osoittaa, kuinka monta yksikköä on laskettu. Luettelemalla laskemista hyödyntäen lapsi oppii suorittamaan pieniä yhteen- ja vähennyslaskuja (Ahonen ym. 1995, 185–186). Aunio ja Niemivirran (2010, 431) tutkimustulokset osoittivat, että esiopetuksiän luettelemalla laskemisen taidot ennustivat aritmeettisten perustaitojen oppimista ja myöhempää matemaattista suoriutumista peruskoulun alkuvaiheessa.

Laskemisjärjestelmän oppimisen varhaisissa vaiheissa lapsen täytyy tukeutua erilaisiin ulkoisiin toiminnallisiin tukiin suoriutuakseen laskemisen vaatimuksista (Aunio ym. 2004, 201). Tyypillisin lasten käyttämä ulkoinen tuki on sormet, joilla he hahmottavat ja ilmaisevat lukumääriä. Lukujonotaitojen kehittyessä lapsen yhteen- ja vähennyslaskujen ratkaisukeinot muuttuvat (Aunio ym. 2004, 205). Mitä kehittyneempi ymmärrys lapsella on luvuista ja lukujonosta, sitä vähemmän hän tarvitsee avukseen ulkoista tukea (sormet, palikat tai kirjoitetut luvut) hahmottaakseen ja kuvatakseen lukumääriä. On kyse lukukäsitteen hallinnan puutteesta, jos lapsi näyttää runsaasta harjoittelusta huolimatta turvautuvan yksinkertaisissa yhteenlaskuissa luettelemiseen ja sormiinsa (Räsänen 1999, 349). Ulkoisten tukien, kuten sormien käyttö, altistaa laskuvirheille ja hidastaa laskemista, mikä taas estää sujuvan laskutaidon kehittymistä (Koponen 2008, 33). Lasten, joilla oli matemaattisia oppimisvaikeuksia, havaittiin käyttävän sormia laskemisen apuna normaalisti suoriutuvia lapsia merkitsevästi useammin (Geary, Hoard, Byrd-Craven

& DeSoto 2004, 142; Jordan, Hanich ja Kaplan 2003, 845). Fazion (1999, 426) tutkimus osoitti vastaavasti lasten, joilla oli kielellisiä vaikeuksia, käyttävän sormiaan laskemisessa muita lapsia enemmän.

2.3 Aritmeettisten taitojen kehittyminen

Aritmeettiset perustaidot kehittyvät yhdessä kardinaalisuuden ymmärtämisen ja lukujonotaitojen kehittymisen kanssa (Hannula 2005, 24). Aritmeettisten operaatioiden suorittamisen keskeisenä taustataitona on ymmärrys lukujonosta ja sen sujuva käyttö (Hannula & Lepola 2006, 133; Kinnunen ym. 1994, 60). Butterworthin (2005, 4) mukaan luettelemalla laskemisen sekä yhteen- ja vähennyslaskutaitojen voidaan ajatella olevan muun aritmetiikan pohjana.

Aritmeettiset taidot eli laskutaito koostuu monista osataidoista, joita tulisi osata käyttää samanaikaisesti (Hannula & Lepola 2006, 133; Jordan, Mulhern Wylie 2009, 466; Vainionpää ym. 2003, 293). Dowkerin (1998, 276, 278) mukaan aritmeettisten taitojen osatekijöitä ovat ymmärrys luvuista ja lukumääristä, aritmeettisten faktojen muistaminen, käsitteiden ymmärtäminen ja kyky käyttää erilaisia menettelytapoja. Butterworth (2005, 15) määrittelee aritmeettisten taitojen kehittymisen kasvavana monimutkaisena ymmärryksenä lukumääristä ja kasvavana kykynä käsitellä lukumääriä. Geary (2000, 13) sisällyttää aritmeettisiin taitoihin peruslaskutoimitusten hallinnan ja sanallisten ongelmien ratkaisutaidon.

2.3.1 Peruslaskutehtävien hallinta

Yhteen- ja vähennyslaskutaito. Sujuva yhteen- ja vähennyslaskujen laskeminen edellyttää monipuolisen harjoittelun kautta muodostunutta ymmärrystä luvuista, lukujonosta ja kymmenjärjestelmästä (Hannula & Lepola 2006, 149). Butterworth (2005, 9) on kuvannut yhteenlaskustrategian kehittymistä kolmen vaiheen avulla. Ensimmäinen vaihe on laskea kaikki. Jos lapselle annetaan esimerkiksi tehtävä $3 + 5$,

hän laskee sen ”yksi, kaksi, kolme” ja sitten ”yksi, kaksi, kolme, neljä, viisi” näyttäen esimerkiksi sormillaan joukkojen lukumäärät. Tämän jälkeen hän laskee kaikki pystyssä olevat sormet alusta alkaen. Toinen, kehittyneempi vaihe on aloittaa laskeminen ensimmäisestä laskettavasta. Jotkut lapset ymmärtävät, että ensimmäistä lukua ei ole välttämätöntä laskea ja he voivat aloittaa laskemisen suoraan luvusta kolme. Sormilla laskien se tapahtuu niin, että lapsi aloittaa laskemisen lukusanasta kolme ja käyttää sormia lisäävän lukumäärän laskemiseen esim. ”neljä, viisi, kuusi, seitsemän, kahdeksan”. Kolmas tapa on aloittaa laskeminen suuremmasta luvusta. Tämä on tehokkaampi ja vähemmän virheille altistava tapa. Lapsi valitsee suuremman luvun aloittavaksi ja aloittaa laskemisen luvusta viisi ja jatkaa ”kuusi, seitsemän, kahdeksan”. Tämän kolmannen vaiheen ilmeneminen kertoo lapsen ymmärtäneen, että joukkojen laskujärjestyksellä ei ole merkitystä yhteenlaskussa. (Butterworth 2005, 9.) Lapselle on kehittynyt ymmärrys yhteenlaskun vaihdannaisuudesta ($5 + 2 = 2 + 5$), mikä edistää laskemisen sujuvuutta (Clements 2004, 23). Butterworth (2005, 9) tähdentää, että lapset saattavat käyttää edellä esiteltyjä strategioita vaihdellen eri tehtävien välillä. Geary kollegoineen (2004, 142) on kuitenkin havainnut, että matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavat lapset käyttävät muita lapsia harvemmin strategiaa, jossa laskeminen aloitetaan suuremmasta luvusta.

Yhteen- ja vähennyslaskutaidoissa on keskeistä lukujen sujuva osittaminen pienemmiksi luvuiksi ($12 - 3 = 12 - 2 - 1$) ja koonti suuremmiksi luvuiksi ($17 + 5 = 17 + 3 + 2$) (Hannula & Lepola 2006, 149). Lapsi oppii vähitellen sen, että esimerkiksi luku viisi sisältää luvut kaksi ja kolme tai luvut neljä ja yksi (Clements 2004, 22). Lukujen hajottamisen ja koonnin taito edistää erilaisten laskutehtävien suorittamista ja se on tarpeellinen muun muassa kymmenylityksissä ($8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14$) ja toimittaessa moninumeroisten lukujen kanssa (Clements 2004, 22). Geary, Hoard, Nugent ja Bailey (2012, 214) havaitsivat tutkimuksessaan, että matematiikassa keskimääräisesti suoriutuvat lapset käyttivät hajoitelmia apunaan ongelmanratkaisutehtävissä useammin kuin heikosti suoriutuvat ja matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavat lapset.

Kymmenjärjestelmä. Gearyn (2000, 13) mukaan kymmenjärjestelmä on haastavin laskemiseen ja lukuihin liittyvä käsite, mikä alakoulussa tulisi oppia. Kymmenjärjestelmän oppiminen riippuu paljon opetuksesta sekä numeroiden ja lukusanojen vastaavuudesta. Monissa eurooppalaisissa kielissä, kuten englannissa, lukusanat (esim. twelve) eivät kaikilta osin vastaa numeromerkkejä. Aasialaisissa kielissä taas laskeminen kymmenen jälkeen jatkuu loogisesti, kuten kymmenen yksi, kymmenen kaksi ja niin edelleen. Tämä loogisuus yhdistettynä tehokkaaseen harjoitteluun edistää kymmenjärjestelmän oppimista, mikä taas johtaa sujuvuuteen ja virheiden vähenemiseen laskemisessa sekä taitoon ratkaista monimutkaisia aritmeettisiä ongelmia helpommin. Kymmenjärjestelmän opettaminen onkin haastavampaa eurooppalaisissa kielissä verrattuna aasialaisiin kieliin. (Geary 2000, 13.) Myös Butterworth (2005, 15) toteaa, että eri kielten lukusanojen järjestelmillä on merkitystä aritmeettisten käsitteiden oppimisen nopeuteen. Esimerkiksi Ho ja Fuson (1998, 543) havaitsivat tutkimuksessaan kiinalaisten lasten suoriutuvan englantilaisia ja amerikkalaisia lapsia paremmin laskutehtävistä, jotka edellyttivät paikka-arvojen ja kymmenjärjestelmän ymmärtämistä.

Ryhmittäin laskeminen. Asioiden ryhmittely (grouping) suurempiin yksiköihin kuten kymmeneen tai satoihin tekevät suurten joukkojen laskemisesta helpompaa (Baroody 2004, 205). Ryhmittely on prosessi, jossa objektit yhdistellään samansuuruisiksi joukoiksi, esimerkiksi luku 18 voidaan ilmaista koostuvan kuudesta kolmen ryhmästä (Clements 2004, 23–24). Ryhmittely erilaisiin yksiköihin antaa perustan moninumeroisten lukujen paikka-arvojen ymmärtämiselle, esimerkiksi luku 258 koostuu kahdesta sadan ryhmästä, viidestä kymmenen ryhmästä ja kahdeksasta ykkösestä. Paikka-arvojen ymmärtäminen taas on hyvin olennainen taito moninumeroisten laskutehtävien ratkaisemisessa esimerkiksi allekkain laskettaessa ja erilaisten laskumenetelmien käytössä (esim. lainaaminen) (Baroody 2004, 205; Rittle-Johnson & Siegler 1998, 90). Ryhmittäin laskeminen (skip counting) edistää paikka-arvojen ymmärtämisen lisäksi ymmärrystä kerto- ja jakolaskusta (Clements 2004) sekä murtoluvuista (Baroody 2004, 200). Clementsin ja Saraman (2009, 88) mukaan ryhmittely on kertolaskun perusta.

2.3.2 Laskustrategiat

Aritmeettisten taitojen kehitykseen vaikuttavat olennaisesti strategiat, joita lapsi oppii käyttämään tehtävien ratkaisemiseen. Kinnunen ym. (1994, 60) käyttävät käsitettä aritmeettiset faktatiedot, jotka sisältävät monenlaisia sekä opetuksen että oman kokemuksen kautta hankittuja tietoja luvuista, lukujen suhteista, toimintatavoista ja laskuoperaatioiden tuloksista, joita voidaan käyttää nopeuttamaan laskutoimituksia. Yleisiä matemaattisten ongelmien ratkaisumenetelmiä ovat suora aritmeettisten faktojen mieleen palauttaminen ja kehittyneempi lukujen hajottaminen (Geary ym. 2004, 123). Nopeassa faktojen mieleen palauttamisessa lapsi yhdistää laskutehtävän ja muistiin tallentuneen vastauksen. Esimerkiksi pienellä lukualueella opitaan muistamaan yhteen- ja vähennyslaskujen sekä kerto- ja jakolaskujen tuloksia ulkoa, eikä vastauksia tarvitse tuottaa aritmeettisten operaatioiden avulla (Kinnunen ym. 1994, 60). Tällainen muistinvarainen ratkaisustrategia on tärkeä osa aritmeettisten suoritusten automatisoitumisen kehitystä. Lukujen hajottamisessa vastauksen rakentaminen perustuu osasummien mieleen palauttamiseen, esimerkiksi ongelma $6 + 7$ voidaan ratkaista palauttamalla ensin mieleen laskun $6 + 6$ summa ja lisäämällä siihen luku 1 (Geary ym. 2004, 123).

Gearyn (2000, 14) mukaan suurin osa lapsista ja nuorista oppii riittävän opetuksen ja harjoittelun seurauksena ratkaisemaan erilaisia aritmeettisiä ongelmia kehittyneiden ratkaisumenetelmien avulla, vaikka vaikeuksia voi ilmetä uudenlaisten ongelmien kanssa. Laskumenetelmien oppimisessa toistaminen on tarpeellista taitojen automatisoitumisen vuoksi, koska taidot ja tiedot hallitaan sitä paremmin, mitä useammin niitä käytetään (Geary 1995, 33; Yrjönsuuri 2004, 117). Perusmenetelmien automatisoituminen vapauttaa voimavaroja monimutkaisempien ongelmien ratkaisemiseen (Geary 1995, 33). Tehokkaiden strategioiden käytöllä ja automatisoitumisella on sitä suurempi merkitys, mitä vaativampien aritmeettisten taitojen kehityksestä on kysymys (Kinnunen ym. 1994, 61). Tehokkaat laskumenetelmät edellyttävät vahvaa ymmärrystä matematiikan operaatioista ja lukujen suhteista, esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskujen vaihdannaisuudesta

(Fazio 1999, 429). Dowkerin (1998, 290) tutkimus osoitti, että laskutaidon tasolla ja laskustrategioiden käytöllä oli merkittävä yhteys.

Matemaattisilta taidoiltaan eritasoisten lasten on usein havaittu eroavan toisistaan strategioiden käytön ja hallinnan suhteen (Kinnunen ym. 1994, 61). Heikot laskijat käyttävät samankaltaisia strategioita tehtävien suorittamiseen kuin nuoremmat lapset (Räsänen & Ahonen 2004, 291). Heikoilla laskijoilla laskemisessa käytettävät strategiat eivät välttämättä kehity samanaikaisesti kasvavien vaatimusten kanssa, mistä seuraa se, että he jäävät matematiikassa jatkuvasti entistä enemmän jälkeen luokkatovereistaan (Aunola ym. 2004). Fazio (1999, 420) havaitsi, että lapset, joilla oli kielellisen kehityksen erityisvaikeus, käyttivät erilaisia strategioita tehtävien ratkaisemisessa kuin normaalisti suoriutuvat lapset. He esimerkiksi käyttivät luettelemalla laskemista tehtävien ratkaisemiseksi nopean mieleen palauttamisen sijaan. Cowan, Donlan, Shepherd, Cole-Fletcher, Saxton ja Hurry (2011, 792) havaitsivat, että lapset käyttivät vaihdellen eri strategioita ongelmaratkaisutehtävästä riippuen. Tyypillisin lasten käyttämä strategia toisella luokalla oli luettelemalla laskeminen, kun taas kolmannella luokalla lapset käyttivät enemmän lukujen hajotelmia peruslaskutehtävien ratkaisemisessa. Vastausten nopea mieleen palauttaminen oli sen sijaan harvinaisempaa molemmilla luokilla.

