Julian joukot

Henna-Liisa Kivinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013

Tiivistelmä: Henna-Liisa Kivinen *Julian joukot*, matematiikan pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos.

Viime vuosina matematiikassa on tutkittu joukkoja, joita perinteisen geometrian avulla ei voida kuvailla. Näillä joukoilla on äärettömän pieniä rakenteita ja yksityiskohtia riippumatta siitä, kuinka paljon niitä suurennetaan. Tällaisia joukkoja kutsutaan fraktaaleiksi. Tarkkaa määritelmää fraktaaleille ei ole olemassa, mutta eräänä määritelmänä pidetään myös sitä, että ne ovat itsesimilaarisia, eli koostuvat pienemmistä osista, jotka muistuttavat kokonaisuuttaan.

Tässä tutkielmassa keskitytään Julian joukkoihin sekä niiden indeksijoukkoon, Mandelbrotin joukkoon. Julian joukkoa muodostettaessa iteroidaan pisteitä jollakin funktiolla, esimerkiksi polynomifunktiolla $f = z^2 + c$. Ne pisteet, jotka eivät iteroidu kohti ääretöntä, muodostavat alueen, jonka sulkeuman reunaa kutsutaan Julian joukoksi. Mandelbrotin joukko on Julian joukkojen indeksijoukko, sillä se koostuu niistä parametreistä c, joilla Julian joukko on yhtenäinen.

Epälineaaristen yhtälöiden ratkaisemisesta tunnettua Newtonin menetelmää käytetään myös Julian joukkojen tutkimisessa. Osoittautuu, että Newtonin menetelmän avulla saadaan ratkaistua rationaalifunktioiden attraktioaltaita. Attraktioallas on joukko, jonka kaikki pisteet lähestyvät iteroitaessa kohti samaa pistettä. Tällaisen joukon reuna muodostaa Julian joukon.

Tutkielmassa osoitetaan, että Julian joukot ovat invariantteja. Funktion f Julian joukko ei siis muutu, vaikka sitä kuvataan funktiolla f tai sen käänteiskuvauksella f^{-1}. Tämä Julian joukkojen ominaisuus on eräs tärkeimmistä, sillä sen nojalla voidaan kirjoittaa algortimi, jonka avulla saadaan tietokoneella piirrettyä näyttäviä kuvia Julian joukoista. Myös kuvien piirtämistä tietokoneella tarkastellaan tässä tutkielmassa.

Sisältö

Johdanto 1

Luku 1. Kompleksianalyysiä 3
1.1. Perustuloksia joukoista ja jonojen suppenemisesta 3
1.2. Kompleksianalyysiä 6

Luku 2. Mittateoriaa 15
2.1. Hausdorffin mitta ja dimensio 16
2.2. Laatikkodimensio 19
2.3. Hausdorffin dimension ja laatikkodimension yhteys 21

Luku 3. Itsesimilaariset joukot 23
3.1. Itsesimilaarisuus 23
3.2. Itsesimilaaristen joukkojen dimensiot 25

Luku 4. Montelin-Caratheodoryn lause 27

Luku 5. Julian joukot 37

Luku 6. Mandelbrotin joukko 43
6.1. Mandelbrotin joukon määritelmät 43
6.2. Neliöllisten funktioiden Julian joukot 45

Luku 7. Newtonin menetelmä 51

Luku 8. Julian joukkojen piirtäminen tietokoneella 54

Kirjallisuutta 58

Johdanto

Perinteisesti geometria tutkii kuvioita ja kappaleita, joille voidaan laskea esimerkiksi piirejä, pinta-aloja ja tilavuuksia. Viime vuosina matematiikassa on kuitenkin tutkittu joukkoja, joita ei perinteisen geometrian avulla voida kuvailla. Tällaisilla joukoilla on mielivaltaisen pieniä rakenteita ja yksityiskohtia ja niitä kutsutaan fraktaaleiksi.

Sana fraktaali tulee latinan kielen sanasta *fractus*, joka merkitsee murtunutta. Sitä käytti ensimmäisen kerran ranskalainen matemaatikko B.B. Mandelbrot kuvaillessaan muotoja, joita ei voi kuvata perinteisen geometrian keinoin. Hän määritteli fraktaalit joukoiksi, joiden Hausdorffin dimensio on suurempi kuin niiden topologinen dimensio. Hausdorffin dimensio kuvaa joukkojen "mutkikkuutta", kun taas topologisella dimensiolla kuvataan joukkojen kokoa. Tämä määritelmä osoittautui kuitenkin riittämättömäksi, sillä se poissulki joukkoja, jotka selvästi ovat fraktaaleja.

K.Falconer määrittelee kirjassaan *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.* ([**6**], s. Xx-xxi), että joukko F on fraktaali, jos

(1) sillä on äärettömän pieniä rakenteita ja
(2) sitä ei voida kuvata perinteisen geometrian avulla.
(3) Usein se on jollakin tavoin itsesimilaarinen, eli se sisältää mielivaltaisen pieniä osia, joiden kanssa se on ainakin likimääräisesti yhdenmuotoinen.
(4) Yleensä sen Hausdorffin dimensio on suurempi kuin sen topologinen dimensio.
(5) Useimmiten se on määritelty yksinkertaisesti, kuten rekursiivisesti.

Tämäkään määritelmä ei ole täsmällinen, vaan se koostuu ominaisuuksista, joita fraktaaleilla usein on. Tarkkaa määritelmää fraktaaleille ei olekaan olemassa.

Fraktaaleista voidaan tietokoneen avulla piirtää näyttäviä kuvia, joten niihin törmää usein muun muassa matemaattisen kirjallisuuden kansikuvissa. Erityisesti Julian joukoista saadaan aikaan kuvia, jotka voivat näyttää jopa taiteelta ja joita ei osaa yhdistää matematiikkaan.

Tämä pro-gradu tutkielma käsittelee Julian joukkoja sekä niiden indeksijoukkoa, Mandelbrotin joukkoa. Tavoitteena on ymmärtää millainen matematiikka Julian joukkojen taustalla on, miten niitä rakennetaan ja millaisia ominaisuuksia niillä on. Samoin tarkastellaan Mandelbrotin joukkoa ja sitä, miten nämä joukot liittyvät toisiinsa. Tutkielman lopussa on lisäksi tavoitteena selvittää, miten kuvia näistä fraktaaleista piirretään ja mihin niiden piirtäminen matemaattisesti perustuu.

Julian joukkoja muodostettaessa tutkitaan, miten kompleksitason pisteet käyttäytyvät, kun niitä iteroidaan tietyllä funktiolla f. Niiden pisteiden, jotka eivät iteroidu äärettömään, muodostuvan joukon reuna on Julian joukko. Tässä tutkielmassa käsitellään pääasiassa polynomifunktioiden Julian joukkoja. Lisäksi selvitetään lyhyesti, miten Newtonin menetelmän avulla saadaan määritettyä muotoa $f(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$ (tässä $p(z)$ on polynomifunktio) olevien rationaalifunktioiden Julian joukkoja.

Funktion f Julian joukko määritellään tutkielmassa kahdella tavalla:

- Julian joukko $J(f)$ on funktion f hylkivien jaksollisten pisteiden sulkeuma.
- Julian joukko on pisteiden $z \in \mathbb{C}$, joissa perhe $\{f^k\}_{k\geq 0}$ ei ole normaali, muodostama joukko.

Hylkivillä jaksollisilla pisteillä tarkoitetaan tässä pisteitä, joissa piste kuvautuu itsekseen jollakin iteraatiolla ja kyseisen iteraation derivaatta on itseisarvoltaan suurempi kuin 1. Funktioperhe taas määritellään normaaliksi silloin, kun sen jokaisella funktiojonolla on osajono, joka suppenee tasaisesti kohti analyyttistä funktiota tai ääretöntä.

Eräs tutkielman päätuloksista osoittaa, että nämä kaksi määritelmää johtavat samaan joukkoon. Tämän osoittamiseksi tarvitaan Montelin-Caratheodoryn lausetta, jonka todistamiseen tutkielmassa käytetään yksi seitsemästä luvusta.

Myös Mandelbrotin joukko määritellään kahdella tavalla: Mandelbrotin joukko on parametrien c joukko, joille

- funktion $f = z^2 + c$ Julian joukko on yhtenäinen.
- $f_c^k(0) \nrightarrow \infty$, kun $k \to \infty$.

Tutkielmassa osoitetaan näidenkin määritelmien yhtäpitävyys. Ensimmäinen määritelmä liittää Julian joukot Mandelbrotin joukkoon. Näiden joukkojen yhteyttä selvitetään tutkielmassa sekä matemaattisesti että tietokoneella piirrettyjen kuvien avulla.