Lapsilla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, on tyypillisesti vaikeuksia nopeassa tietojen mieleen palauttamisessa ja laskutaidon sujuvuudessa (Jordan ym. 2003, 846). Fazion (1999, 427) tutkimustulokset osoittivat kirjallisten laskutehtävien laskemisen vievän enemmän aikaa niillä lapsilla, jotka ovat heikompia matemaattisten tietojen mieleen palauttamisessa. Lapset, jotka suoriutuivat heikosti työmuistia ja kielellisiä taitoja mittaavissa tehtävissä, suoriutuivat heikosti myös aikarajoitetuissa aritmeettisissä tehtävissä. Lisäksi lapset, joilla oli kielellisen kehityksen erityisvaikeus, tarvitsivat enemmän aikaa laskutehtävien suorittamiseen (Fazio 1999, 425). He menestyivätkin merkitsevästi paremmin tehtävissä, joiden tekemisessä ei ollut aikarajaa.

Kinnusen tutkimusryhmä (1994, 75–76) havaitsi, että 1. luokan oppilaat suoriutuivat hyvin yhteenlaskun, vähennyslaskun ja ”aukkotehtävien” vaatimista operaatioista, jos ne sijoittuvat 0–20 lukualueelle. Sen sijaan 20 ylittävällä lukualueella huomattavalla osalla lapsista oli vielä vaikeuksia. Tämä viittasi siihen, että lasten käyttämät strategiat soveltuivat pienemmille lukualueille ja niiden käyttäminen suurempien lukujen käsittelyssä olisi vaatinut lukujen suhteiden ja operaatioiden parempaa ymmärtämistä.

2.3.3 Matemaattisten valmiuksien yhteys kouluiän matematiikan taitoihin

Esiopetuksessa luodaan ja valmistetaan pohjaa matematiikan oppimiselle (Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2010). Alkuopetuksessa keskeistä on ymmärtää luonnollisen luvun käsite ja oppia siihen soveltuvia peruslaskutaitoja. Keskeisiä sisältöjä ovat muun muassa lukumäärä, numerosymboli, kymmenjärjestelmän rakentumisen periaate, yhteen- ja vähennyslasku, kertolasku ja kertotaulut, jakolasku konkreettisilla välineillä sekä yksinkertaiset lukujonot. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004.) Hannula ja Lepola (2006, 133) esittävät alkuopetuksen matematiikan kohdistuvan suurelta osin nimenomaan aritmeettisiin taitoihin ja luonnollisten lukujen järjestelmän periaatteiden ymmärtämiseen. Baroody (2004, 193) korostaa, että ymmärrys yhteen- ja vähennyslaskusta on oleellinen asia koulumatematiikassa menestymisen kannalta, koska se on pohjana monimutkaisempien taitojen kuten kertolaskujen tai murtolukujen oppimiselle. Alakoulussa lasten odotetaan oppivan aritmeettiset faktat ja laskennalliset menettelytavat aritmeettisten ongelmien ratkaisemiseksi (Geary 2000, 13).

Alle kouluikäisten lasten matemaattisten taitojen on havaittu olevan yhteydessä matemaattiseen suoriutumiseen ensimmäisinä kouluvuosina (Aunola ym. 2004; Lerkkanen ym. 2005). Aunolan ym. (2004, 708) tutkimuksessa havaittiin lasten, joiden taitojen lähtötaso oli esiopetusvuonna korkea, kehittyvän nopeammin matemaattisessa suoriutumisessa kuin lähtötasoltaan heikommat lapset. Lasten

yksilölliset erot matemaattisissa taidoissa kasvoivat siirryttäessä esiopetuksesta peruskouluun. Lisäksi havaittiin lasten matemaattisen taitotason olevan hyvin pysyvää (vrt. Aunola, Leskinen & Nurmi 2006, 30). Lerkkanen sai kollegoineen (2005, 127, 129–131) vastaavanlaisia tuloksia varhaisten matemaattisten taitojen merkityksestä kouluajan taitoihin sekä matemaattisen suoriutumistason pysyvyydestä. Tulokset osoittivat, että mitä korkeampi oli lasten varhaisten matemaattisten taitojen taso, sitä korkeammalle he ylsivät matemaattisessa suoriutumisessa seuraavalla mittauskerralla. Yksilölliset erot matemaattisissa taidoissa olivat hyvin pysyviä ensimmäisen ja toisen luokan aikana. Varhainen kyky ymmärtää ja käsitellä lukumääriä on tutkimustulosten mukaan luotettava ja vahva ennustaja matemaattisessa suoriutumisessa ensimmäisellä luokalla (Jordan, Kaplan, Locuniak & Ramineni 2007, 42).

Dowkerin (1998, 300) mukaan yksilölliset erot aritmetiikassa ovat huomattavia. Koska aritmetiikka ei ole yksi yhtenäinen taito, on mahdollista, että lapsella on merkittäviä eroja eri osataitojen välillä. Jordan kollegoineen (2009, 465) tutki aritmeettisten taitojen kehittymistä pitkittäistutkimuksessa. Tavoitteena oli selvittää 5–7-vuotiaiden aritmeettisten taitojen eroja yksilöiden välillä ja eri tehtävien välillä. Tutkimuksessa lasten havaittiin eroavan selvästi toisistaan alkuvaiheen tasossa, loppuvaiheen tasossa, kehityksen nopeudessa ja kehityskaaren muodossa. Lasten yksilöllinen suoriutumisen taso vaihteli myös erilaisten aritmeettisten tehtävien välillä. Geary ym. (2012, 212–213) tutkivat tyypillisesti suoriutuvien, heikosti suoriutuvien ja matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavien lasten matemaattisen kehityksen eroja eri matematiikan taitoalueilla. Tutkimuksessa havaittiin, että tehtävistä riippuen ryhmien väliset erot joko kaventuivat tai laajentuivat ensimmäisen ja viidennen luokan välillä. Esimerkiksi tutkimuksessa käytetyssä yhteenlaskutehtävässä erot olivat merkitseviä ensimmäisellä luokalla, mutta ryhmien väliset erot tasoittuivat viidenteen luokkaan mennessä.

2.4 Sukupuolten väliset erot matemaattisissa taidoissa

Useissa tutkimuksissa on osoitettu, ettei tyttöjen ja poikien taitojen välillä ole merkitsevää eroa matemaattisissa taidoissa koko ikäluokan keskiarvoja tarkasteltaessa (Aunio & Niemivirta 2010; Aunola ym. 2004; Dowker 1998; Hannula & Lepola 2006; Herbert & Stipek 2005; Hyde ym. 2008; Kupari & Törnroos 2004; Vilenius-Tuohimaa 2005). Dowkerin (1998, 286) tutkimustulosten mukaan sukupuoli ei vaikuttanut menestymiseen matemaattisissa tehtävissä. Seitsemäsluokkalaisten matemaattisia taitoja koskeneessa tutkimuksessa tyttöjen ja poikien väliset suorituserot osoittautuivat lähes olemattomiksi (Kupari & Törnroos 2004, 163). Aunolan ym. (2004, 710) tutkimuksessa ei tullut esille eroja sukupuolten välillä matemaattisen suoriutumisen tasossa, mutta tulokset kuitenkin osoittivat poikien kehityksen olevan nopeampaa kuin tyttöjen. Erot tyttöjen ja poikien matemaattisessa kehityksessä alkoivat tulla esiin kahden ensimmäisen kouluvuoden aikana, erityisesti taitavien keskuudessa. Hannula ja Lepola (2006, 143) havaitsivat poikien aritmeettisten taitojen olevan tyttöjen taitoja paremmat toisella luokalla, kun taas esiopetusiän ja ensimmäisen luokan taidoissa ei havaittu sukupuolten välisiä eroja. Robinson ja Lubienski (2011, 294) havaitsivat, ettei matematiikassa menestymisessä ollut sukupuolten välisiä eroja esiopetusiässä, mutta ensimmäiseltä luokalta alkaen poikien kuitenkin havaittiin suoriutuvan tyttöjä paremmin erityisesti taitavien joukossa. Sukupuolten väliset erot kasvoivat alakoulun aikana, mutta yläkoulussa erot puolestaan kaventuivat. Tutkimuksissa poikien menestymisessä on myös havaittu olevan suurempaa vaihtelua kuin tyttöjen menestymisessä (Aunola ym. 2004, 706; Hyde ym. 2008).

Hyden ja Mertzin (2009, 8802) mukaan sukupuolten väliset erot ovat kaventuneet ajan myötä. He havaitsivat tyttöjen saavuttaneen poikien taitotason matematiikassa, vaikkakin taitavien joukossa oli edelleen enemmän poikia kuin tyttöjä. Hyde ja Mertz (2009, 8806) toteavat, ettei poikien suurempi osuus taitavien joukossa ole kaikkialla esiintyvä asia, vaan he arvelevat sen olevan yhteydessä kulttuurissa vallitsevaan sukupuolten väliseen tasa-arvoon. Sosiokulttuuristen ja muiden

ympäristötekijöiden ajatellaankin olevan matematiikassa suoriutumisessa biologisia syitä merkityksellisempiä (Hyde & Mertz 2009, 8806).

Vuoden 2009 PISA-tulokset osoittivat, että suomalaisten nuorten matematiikan osaamisessa ei ollut sukupuolten välillä juurikaan eroa. Poikien osuus korkeimmilla suoritustasoilla oli hieman suurempi kuin tyttöjen osuus. Kansainvälisesti vertailtuna 65 osallistujamaan ja -alueen joukossa pojat suoriutuivat tyttöjä paremmin 35 maassa ja ainoastaan viidessä maassa tytöt olivat poikia parempia. (Sulkunen ym. 2010, 32.) Vuoden 2011 TIMSS-tutkimuksessa neljännen luokan tyttöjen ja poikien pistemäärien ero poikien eduksi ei ollut suuri, mutta kuitenkin tilastollisesti merkitsevä. Suomessa matematiikan sukupuolierot olivat tutkimuksen mukaan kansainvälistä keskitasoa. (Kupari ym. 2012, 68.)

Tutkimuksissa on havaittu olevan sukupuolten välisiä eroja eri tehtävätyypeissä. Vilenius-Tuohimaa (2005, 47) toteaa, että vaikka tulokset eivät tyttöjen ja poikien välisiä kokonaispistemääriä tarkasteltaessa eroaisikaan, ne tulevat esille eri osa-alueiden taidoissa. Esimerkiksi Jordan ym. (2003, 847) havaitsivat tutkimuksessaan joitakin eroja sukupuolten välillä kolmannella luokalla poikien menestyessä paremmin osassa matematiikan tehtävistä. Jordan havaitsi kollegoineen (2007, 44), että sukupuolella oli yhteys kykyyn ymmärtää ja käsitellä lukumääriin liittyvää informaatiota vaikkakin vaikutukset olivat hyvin vähäisiä. Kuparin ym. (2012, 68) raportoimassa tutkimuksessa, tyttöjen ja poikien välisten erojen suuruus vaihteli eri matematiikan taitoalueilla. Pojat osasivat esimerkiksi luvut ja laskutoimitukset - sisältöalueen tehtävät tyttöjä tilastollisesti merkitsevästi paremmin. Sen sijaan geometriset muodot ja mittaaminen -sisältöalueella tyttöjen ja poikien suoriutuminen oli samantasoista.

2.5 Matemaattisten taitojen kehitykseen yhteydessä olevia tekijöitä

Matemaattisten taitojen kehityksen on osoitettu olevan yhteydessä erilaisiin kognitiivisiin tekijöihin. Tässä luvussa tarkastellaan erityisesti matemaattisen ja kielellisen kehityksen yhteyttä, mutta esitellään lyhyesti yhteyksiä myös muihin taitoihin.

Lasten varhaisessa laskutaidon kehityksessä kieli näyttäisi olevan hyvin keskeisessä roolissa. Kielellisten taitojen kehitys yhdessä primaarien matemaattisten taitojen kanssa luo pohjan lukusanojen oppimiselle (Aunio ym. 2004, 202). Kyky hahmottaa pieniä lukumääriä mahdollistaa sen, että lapsi oppii, mitä lukusanat tarkoittavat. Vähitellen hänelle kehittyy ymmärrys lukujonosta, jossa jokainen sana tuottaa kasvavaan joukkoon yhden lisää. Räsänen (1999, 337) mukaan lukumääräisyyden havaitseminen on edellytys siihen, että lukumäärän ja sitä vastaavan käsitteen välille voi syntyä mielleyhtymä. Myös Vainionpää ym. (2003, 293) esittävät matemaattisten taitojen kehittymisen olevan tiiviisti yhteydessä yleiseen kielenkehitykseen. Erityisesti lukujenluettelutaito ja suhdekäsitteiden (enemmän, vähemmän, isompi) hallinta edellyttävät kielellisiä taitoja. Vainionpään ym. (2003, 293) mukaan on tutkimuksellisia viitteitä siitä, että lukujenluettelutaidon kehittymisen ensivaiheessa taustalla vaikuttaa sanavaraston laajentuminen ja myöhemmässä vaiheessa sanojen mieleen palauttamisen nopeus ja puhemotoriikan kehitys. Kielellisten taitojen on havaittu selittävän matemaattista suoriutumista myöhemmin (Cowan ym. 2011, 800).

Tutkimustulosten mukaan lapsilla, joilla on kielellisiä vaikeuksia, on tyypillisesti kehittyviin lapsiin verrattuna selvästi enemmän vaikeuksia matematiikan perustaitojen eri osa-alueilla (ks. Koponen 2008, 41). Fazion (1999, 426) tutkimus osoitti lasten, joilla oli kielellinen erityisvaikeus, tekevän merkitsevästi enemmän virheitä matemaattisissa tehtävissä verrattuna muihin lapsiin. Erityisesti sujuvan laskutaidon kehittyminen on vaikeaa suurimmalle osalle, vaikka harjoittelua olisi jatkettu jo vuosien ajan. Koska lapsilla, joilla on kielellinen erityisvaikeus, on suurempi riski matematiikan oppimisvaikeuksiin, tulisi heidän matemaattisten

taitojensa arviointiin ja tukemiseen kiinnittää erityistä huomiota. Sen sijaan, että kiinnitettäisiin huomiota siihen, kuinka virheettömästi lapsi selviää tehtävistä, tulisi huomio kohdistaa lapsen tapaan toimia ongelmanratkaisutilanteissa: laskeeko lapsi sujuvasti ja käyttääkö hän tarkoituksenmukaisia strategioita. (Koponen 2008, 38–39, 41.)

Kielelliset vaikeudet voivat myös vaikeuttaa sujuvan laskutaidon saavuttamista (Koponen, Aunola, Ahonen & Nurmi 2007, 239). Lasten, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, on havaittu olevan myös heikkoja lukijoita (Geary ym. 2012; Jordan ym. 2003). Landerl ja Moll (2010, 293) havaitsivat matemaattisten oppimisvaikeuksien esiintyvän usein yhdessä lukemis- ja kirjoittamisvaikeuksien kanssa. Tutkimustulosten mukaan matemaattisen suoriutumisen ja luetun ymmärtämisen välillä on myös vahva yhteys (Lerikkanen ym. 2005). Lerkkasen ym. (2005, 131) tutkimuksessa havaittiin, että matemaattiset taidot ennustavat myöhempää luetun ymmärtämisen taitoa ensimmäisen kouluvuoden aikana, kun taas päinvastaista vaikutusta ei näyttäisi olevan. Tämä tulos tukee sitä ajatusta, että lasten matemaattisiin taitoihin tulisi kiinnittää enemmän huomiota koulun alkuvaiheessa.

Räsänen (1999) mukaan matematiikkaa voidaan lähestyä yleisemmän kielen sisällä olevana kielenä, jolla on osittain oma kielioppinsa, sanastonsa ja merkitysoppinsa. Huomionarvoista on se, ettei matemaattinen ongelmanratkaisuprosessi ole itsessään luonteeltaan kielellinen, vaikkakin kielelliset vaikeudet näyttäytyvät usein ongelmanratkaisutehtävissä. Koulumatematiikassa käytetään paljon sanallisia tehtäviä, jotka edellyttävät kielellistä ymmärrystä. Useimmat matemaattiset ongelmanratkaisumallit olisi kuitenkin mahdollista hahmottaa ja ratkaista ei-kielellisten rakenteiden ja suhdemielikuvien avulla. (Räsänen 1999, 354.)

Butterworth (2005, 5) esittää, että aritmeettisten taitojen saavuttamisen taustalla tai niiden mahdollistajina on perustavanlaatuisia kognitiivisia kykyjä, jotka eivät ole varsinaisesti lukuihin tai lukumääriin liittyviä. Tällaisia Butterworth (2005) luettelee eri tutkijoihin viitaten olevan kielellisten taitojen lisäksi työmuisti ja avaruudellinen ajattelu. Erityisesti ongelmanratkaisua vaativien matemaattisten tehtävien

suorittamisessa tarvitaan avaruudellista ajattelukykyä sekä kykyä muuttaa sanalliset ongelmat yhtälöiksi ja ymmärtää milloin mitään yhtälöä tarvitaan (Geary 1995, 30). Vaikeudet asioiden mielessä pitämisessä ja tarkkaavaisuudessa vaikeuttavat päässä laskutaitojen kehittymistä ja erilaisten monivaiheisten laskustrategioiden suorittamista ja oppimista (Räsänen & Ahonen 2004, 292–293).

Aunola ym. (2004, 706, 709) selvittivät, missä määrin erilaiset kognitiiviset tekijät (lukujonotaidot, visuaalinen havaitseminen, metakognitiivinen tietoisuus, kuullun ymmärtäminen) ennustivat matemaattisen suoriutumisen tasoa ja kehityksen nopeutta. Tulokset osoittivat lukujonotaitojen, metakognitiivisen tietoisuuden ja kuullunymmärtämisen olevan yhteydessä matemaattisen suoriutumisen tasoon. Matemaattisen kehityksen nopeuteen puolestaan vaikuttivat lukujonotaitojen ja visuaalisen havaitsemisen taso. Aunolan ym. (2004) mukaan saadut tulokset viittaavat siihen, että metakognitiivinen tietoisuus ja kuullunymmärtäminen ovat ennemminkin tukena matemaattisten taitojen käytössä kuin uusien taitojen omaksumisessa.

Myös muisti ja matemaattiset taidot ovat tutkimusten mukaan yhteydessä toisiinsa. Geary ym. (2004) havaitsivat, että lapsilla, joilla oli oppimisvaikeuksia matematiikassa, oli heikkoutta työmuistissa. Hyvä suoriutuminen työmuistia mittaavassa tehtävässä oli myös yhteydessä vähäisempään sormien avulla laskemiseen ja virheiden tekemiseen laskutehtävissä. Tuoreessa tutkimuksessaan Geary ym. (2012, 216) selvittivät erilaisten kognitiivisten taitojen yhteyksiä matematiikan osaamiseen tyypillisesti ja heikosti suoriutuvien sekä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavien lasten välillä. Tyypillisesti suoriutuvien ryhmä menestyi merkitsevästi paremmin työmuistia mittaavissa tehtävissä kuin ryhmä, jossa lapsilla oli matemaattisia oppimisvaikeuksia. Tutkiessaan lasten taitojen kehittymistä esiopetuksesta neljänteen luokkaan Koponen ym. (2007, 236) havaitsivat nopean nimeämisen ja laskutaidon korreloivan keskenään: mitä nopeampaa sarjallinen nimeäminen oli, sitä sujuvampaa oli laskeminen yksinumeroisilla luvuilla. Heidän mukaansa yhtenä selityksenä tälle voi olla se, että sekä nopea nimeäminen että sujuva laskutaito edellyttävät nopeaa tietojen ja asioiden mieleen palauttamista

muistista. Fazion (1999, 421) tutkimuksessa kielellisten vaikeuksien lisäksi esiintyneet muistiongelmat viivästyttivät lasten uusien asioiden ulkooppimista kuten yksinkertaisten matemaattisten faktojen muistamista. Räsänen ja Ahosen (2004, 292–293) mukaan erilaiset kielelliset vaikeudet heikentävät lapsen kykyä painaa ja palauttaa mieleen kielellisessä muodossa olevia matemaattisia sisältöjä.

3 TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tutkimuksen tarkoituksena oli tarkastella lasten matemaattisten taitojen kehittymistä esiopetuksesta neljännelle luokalle. Keskeinen tarkastelun kohde oli aritmeettiset taidot (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskua edustavien peruslaskutehtävien ratkaiseminen aikarajoitetussa tehtävässä). Lisäksi analyyseissa tarkasteltiin aritmeettisten taitojen yhteyttä muihin matematiikan taitoalueisiin (lukujonotaidot, lukujen nimeäminen, aritmeettinen päättely, kertolaskujen automatisoituminen). Toisen luokan aritmeettisten taitojen perusteella lapset jaettiin kolmeen alaryhmään (heikot taidot, keskitasoiset taidot ja hyvät taidot). Tarkempina tutkimuskysymyksinä olivat seuraavat:

1. Missä määrin 2. luokan aritmetiikan taitojen perusteella tunnistetut alaryhmät olivat eronneet toisistaan esiopetusvuoden ja 1. luokan aritmetiikassa ja muilla matematiikan taitoalueilla? Missä määrin alaryhmät erosivat edelleen 3. ja 4. luokalla aritmetiikassa ja muilla matematiikan taitoalueilla? Olivatko ryhmien väliset erot pysyviä?
2. Missä määrin aritmetiikan taidoissa oli sukupuolten välisiä eroja 2. luokalla?
3. Missä määrin eri matematiikan taitoalueet (lukujonotaidot, lukujen nimeäminen, aritmetiikka, aritmeettinen päättely, kertolaskujen automatisoituminen) olivat yhteydessä toisiinsa samanaikaisesti ja muissa ikävaiheissa?

4 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tutkimusaineisto on osa Alkuportaatt-seurantatutkimusta (Lapset, vanhemmat ja opettajat yhteistyössä koulutien alussa). Alkuportaatt-tutkimus sisältyi osahankkeena Jyväskylän yliopistossa toimineeseen Suomen Akatemian Oppimisen ja motivaation huippututkimusyksikköön (2006–2011). Huippututkimusyksikköä johtivat psykologian professorit Jari-Erik Nurmi ja Heikki Lyytinen, ja siinä oli mukana tutkijoita useista yliopistoista (Jyväskylä, Turku ja Itä-Suomi) sekä eri laitoksilta. Alkuportaatt-tutkimuksessa selvitettiin lasten taitojen ja motivaation kehitystä esiopetusvuoden alusta neljännen luokan loppuun, opettajien käsityksiä lasten oppimisesta, heidän opetuskäytänteitään ja -tavoitteitaan sekä vanhempien kanssa tehtävää yhteistyötä. Lisäksi tutkimuksessa selvitettiin vanhempien kasvatuskäytänteitä ja näkemyksiä lasten oppimisesta sekä koulun ja päiväkodin kanssa tehtävään yhteistyöhön liittyviä odotuksia ja kokemuksia. Tutkimusmenetelminä käytettiin lasten yksilö- ja ryhmätestejä, haastatteluja ja havainnoiteja sekä vanhemmille ja opettajille suunnattuja kyselyjä.

4.1 Tutkittavat

Alkuportaatt-seurantaan osallistui vuonna 2000 syntyneiden lasten koko ikäluokka Kuopiosta, Laukaasta ja Joensuusta sekä noin puolet Turun ikäluokasta, yhteensä noin 2000 lasta. Lapset osallistuivat tutkimuksiin esiopetusvuoden ja ensimmäisen luokan syksyllä ja keväällä sekä toisen, kolmannen ja neljännen luokan keväällä.

Esiopetusvuoden keväällä kaikki lapset osallistuivat sekä esiopetusryhmässä tutkijan teettämiin ryhmätesteihin että tutkijan kanssa kahden kesken tehtyihin yksilötesteihin. Ensimmäisen luokan syksyllä osa lapsista valittiin niin sanottuun tarkennettuun yksilöseurantaan ja näille lapsille tehtiin ryhmätestien lisäksi myös yksilötestejä. Yksilöseurantaan valittiin lapsia, joilla esiopetusvuoden keväällä

kerättyjen tietojen perusteella tunnistettiin riski lukemisen ja kirjoittamisen vaikeuksiin (riskiotos) ja suunnilleen samankokoinen otos lapsia, jotka arvottiin niiden lasten joukosta, joilla ei täyttynyt mikään riskikriteereistä (verrokkiotos). Riskiotoksen valinnan kriteerit perustuivat kolmeen esiopetusvuoden keväällä tehtyyn tehtävään (kirjainten nimeäminen, äännetietoisuus, nopea sarjallinen nimeäminen) ja niissä asetettuun riskirajaan. Seurantatutkimuksessa riskiotoksen valintakriteereitä olivat seuraavat: 1) riskiraja täyttyi kolmessa tehtävässä tai 2) riskiraja täyttyi kahdessa tehtävässä tai 3) riskiraja täyttyi yhdessä tehtävässä ja sen ohella lapsen vanhempi oli itsearvioinneissa ilmaissut, että hänellä on ollut tai hänellä on edelleen vähintään ”lieviä pulmia” lukemisessa. Tehtävissä riskirajaksi asetettiin se, että lapsen suoritus kyseisessä testissä sijoittui heikoimman 15 persentiilin joukkoon, toisin sanoen lapsen pistemäärä oli yhtä heikko tai heikompi kuin verrokkiryhmän lasten heikoimpien 15 %:n joukossa.

Tämän tutkimuksen analyyseissa käytettiin tarkennetun yksilöseurannan otosta, koska osa matemaattisia taitoja mittaavista tehtävistä tehtiin vain yksilöttestinä. Näin mahdollistui samojen lasten suoriutumisen tarkastelu ja vertailu eri tehtävien välillä. Analyyseissa olivat mukana yleisopetukseen osallistuneet lapset (joista osa sai osaa- aikaista erityisopetusta), sen sijaan erityisluokilla opiskelevat oppilaat eivät olleet analyyseissa mukana. On kuitenkin huomattava, että yksilöseurannan otos ei ole sellaisenaan edustava kuvaamaan yleisesti tämänikäisten lasten taitotasoa, koska se sisältää suhteellisesti tavallista suuremman määrän lapsia, joilla on oppimisen riskejä (noin puolet tarkennettuun seurantaan valituista lapsista). Analysoitavassa otoksessa 209 lapsella oli tunnistettu riski lukemisvaikeuksiin esiopetusvuoden tehtävien perusteella (ks. yllä), 285 lapsella ei ollut tunnistettu vastaavaa riskiä. Analyyseissa oli mukana maksimissaan 494 lasta, joista tyttöjä oli 232 ja poikia 262. Otoskoko vaihteli muuttujakohtaisesti johtuen satunnaisista puuttuvista tiedoista (esim. seurantalapsen poismuuton takia) tai ryhmissä tapahtuneista muutoksista.

4.2 Menetelmät

Alkuportaat-tutkimuksessa käytettiin matemaattisten taitojen mittaamiseen sekä ryhmä- että yksilötestejä. Mitattuja taitoalueita olivat lukujonotaidot, lukujen nimeäminen, aritmetiikka, aritmeettinen päättely ja kertotaulut. Osa tehtävistä oli aikarajoitettuja, jotta voitiin arvioida peruslaskutehtävien ratkaisemisen sujuvuutta ja automatisoituneisuutta. Seuraavaksi esitellään tarkemmat kuvaukset matemaattisten taitojen arvioinnissa käytetyistä testeistä.

Lukujonotaidot. Lasten lukujonotaitoja arvioitiin lukujonojen jatkamisen testillä (vrt. Salonen ym. 1994) esiopetusvuoden syksyllä ja keväällä, ensimmäisen luokan syksyllä ja keväällä sekä toisella, kolmannella ja neljännellä luokalla yksilötilanteessa. Esiopetusvuoden tehtävässä lukujonotaitoja arvioitiin neljällä osiolla. Lasta pyydettiin luettelemaan lukuja ääneen eteenpäin (tehtävät 1 ja 4: lukujen luetteleminen 1:stä 31:een ja 6:sta 13:een) ja taaksepäin (tehtävät 2 ja 3: lukujen luetteleminen 12:sta 7:ään ja 23:sta 18:aan) tietystä luvusta annettuun lukuun. Kolmas tehtävä tehtiin lapsen kanssa vain siinä tapauksessa, että tämä oli suoriutunut tehtävästä 2. Ensimmäisestä luokasta lähtien testi koostui 7 tehtävästä, joissa lukuja pyydettiin luettelemaan eteenpäin (1:stä 51:een, 6:sta 13:een, 18:sta 25:een) ja taaksepäin (12:sta 7:ään, 23:sta 18:aan, 33:sta 17:ään, 23:sta viisi lukua taaksepäin) tietystä luvusta annettuun lukuun. Osiot pisteytettiin kolmiportaisesti siten, että täysin virheettömästä vastauksesta lapsi sai 2 pistettä. 1 piste annettiin vastauksesta, jossa oli 1–2 huolimattomuusvirhettä ja 0 pistettä silloin, kun luettelemisessa oli enemmän kuin 2 virhettä tai lapsi ei osannut luetella lukuja loppuun asti. Maksimipistemäärä oli esiopetusvuonna 8 pistettä ja ensimmäisestä luokasta lähtien 14 pistettä.