Tutkielma koostuu kahdeksasta luvusta. Neljässä ensimmäisessä luvussa luodaan pohja tutkielmalle. Tämän pohjan avulla neljä viimeistä lukua käsittelee Julian joukkoja ja Mandelbortin joukkoa. Ensimmäinen luku koostuu niistä taustatiedoista, joita lukijalla oletetaan olevan joukoista, funktioista ja kompleksianalyysistä.

Toisessa luvussa käsitellään mittateoriaa ja dimensioita, sillä ilman dimension käsitettä ei fraktaalien kokoa voi useinkaan kuvailla. Tarkimmin tutustutaan Hausdorffin dimensioon, jota usein kutsutaan fraktaalidimensioksi. Lisäksi määritellään laatikkodimensio, jonka avulla on usein helpompi selvittää dimension arvo. Kolmannessa luvussa selvitetään, mitä itsesimilaarisuudella tarkoitetaan ja tarkastellaan tällaisten joukkojen dimensioita. Neljännessä luvussa todistetaan Montelin-Caratheodoryn lause.

Viides ja kuudes luku käsittelevät Julian joukkoja ja Mandelbrotin joukkoa sekä niiden yhteyttä. Seitsemännessa luvussa selvitetään, miten Newtonin menetelmän avulla saadaan määritettyä rationaalifunktioiden Julian joukkoja.

Viimeisessä luvussa on tavoitteena selvittää, miten tietokoneella piirretään kuvia näistä joukoista. Luvussa on joukkojen määritelmien ja ominaisuuksien avulla kirjoitettu algoritmi kuvien piirtämiseen ja sen avulla piirretty näistä joukoista kuvia. Myös joukkojen ominaisuuksia ja yhteyttä on tarkasteltu näiden kuvien avulla.

LUKU 1

Kompleksianalyysiä

Tässä luvussa on määritelty käsitteitä, joita tutkielmassa käytetään, ja esitelty lauseita, joita tarvitaan myöhemmin tutkielmassa. Pääasiallisina lähteinä tässä luvussa on Palkan *An Introduction to Complex Function Theory* [**8**] ja Conwayn *Functions of One Complex Variable* [**3**]. Koska Julian joukot ovat kompleksitason joukkoja, on määritelmät tehty kompleksitasolle. Jotkin määritelmät on tehty avaruuteen $\mathbb{R}^n$, mutta ne toimivat tietysti myös kompleksitasossa $\mathbb{C}$, sillä se on sama kuin $\mathbb{R}^2$.

1.1. Perustuloksia joukoista ja jonojen suppenemisesta

Määritellään aluksi joukkojen yhtenäisyyteen liittyviä käsitetteitä.

Määritelmä 1.1. Joukko A on *yhtenäinen*, jos ei ole olemassa avoimia joukkoja U ja V siten, että $A \subset U \cup V$ ja $A \cap U$ sekä $A \cap V$ ovat erillisiä ja epätyhjiä. Olkoot $\{C_i\}$ kokoelma kaikista joukon A yhtenäisistä osajoukoista, jotka sisältävät pisteen x. Tällöin yhdiste $\bigcup_i C_i$ on yhtenäinen joukko, joka sisältää pisteen x. Tätä joukkoa kutsutaan pisteen x *yhtenäisyyskomponentiksi.*

Joukko A on *täysin epäyhtenäinen*, jos sen jokaisen pisteen yhtenäisyyskomponentti sisältää ainoastaan tämän pisteen. Siis kaikille $x, y \in A$ on olemassa erilliset avoimet joukot U ja V siten, että $x \in U$, $y \in V$ ja $A \subset U \cap V$.

Seuraava lause osoittaa, että jos joukolla U on olemassa yhenäinen osajoukko A, on sillä myös oltava komponentti, johon joukko A kuuluu. Lause on suora seuraus komponentin määritelmästä.

Lause 1.2. *Olkoot U kompleksitason avoin joukko ja A sen yhtenäinen osajoukko. Tällöin joukko A sisältyy johonkin joukon U komponenttiin.*

Seuraavaksi määritellään Borel-joukot.

Määritelmä 1.3. *Borel-joukko* on avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkojen kokoelma, jolle pätee:

- Jokainen avoin ja suljettu joukko on Borel-joukko.
- Jokainen yhdiste ja leikkaus, jotka muodostuvat äärellisestä tai numeroituvasta määrästä Borel-joukkoja, on Borel-joukko.

Tässä tutkielmassa voidaan olettaa, että kaikki esitellyt joukot ovat Borel-joukkoja. Määritellään vielä joitakin joukkoihin liittyviä käsitteitä.

Määritelmä 1.4. Joukon A piste x on *eristetty*, jos jollekin pisteen x ympäristölle U on $U \cap A = \{x\}$.

Määritelmä 1.5. Joukko A on *perfekti*, jos se on suljettu ja sillä ei ole eristettyjä pisteitä.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Kompleksitason epätyhjää joukkoa D, joka on avoin ja yhtenäinen, kutsutaan tason $\mathbb{C}$ *alueeksi*.

Joukko $K \subset \mathbb{C}$ on *kompakti*, jos se on sekä avoin että suljettu.

Kuvattaessa yhtenäistä joukkoa jatkuvalla funktiolla saadaan kuvajoukoksi yhtenäinen joukko. Tämän osoittaa seuraava lause, jota tarvitaan myöhemmin analyyttisiä funktioita tarkasteltaessa.

LAUSE 1.7. *Olkoot $f : A \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja C joukon A yhtenäinen osajoukko. Tällöin $f(C)$ on yhtenäinen joukko.*

TODISTUS. Jos $f(C)$ olisi epäyhtenäinen, olisi määritelmän nojalla olemassa kompleksitason avoimet joukot U ja V siten, että

$$U \cap V = \emptyset,$$

$$f(C) \cap U \neq \emptyset \text{ ja } f(C) \cap V \neq \emptyset \text{ ja}$$

$$f(C) \subset U \cup V.$$

Määritellään joukkojen U ja V alkukuvat $f^{-1}(U) = \{z \in C : f(z) \in U\}$ ja $f^{-1}(V) = \{z \in C : f(z) \in V\}$. Tällöin joukkojen U ja V määrittelystä seuraa, että $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, $f^{-1}(U)$ ja $f^{-1}(V)$ eivät ole tyhjiä joukkoja ja $C = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Funktion f jatkuvuuden ja joukon U avoimuuden nojalla voidaan valita jokaiselle $z \in f^{-1}(U)$ avoin kiekko $B(z, r_z)$, $r_z > 0$, jolle $f(A \cap B(z, r_z)) \subset U$. Vastaavasti jokaiselle $w \in f^{-1}(V)$ valitaan avoin kiekko $B(w, r'_w)$, $r'_w > 0$ jolle $f(A \cap B(w, r'_w)) \subset V$. Nyt joukot $U^* = \bigcup_{z \in f^{-1}(U)} B(z, r_z)$ ja $V^* = \bigcup_{w \in f^{-1}(V)} B(w, r'_w)$ ovat avointen joukkojen yhdisteenä avoimia. Lisäksi $C \cap U^* = f^{-1}(U)$ ja $C \cap V^* = f^{-1}(V)$. Tästä seuraa, että

$$C \cap U^* \cap V^* = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset,$$

$$C \cap U^* = f^{-1}(U) \neq \emptyset \text{ ja } C \cap V^* = f^{-1}(V) \neq \emptyset \text{ ja}$$

$$C = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \subset U^* \cup V^*.$$

Nyt yhtenäisen joukon määritelmän nojalla C ei ole yhtenäinen, mikä on ristiriita. Näin ollen joukon $f(C)$ on oltava yhtenäinen. □

Pisteen z_0 sanotaan olevan jonon $\{z_n\}$ kasautumispiste, jos mielivaltaisen lähellä tätä pistettä on äärettömän monta jonon $\{z_n\}$ pistettä. Seuraavaksi annetaan tälle tarkka määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Piste z_0 on kompleksitason jonon $\{z_n\}$ *kasautumispiste*, jos kaikilla $\epsilon > 0$ kiekko $B(z_0, \epsilon)$ sisältää pisteen z_n äärettömän monella n.

Seuraavan lauseen nojalla riittää osoittaa, että jos jonon osajono lähestyy pistettä z_0, se on jonon kasautumispiste.

LAUSE 1.9. *Kompleksitason jonolla $\{z_n\}$ on kasautumispisteenä kompleksiluku z_0 jos ja vain jos on olemassa osajono $\{z_{n_k}\}$, jolle $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0$.*

TODISTUS. Todistus on helppo, katso [**8**] s. 38-39. □

Seuraavaksi määritellään funktiojonon pisteittäinen ja tasainen suppeneminen.