Lukujen nimeäminen. Lukujen nimeämistä arvioitiin yksilötilanteessa ensimmäisen luokan syksyllä ja keväällä sekä toisen, kolmannen ja neljännen luokan keväällä. Lapselle näytettiin ärsykesivulta lukuja yksi kerrallaan ja lasta pyydettiin sanomaan ääneen, mikä luku on kyseessä. Tutkija kirjasi ylös lapsen vastauksen oikeellisuuden

sekä mahdolliset virheelliset vastaukset. Tehtävä keskeytettiin kahden peräkkäisen virheellisen tai en tiedä vastauksen jälkeen. Lapsi sai yhden pisteen jokaisesta oikein sanotusta luvusta (maksimi 12 pistettä). Jos lapsi korjasi vastauksen spontaanisti, hyväksyttiin vastaus oikeaksi.

Aritmetiikka. Laskutaitoa arvioitiin esiopetusvuoden keväällä yksilötestinä ja ensimmäisen, toisen, kolmannen ja neljännen luokan keväällä ryhmätestinä (Räsänen & Aunola 2007). Toiselle luokalle saakka ennen varsinaisia laskutehtäviä tehtiin kolme osiota, jotka sisälsivät kuvallisesti esitettyjä esineiden laskemistehtäviä. Aritmetiikka-testi sisälsi numeroin esitettyjä kokonaislukulaskuja (28 osiota), joiden ratkaisemisessa oli 3 minuutin aikaraja. Lapselle annettiin seuraava ohjeistus: ”*Jatka eteenpäin ja tee niin monta tehtävää kuin osaat. Jos et osaa jotain tehtävää, siirry seuraavaan*”. Tehtäväosiot koostuivat esiopetuksesta 3. luokkaan saakka yhteenlaskuista (esim. $8 + 6 = x$; $527 + 31 = x$) ja vähennyslaskuista (esim. $15 - x = 9$; $2356 - 867 = x$) ja 4. luokalla niiden lisäksi oli 2 jakolaskua (esim. $240 : 8 = x$) ja 1 kertolasku ($12 \times 28 = x$). Lomakkeella lasta ohjeistettiin etenemään vuorotellen yhteen- ja vähennyslaskujen välillä. Tehtäväosioiden laadinnassa hyödynnettiin aiemmin JEPS-tutkimuksessa (Nurmi & Aunola 1999–2009) käytettyjä osiota. Neljännellä luokalla testin vaikeusastetta lisättiin siten, että helpoimmat kuusi osiota, joissa oikeellisuusprosentti oli ollut yli 95 %, poistettiin. Testin loppuun lisättiin uudet kuusi kokonaislukuja sisältävää osiota JEPS-tutkimuksen vastaavasta testistä siten, että osioiden joukossa oli myös kerto- ja jakolaskuja.

Aritmeettinen päättely. Aritmeettisen päättelyn arvioinnissa käytettiin ryhmätestiä toisen, kolmannen ja neljännen luokan keväällä (Koponen & Räsänen 2003). Aritmeettisen päättelyn tehtävässä lasten tuli jatkaa lukusarjaa. Kunkin osion vasemmassa reunassa oli kolme lukua ja niiden jälkeen paikka neljännelle luvulle. Oikealla puolella oli laatikoissa neljä lukua, joista vain yksi sopi jatkamaan neljän luvun aloittamaa sarjaa. Lapsen tehtävänä oli ympyröidä se luku, mikä sopi parhaiten jatkamaan kolmen luvun aloittamaa sarjaa. Testiosioita edelsi neljä esimerkkitehtävää. Tehtävässä oli 10 minuutin aikaraja. Lapsi sai yhden pisteen oikeasta vastauksesta (maksimi 30 pistettä).

Kertotaulu. Lasten kertolaskutaitoja mitattiin neljännen luokan keväällä ryhmätестillä (Koponen & Mononen 2010). Tehtävävihkon etusivulla oli esimerkkilaskuja ja kahdella tehtävisivulla oli kolme 20 laskun saraketta, eli yhteensä 120 kertolaskutehtävää. Sekä kerrottava että kertoja olivat yksinumeroisia lukuja 2–9 (esim. $5 \times 6 = \underline{\quad}$). Lapsia ohjeistettiin laskemaan laskut omaan tahtiin mahdollisimman nopeasti ja tarkasti ja kirjoittamaan vastaus tehtävän viereen. Lasta kehoitettiin etenemään sarake kerrallaan ylhäältä alas, aloittaen sivun vasemmanpuoleisesta sarakkeesta ja siirtymään seuraavalle sivulle, kun oli ehtinyt laskea ensimmäisen sivun laskut. Jos lapsi kirjasi väärän vastauksen, ohjeistettiin häntä viivaamaan väärä vastaus yli ja kirjoittamaan oikea vastaus väärän vastauksen viereen. Aikaa tehtävän tekemiseen oli 2 minuuttia. Lapsi sai yhden pisteen oikeasta vastauksesta (maksimipistemäärä 120).

4.3 Aineiston analyysi

Aineiston tilastolliset analyysit toteutettiin SPSS-ohjelman avulla. Tehtävien jakaumien ja tunnuslukujen kuvailevassa tarkastelussa käytettiin keskiarvoja ja keskihajontoja. Aritmeettinen keskiarvo kertoo muuttujan keskimääräisen arvon eli sen, minkä suuruisia muuttujan havaintoarvot suunnilleen ovat. (Metsämuuronen 2005, 325; Nummenmaa 2009, 64.) Keskiarvosta yksinään ei kuitenkaan tule tehdä päätelmiä tutkittavasta jakaumasta, koska hyvinkin erimuotoisilla jakaumilla voi olla sama keskiarvo. Aritmeettinen keskiarvo on hyvin herkkä poikkeaville havainnoille, jotka saattavat korottaa tai laskea keskiarvoa huomattavasti. (Nummenmaa 2009, 65.) Tämän takia on tarpeellista esittää myös muuttujien keskihajonnat. Keskihajonta kuvaa muuttujan arvojen jakautumista keskiarvon ympärille. Sen avulla pyritään siis kuvaamaan, kuinka paljon yksilöiden välistä vaihtelua mitattavassa ominaisuudessa on havaittavissa. (Nummenmaa 2009, 66.)

Tutkimusjoukosta erotettujen alaryhmien eroja eri matematiikan taitoalueilla ja eri ikävaiheissa analysoitiin käyttäen yksisuuntaista varianssianalyysia (Oneway

ANOVA). Varianssianalyysin avulla voidaan selvittää poikkeavatko kahden tai useamman muuttujan keskiarvot toisistaan tilastollisesti merkitsevästi. Varianssianalyysissa lasketaan niin sanottu Fisherin F-suhde, joka ilmoittaa, kuinka paljon mittaustuloksissa on riippumattoman muuttujan aiheuttamaa vaihtelua. (Nummenmaa 2009, 186, 191, 194.) Varianssianalyysi ei vielä kerro, mitkä ryhmät poikkeavat toisistaan. Ryhmien parivertailujen (Post Hoc -testaus) avulla selvitettiin, mitkä ryhmät eroavat toisistaan tilastollisesti merkitsevästi. (Nummenmaa 2009, 205, 207.)

Sukupuolen yhteyttä alaryhmiin jakautumiseen vertailtiin χ^2 -riippumattomuustestillä. Kyseinen testi mittaa kahden muuttujan välistä riippumattomuutta (Metsämuuronen 2005, 333) eli sitä, riippuuko toisen muuttujan arvojen jakautuminen jostain toisesta muuttujasta (Nummenmaa 2009, 306). Tilastollisen merkitsevyyden arvioinnissa käytettiin sovitettuja jäännöksiä (adjusted residuals), jotka ilmoittavat, missä kohdin jakaumat poikkeavat odotusarvoista eli missä kohdin ryhmät eroavat toisistaan tilastollisesti merkitsevästi. Sovitetun jäännöksen ollessa suurempi kuin 2 tai pienempi kuin -2, kyseisen muuttujan tulkitaan vaikuttavan merkitsevästi testimuuttujan arvojen vaihteluun eli muuttujat ovat riippuvaisia toisistaan. Tässä tutkimuksessa χ^2 -riippumattomuustestillä mitattiin sitä, oliko sukupuolella yhteyttä siihen, miten lapset jakaantuivat kolmeen alaryhmään. Tyttöjen ja poikien keskiarvojen eroja eri alaryhmissä tarkasteltiin riippumattomien otosten t-testillä. T-testin avulla voidaan arvioida, ovatko kahden ryhmän keskiarvot erilaisia, kun hajonnat ja keskiarvon keskivirheet otetaan huomioon. (Nummenmaa 2009, 172.)

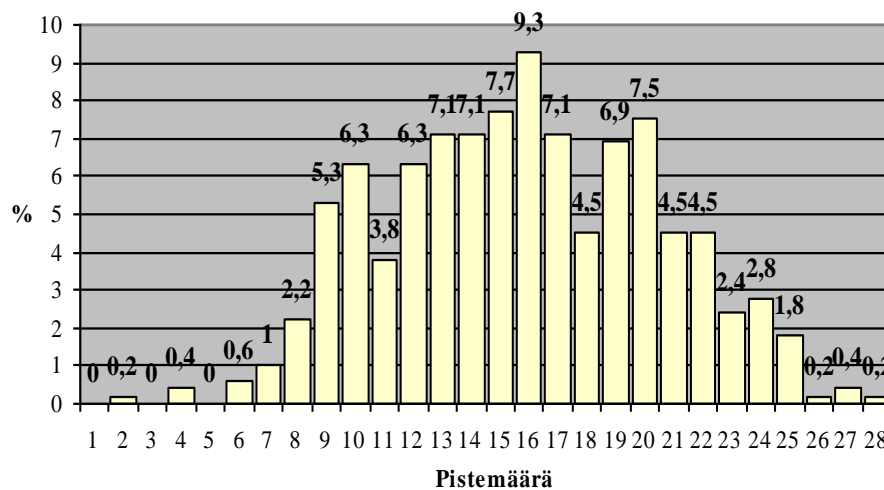
Matemaattisten taitoalueiden yhteyksiä toisiinsa samassa ikävaiheessa ja eri ikävaiheiden välillä analysoitiin Spearmanin järjestyskorrelaatiokertoimen avulla. Spearmanin järjestyskorrelaatiokertoimella kuvataan kahden muuttujan välistä riippuvuutta (Metsämuuronen 2005, 341). Järjestyskorrelaatiokerroin mittaa sitä, kuinka samanlainen havaintojen järjestys on kahdella muuttujalla (Nummenmaa 2009, 283). Korrelaatiokerroin voi saada arvoja välillä -1 – 1 (Metsämuuronen 2005, 345). Mitä lähempänä nollaa korrelaatiokertoimen arvo on, sitä vähemmän muuttujien välillä on yhteyttä. Korrelaatiokertoimen merkitsevyys riippuu

korrelaation suuruuden lisäksi otoskoosta. Jos otoskoko on pieni, suurikaan korrelaatio ei välttämättä ole tilastollisesti merkitsevä. Toisaalta, jos otoskoko on suuri, voi pienikin korrelaatio olla tilastollisesti merkitsevä. (Metsämuuronen 2005, 347.)

5 TULOKSET

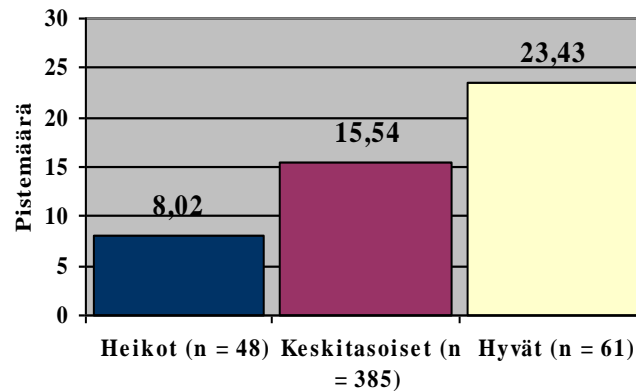
5.1 Alaryhmien tunnistaminen ja kuvailu

Tutkimuksen yksilö- ja ryhmätesteihin osallistuneiden yleisopetuksen luokalla opiskelevien lasten joukosta (n = 494) erotettiin kolme alaryhmää toisen luokan aritmetiikan tehtävässä suoriutumisen perusteella. Tehtävä oli laskutehtävien oikeaa suoritusta (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja) ja automatisoitumista edellyttävä tehtävä. Taitotaso katsottiin heikoksi, jos lapsen suoritus kyseisessä testissä sijoittui heikoimman 10 prosentin joukkoon (pistemäärä 9 tai alle). Hyvät taidot arvioitiin olevan lapsilla, joiden suoritus sijoittui parhaiden 10 prosentin joukkoon (pistemäärä 22 tai enemmän). Lapset sijoituivat keskitasoisten ryhmään silloin, kun pistemäärä vaihteli välillä 10–21.



KUVIO 1. Jakauma lasten suoriutumisesta 2. luokan aritmetiikan tehtävässä

Taidoiltaan heikkojen alaryhmässä lasten (n = 48, 9,7 %) keskiarvo oli 8.02 (sd = 1.54; vaihteluväli 2–9)(ks. Kuvio 2). Keskitasoisten alaryhmässä (n = 385, 78 %) keskiarvo oli 15.54 (sd = 3.26; vaihteluväli 10–21). Taidoiltaan hyvien alaryhmässä (n = 61, 12,3 %) keskiarvo oli 23.43 (sd = 1.45; vaihteluväli 22–28 pistettä).



KUVIO 2. Alaryhmien keskiarvot aritmetiikan tehtävässä 2. luokalla

5.2 Alaryhmien väliset erot aritmetiikassa ja muilla matematiikan taitoalueilla

Toisen luokan aritmeettisten taitojen perusteella tunnistettujen alaryhmien eroja esiopetusvuoden ja 1.–4. luokan matemaattisissa taidoissa tarkasteltiin yksisuuntaisen varianssianalyysin avulla. Taulukossa 1 on kuvattu alaryhmien keskiarvot, keskihajonnat ja yksisuuntaisella varianssianalyysillä toteutettujen keskiarvovertailujen tulokset lukujonotaidoissa, lukujen nimeämisessä, aritmetiikassa, aritmeettisessä päättelyssä ja kertolaskuissa.

Lukujonotaidoissa alaryhmien väliset erot olivat tilastollisesti merkitseviä esiopetuksessa sekä 1. ja 3. luokalla. Sen sijaan 2. ja 4. luokalla heikkojen ja keskitasoisten välillä ei ollut tilastollisesti merkitsevää eroa lukujonotaidoissa, mutta molemmat erosivat hyvien ryhmästä tilastollisesti merkitsevästi. *Lukujen nimeämisen taidoissa* kaikkien alaryhmien välillä oli tilastollisesti merkitsevä ero 1. ja 2. luokalla, kun taas 3. ja 4. luokalla heikkojen ja keskitasoisten välillä ero ei ollut tilastollisesti merkitsevä.

Aritmetiikan taidoissa erot eri alaryhmien välillä olivat tilastollisesti merkitseviä koko tarkastelujakson ajan eli esiopetusvuoden keväästä 4. luokan kevääseen asti. *Aritmeettista päättelyä* mitattiin 2. luokan keväästä alkaen. Alaryhmien väliset erot olivat kyseisessä tehtävässä tilastollisesti merkitseviä kaikilla mittauskerroilla.

Alaryhmien välisten erojen havaittiin olevan tilastollisesti merkitseviä myös *kertolaskutehtävissä* 4. luokalla.

TAULUKKO 1. Toisen luokan aritmeettisissa taidoissaan heikkojen, keskitasoisten ja hyvien alaryhmään kuuluvien lasten vertailu matemaattisissa tehtävissä esiopetusvuonna sekä luokilla 1.–4.

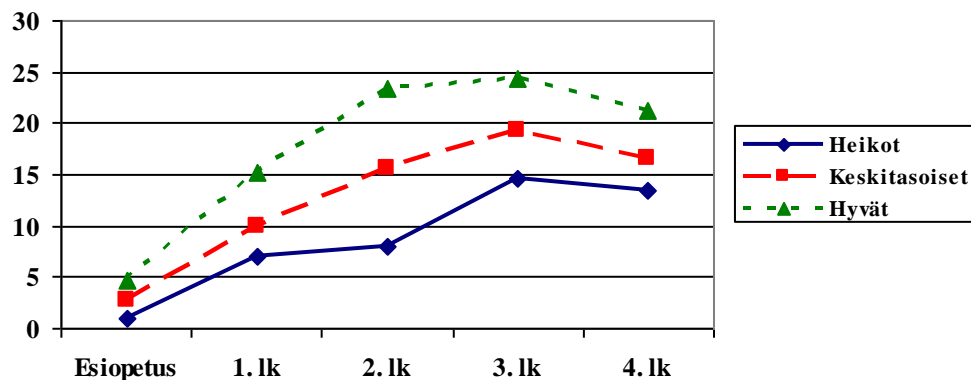
	Heikot (n = 43–48)	Keskitasoiset (n = 368–385)	Hyvät (n = 56–61)	
Matemaattiset taidot	Ka (sd)	Ka (sd)	Ka (sd)	F
Esiopetus				
Lukujonotaidot (kevät)	4.27 (2.46) ^a	5.69 (2.29) ^b	7.42 (1.08) ^c	28.36***
Aritmetiikka	0.91 (1.02) ^a	2.65 (1.85) ^b	4.68 (2.39) ^c	53.79***
1. luokka				
Lukujonotaidot (kevät)	7.57 (2.69) ^a	10.39 (2.41) ^b	11.48 (2.08) ^c	37.76***
Lukujen nimeäminen	5.83 (1.52) ^a	7.12 (1.86) ^b	9.48 (1.88) ^c	59.28***
Aritmetiikka	6.94 (2.68) ^a	9.85 (3.45) ^b	15.28 (3.95) ^c	88.99***
2. luokka				
Lukujonotaidot	10.94 (2.02) ^a	11.54 (1.96) ^a	12.54 (1.32) ^b	10.66***
Lukujen nimeäminen	8.31 (1.69) ^a	8.92 (1.54) ^b	10.39 (1.67) ^c	28.88***
Aritmetiikka*	8.02 (1.54) ^a	15.54 (3.26) ^b	23.43 (1.45) ^c	369.43***
Aritmeettinen päättely	10.33 (3.14) ^a	14.07 (3.50) ^b	17.84 (2.84) ^c	66.47***
3. luokka				
Lukujonotaidot	11.47 (2.01) ^a	12.23 (1.53) ^b	12.88 (1.21) ^c	10.90***
Lukujen nimeäminen	9.70 (1.52) ^a	10.04 (1.44) ^a	11.15 (0.98) ^b	18.64***
Aritmetiikka	14.66 (3.61) ^a	19.24 (4.0) ^b	24.33 (2.23) ^c	88.01***
Aritmeettinen päättely	12.94 (3.01) ^a	15.77 (3.46) ^b	19.70 (3.92) ^c	52.93***
4. luokka				
Lukujonotaidot	12.02 (1.77) ^a	12.55 (1.42) ^a	13.18 (1.01) ^b	8.49***
Lukujen nimeäminen	10.52 (1.29) ^a	10.90 (1.26) ^a	11.63 (0.78) ^b	11.71***
Aritmetiikka	13.36 (3.21) ^a	16.63 (3.52) ^b	21.18 (2.55) ^c	69.60***
Aritmeettinen päättely	14.66 (3.86) ^a	17.35 (3.53) ^b	21.57 (3.28) ^c	51.68***
Kertolaskut	17.91 (9.00) ^a	22.57 (9.15) ^b	37.46 (13.84) ^c	65.02***

^{abc}ryhmät, jotka on merkitty eri yläindeksillä eroavat toisistaan tilastollisesti merkitsevästi .05 tasolla

* kriteerimuuttuja

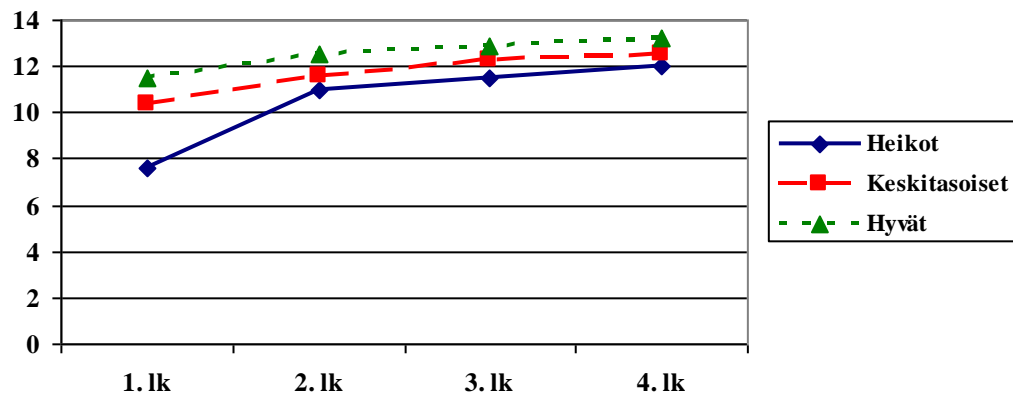
*** p < .001

Alla olevien kuvioden (kuviot 3, 4, 5 ja 6) avulla havainnollistetaan taitojen kehitystä alaryhmissä. Toisen luokan aritmetiikan tehtävän perusteella tunnistettujen alaryhmien väliset erot ilmenivät jo 1. luokalla sekä seuraavissa ikävaiheissa 3. ja 4. luokalla siten, että kaikkien ryhmien keskiarvot erosivat toisistaan (ks. kuvio 3). Taitojen kehitys oli nousevaa kaikissa alaryhmissä 3. luokkaan asti. Sen jälkeen kuviossa ilmenevä laskeva trendi johtuu siitä, että 4. luokalla tehtävää vaikeutettiin jättämällä pois helpoimpia osioita ja lisäämällä tilalle haastavampia.



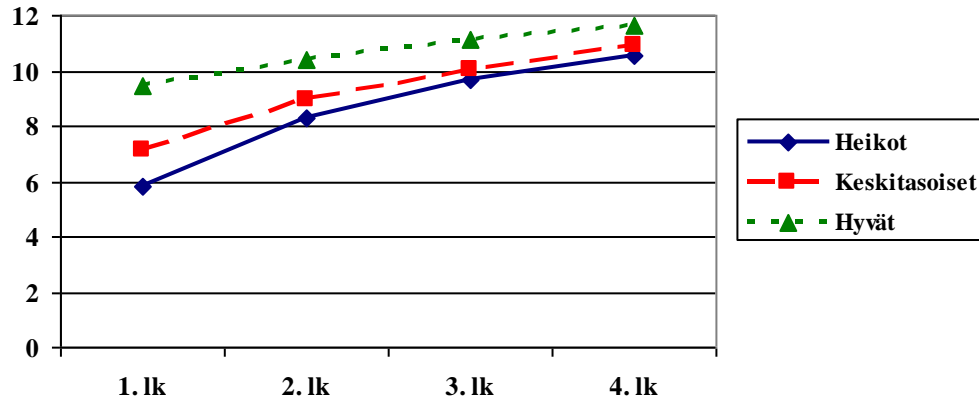
KUVIO 3. Aritmetiikka (maksimi 28 pistettä)

Lukujonotaitojen kehityksen suhteen (ks. kuvio 4) alaryhmien väliset erot olivat suurimmillaan 1. luokalla. Kaikkien alaryhmien keskiarvot olivat 4. luokkaan mennessä nousseet tehtävän maksimipistemäärään tai lähelle sitä ja tilastollisesti merkitsevää eroa ei enää ollut keskitasoisten ja heikkojen välillä.



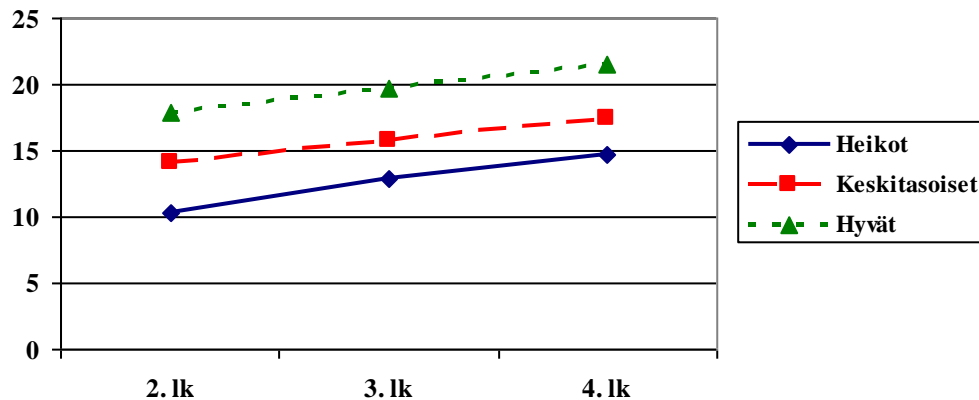
KUVIO 4. Lukujonotaidot (maksimi 14 pistettä)

Lukujen nimeämisessä kehitys oli nousevaa kaikissa alaryhmissä (ks. kuvio 5). Vain 1. luokalla kaikkien ryhmien keskiarvot erosivat toisistaan ja tämän jälkeen vain hyvien ryhmä erottui muista ryhmistä. Kaikkien alaryhmien keskiarvot olivat 4. luokalla lähellä tehtävän maksimipistemäärää.



KUVIO 5. Lukujen nimeäminen (maksimi 12 pistettä)

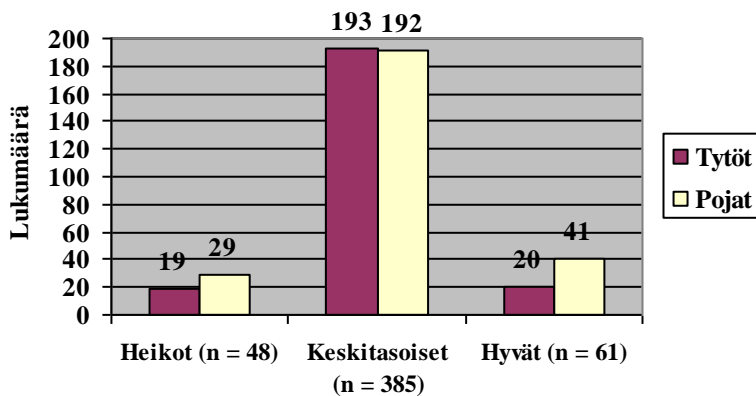
Aritmeettisen päättelyn taidoissa oli tasaista kehitystä (ks. kuvio 6). Tehtävä toteutettiin ensimmäisen kerran 2. luokalla. Alaryhmien väliset erot olivat pysyviä (tilastollisesti merkitsevä ero jokaisen ryhmän välillä) koko tarkasteluvälin ajan.



KUVIO 6. Aritmeettinen päättely (maksimi 30 pistettä)

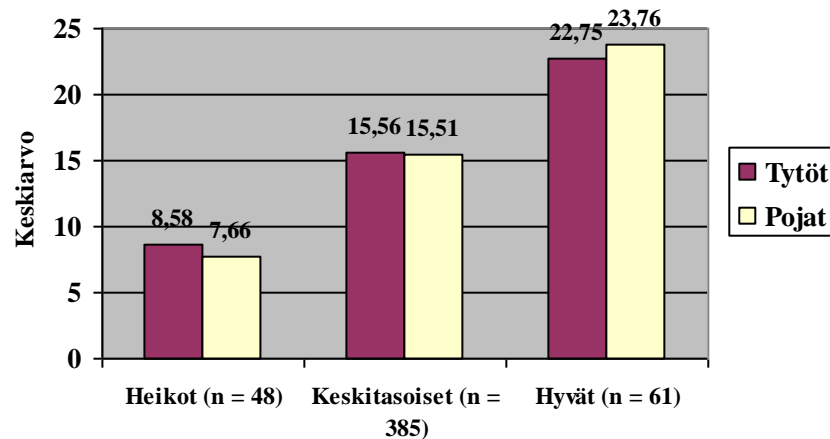
5.3 Sukupuolten väliset erot aritmetiikan taidoissa 2. luokalla

Sukupuolijakauma alaryhmissä. Tyttöjen ja poikien osuus keskitasoisten alaryhmässä oli tasainen (tytöt: n = 193, pojat: n = 192). Poikien osuus oli sen sijaan tyttöjen osuutta jossain määrin suurempi sekä aritmetiikan taidoiltaan heikoimpien (tytöt: n = 19, pojat: n = 29) että parhaiden (tytöt: n = 20, pojat: n = 41) alaryhmissä (ks. kuvio 7). Ristiintaulukointi ja riippuvuuden testaus osoitti, että sukupuolen ja alaryhmiin kuulumisen välillä oli riippuvuutta ($\chi^2 = 7.52, p < .05$). Yli arvon 2 saava sovitettu jäännös viittasi siihen, että pojat olivat yliedustettuja hyvien alaryhmässä.