MÄÄRITELMÄ 1.10 (Suppeneminen). Olkoot $X, Y \subset \mathbb{R}^n$. Sanotaan, että funktiojono $\{f_k\}$ *suppenee pisteittäin* kohti funktiota $f : X \to Y$, jos $f_k(x) \to f(x)$, kun $k \to \infty$ kaikilla $x \in X$.

Funktiojono $f_k : X \to Y$ *suppenee tasaisesti* kohti funktiota $f : X \to Y$, jos $\sup_{x \in X} |f_k(x) - f(x)| \to 0$, kun $k \to \infty$.

Funktiojonojen suppeneminen voidaan osoittaa Cauchy-jonojen avulla. Jos kaikilla suurilla indekseillä m ja n funktiot f_m ja f_n ovat pisteessä z mielivaltaisen lähellä toisiaan, sanotaan funktiojonon olevan Cauchy-jono. Tällöin funktiojono myös suppenee, kuten seuraava lause osoittaa.

LAUSE 1.11. *[Cauchyn ehto suppenemiselle] Oletetaan, että jokainen funktio jonossa $\{f_n\}$ on määritelty joukossa A. Jono suppenee pisteittäin joukossa A jos se on Cauchy-jono, eli jokaisella z ja jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa indeksi $N = N(z, \epsilon)$ siten, että $|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$ kaikilla $m > n \geq N$.*

Jono suppenee tasaisesti joukossa A jos ja vain jos se on tasainen Cauchy-jono joukossa A. Toisin sanoen jos ja vain jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa indeksi $N = N(\epsilon)$ siten, että $|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$ kaikilla $z \in A$, kun $m > n \geq N$.

TODISTUS. Lauseen todistus on helppo, katso [**8**] s. 246. □

Tasaisesti suppenevan funktiojonon rajafunktio on jatkuva, jos jonon funktiot ovat jatkuvia:

LAUSE 1.12. *Oletetaan, että jonon $\{f_n\}$ funktiot f_i ovat jatkuvia avoimessa joukossa U, ja että jono suppenee tasaisesti joukon U kompakteissa osajoukoissa kohti rajafunktiota f. Tällöin f on jatkuva joukossa U.*

TODISTUS. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti kompaktissa joukossa $K \subset U$ kohti funktiota f, on olemassa kokonaisluku N siten, että $\sup_{x \in U} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, kun $n \geq N$. Valitaan $n = N$. Koska f_N on jatkuva joukossa U, se on jatkuva pisteessä $x_0 \in K \subset U$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon,$$

kun $x \in U$ ja $|x - x_0| < \delta$. Nyt siis, kun $x \in U$ ja $|x - x_0| < \delta$, on

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < 3\epsilon. \end{aligned}$$

Näin ollen myös f on jatkuva pisteessä x_0. Koska x_0 ja joukko K valittiin mielivaltaisesti joukosta U, f on jatkuva koko joukossa U. □

Rajoitetuilla jonoilla on Bolzano-Weierstrassin lauseen nojalla kasautumispiste. Jos jonot lisäksi suppenevat, ne suppenevat kohti kasautumispistettään.

LAUSE 1.13. *[Bolzano-Weierstrassin lause] Olkoon $\{z_n\}$ kompleksitason rajoitettu jono. Tällöin jonolla $\{z_n\}$ on vähintään yksi kasautumispiste. Kasautumispisteitä on täsmälleen yksi jos ja vain jos jono on suppeneva, jolloin se suppenee kohti yksikäsitteistä kasautumispistettään.*

TODISTUS. Myös tämä todistus on helppo, katso [**8**] s. 53. □

Kuvattaessa kompaktia joukkoa jatkuvalla funktiolla reaaliakselille, saavuttaa funktio maksimi- ja minimiarvonsa:

LAUSE 1.14. *Olkoot $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja joukko $K \subset A$ kompakti. Tällöin on olemassa $z_0, w_0 \in K$, joille $f(z_0) \leq f(z) \leq f(w_0)$ kaikilla $z \in K$.*

TODISTUS. Todistus on helppo, katso [**8**] s. 56-57. □

Ennen kuin siirrytään kompleksianalyysiin ja analyyttisiin funktioihin, määritellään sileä, suljettu ja yksinkertainen käyrä.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Olkoon käyrä $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Käyrä on

- *sileä* välillä $[a, b]$, jos se on derivoituva tällä välillä ja derivaattafunktio on jatkuva avoimella välillä $]a, b[$;
- *suljettu*, jos $f(a) = f(b)$;
- *yksinkertainen*, jos $f(z) \neq f(w)$, kun $z \neq w$, lukuunottamatta päätepisteitä, joille voi olla $f(a) = f(b)$.

Kompleksitason joukko J on *Jordanin käyrä*, jos se on jonkin yksinkertaisen, suljetun käyrän kuvajoukko. Koska se on suljettu joukko, sen komplementti $\mathbb{C} \setminus J$ on avoin. *Jordanin käyrälauseen* mukaan ([**8**], s. 111) tämä komplementti muodostuu tasan kahdesta komponentista: toinen on rajoitettu ja toinen on rajoittamaton joukko. Vaikka lause tuntuu intuitiivisesti täysin selvältä, sen todistus on kuitenkin vaikea, joten se ohitetaan.

LAUSE 1.16 (Jordanin käyrälause). *Jordanin käyrän J komplementti muodostuu täsmälleen kahdesta komponentista, joiden kummankin reuna on käyrä J. Käyrän J sisäpuoli on rajoitettu komponentti ja ulkopuoli rajoittamaton komponentti.*

1.2. Kompleksianalyysiä

Kompleksifunktion derivoituvuus määritellään samalla tavoin kuin reaalifunktion derivoituvuus. Toisin sanoen kompleksifunktion derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo, jos se on olemassa. Myös derivointisäännöt ovat samat sekä kompleksifunktioille että reaalifunktioille. Kompleksi- ja reaalifunktioiden derivoituvuudella on kuitenkin myös eroja. Voidaan esimerkiksi osoittaa, että jos kompleksifunktiolle f on olemassa derivaattafunktio f' joukossa U, on sille olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat. Reaalifunktioille tämä ei päde, sillä esimerkiksi funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x|x|$ on olemassa derivaatta $f'(x) = 2|x|$, joka ei kuitenkaan ole derivoituva nollassa. Kaikkialla differentioituvia kompleksifunktioita kutsutaan analyyttisiksi funktioiksi.

MÄÄRITELMÄ 1.17 (Analyyttinen funktio). Olkoot U kompleksitason epätyhjä ja avoin osajoukko ja f kompleksiarvoinen funktio, jonka määrittelyjoukko on joukko U. Jos funktiolle f on olemassa raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

kaikilla $z_0 \in U$, sanotaan, että funktio f on *analyyttinen joukossa U.* Funktio, jonka määrittelyjoukko on avoin, ja joka on differentioituva määrittelyjoukossaan, on *analyyttinen funktio.*

Määritellään lisäksi funktion f primitiivi F, eli funktio, jonka derivaatta on f.

MÄÄRITELMÄ 1.18. Olkoot D alue ja funktio $f : D \to \mathbb{C}$. Analyyttinen funktio $F : D \to \mathbb{C}$ on funktion f *primitiivi*, jos $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in D$.

Funktion f primitiiville pätee seuraavat kaksi tulosta, joiden todistukset sivuutetaan.

LAUSE 1.19. *Olkoot f jatkuva funktio joukossa D ja F sen primitiivi. Tällöin kaikille suljetuille käyrille γ joukossa D on*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

TODISTUS. Todistuksessa käytetään Cauchy-Riemannin yhtälöitä, joita tässä tutkielmassa ei määritellä, sekä analyysin peruslausetta. Katso [**8**] s. 126. □

LAUSE 1.20. *Olkoot funktio f jatkuva alueessa D ja $\int_\gamma f(z)dz = 0$ kaikille alueessa D suljetuille käyrille γ. Tällöin funktiolla f on primitiivi alueessa D.*

TODISTUS. Katso [**8**] s. 146-147. □

Analyyttisille funktioille tunnetaan seuraava tulos, jonka mukaan integroitaessa suljetun suorakaiteen reunan yli, on integraalin arvo aina nolla:

LEMMA 1.21. *Jos funktio f on jatkuva avoimessa joukossa U ja analyyttinen joukossa $U \backslash \{z_0\}$ jollakin $z_0 \in U$, niin $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ kaikilla suljetuilla suorakaiteilla R.*

TODISTUS. Todistus on helppo, katso [**8**] s. 143-144. □

Lisäksi analyyttisille funktioille tunnetaan lokaali Cauchyn integraalikaava:

LAUSE 1.22 (Lokaali Cauchyn integraalikaava). *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen avoimessa kiekossa D ja että γ on suljettu sileä käyrä $\gamma : [a, b] \to D$. Tällöin kaikille $z \in D \backslash |\gamma|$ on*

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

missä $n(\gamma, z)$ on γ:n kierrosluku pisteen z ympäri

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

TODISTUS. Todistus on helppo, katso [**8**] s. 161-162. □

Cauchyn integraalikaavan seurauksena saadaan Moreran lause, joka antaa keinon tutkia funktion f analyyttisyyttä:

LAUSE 1.23 (Moreran lause). *Olkoon funktio f jatkuva avoimessa joukossa U. Oletetaan, että $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ kaikilla suorakaiteilla $R \subset U$. Tällöin f on analyyttinen joukossa U.*

TODISTUS. Todistus vaatii tuloksia, joita tässä tutkielmassa ei käsitellä, mutta ei ole vaikea. Katso [**8**] s. 165. □

Moreran lauseen avulla saadaan osoitettua seuraava tulos, jota tarvitaan myöhemmin, kun tutkitaan käänteisfunktiota f^{-1}.