KUVIO 7. Sukupuolijakauma alaryhmissä 2. luokan aritmetiikan tehtävässä

Tyttöjen ja poikien taitoerot alaryhmissä. Vertailtaessa tyttöjen ja poikien keskiarvoeroja alaryhmittäin riippumattomien otosten t-testillä, havaittiin sukupuolten välisiä eroja sekä heikkojen että hyvien alaryhmissä (ks. kuvio 8). Heikkojen alaryhmässä tytöt (ka = 8.58, sd = 0.77) suoriutuivat poikia (ka = 7.66, sd = 1.80) tilastollisesti merkitsevästi paremmin 2. luokan aritmetiikan tehtävässä, $t(46) = 2.45, p < .05$. Hyvien alaryhmässä sen sijaan pojat (ka = 23.76, sd = 1.60) suoriutuivat tyttöjä (ka = 22.75, sd = 0.79) tilastollisesti merkitsevästi paremmin, $t(59) = -3.30, p < .01$. Keskitasoisten alaryhmässä tyttöjen (ka = 15.56, sd = 3.21) ja poikien (ka = 15.51, sd = 3.31) välillä ei havaittu eroa tehtävässä suoriutumisessa. Myöskään koko otosta kokonaisuutena tarkasteltaessa ei ilmennyt tilastollisesti merkitsevää eroa tyttöjen (n = 232, ka = 15.61, sd = 4.14) ja poikien (n = 262, ka = 15.93, sd = 5.11) suoriutumisessa.



KUVIO 8. Tyttöjen ja poikien aritmetiikan keskiarvot alaryhmissä 2. luokalla

5.4 Yhteydet matemaattisten taitojen välillä samassa ja eri ikävaiheissa

Yhteyksiä eri taidoissa suoriutumisessa sekä samassa ikävaiheessa että eri ikävaiheissa analysoitiin Spearmanin järjestyskorrelaatiokertoimen avulla. Useimmat yhteydet olivat tilastollisesti erittäin merkitseviä (ks. taulukko 2). Esiopetusvuoden kevään lukujonotaidot olivat vahvasti yhteydessä samaan aikaan mitattuihin aritmetiikan taitoihin sekä myöhempisiin aritmetiikan ja aritmeettisen päättelyn taitoihin. Lisäksi esiopetusvuoden lukujonotaidoilla oli vahva yhteys 1. luokan lukujen nimeämiseen. Yhteydet eri taitoalueiden välillä olivat samansuuntaisia myös 1. luokan lukujonotaitojen suhteen. Myöhemmin, luokilla 2–4, lukujonotaitojen yhteydet samanaikaisiin tai myöhempisiin matematiikan taitoihin olivat vähäisemmät, mihin vaikuttaa se, ettei tehtävä enää samalla tavalla erotellut lapsia kuin aiemmin. Lukujen nimeämisen havaittiin olevan tilastollisesti erittäin merkitsevästi yhteydessä esiopetuksen ja 1. luokan lukujonotaitojen lisäksi aritmetiikan ja aritmeettisen päättelyn taitoihin kaikissa ikävaiheissa.

Korrelaatioista vahvimpia olivat pysyvyyttä osoittavat eri ikävaiheiden aritmetiikan taitojen keskinäiset korrelaatiot. Lisäksi aritmetiikan taidot olivat kaikissa ikävaiheissa tilastollisesti erittäin merkitsevästi yhteydessä aritmeettisen päättelyn

taitoihin ja kertolaskutaitoihin. Korrelaatiot olivat sitä vahvempia, mitä lähempänä arvioinnin ajankohdat olivat toisiaan (esim. peräkkäisinä vuosina). Aiempien vuosien ja saman ikävaiheen (4. luokka) aritmetiikan taidot olivat vahvasti yhteydessä kertolaskutehtävässä suoriutumiseen.

TAULUKKO 2. Matemaattisten taitoalueiden yhteydet eri ikävaiheissa

	Esiopetus		1. luokka			2. luokka				3. luokka				4. luokka				
Matemaattiset taidot	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.
Esiopetus																		
1. Lukujonotaidot	1.00																	
2. Aritmetiikka	.53***	1.00																
1. luokka																		
3. Lukujonotaidot	.47***	.42***	1.00															
4. Lukujen nimeäminen	.51***	.51***	.43***	1.00														
5. Aritmetiikka	.39***	.49***	.40***	.45***	1.00													
2. luokka																		
6. Lukujonotaidot	.26***	.17***	.29***	.17***	.23***	1.00												
7. Lukujen nimeäminen	.34***	.32***	.25***	.62***	.33***	.19***	1.00											
8. Aritmetiikka	.45***	.49***	.45***	.50***	.67***	.28***	.38***	1.00										
9. Aritmeettinen päättely	.46***	.45***	.41***	.51***	.52***	.31***	.43***	.61***	1.00									
3. luokka																		
10. Lukujonotaidot	.23***	.17***	.20***	.18***	.18***	.25***	.13**	.19***	.16***	1.00								
11. Lukujen nimeäminen	.34***	.31***	.32***	.53***	.28***	.15**	.57***	.31***	.39***	.11*	1.00							
12. Aritmetiikka	.39***	.45***	.41***	.49***	.61***	.25***	.43***	.72***	.55***	.19***	.37***	1.00						
13. Aritmeettinen päättely	.39***	.40***	.34***	.58***	.48***	.23***	.41***	.52***	.57***	.24***	.34***	.60***	1.00					
4. luokka																		
14. Lukujonotaidot	.21***	.21***	.26***	.21***	.19***	.27***	.16**	.20***	.18***	.30***	.19***	.21***	.23***	1.00				
15. Lukujen nimeäminen	.33***	.30***	.32***	.49***	.25***	.12**	.41***	.30***	.36***	.17***	.52***	.35***	.36***	.18***	1.00			
16. Aritmetiikka	.37***	.42***	.44***	.50***	.59***	.25***	.38***	.69***	.52***	.16**	.37***	.76***	.57***	.21***	.31***	1.00		
17. Aritmeettinen päättely	.40***	.40***	.40***	.50***	.43***	.21***	.42***	.47***	.56***	.17***	.41***	.51***	.62***	.20***	.39***	.51***	1.00	
18. Kertolaskut	.29***	.31***	.27***	.29***	.45***	.23***	.25***	.53***	.35***	.18***	.20***	.53***	.36***	.12**	.20***	.56***	.31***	1.00

* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

6 POHDINTA

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää lasten matemaattisten taitojen kehittymistä esiopetuksesta neljännelle luokalle. Keskeisenä tarkastelun kohteena oli aritmeettiset taidot (peruslaskutehtävien ratkaiseminen aikarajoitetussa tehtävässä). Analyyseissa tarkasteltiin aritmeettisten taitojen yhteyttä muihin matematiikan taitoalueisiin (lukujonotaidot, lukujen nimeäminen, aritmeettinen päättely ja kertolaskujen automatisoituminen). Lisäksi tarkasteltiin sukupuolten välisiä eroja toisen luokan aritmeettisiä taitoja mittaavassa tehtävässä. Toisen luokan aritmeettisten taitojen perusteella lapset jaettiin kolmeen alaryhmään (heikot taidot, keskitasoiset taidot ja hyvät taidot). Alaryhmiä koskevissa analyyseissa selvitettiin, ilmenikö ryhmien välillä eroja eri ikävaiheissa ja eri matematiikan taitoalueilla ja olivatko erot pysyviä. Tutkimus on osa Alkuportaatt-tutkimusta.

6.1 Tulosten tarkastelua

Toisen luokan aritmetiikan tehtävän perusteella erotettiin seuraavat kolme alaryhmää: taidoiltaan heikot ($n = 48$, 9.7 %), keskitasoiset ($n = 385$, 78 %) ja hyvät ($n = 61$, 12.3 %). Näiden alaryhmien välisiä eroja tarkasteltiin matemaattisia taitoalueita arvioivissa tehtävissä esiopetusvuonna ja 1.–4. luokalla. Alaryhmien välillä havaittiin tilastollisesti merkitseviä eroja sekä aritmeettisiä taitoja mittaavassa tehtävässä että lukujonotaitoja, lukujen nimeämistä, aritmeettista päättelyä ja kertolaskujen automatisoituneisuutta mittaavissa tehtävissä. Tarkasteltaessa matematiikan taitoalueiden välisiä yhteyksiä korrelaatioanalyysin avulla havaittiin tilastollisesti erittäin merkitseviä yhteyksiä sekä saman ikävaiheen että eri ikävaiheiden taidoissa. Tyttöjen ja poikien matemaattisessa suoriutumisessa ei ollut tilastollisesti merkitsevää eroa koko otosta tarkasteltaessa. Kun sen sijaan tarkasteltiin keskiarvoeroja eri alaryhmissä, havaittiin, että pojat menestyivät tilastollisesti merkitsevästi paremmin hyvien alaryhmässä ja tytöt heikkojen

alaryhmässä. Seuraavaksi esitellään tarkemmin tämän tutkimuksen tuloksia ja tarkastellaan niitä suhteessa aiempiin tutkimustuloksiin.

Aritmetiikka. Aritmetiikan tehtävässä alaryhmien väliset erot olivat tilastollisesti merkitseviä koko tarkastelujakson ajan. Ryhmien väliset erot olivat suurimmillaan toisen luokan aritmeettisissa taidoissa, jonka perusteella alaryhmät oli eroteltu. Kolmannella ja neljännellä luokalla alaryhmien väliset keskiarvoerot pysyivät edelleen tilastollisesti erittäin merkitsevinä. Raakapistemäärien tasolla tarkasteltuna voidaan nähdä viitteitä mahdolliseen erojen vähenemiseen, mutta tämän todentaminen vaatisi muutoksen erillistä testausta standardoiduilla muuttujilla ja sen huomioon ottamista, että ryhmien väliset erot ovat luonnollisesti suuria ikävaiheessa ja mitassa, johon alaryhmittely perustuu.

Aunolan ym. (2004, 708) tutkimuksessa taitoerot aritmetiikassa kasvoivat kahden ensimmäisen kouluvuoden aikana. Geary ym. (2012, 213) havaitsivat lasten taitoerojen yhteenlaskutehtävissä tasoittuvan viidenteen luokkaan mennessä, kun taas toisentyyppisissä matematiikan tehtävissä taitoerot kasvoivat. Lasten suoriutumistaso voi vaihdella huomattavastikin eri tehtävien välillä (ks. esim. Jordan ym. 2009, 465). Tässä tutkimuksessa aritmeettisissa taidoissa tapahtui kehitystä kaikissa alaryhmissä ja erot alaryhmien välillä pysyivät tilastollisesti merkitsevinä. Lisäksi aritmetiikan tehtävässä suoriutumisessa oli vahvaa pysyvyyttä ikävaiheesta toiseen.

Myös aritmeettisen päättelyn tehtävässä kehitys kaikissa alaryhmissä oli tasaista ja alaryhmien väliset erot säilyivät. Nämä tulokset ovat samansuuntaisia aiempien tutkimusten kanssa, joissa matemaattisen taitotason ja yksilöllisten tasoerojen on havaittu olevan suhteellisen pysyviä (Aunola ym. 2004; Aunola ym. 2006; Lerkkanen ym. 2005).

Lukujonotaidot. Lukujonotaidoissa jo toisella luokalla alaryhmien keskiarvot olivat suhteellisen lähellä toisiaan. Lukujonotaidoissa havaittiinkin seurantajakson aikana niin sanottu kattoefekti eli taitojen kehittyessä tehtävän edellyttämät taidot hallittiin hyvin kaikissa alaryhmissä. Hyvien alaryhmä kuitenkin erosi heikkojen ja

keskitasoisten ryhmistä tilastollisesti merkitsevästi kaikkina mittausajankohtina. Sitä vastoin heikkojen ja keskitasoisten välillä ei ollut tilastollisesti merkitsevää eroa toisella ja neljännellä luokalla.

Monet lapset hallitsevat lukujen luettelon ja yksinkertaisen eteenpäin ja taaksepäin laskemisen jo kouluun tullessaan (Kinnunen ym. 1994, 66), sillä lukujonotaitojen varhainen pohja rakentuu paljon ennen kouluikää (ks. esim. Aunio ym. 2004, 203). Lukujonotaitojen yhteyttä muihin matematiikan taitoalueisiin tarkasteltaessa havaittiin, että esiopetusvuoden kevään lukujonotaidot olivat tilastollisesti erittäin merkitsevästi yhteydessä samaan aikaan mitattuihin aritmetiikan taitoihin sekä myöhempään aritmetiikan ja aritmeettisen päättelyn taitoihin ja 1. luokan lukujen nimeämiseen. Yhteydet eri taitoalueiden välillä olivat samansuuntaisia myös 1. luokan lukujonotaitojen suhteen. Nämä tulokset ovat samansuuntaisia aiempien tutkimustulosten kanssa, joiden mukaan lukujonotaidot ovat voimakkaasti yhteydessä myöhempään aritmeettisiin taitoihin (Hannula & Lepola 2006, 145) ja niiden on havaittu ennustavan matemaattisten taitojen kehitystä koulussa (Aunola ym. 2004, 708; Kinnunen 1994, 75). Sen sijaan alaryhmien välisiä eroja lukujonotaidon kehityksessä ei ole aiemmin juurikaan tarkasteltu.

Lukujen nimeäminen. Lukujen nimeämisessä kehitys oli nousevaa kaikissa alaryhmissä. Alaryhmien väliset erot olivat tilastollisesti merkitseviä ensimmäisellä ja toisella luokalla, mutta kolmannella ja neljännellä luokalla heikkojen ja keskitasoisten välillä ei ollut enää tilastollisesti merkitsevää eroa. Hyvien alaryhmä erosi muista ryhmistä kaikkina mittausajankohtina vaikkakin neljännellä luokalla kaikkien alaryhmien keskiarvot olivat lähellä tehtävän maksimipistemäärää. Lukujen nimeämistaidon varsin nopea kehitys viittaa siihen, että koulun matematiikan opetus tukee ymmärrystä lukujen paikka-arvoista eli siitä, mitä arvoa mikäkin numero luvussa edustaa (ks. Rittle-Johnson & Siegler 1998, 90). Tässä tutkimuksessa lukujen nimeämisen havaittiin olevan tilastollisesti erittäin merkitsevästi yhteydessä esiopetuksen ja 1. luokan lukujonotaitojen lisäksi aritmetiikan ja aritmeettisen päättelyn taitoihin kaikkina mittausajankohtina.

Kertotaulu. Kertolaskutehtävä oli osana taitojen arviointia ainoastaan neljännellä luokalla. Testissä menestyminen edellytti nopeaa kertotaulujen muistamista, koska testi oli aikarajoitettu. Erot tehtävässä menestymisessä olivat tilastollisesti merkitseviä alaryhmien välillä. Erot lasten välillä viittaavat siihen, että kertotaulutehtävistä (1-9 lukualueella) suoriutuminen ei ole kaikilla lapsilla vielä automatisoitunut tasolle, jolla lapsi kykenisi hakemaan vastaukset nopeasti muistista. Harjoittelun ja toistamisen myötä lapset oppivat pienellä lukualueella muistamaan yhteen- ja vähennyslaskujen sekä kerto- ja jakolaskujen tuloksia ulkoa, eikä vastauksia tarvitse tuottaa aritmeettisten operaatioiden avulla (Kinnunen ym. 1994, 60). Muistinvarainen ratkaisustrategia on tärkeä osa aritmeettisten suoritusten automatisoitumisen kehitystä. Kertolaskutehtävässä suoriutuminen oli vahvasti yhteydessä aritmetiikan tehtävässä suoriutumiseen eri ikävaiheissa. Molemmissa tehtävissä tarvittiin nopeaa peruslaskutehtävien ratkaisemista ja laskemisen sujuvuutta, mikä selittää samansuuntaista suoriutumista tehtävissä. Baroodyn (2004, 193) mukaan ymmärrys yhteen- ja vähennyslaskuista on pohjana kertolaskujen oppimiselle.

Sukupuolierot. Sukupuolten välisiä eroja selvittäessä havaittiin aiempien tutkimusten tavoin, ettei tyttöjen ja poikien välillä ollut tilastollisesti merkitsevää eroa matemaattisessa suoriutumisessa koko otosta tarkasteltaessa (vrt. Aunio & Niemivirta 2010; Aunola ym. 2004; Dowker 1998; Hannula & Lepola 2006; Herbert & Stipek 2005; Hyde ym. 2008). Tarkasteltaessa sukupuolten jakautumista alaryhmiin havaittiin poikia kuitenkin olevan enemmän kuin tyttöjä sekä heikkojen että hyvien alaryhmissä. Alaryhmittäin tehdyissä keskiarvovertailuissa havaittiin poikien suoriutuvan tyttöjä tilastollisesti merkitsevästi paremmin hyvien alaryhmässä (vrt. Robinson & Lubienski 2011, 294). Heikkojen alaryhmässä puolestaan tytöt suoriutuivat poikia tilastollisesti merkitsevästi paremmin. Edellä esitetyt tulokset tukevat aiempia tutkimustuloksia, joiden mukaan taitavien joukossa on enemmän poikia (Hyde & Mertz 2009, 8806), ja poikien suoriutumisessa on enemmän keskinäistä vaihtelua kuin tyttöjen suoriutumisessa (mm. Hyde ym. 2008).

6.2 Tutkimuksen merkitys, luotettavuus ja jatkotutkimushaasteet

Merkitys. Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin matemaattisten taitojen kehitystä eri matematiikan taitoalueilla esiopetuksesta neljännen luokan kevääseen asti. Viimeaikaisissa suomalaisissa tutkimuksissa on keskitytty pääasiassa esi- ja alkuopetusikäisten lasten matemaattisiin taitoihin, joten tämän tutkimuksen tulokset lisäävät tietoa myös myöhemmän ikävaiheen taidoista. Pitkä seurantajakso antoi mahdollisuuden tutkia matemaattisen kehityksen suuntaa eri alaryhmissä ja matemaattisten taitoalueiden yhteyksiä eri ikävaiheissa. Tutkimustulokset alaryhmissä tapahtuvasta kehityksestä antavat hyödyllistä tietoa taidoiltaan eritasoisten lasten edistymisestä ja ohjaavat kiinnittämään huomion opetuksen eriyttämiseen lasten taitojen mukaan.

Useat tutkimukset ovat osoittaneet esiopetuksen matemaattisten taitojen ennustavan matematiikassa menestymistä myöhemminä vuosina (esim. Aunola ym. 2004; Aunio & Niemivirta 2010). Tämä havainto ohjaa kiinnittämään huomion varhaisen matemaattisen oppimisen tärkeyteen (Aunio & Niemivirta 2010, 432). Tässä tutkimuksessa havaittiin, että yhteydet eri ikävaiheiden matemaattisten taitojen välillä olivat tilastollisesti erittäin merkitseviä. Esimerkiksi lapsen suoriutumistaso aritmetiikan tehtävässä oli hyvin pysyvä eri ikävaiheissa. Opettajan näkökulmasta ajatellen tärkeää olisi kiinnittää huomio siihen, miten aritmetiikassa heikosti suoriutuvia oppilaita tulisi tukea heidän matemaattisessa kehityksessään. Alkuopetuksessa luodaan pohjaa monimutkaisempien aritmeettisten taitojen kehittymiselle, mistä johtuen aritmeettisten perusteiden, kuten yhteen- ja vähennyslaskun, oppiminen on hyvin merkityksellistä (ks. Baroody 2004, 193). Opetuksessa tulee keskittyä perustaitojen automatisoitumisen ja laskemisen sujuvuuden kehittämiseen, mikä edellyttää paljon harjoitusta ja toistoa (Geary 1995, 33). Perusmenetelmien automatisoituminen vapauttaa voimavaroja monimutkaisempien ongelmien ratkaisemiseen. Lasten aritmeettisiin valmiuksiin on tarpeen kiinnittää huomiota jo esiopetukseen tultaessa mahdollisten oppimisvaikeuksien arvioinnin ja ennaltaehkäisemisen vuoksi (Hannula & Lepola

2006, 149). Hannula ja Lepola (2006) ovat huolissaan siitä, ettei lasten matematiikan oppimisen pulmia huomata riittävän aikaisin, minkä seurauksena lapsi ei saa tarpeeksi tukea ja harjoitusta niiden varhaisempien taitojen kehittymiseen, jotka ovat välttämättömiä osataitoja myöhemmille taidoille.

Tässä tutkimuksessa lukujonotaitojen havaittiin kehittyvän erityisesti esi- ja alkuopetuksen aikana. Toisella luokalla aritmeettisilta taidoiltaan hyvien alaryhmässä lukujonotaidot olivat hyvin hallinnassa jo toisen luokan keväällä. Aiemmissä tutkimuksissa lukujonotaitojen on havaittu olevan yhteydessä matemaattiseen osaamiseen myöhemmin (Aunola ym. 2004, 708; Kinnunen ym. 1994, 75; Koponen 2008, 37). Matemaattisten taitojen hierarkkisen rakentumisen vuoksi oppimisvaikeuksien ilmetessä huomio tulee kohdistaa varhaisempiin matemaattisiin taitoihin. Esimerkiksi jos oppimisvaikeuksia ilmenee yhteen- ja vähennyslaskuissa, on aiheellista lähteä liikkeelle lukujonotaitojen hallinnan arvioinnista (Räsänen 1999, 347). Räsänen (1999) toteaa, että usein oppimisvaikeuksien taustalla on lukujonotaitojen puutteellinen kehitys. Matematiikan opetuksessa korostuu taitojen varhainen arviointi esiopetuksesta alkaen, jotta mahdolliset oppimisvaikeudet tai puutteet matematiikan taidoissa havaittaisiin varhain ja tuki voitaisiin kohdentaa heikoille taitoalueille.

Tieto matemaattisten taitojen kehitysvaiheista ja matemaattisen tiedon osa-alueista auttaa aikuista tulkitsemaan ja tunnistamaan lapsen osaamista ja ohjaa kohdistamaan tuen lapsen lähikehityksen vyöhykkeelle (Mattinen 2012, 220). Tämän tutkimuksen tulokset antavat viitteitä siitä, mitkä taidot lapsilla olivat hallinnassa ja missä taidoissa tapahtui kehitystä missäkin ikävaiheessa. Lasten, joiden oppimisen kyvyissä ja matemaattisten taitojen hallinnassa on puutteita, on tärkeää saada omassa aikataulussaan harjoitella ja kehittää taitojaan siten, että heillä on riittävät valmiudet uusien asioiden oppimiselle (Lampinen, Ikäheimo & Dräger 2007, 14).

Luotettavuus. Tutkimuksen luotettavuuden arviointi perustuu käytettyihin mittareihin ja otoksen edustavuuteen. Tämä tutkimus oli osa Alkuportaatt-seurantatutkimusta, joka on läpäissyt yliopiston eettisen lautakunnan arvioinnin. Arvioinnissa

hyväksyttiin tutkimusmenetelmät sekä tutkimuslupien hankinnassa, aineiston käsittelyssä ja tietosuojan varmistamisessa käytetyt menettelyt. Lasten testauksessa käytetyt tehtävät olivat pääosin jo aiemmissa seurantatutkimuksissa ja Alkuportaatt seurannan pilottitutkimuksessa käytettyjä ja testattuja tehtäviä, joiden luotettavuus on arvioitu hyväksi. Tämän tutkimuksen otos oli kohtalaisen suuri ($n = 494$), mutta sen edustavuudessa oli puutteita, sillä otos sisälsi suhteellisesti suuremman määrän lapsia, joilla oli oppimisen riskejä. Tulee siis huomioida, ettei otos kuvaa edustavasti suomalaisten lasten yleistä taitotasoa.

Alkuportaatt-seurantatutkimuksessa mukana olleet testaajat kävivät läpi tarkan koulutuksen liittyen käytettäviin tehtäviin sekä testaustilanteen toteutukseen. Testaajat saivat tarkat ohjeet siitä, miten tehtävät esitetään lapselle ja miten testaus suoritetaan. Testaustilanteet olivat kuitenkin suhteellisen pitkiä ja vaativat lapselta pitkää keskittymistä, joten väsyminen ja keskittymisvaikeudet saattoivat vaikuttaa tehtävien suorittamiseen. Testaajia kehoitettiin huomioimaan lapsen jaksaminen ja tarvittaessa pitämään taukoja testauksen aikana. Aineiston tallennuksesta huolehtivat tehtävään koulutetut tutkimusavustajat, mikä lisäsi tulosten luotettavuutta.

Alaryhmien muodostamisen kriteerimuuttujaksi valittiin toisen luokan aritmetiikan tehtävässä suoriutuminen, ja ääri ryhmien valinnassa käytettiin katkaisurajaa, joka asettui lähelle 10 prosenttia. Voidaan kuitenkin kysyä, että oliko alaryhmiin jakaminen luotettava, kun taitotason arviointiin käytettiin ainoastaan yhtä testiä. Jakautuminen heikkoihin, keskitasoihin ja hyviin olisi voinut olla erilainen, jos alaryhmien muodostamisessa olisi käytetty jonkin muun matemaattisen taitoalueen testiä tai toisen ikävaiheen taitoja. Tulee myös huomioida, että otoksessa oli mukana niin sanottu riskilasten ryhmä, mikä saattoi vaikuttaa siihen, että keskitasosten ryhmässä oli mukana suhteellisen suuri määrä taidoiltaan heikkoja lapsia. Toisen luokan aritmetiikan tehtävä valittiin alaryhmiin jaon perusteeksi, koska sen edellyttämien taitojen kehittymisen ajateltiin olevan soveliaain taitoerojen näkymisen kannalta (ts. lapsilla oli takana aritmetiikan taitojen systemaattista opettamista lähes kahden vuoden ajalta). Lisäksi tutkimustuloksia tarkasteltaessa tulee huomioida se,

että osaan matematiikan tehtävistä lisättiin lasten taitojen edistyessä haastavampia osioita kesken seurantajakson.

Jatkotutkimushaasteet. Varhaisten matemaattisten taitojen kehityksestä ja koulun ensimmäisten vuosien matemaattisesta osaamisesta on Suomessa jo tehty melko paljon tutkimusta, jonka keskeisenä havaintona on se, että varhaisilla matemaattisilla taidoilla on vahva merkitys matemaattisten taitojen myöhemmälle kehittymiselle. Vähemmän on tutkimuksia, joissa olisi tarkasteltu matemaattisten taitojen kehittymistä alakoulun ylemmillä luokilla tai taidoiltaan erilaisissa alaryhmissä. Tässä tutkimuksessa seurattiin samoja lapsia esi- ja alkuopetuksiensa lisäksi 3. ja 4. luokalla. Tutkimuksen jatkaminen ylemmille luokille laajentaisi ymmärrystä matemaattiseen kehitykseen vaikuttavista tekijöistä ja matemaattisen kehityksen edistymisestä. Pitkittäistutkimus antaisi kokonaisvaltaisemman kuvan alaryhmien välisten taitoerojen pysyvyydestä. Kun mukaan otettaisiin monimutkaisempia ongelmanratkaisutehtäviä, olisi mahdollista löytää ennustavia tekijöitä vaativampien matemaattisten taitojen hallintaa koskien. Lisäksi pidempi seurantajakso voisi antaa arvokasta tietoa matematiikan opetuksen kehittämiseen ja oppimisvaikeuksien ennaltaehkäisemiseen.

Matemaattisten taitojen kehittymisen on esitetty olevan tiiviisti yhteydessä yleiseen kielenkehitykseen (Vainionpää ym. 2003, 293). Tutkimustulosten mukaan kielihäiriöisillä lapsilla on tyypillisesti kehittyviin lapsiin verrattuna selvästi enemmän vaikeuksia matematiikan perustaitojen eri osa-alueilla ja näin ollen suurempi riski matematiikan oppimisvaikeuksiin (Koponen 2008, 41). Myös Landerl ja Moll (2010, 293) havaitsivat matemaattisten oppimisvaikeuksien esiintyvän usein yhdessä lukemis- ja kirjoittamisvaikeuksien kanssa. Tämän tutkimuksen otoksessa oli mukana suhteellisen suuri määrä lapsia, joilla oli tunnistettu riski lukemisen ja kirjoittamisen vaikeuksiin. Tutkimusta olisikin luontevaa jatkaa matemaattisten ja kielellisten taitojen yhteyksien tarkasteluun. Tutkimus voisi antaa tietoa siitä, mitä yhteisiä tekijöitä kielellisten ja matemaattisten taitojen kehittymisen taustalla on.

Jordan ym. (2009, 456) toteavat, että matemaattisten taitojen kehittymistä koskeva tutkimus on kohdistunut ennemminkin ryhmiin kuin yksilöihin. Myös tässä tutkimuksessa taitojen kehittymistä tarkasteltiin taitotasoltaan erilaisissa ryhmissä. Omassa tutkimuksessaan Jordan ym. (2009, 465) havaitsivat yksilöllisten erojen olevan huomattavia aritmetiikassa suoriutumisen tasossa ja kehityksen nopeudessa. Lasten yksilöllinen suoriutumisen taso vaihteli myös eri aritmeettisten tehtävien välillä. Tämä tulos antaa viitteitä siitä, että lapsi voi menestyä jollakin matematiikan taitoalueella hyvin, vaikka menestyminen olisi heikkoa toisella alueella. Tästä syystä, yksittäisten lasten osaamisen tason ja matemaattisen kehityksen tarkastelu voisi olla tarkoituksenmukaista. Erilaisten kehityskaarien tunteminen voisi auttaa opettajaa kohdentamaan tuen oppilaiden yksilöllisiin tarpeisiin.

Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin sukupuolten välisiä eroja matematiikassa suoriutumisessa. Tarkastelu kohdistui ainoastaan aritmeettisiin taitoihin toisella luokalla. Olisikin mielenkiintoista vertailla tyttöjen ja poikien menestymistä eri matematiikan taitoalueilla ja eri ikävaiheissa. Tämän tutkimuksen aineisto olisi antanut siihen mahdollisuuden, mutta tarkastelua ei kuitenkaan laajennettu muihin taitoalueisiin tai ikävaiheisiin. Matemaattisen suoriutumisen lisäksi olisi mielenkiintoista tutkia tyttöjen ja poikien käsityksiä omasta matemaattisesta osaamisestaan sekä motivaatiota matematiikan oppimista kohtaan. Tutkimustulosten mukaan tytöt arvioivat matemaattiset taitonsa heikommiksi kuin pojat vaikka sukupuolten välillä ei olisi eroa matemaattisessa menestymisessä (Herbert & Stipek 2005, 287). Aunola ym. (2004, 710) havaitsivat poikien matemaattisen kehitystahdin olevan tyttöjä nopeampaa peruskoulun ensimmäisinä vuosina. Mahdollisena selityksenä tähän tutkijat esittivät poikien vahvemman motivaation matematiikka kohtaan sekä poikien vahvemman luottamuksen omiin taitoihinsa.

Erilaisten kognitiivisten tekijöiden lisäksi, esimerkiksi vanhempien koulutuksen (Aunio & Niemivirta 2010; Koponen ym. 2007), matematiikka-asenteiden (Kupari ym. 2012) ja motivaation (Lerikkanen ym. 2013), opettajan pedagogisten tavoitteiden (Aunola ym. 2006) sekä koulun ja luokan (Opdenakker, Van Damme, De Fraine, Van Landeghem & Onghena 2002), on havaittu olevan yhteydessä matematiikassa

menestymiseen. Opendakker ym. (2002) havaitsivat muun muassa luokan ilmapiirin ja oppilasaineksen vaikuttavan matemaattiseen suoriutumiseen. Aunola ym. (2006) tutkivat opettajan pedagogisten tavoitteiden vaikutusta oppilaiden motivaatioon ja sitä kautta matematiikassa menestymiseen. Tutkimuksen mukaan motivaatio matematiikkaa kohtaan lisääntyi niissä luokissa, joissa opettaja mainitsi oppilaiden motivaation tärkeäksi pedagogiseksi tavoitteekseen.

Suomalaista tutkimusta opettajan toiminnan ja erityisesti luokan vaikutuksesta matemaattiseen suoriutumiseen on kuitenkin vähän. Olisikin kiinnostavaa tutkia, millaisia eroja oppilaiden matematiikan taitotasossa on eri luokkien välillä ja millaiset tekijät erojen taustalla vaikuttavat. Kansainvälisesti vertailtuna suomalaisten lasten on havaittu pitävän matematiikasta varsin vähän (Kupari ym. 2012, 51). Lisäksi oppilaiden sitoutuminen matematiikan opetukseen on hyvin heikkoa. Kupari ym. (2012, 120) korostavat, että oppilaiden asennoitumisella opiskeluun ja luottamuksella omaan oppimiseensa on keskeinen merkitys heidän osaamiseensa matematiikassa. Opettajan ja luokan toimintaan kohdistuva tutkimus voisi antaa välineitä oppilaiden asenteisiin vaikuttamiseen ja monipuolisemman matematiikan opetuksen kehittämiseen.

LÄHTEET

- Ahonen, T., Lamminmäki, T., Närhi, V. & Räsänen, P. 1995. Koulun aloittaminen ja varhaiset oppimisvaikeudet. Teoksessa P. Lyytinen, M. Korhonen & H. Lyytinen (toim.) Näkökulmia kehityspsykologiaan. Kehitys kontekstissaan. Porvoo: WSOY, 168–187.
- Aunio, P., Hannula, M.-M. & Räsänen, P. 2004. Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 198–221.
- Aunio, P. & Niemivirta, M. 2010. Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences* 20, 427–435.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. 2004. Development dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology* 96, 699–713.
- Aunola, K., Leskinen, E. & Nurmi, J.-E. 2006. Developmental dynamics between mathematical performance, task motivation, and teacher's goals during the transition to primary school. *British Journal of Educational Psychology* 76, 21–40.
- Baroody, A. J. 2004. The developmental bases for early childhood number and operations standards. Teoksessa D. H. Clements & J. Sarama (toim.) Engaging young children in mathematics. Standards for early childhood mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 173–219.
- Butterworth, B. 2005. The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 46, 3–18.
- Clements, D. H. 2004. Major themes and recommendations. Teoksessa D. H. Clements & J. Sarama (toim.) Engaging young children in mathematics. Standards for early childhood mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 7–72.

- Clements, D. H. & Sarama, J. 2009. Learning and teaching early math. The learning trajectories approach. New York: Routledge.
- Cowan, R., Donlan, C., Shepherd, D.-L., Cole-Fletcher, R., Saxton, M. & Hurry, J. 2011. Basic calculation proficiency and mathematics achievement in elementary school children. *Journal of Educational Psychology* 4, 786–803.
- Dowker, A. 1998. Individual differences in normal arithmetical development. Teoksessa C. Donlan (toim.) *The development of mathematical skills. Studies in developmental psychology*. Hove, UK: Psychology Press, 275–302.
- Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2010. Helsinki: Opetushallitus.
- Fazio, B. B. 1999. Arithmetic calculation, short-term memory and language performance in children with specific language impairment: A 5-year follow-up. *Journal of Speech, Language and Hearing Research* 42, 420–431.
- Geary, D. C. 1995. Reflections of evolution and culture in children's cognition. Implications for mathematical development and instruction. *American Psychologist* 50, 24–37.
- Geary, D. C. 2000. From infancy to adulthood: The development of numerical abilities. *European Child & Adolescent Psychiatry* 9, 11–16.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J. & DeSoto, M. C. 2004. Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology* 88, 121–151.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L. & Bailey, D. H. 2012. Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology* 104, 206–223.
- Gelman, R. & Gallistel, C. R. 1978. *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Hannula, M. M. 2005. Spontaneous focusing on numerosity in the development of early mathematical skills. *Turun yliopiston julkaisu*. Sarja B. Osa 282. Turku: Turun yliopisto.
- Hannula, M. M. & Lepola, J. 2006. Matemaattisten taitojen kehittyminen esi- ja alkuopetuksen aikana: Mitkä tekijät ennakoivat aritmeettisten taitojen

kehitystä? Teoksessa J. Lepola & M. M. Hannula (toim.) Kohti koulua. Kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten valmiuksien kehitys. Turku: Turun yliopiston kasvatustieteiden laitos, 129–153.

Herbert, J. & Stipek, D. 2005. The emergence of gender differences in children's perceptions of their academic competence. *Applied Developmental Psychology* 26, 276–295.

Ho, C. S.-H. & Fuson, K. C. 1998. Children's knowledge of teen quantities tens and ones: Comparisons of Chinese, British and American kindergartners. *Journal of Educational Psychology* 90, 536–544.

Hyde, J. S., Lindberg, S. M., Linn, M. C., Ellis, A. B. & Williams, C. C. 2008. Gender similarities characterize math performance. *Science* 321, 494–495.

Hyde, J. S. & Mertz, J. E. 2009. Gender, culture, and mathematics performance. *PNAS* 106, 8801–8807.

Jordan, N. C., Hanich, L. B. & Kaplan, D. 2003. A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development* 74, 834–850.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N. & Ramineni, C. 2007. Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice* 22, 36–46.

Jordan, J.-A., Mulhern, G. & Wylie, J. 2009. Individual differences in trajectories of arithmetical development in typically achieving 5- to 7-year-olds. *Journal of Experimental Child Psychology* 103, 455–468.

Kinnunen, R., Lehtinen, E. & Vauras, M. 1994. Matemaattisen taidon arviointi. Teoksessa M. Vauras, E. Poskiparta & P. Niemi (toim.) Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailta. Turun yliopisto: Oppimistutkimuksen keskus, 55–76.

Koponen, T. 2008. Calculation and language: Diagnostic and intervention studies. *Jyväskylä studies in Education, Psychology and Social Research*, 340.

Koponen, T., Aunola, K., Ahonen, T. & Nurmi, J.-E. 2007. Cognitive predictors of single-digit and procedural calculation skills and their covariation with reading skill. *Journal of Experimental Child Psychology* 97, 220–241.

- Koponen, T. & Mononen, R. 2010. Yhteen-, vähennys- ja kertolaskutehtävät. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti. Julkaisematon testimateriaali.
- Koponen, T. & Räsänen, P. 2003. NMART-laskutaidon testi. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti. Julkaisematon testimateriaali.
- Kupari, P., Sulkunen, S., Vettenranta, J. & Nissinen, K. 2012. Enemmän iloa oppimiseen. Neljännen luokan oppilaiden lukutaito sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainväliset PIRLS- ja TIMSS-tutkimukset Suomessa. Jyväskylän yliopisto: Koulutuksen tutkimuslaitos.
- Kupari, P. & Törnroos, J. 2004. Matematiikan osaaminen peruskoulussa kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 138–165.
- Lampinen, A., Ikäheimo, H. & Dräger, M. 2007. *Mavalka 1 ja 2. Matematiikan valmiuksien kartoitus 1 ja 2*. Helsinki: Opperi.
- Landerl, K. & Moll, K. 2010. Comorbidity of learning disorders: prevalence and familial transmission. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 51, 287–294.
- Lerkkanen, M.-K., Rasku-Puttonen, H., Aunola, K. & Nurmi, J.-E. 2005. Mathematical performance predicts progress in reading comprehension among 7-year old. *European Journal of Psychology of Education* 20, 121–137.
- Lerkkanen, M.-K., Kiuru, N., Pakarinen, E., Viljaranta, J., Poikkeus, A.-M., Rasku-Puttonen, H., Siekkinen, M. & Nurmi, J.-E. 2012. The role of teaching practices in the development of children's interest in reading and mathematics in kindergarten. *Contemporary Educational Psychology* 37, 266–279.
- Mattinen, A. 2006. Huomio lukumääriin. Tutkimus 3-vuotiaiden lasten matemaattisten taitojen tukemisesta päiväkodissa. Turun yliopiston julkaisu. Sarja C, osa 247.
- Mattinen, A. 2012. Lapsen matemaattinen maailma ja ajattelu. Teoksessa E. Hujala & L. Turja (toim.) *Varhaiskasvatuksen käsikirja*. Toinen painos. Jyväskylä: PS-kustannus, 219–230.

- Mattinen, A., Hannula, M. M. & Lehtinen, E. 2006. Katsotaanpas kuinka monta jalkaa tällä toukalla on! – Lapsen ohjaaminen lukumäärien havaitsemiseen ja käsittelemiseen. Teoksessa J. Lepola & M. M. Hannula (toim.) Kohti koulua. Kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten valmiuksien kehitys. Turku: Turun yliopiston kasvatustieteiden laitos, 155–187.
- Metsämuuronen, J. 2005. Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä. Helsinki: International Methelp.
- Nummenmaa, L. 2009. Käyttäytymistieteiden tilastolliset menetelmät. 2. painos. Helsinki: Tammi.
- Nurmi, J.-E. & Aunola, K. 1999-2009. Laskutehtävät. Jyväskylä Entrance from Preschool to School (JEPS) -tutkimuksen julkaisematon testimateriaali.
- Opendakker, M.-C., Van Damme, J., De Fraine, B., Van Landeghem, G. & Onghena, P. 2002. The effect of schools and classes on mathematics achievement. *School Effectiveness and School Improvement* 13, 399–427.
- Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus.
- Rittle-Johnson, B. & Siegler, R. 1998. The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. Teoksessa C. Donlan (toim.) *The development of mathematical skills. Studies in developmental psychology*. Hove, UK: Psychology Press, 75–110.
- Robinson, J. P. & Lubienski, S. T. 2011. The development of gender achievement gaps in mathematics and reading during elementary and middle school: Examining direct cognitive assessment and teacher ratings. *American Educational Research Journal* 48, 268–302.
- Räsänen, P. 1999. Matematiikan oppimisvaikeudet. Teoksessa T. Ahonen & T. Aro (toim.) *Oppimisvaikeudet. Kuntoutus ja opetus yksilöllisen kehityksen tukena*. Jyväskylä: Atena, 332–359.
- Räsänen, P. & Ahonen, T. 2004. Oppimisvaikeudet matematiikassa – neuropsykologinen näkökulma. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 274–300.
- Räsänen, P. & Aunola, K. 2007. Aritmetiikkatesti. Alkuportaati -tutkimuksen julkaisematon testimateriaali. Jyväskylän yliopisto.

- Salonen, P., Lepola, J., Vauras, M., Rauhanummi, T., Lehtinen, E. & Kinnunen, R. 1994. Diagnostiset testit 3. Motivaatio, Metakognitio ja Matematiikka. Turun yliopisto: Oppimistutkimuksen keskus.
- Sulkunen, S., Välijärvi, J., Arffman, I., Harju-Luukkainen, H., Kupari, P., Nissinen, K., Puhakka, E. & Reinikainen, P. 2010. PISA 2009 Ensituloksia. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2010: 21.
- Towse, J. & Saxton, M. 1998. Mathematics across national boundaries: Cultural and linguistic perspectives on numerical competence. Teoksessa C. Donlan (toim.) The development of mathematical skills. Studies in developmental psychology. Hove, UK: Psychology Press, 129–150.
- Vainionpää, T., Mononen, R. & Räsänen, P. 2003. Matemaattiset valmiudet. Teoksessa T. Siiskonen, T. Aro, T. Ahonen & R. Ketonen (toim.) Joko se puhuu? Kielenkehityksen vaikeudet varhaislapsuudessa. Opetus 2000. Jyväskylä: PS-Kustannus, 292–301.
- Vilenius-Tuohimaa, P. 2005. Vanhempien koulutustaso, lapsen kielellinen ilmaisu ja tehtäväorientaatio matemaattisten taitojen selittäjinä koulutien alussa. Helsinki: Helsingin yliopisto.
- Wynn, K. 1998. Numerical competence in infants. Teoksessa C. Donlan (toim.) The development of mathematical skills. Studies in developmental psychology. Hove, UK: Psychology Press, 3–25.
- Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisten ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 111–122.