LAUSE 1.24. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva avoimessa joukossa U ja analyyttinen joukossa $U\setminus\{z_0\}$ jollakin $z_0 \in U$. Tällöin f on analyyttinen joukossa U.*

TODISTUS. Lemman 1.21 nojalla $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ kaikilla suorakaiteilla $R \subset U$, joten Moreran lause osoittaa, että f on analyyttinen joukossa U. □

Tarkastellaan seuraavaksi analyyttisten funktioiden käänteiskuvauksia. Olkoon $f : U \to \mathbb{C}$ ei-injektiivinen, analyyttinen kuvaus. Tiedetään, että tällaisella funktiolla ei ole käänteisfunktiota, eli funktiota $g : f(U) \to U$, jolle $g(f(z)) = z$ kaikilla $z \in U$ ja $f(g(z)) = z$ kaikilla $z \in f(U)$. Kuitenkin funktiolla f on aina oikeanpuoleinen käänteisfunktio, eli funktio $g : f(U) \to U$, jolle $f(g(z)) = z$ kaikilla $z \in f(U)$. Jos oikeanpuoleinen käänteisfunktio on jatkuva, kutsutaan sitä käänteisfunktion haaraksi. Annetaan tälle tarkka määritelmä:

MÄÄRITELMÄ 1.25. Olkoot $f : U \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $D \subset f(U)$ alue. Käänteisfunktion *haara alueessa* D on jatkuva funktio $g : D \to U$, jolle $f(g(z)) = z$ kaikilla $z \in D$.

Käänteisfunktion haara on selvästi injektio, sillä ehdosta $g(z_1) = g(z_2)$ seuraa, että $z_1 = f(g(z_1)) = f(g(z_2)) = z_2$.

Käänteisfunktion haara on myös analyyttinen määritelmän mukaisessa alueessa. Ennen tämän todistamista tarvitaan aputulos, jonka nojalla käänteisfunktion haara g on analyyttinen silloin, kun funktion f derivaatalla ei ole nollakohtia kyseisessä alueessa.

LEMMA 1.26. *Oletetaan, että $f : U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja että g on käänteisfunktion haara alueessa D. Olkoot piste $z_0 \in D$ ja $w_0 = g(z_0)$. Jos $f'(w_0) \neq 0$, niin g on differentioituva pisteessä z_0 ja $g'(z_0) = 1/f'(w_0)$. Näin ollen siis, jos funktiolla f' ei ole nollakohtia joukossa $g(D)$, niin g on analyyttinen joukossa D ja $g'(z) = 1/f'(g(z))$.*

TODISTUS. Koska g on injektio alueessa D, voidaan valita piste $z \in D$, jolle $z \neq z_0$ ja $w = g(z)$. Tällöin siis on myös $w \neq w_0$. Nyt

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(z) - g(z_0)}{f(g(z)) - f(g(z_0))} = \frac{w - w_0}{f(w) - f(w_0)} \to \frac{1}{f'(w_0)},$$

kun $z \to z_0$, sillä g on jatkuva koko joukossa D. □

Myös seuraavat määritelmä ja lause ovat tarpeellisia, kun osoitetaan käänteisfunktion haaran analyyttisyys. Muuten ne eivät ole tutkielman kannalta olennaisia, joten lauseen todistus ohitetaan.

MÄÄRITELMÄ 1.27. Kompleksitason avoimen joukon U osajoukko E on *joukon U diskreetti osajoukko*, jos joukolla E ei ole kasautumispistettä, joka kuuluu joukkoon U. Lauseen 1.9 nojalla ei siis ole olemassa pistettä $z_0 \in U$, jota joukon $E\setminus\{z_0\}$ jonon $\{z_n\}$ mikään osajono lähestyisi.

Olkoot f kompleksiarvoinen funktio, jonka määrittelyjoukko sisältää joukon U. Funktio f on *joukon U diskreetti kuvaus*, jos jokaiselle $w \in \mathbb{C}$ joukko $E_w = \{z \in U : f(z) = w\}$ on joukon U diskreetti osajoukko.

LAUSE 1.28 (Diskreetin kuvauksen lause). *Jos funktio f on analyyttinen ja ei-vakio tasoalueessa D, niin f on joukon D diskreetti kuvaus.*

Todistus. Todistukseen tarvitaan jälleen tuloksia, jotka tässä tutkielmassa sivuutetaan. Katso [**8**] s. 307. □

Nyt päästään viimein osoittamaan käänteisfunktion haaran analyyttisyys.

Lause 1.29. *Olkoot U kompleksitason avoin joukko, $f : U \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja g käänteisfunktion haara alueessa D. Tällöin g on analyyttinen funktio.*

Todistus. Määritelmän nojalla $g : D \to U$ on jatkuva funktio, jolle $f(g(z)) = z$ kaikilla $z \in D$. Nyt siis tulee osoittaa, että g on differentioituva jokaisessa joukon D pisteessä.

Nyt lauseen 1.7 nojalla joukko $g(D)$ on yhtenäinen ja lauseen 1.2 nojalla on olemassa joukon U komponentti G, joka sisältää tämän yhtenäisen joukon $g(D)$. Jos $w_1 = g(z_1)$ ja $w_2 = g(z_2)$, missä $z_1, z_2 \in D$ ja $z_1 \neq z_2$, niin $f(w_1) = z_1 \neq z_2 = f(w_2)$, joten funktio f ei siis ole vakio komponentissa G. Tällöin siis f' ei häviä joukossa G.

Sovelletaan diskreetin kuvauksen lausetta 1.28 derivaattafunktioon f', jolloin sen nojalla joukko $E = \{w \in G : f'(w) = 0\}$ on joukon G diskreetti osajoukko. Valitaan mielivaltaisesti piste $z_0 \in D$ ja merkitään $w_0 = g(z_0)$. Jos nyt $w_0 \notin E$, on g analyyttinen lemman 1.26 nojalla.

Jos $w_0 \in E$, voidaan diskreettisyyden nojalla valita $r > 0$, jolle $E \cap B(w_0, r) = \{w_0\}$. Koska g on jatkuva pisteessä z_0, voidaan valita avoin kiekko $B(z_0, s) \subset D$, jolle $g(B(z_0, s)) \subset B(w_0, r)$. Koska g on injektio ja $g(z_0) = w_0$, on kaikille $z \in B(z_0, s)\setminus\{z_0\}$ $g(z) \in B(w_0, r)\setminus\{w_0\}$, eli $g(z) \notin E$.

Kuten aiemmin, lemman 1.26 nojalla g on analyyttinen joukossa $B(z_0, s)\setminus\{z_0\}$. Koska g on jatkuva kiekossa $B(z_0, s)$, on lauseen 1.24 nojalla g analyyttinen myös pisteessä z_0. □

Injektiivisellä analyyttisellä kuvauksella on käänteisfunktio, joka on myös analyyttinen. Tämän osoittamiseen tarvitaan avoimen kuvauksen lause. Avoin kuvaus kuvaa avoimen joukon avoimet osajoukot avoimiksi joukoiksi:

Määritelmä 1.30. Olkoot f kompleksiarvoinen funktio, jonka määrittelyjoukko sisältää avoimen joukon V. Jos joukon V jokaiselle avoimelle osajoukolle U joukko $f(U)$ on avoin, sanotaan funktiota f joukon V *avoimeksi kuvaukseksi.*

Analyyttinen funktio on avoin kuvaus:

Lause 1.31. *Jos funktio f on analyyttinen ja ei-vakio tasoalueessa D, niin se on joukon D avoin kuvaus. Erityisesti $f(D)$ on alue.*

Tämän lauseen todistamiseen tarvitaan seuraavaa aputulosta, jonka todistus ohitetaan tässä yhteydessä, sillä se on työläs, eikä sen esittäminen ole olennaista tutkielman kannalta (katso [**8**] s. 344-346). Määritellään kuitenkin sitä varten ensin nollakohdan kertaluku.

Määritelmä 1.32. Olkoot f analyyttinen ja ei-vakio jossakin avoimessa joukossa G, piste $a \in G$ siten, että $f(a) = 0$ ja $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Piste a on funktion f *m-kertainen nollakohta*, jos on olemassa joukossa G analyyttinen funktio g siten, että

$$g(a) \neq 0 \quad \text{ja} \quad f(z) = (z-a)^m g(z) \;\; \text{kaikille } z \in G.$$

LEMMA 1.33. *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen avoimessa joukossa U, piste z_0 kuuluu joukkoon U ja z_0 on yhtälön $f(z) - w_0 = 0$ $m-$kertainen juuri. Olkoon $r > 0$ pieni luku, jolle pätee seuraavat ehdot: suljettu kiekko $\overline{B}(z_0, r)$ sisältyy joukkoon, U ja $f(z) \neq w_0$ ja $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \overline{B}(z_0, r) \backslash \{z_0\}$.*

Määritellään $s = s(r) > 0$ siten, että $s = \min\{|f(z) - w_0| : z \in \partial(B(z_0, r))\}$. Tällöin $G = \{z \in B(z_0, r) : f(z) \in B(w_0, s)\}$ on alue. Erityisesti, jokaiselle pisteelle $w \in B(w_0, s) \backslash \{w_0\}$, joukko $E_w = \{z \in B(z_0, r) : f(z) = w\}$ koostuu täsmälleen m kappaleesta joukon G pisteitä.

LAUSEEN 1.31 TODISTUS. Olkoon $U \subset D$ avoin joukko. Nyt tulee osoittaa, että joukko $f(U)$ on avoin. Olkoon $w_0 \in f(U)$ siten, että $w_0 = f(z_0)$, missä $z_0 \in U$.

Valitaan $r > 0$ siten, että $\overline{B}(z_o, r) \subset U$ ja lemman 1.33 ehdot, $f(z) \neq w_0$ ja $f'(z) \neq 0$, toteutuvat kaikilla $z \in \overline{B}(z_o, r) \backslash z_0$. Jälkimmäinen vaatimus on mahdollinen, sillä f on analyyttinen ja ei-vakio joukossa D. Lemma 1.33 osoittaa, että jokainen $w \in B(w_0, s)$, missä $s = \min\{|f(z) - w_0| : z \in \partial(B(z_0, r))\}$, kuuluu joukkoon $f(B(z_0, r))$, eli myös joukkoon $f(U)$. Siispä $f(U)$ on avoin joukko ja erityisesti $f(D)$ on avoin joukko. Koska lauseen 1.7 nojalla tämä joukko on myös yhtenäinen, se on alue. $\square$

Nyt meillä on välineet osoittaa, että analyyttisen kuvauksen käänteiskuvaus on analyyttinen:

LAUSE 1.34. *Olkoot D kompleksitason alue ja $f : D \to \mathbb{C}$ injektiivinen analyyttinen kuvaus. Tällöin käänteiskuvaus $f^{-1} : f(D) \to D$ on myös analyyttinen.*

TODISTUS. Lauseen 1.31 nojalla joukko $D' = f(D)$ on alue. Osoitetaan, että f^{-1} on jatkuva.

Olkoot $z_0 \in D'$ ja $w_0 = f^{-1}(z_0)$. Osoitetaan siis, että kun $\epsilon > 0$, voidaan valita $\delta > 0$ siten, että $f^{-1}(B(z_0, \delta)) \subset B(w_0, \epsilon)$. Nyt $U = D \cap B(w_0, \epsilon)$ on joukon D avoin osajoukko, joka sisältää pisteen w_0. Jälleen lauseen 1.31 nojalla $U' = f(U)$ on joukon D' avoin osajoukko, joka sisältää pisteen z_0. Siis $f^{-1}(U') = U$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että $B(z_0, \delta) \subset U'$. Tällöin $f^{-1}(B(z_0, \delta))$ on joukon U osajoukko, eli siis myös joukon $B(w_0, \epsilon)$ osajoukko. Nyt siis on $|f^{-1}(z_0) - f^{-1}(z)| < \epsilon$ kun $|z_0 - z| < \delta$, joten f^{-1} on jatkuva joukon D' pisteissä.

Näin ollen funktio $g := f^{-1}$ toteuttaa lauseen 1.29 oletukset alueessa D', jolloin tästä lauseesta seuraa, että f^{-1} on analyyttinen. $\square$

Tiedetään, että eksponenttifunktio e^z ei ole injektio kompleksitasossa, joten sillä ei voi olla käänteiskuvausta. Tästä syystä luvun $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ logaritmi on mikä tahansa luku $w \in \mathbb{C}$, jolle $e^w = z$. Merkitään $w = \log(z)$. Voidaan helposti osoittaa (katso [**8**] s. 15), että $w = \log(z)$ jos ja vain jos $w = \ln|z| + i(\mathrm{Arg}(z) + k2\pi)$, missä $\mathrm{Arg}(z)$ on vektorin z ja kompleksitason reaaliakselin välinen kulma, jolle $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$ ja $\ln|z|$ on luonnollinen logartimi vektorin z pituudesta. Logaritmin päähaaraa merkitään $\mathrm{Log}(z)$ ja sille pätee $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$.

Määritellään seuraavaksi logaritmin haara funktioille. Olkoot D alue ja $f : D \to \mathbb{C}$ identtinen kuvaus, eli $f(z) = z$. Logaritmin haara alueessa D on analyyttinen funktio $g : D \to \mathbb{C}$, jolle $e^{g(z)} = z = f(z)$ kaikilla $z \in D$. Jotta tällainen funktio olisi olemassa, origo ei voi sisältyä alueeseen D. Entäpä, jos f olisikin jokin muu alueessa D analyyttinen funktio? Onko tällöin olemassa analyyttistä funktiota $g : D \to \mathbb{C}$, jolle $e^g = f$ alueessa D? Määritellään ensin funktion f logaritmin haara ja vastataan sen jälkeen tähän kysymykseen.

MÄÄRITELMÄ 1.35. Olkoot D alue ja funktio f analyyttinen tässä alueessa. Analyyttinen funktio $g : D \to \mathbb{C}$ on *funktion f logaritmin haara alueessa* D, jos sille pätee $e^{g(z)} = f(z)$ kaikilla $z \in D$.

On selvää, että jos funktiolla f on nollakohtia alueessa D, logaritmin haaraa ei voi olla olemassa. Tämä ehto ei kuitenkaan riitä, kuten seuraava lause osoittaa.

LAUSE 1.36. *Olkoon f analyyttinen funktio, jolla ei ole nollakohtia alueessa D. Logaritmin* $\log f(z)$ *haara alueessa D on olemassa jos ja vain jos*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = 0$$

kaikille suljetuille käyrille γ alueessa D. Jos g on funktion f logaritmin haara alueessa D, niin kokoelma kaikista tällaisista haaroista muodostuu funktioista $g + 2k\pi i$, missä k on kokonaisluku.

TODISTUS. Oletetaan ensin, että g on logaritmin haara alueessa D. Tällöin $e^{g(z)} = f(z)$ koko alueessa D. Derivoimalla tämä kummaltakin puolelta, saadaan

$$g'(z)e^{g(z)} = g'(z)f(z) = f'(z).$$

Koska f ei saa arvoa 0 alueessa D, saadaan $g'(z) = f'(z)/f(z)$, kun $z \in D$. Näin ollen on siis

$$\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \int_\gamma g'(z)dz = 0,$$

lauseen 1.19 nojalla.

Oletetaan nyt, että funktion f'/f integraaliehto pätee alueessa D. Tällöin lauseen 1.20 nojalla on olemassa funktion f'/f primitiivi tässä alueessa. Olkoon F tämä primitiivi. Kiinnitetään nyt piste $z_0 \in D$ ja määritellään funktio $g : D \to \mathbb{C}$ siten, että $g(z) = F(z) - F(z_0) + \mathrm{Log} f(z_0)$. Tällöin myös g on funktion f'/f primitiivi alueessa D. Funktio $G = fe^{-g}$ on analyyttinen alueessa D ja sen derivaatalle pätee

$$\begin{aligned} G'(z) &= f'(z)e^{-g(z)} - f(z)e^{-g(z)}g'(z) \\ &= f'(z)e^{-g(z)} - f(z)e^{-g(z)}[f'(z)/f(z)] = 0 \end{aligned}$$

kaikille $z \in D$. Toisin sanoen G on vakio alueessa D. Lisäksi

$$G(z_0) = f(z_0)e^{-g(z_0)} = f(z_0)e^{\mathrm{Log} f(z_0)} = \frac{f(z_0)}{f(z_0)} = 1,$$

eli $G(z) = 1$ kaikilla $z \in D$. Toisin sanoen siis $e^{g(z)} = f(z)$ kaikilla $z \in D$. Näin ollen g on siis funktion f logaritmin haara alueessa D.

Todistetaan vielä viimeinen väite. Jos g ja h ovat funktion f logaritmin haaroja alueessa D, niin todistuksen ensimmäisen osan nojalla $g' = h' = f'/f$ alueessa D. Näin ollen funktion $l = h - g$ derivaatta on nolla koko alueessa, joten $l(z)$ on vakio kaikilla $z \in D$. Merkitään $l(z) = c$. Nyt mille tahansa luvulle $z \in D$ on

$$e^c = e^{h(z)-g(z)} = \frac{e^{h(z)}}{e^{g(z)}} = \frac{f(z)}{f(z)} = 1,$$

joten $c = 2k\pi i$ jollakin kokonaisluvulla k. Näin ollen on oltava $h = g + 2k\pi i$. Koska mikä tahansa tätä muotoa oleva funktio h on funktion f logaritmin haara alueessa D, on väite todistettu. □

Tarkastellaan vielä luvun lopuksi, mitä tarkoitetaan funktion f residyllä ja millaisia tuloksia residylauseen seurauksena saadaan.

MÄÄRITELMÄ 1.37. Funktiolla f on *eristetty singulariteetti* pisteessä $z = a$, jos on olemassa $R > 0$ siten, että f on määritelty ja analyyttinen joukossa $B(a, R)\backslash\{a\}$, mutta ei joukossa $B(a, R)$.

Pistettä a kutsutaan *poistuvaksi singulariteetiksi*, jos on olemassa analyyttinen funktio $g : B(a, R) \to \mathbb{C}$, jolle $g(z) = f(z)$, kun $0 < |z - a| < R$.

Jos piste $z = a$ on funktion f eristetty singulariteetti ja $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$, kutsutaan pistettä a funktion f *navaksi.*

Olkoon f analyyttinen avoimessa joukossa U lukuunottamatta eristettyjä singulariteettejä. Tällöin on olemassa joukon U diskreetti osajoukko E, jolle pätee: f on analyyttinen joukossa $U\backslash E$, mutta sillä on edellä määritelty singulariteetti kaikissa joukon E pisteissä. Joukkoa E kutsutaan funktion f *singulaarijoukoksi.*

MÄÄRITELMÄ 1.38. Olkoot joukko G avoin ja funktio f määritelty ja analyyttinen joukossa G lukuunottamatta napoja. Tällöin funktio f on *meromorfinen* joukossa G.

LEMMA 1.39 (Laurentin sarjakehitelmä). *Olkoon funktio f analyyttinen alueessa $G = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}$, missä $a \in \mathbb{C}$ ja $0 \leq R_1 < R_2$. Merkitään kaikille $n \in \mathbb{Z}$*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

missä γ on ympyrä $|z - a| = r$ kaikille $R_1 < r < R_2$. Tällöin

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n,$$

joka suppenee tasaisesti joukon G kompakteissa osajoukoissa. Tämä esitys on lisäksi yksikäsitteinen.

TODISTUS. Todistus sivuutetaan, sillä se on työläs, eikä ole olennainen tutkielman kannalta. Katso [**3**] s. 107-108. □

MÄÄRITELMÄ 1.40. Olkoot a funktion f eristetty singulariteetti ja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$$

sen Laurentin sarjakehitelmä joukossa $B(a, r)\backslash\{a\}$, kun $r > 0$. Tällöin funktion f *residy* pisteessä a on

$$\mathrm{Res}(f, a) = a_{-1}$$

.

LAUSE 1.41 (Residylause). *Olkoon f analyyttinen avoimessa joukossa U lukuunottamatta eristettyjä singulariteettejä. Olkoot lisäksi $E \subset U$ funktion f singulaarijoukko* *ja σ äärellinen jono suljettuja käyriä joukossa $U \backslash E$, jolle $n(\sigma, z) = 0$, kun $z \in \mathbb{C} \backslash U$. Tällöin*

$$\int_{\sigma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z \in E} n(\sigma, z) Res(z, f).$$

TODISTUS. Todistus sivuutetaan, katso [**8**] s. 323-325. □

SEURAUS 1.42. *Olkoon f analyyttinen avoimessa joukossa lukuunottamatta eristettyjä singulariteettejään. Olkoot lisäksi $E \subset U$ funktion f singulaarijoukko ja γ yksinkertainen, suljettu käyrä joukossa $U \backslash E$, jolle $n(\gamma, z) = 1$, kun z on käyrän γ sisäpuolella. Lisäksi käyrän γ sisäpuoli D oletetaan kuuluvan joukkoon U. Tällöin*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} Res(z_k, f),$$

missä $z_1, z_2, ..., z_p$ ovat joukon E pisteitä joukossa D.

LAUSE 1.43. *Oletetaan, että funktio f on meromorfinen avoimessa joukossa U. Olkoon γ yksinkertainen, suljettu käyrä joukossa U, jolle $n(\gamma, z) = 1$, kun z on käyrän γ sisäpuolella. Oletetaan, että yksikään funktion f nollakohdista tai navoista ei ole käyrällä γ ja että käyrän sisäpuoli kuuluu joukkoon U. Tällöin*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = Z - P,$$

missä Z on funktion f nollakohtien lukumäärä ja P napojen lukumäärä käyrän γ sisäpuolella, kertaluvut huomioiden.

Ennen tämän lauseen todistamista määritellään vielä navan kertaluku.

MÄÄRITELMÄ 1.44. Olkoon $a \in \mathbb{C}$ funktion f napa. Olkoon lisäksi $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ pienin positiivinen kokonaisluku, jolle funktiolla $z \mapsto (z-a)^m f(z)$ on poistuva singulariteetti pisteessä a. Tällöin a on funktion f *m-kertainen napa*.

LAUSEEN 1.43 TODISTUS. Oletuksen nojalla f ei voi olla identtisesti nolla joukon U komponentissa G, joka sisältää käyrän γ sisäpuolen. Tällöin siis funktio f' on meromorfinen joukossa G. Tästä syystä myös funktio f'/f on meromorfinen kyseisessä joukossa ja sen ainoat singulariteetit ovat funktion f nollat ja navat. Tarkastellaan funktion f m-kertaista nollakohtaa $z_0 \in G$. Tällöin jossain avoimessa kiekossa $B(z_0, r)$ voidaan f esittää muodossa $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, missä g on kiekossa $B(z_0, r)$ analyyttinen funktio, jolla ei ole nollakohtia. Tällöin funktion f derivaatta kiekossa $B(z_0, r)$ on

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z).$$

Näin ollen

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

kun $z \in B(z_0, r) \backslash \{z_0\}$. Koska g'/g on analyyttinen funktio kiekossa $B(z_0, r)$, on z_0 funktion f'/f napa. Lisäksi $Res(z_0, f'/f) = m$ residyn määritelmän nojalla, sillä analyyttiselle funktiolle g'/g residy on $Res(z_0, g'/g) = 0$. Vastaavasti, jos $z_0 \in G$ on funktion f m-kertainen napa, on $Res(z_0, f'/f) = -m$. Nyt seurauksen 1.42 nojalla on

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \sum_{k=1}^{p} Res(z_k, f'/f),$$

missä $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ovat funktion f'/f navat käyrän γ sisäpuolella. Jos funktion f'/f singulariteettien tutkimista jatketaan, huomataan, että residysumma antaa funktion f nollakohtien lukumäärän käyrän γ sisäpuolella vähennettynä sen napojen lukumäärällä tässä joukossa, kun kertaluvut on huomioitu. Näin ollen residysumma on $Z - P$. □

LAUSE 1.45 (Rouchén lause). *Olkoot f ja g meromorfisia funktioita kiekon $\overline{B}(a, R)$ ympäristössä. Oletetaan, että näillä funktioilla ei ole nollakohtia eikä napoja ympyrällä $\gamma = \{z : |z - a| = R\}$. Olkoot Z_f, Z_g (P_f, P_g) funktioiden f ja g nollakohtien (napojen) lukumäärä (kertaluvut huomioiden) ympyrän γ sisällä. Jos*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

ympyrällä γ, niin

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

TODISTUS. Oletuksesta saadaan

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} + 1\right| < \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| + 1$$

ympyrällä γ. Olkoon $\lambda(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, joka on myös meromorfinen funktio. Jos $\lambda(z)$ olisi positiivinen kokonaisluku, saataisiin tälle z epäyhtälöstä $\lambda(z) + 1 < \lambda(z) + 1$, mikä on ristiriita. Funktion f/g on siis kuvattava ympyrä γ joukolle $\mathbb{C}\backslash[0, \infty[$. Jos l on logaritmin haara joukossa $\mathbb{C}\backslash[0, \infty[$, niin $l(f(z)/g(z))$ on funktion $(f/g)'(f/g)^{-1}$ hyvin määritelty primitiivi ympyrän γ ympäristössä. Näin ollen lauseen 1.19 nojalla on

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (f/g)'(f/g)^{-1} = 0.$$

Toisaalta lauseen 1.43 nojalla

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (f/g)'(f/g)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g),$$

joten $Z_f - P_f = Z_g - P_g$. □

LUKU 2

Mittateoriaa

Fraktaaleja tutkittaessa on dimension käsite välttämätön. Dimensioilla voidaan vastata esimerkiksi kysymyksiin: Kuinka iso fraktaali on? Milloin kaksi fraktaalia ovat keskenään jossain määrin samanlaiset? Määritellään ensin mitan ja Lebesguen mitan käsitteet. Näiden käsitteiden jälkeen voidaan määritellä Hausdorffin mitta ja dimensio sekä laatikkodimensio, joita tarvitaan myöhemmin Julian joukkoja tutkittaessa. Tämän luvun pääasiallinen lähde on Falconerin *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications* [**6**].

MÄÄRITELMÄ 2.1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ funktio $\mu : \{A : A \subset (\mathbb{R}^n)\} \to [0, \infty]$ on minkä tahansa osajoukon *mitta*, jos sen arvolle pätee:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- $\mu(A) \leq \mu(B)$, jos $A \subset B$;
- Jos $A_1, A_2, ...$ on numeroituva jono joukkoja, niin

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

  missä yhtäsuuruus pätee, jos joukot A_i ovat erillisiä Borel-joukkoja.

Yleensä mittateoriassa mitta on funktio, joka kuvaa joukot ei-negatiivisiksi reaaliluvuiksi, joka on numeroituvasti additiivinen ja joka on määritelty joukon X osajoukkojen jollekin σ-algebralle $\mathcal{M}$. Sanotaan, että σ-algebra joukossa X on kokoelma $\mathcal{M} \subset \{B : B \subset X\}$, jolle pätee seuraavat ominaisuudet:

- $\emptyset \in \mathcal{M}$;
- $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{M}$;
- $A_i \in \mathcal{M}, ; i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

Joukon X Borel-joukkojen kokoelma on pienin σ-algebra, joka sisältää avoimet (tai yhtäpitävästi suljetut) joukon X osajoukot.

Tässä tutkielmassa noudatetaan määritelmää 2.1.

MÄÄRITELMÄ 2.2 (Lebesguen mitta). Jos $A = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R} : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ suuntaissärmiö, niin joukon A n-ulottuvuuksinen tilavuus on

$$vol^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Tällöin *n-ulottuvuuksinen Lebesguen mitta* $\mathscr{L}^n$ määritellään

$$\mathscr{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Usein merkitään $\mathscr{L}^1(A) = length(A)$, $\mathscr{L}^2(A) = area(A)$, $\mathscr{L}^3(A) = vol(A)$ ja $\mathscr{L}^n(A) = vol^n(A)$.

2.1. Hausdorffin mitta ja dimensio

Fraktaalien matemaattisten ominaisuuksien ymmärtämiseksi on Hausdorffin mitan ja dimension käsitteiden ymmärtäminen välttämätöntä. Hausdorffin dimension arvo on usein matemaattisesti hankala laskea. Se voidaan kuitenkin määrittää kaikille joukoille ja sitä on matemaattisesti helppo käsitellä. Tästä syystä Hausdorffin dimensio on tärkeä dimensio ja erityisesti fraktaaleille se on tärkein dimensio.

Määritellään ensin mielivaltaisen joukon U halkaisija sekä δ-peitto, joita tarvitaan Hausdorffin mitan määrittelyssä.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoon U jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä osajoukko. Joukon U *halkaisija* on $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Jos $\{U_i\}$ koostuu äärellisestä määrästä joukkoja, joiden halkaisija on korkeintaan δ siten, että jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, sanotaan, että $\{U_i\}$ on joukon F *δ-peitto.*

Oletetaan vielä, että $s > 0$. Tällöin kaikille $\delta > 0$ on

$$\mathscr{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ on joukon } F\ \delta\text{-peitto} \right\}. \tag{2.1}$$

Kun $\delta \to 0$, vähenee sallittujen peittojen määrä. Jos nyt $0 < \delta_1 < \delta_2$, niin $\mathscr{H}_{\delta_1}^s(F) \geq \mathscr{H}_{\delta_2}^s(F)$. Näin saadaan määriteltyä Hausdorffin mitta:

MÄÄRITELMÄ 2.5. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukon F *s-ulottuvuuksinen Hausdorffin mitta* on

$$\mathscr{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}_\delta^s(F) = \sup_{\delta > 0} \mathscr{H}_\delta^s(F).$$

Raja-arvo on olemassa kaikille F ja se voi olla 0 tai ∞.

Osoitetaan, että Hausdorffin mitta täyttää mitan määritelmän.

LAUSE 2.6. *$\mathscr{H}^s$ on mitta.*

TODISTUS.
- Selvästi on $\mathscr{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$, jolloin myös $\mathscr{H}^s(\emptyset) = 0$.
- Olkoon $E \subset F$. Tällöin jokainen joukon F δ-peitto on sitä myös joukolle E. Näin ollen infimumin määritelmän nojalla on selvästi $\mathscr{H}_\delta^s(E) \leq \mathscr{H}_\delta^s(F)$, jolloin myös $\mathscr{H}^s(E) \leq \mathscr{H}^s(F)$.
- Olkoot $F_1, F_2, ...$ numeroituva kokoelma joukkoja. Olkoon $U_{i,j}$ joukon F_i δ-peitto, siten, että
$$\sum_{j=1}^{\infty} |U_{i,j}|^s \leq \mathscr{H}_\delta^s(F_i) + \frac{\epsilon}{2^i},$$
missä $\epsilon > 0$. Tällöin joukko $\bigcup_{j,i=1}^{\infty} U_{i,j}$ on joukon $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ δ-peitto. Näin ollen määritelmän nojalla on
$$\begin{aligned}\mathscr{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) &\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |U_{i,j}|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mathscr{H}_\delta^s(F_i) + \frac{\epsilon}{2^i}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}_\delta^s(F_i) + \epsilon.\end{aligned}$$

On siis $\mathscr{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathscr{H}^s_\delta(F_i)$, joten kun $\delta \to 0$, niin saadaan $\mathscr{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathscr{H}^s(F_i)$.
Myös yhtäsuuruus Borel-joukoille voidaan osoittaa, katso [**5**] s. 2 Theorem 1(ii) ja s. 61-62 Theorem 1.

□

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukoille n-ulottuvuuksinen Hausdorffin mitta on vakiokertoimella varustettu n-ulottuvuuksinen Lebesguen mitta. Jos F on Borel-joukko, niin

$$\mathscr{H}^n(F) = c_n \mathscr{L}^n(F),$$

missä vakio $c_n = \frac{\alpha(n)}{2^n}$ on n-ulottuvuuksisen pallon, jonka halkaisija on 1, tilavuus. Tässä $\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, missä $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ on gammafunktio. Tämän yhtäsuuruuden todistaminen on työlästä, katso [**5**], s. 70-71.

Lause 2.7. (1) *Olkoot $F \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : F \to \mathbb{R}^m$ kuvaus siten, että*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha, \quad (x, y \in F)$$

missä $c, \alpha > 0$ ovat vakioita. Tällöin kaikille s on

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}^s(F).$$

(2) *Olkoot $F \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : F \to \mathbb{R}^m$ kuvaus siten, että*

$$|f(x) - f(y)| \geq c|x-y|^\beta, \quad (x, y \in F)$$

missä $c, \beta > 0$ ovat vakioita. Tällöin kaikille s on

$$\mathscr{H}^{s/\beta}(f(F)) \geq c^{s/\beta}\mathscr{H}^s(F).$$

Todistus. (1) Jos $\{U_i\}$ on joukon F δ-peitto, on $|f(F \cap U_i)| \leq c|U_i|^\alpha$, ja tällöin $\{f(F \cap U_i)\}$ on joukon $f(F)$ ϵ-peitto, missä $\epsilon = c\delta^\alpha$.
Siispä

$$\sum_i |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s,$$

joten

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}_\epsilon(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}^s_\delta(F).$$

Kun $\delta \to 0$, myös $\epsilon \to 0$, joten väite on todistettu.

(2) Oletuksesta seuraa, että funktio f on injektio, joten sillä on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1} : f(F) \to \mathbb{R}^n$. Koska $|f(x) - f(y)| \geq c|x-y|^\beta$, niin $|f^{-1}(x) - f(y)^{-1}| \geq c^{-1/\beta}|x-y|^{1/\beta}$. Siispä kohdan (1) todistuksen nojalla on

$$\mathscr{H}^{s\beta}(f^{-1}(f(F))) \leq c^{-s}\mathscr{H}^s(f(F)),$$

josta seuraa, että

$$\mathscr{H}^{s/\beta}(f(F)) \geq c^{s/\beta}\mathscr{H}^s(F).$$

□

Lause 2.8 (Skaalausominaisuus). *Jos* $F \subset \mathbb{R}$ *ja* $\lambda > 0$*, niin*

$$\mathscr{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathscr{H}^s(F),$$

missä $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$.

Todistus. Olkoon $f : F \to \mathbb{R}$ kuvaus siten, että $f(x) = \lambda x$ kaikilla $x \in F$. Tällöin siis $f(F) = \lambda F$ ja $|f(x) - f(y)| = \lambda |x - y|$. Näin ollen lauseen 2.7 nojalla $\mathscr{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathscr{H}^s(F)$. □

Jos $t > s$ ja $|U_i| \leq \delta$ kaikilla i, on

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s, \tag{2.2}$$

josta määritelmän nojalla saadaan: jos $\mathscr{H}^s(F) < \infty$, on $\mathscr{H}^t(F) = 0$ kaikilla $s < t$. Toisaalta epäyhtälöstä (2.2) saadaan

$$\delta^{s-t} \mathscr{H}^t_\delta(F) \leq \mathscr{H}^s_\delta(F).$$

Tällöin siis, jos $\mathscr{H}^t(F) > 0$, niin $\mathscr{H}^s(F) = \infty$ kaikilla $s < t$.
On siis olemassa kriittinen piste s, jossa $\mathscr{H}^s(F)$ "hyppää" arvosta ∞ arvoon 0. Tämä kriittinen piste on *Hausdorffin dimensio*.

Määritelmä 2.9 (Hausdorffin dimensio). *Hausdorffin dimensio* on

$$\dim_H F = \inf\{s : \mathscr{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathscr{H}^s(F) = \infty\},$$

joten

$$\mathscr{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{jos } s < \dim_H F \\ 0 & \text{jos } s > \dim_H F. \end{cases}$$

Jos $s = \dim_H F$, niin $0 \leq \mathscr{H}^s(F) \leq \infty$.

Hausdorffin dimensiolla on vastaava ominaisuus kuin Hausdorffin mitalla (vrt. Lause 2.7):

Lause 2.10. (1) *Olkoot* $F \subset \mathbb{R}^n$ *ja kuvaus* $f : F \to \mathbb{R}^n$ *siten, että*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (x, y \in F).$$

Tällöin $\dim_H f(F) \leq (1/\alpha) \dim_H F$.

(2) *Olkoot* $F \subset \mathbb{R}^n$ *ja kuvaus* $f : F \to \mathbb{R}^n$ *siten, että*

$$|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|^\beta \quad (x, y \in F).$$

Tällöin $\dim_H f(F) \geq (1/\beta) \dim_H F$.

Todistus. (1) Jos $s > \dim_H F$, niin Lauseen 2.7 nojalla on $\mathscr{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathscr{H}^s(F) = 0$. Näin ollen $\dim_H f(F) \leq s/\alpha$ kaikille $s > \dim_H F$.

(2) Jos $s < \dim_H F$, niin Lauseen 2.7 nojalla on $\mathscr{H}^{s/\beta}(f(F)) \leq c^{s/\beta} \mathscr{H}^s(F) = \infty$. Näin ollen $\dim_H f(F) \geq s/\beta$ kaikille $s < \dim_H F$.

□

Seuraus 2.11.
- *Jos* $f : F \to \mathbb{R}^m$ *on Lipschitz-kuvaus,* $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$, $x, y \in F$, *niin* $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$.
- *Jos* $f : F \to \mathbb{R}^m$ *on bi-Lipschitz-kuvaus,* $c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|$, $x, y \in F$ *ja* $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, *niin* $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

TODISTUS. Kummatkin kohdat seuraavat suoraan lauseesta 2.10, kun $\alpha = \beta = 1$. □

LAUSE 2.12. *Jos joukolle* $F \subset \mathbb{R}^n$ *pätee* $\dim_H F < 1$, *niin* F *on täysin epäyhtenäinen.*

TODISTUS. Olkoot x, y joukon F erilliset pisteet. Määritellään kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ siten, että $f(z) = |z-x|$. Nyt siis on $|f(z)-f(w)| = ||z-x|-|w-x|| \leq |z-x-w+x| = |z-w|$, jolloin seurauksen 2.11 ja oletuksen nojalla $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$. Nyt, koska on $\dim_H f(F) < 1$, on Hausdorffin dimension määritelmän nojalla $\mathscr{H}^1(f(F)) = 0$. Joukko $f(F)$ on siis reaaliakselin $\mathbb{R}$ osajoukko, jonka Hausdorffin pituus nolla. Tällöin myös sen yksiulotteinen Lebesguen mitta eli pituus on nolla, joten selvästi joukon $f(F)$ komplementti on tiheä. Nyt valitsemalla $r \notin f(F)$ siten, että $0 < r < f(y)$, saadaan

$$F \subset \{z \in F : |z-x| < r\} \cup \{z \in F : |z-x| > r\}.$$

Nyt siis $x \in \{z \in F : |z-x| < r\}$ ja $y \in \{z \in F : |z-x| > r\}$, joten x ja y kuuluvat joukon F erillisiin avoimiin komponentteihin. Näin ollen määritelmän 1.1 nojalla joukko F on täysin epäyhtenäinen. □

2.2. Laatikkodimensio

Määritellään nyt lisäksi toinen dimension käsite, laatikkodimensio. Laatikkodimension arvon laskeminen on paljon helpompaa kuin Hausdorffin dimension, ja siksi se onkin eräs käytetyimmistä dimensioista. Myöhemmin osoitamme vielä, että laatikkodimensiolla ja Hausdorffin dimensiolla on myös yhteys toisiinsa.

MÄÄRITELMÄ 2.13. Olkoon F avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä ja rajoitettu osajoukko. Joukon F *ylempi* ja *alempi laatikkodimensio* on tällöin

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

ja jos raja-arvo on olemassa, on joukon F *laatikkodimensio*

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

missä $N_\delta(F)$ on pienin lukumäärä joukkoja, joiden halkaisija on δ ja jotka peittävät joukon F.

Laatikkodimension $N_\delta(F)$ voidaan määritellä monin eri tavoin. Seuraavaksi osoitetaan, että erilaiset luvun $N_\delta(F)$ määrittelyt antavat saman laatikkodimension arvon.

LAUSE 2.14. *Määritelmän 2.13* $N_\delta(F)$ *voi olla mikä tahansa seuraavista:*

(1) *joukkojen, joiden halkaisija on enintään* δ *ja jotka peittävät joukon* F, *pienin lukumäärä;*
(2) *suljettujen pallojen, joiden säde on* δ *ja jotka peittävät joukon* F, *pienin lukumäärä;*
(3) *kuutioiden, joiden sivun pituus on* δ *ja jotka peittävät joukon* F, *pienin lukumäärä;*

(4) *lukumäärä koordinaattiakselien suuntaisista kuutioista, joiden sivun pituus on δ, joilla voi olla keskenään yhteisiä sivuja, mutta ovat muuten erillisiä, ja jotka leikkaavat joukon F;*
(5) *erillisten pallojen, joiden säde on δ ja joiden keskipiste kuuluu joukkoon F, suurin lukumäärä.*

TODISTUS. Todistetaan ensin, että kohdassa (1) määritelty $N_\delta(F)$ ja kohdassa (4) määritelty $N'_\delta(F)$ antavat saman dimension arvon:
Olkoot kuutiot esimerkiksi muotoa

$$[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta],$$

missä $m_1, ..., m_n$ ovat kokonaislukuja. Olkoon $N'_\delta(F)$ näiden kuutioiden, jotka leikkaavat joukkoa F, lukumäärä. Tällöin selvästi kuutiot muodostavat kokoelman joukkoja, joita on $N'_\delta(F)$ kappaletta, joiden halkaisija on $\delta\sqrt{n}$ ja ja jotka peittävät joukon F. Näin ollen on

$$N_{\delta\sqrt{n}} \leq N'_\delta(F).$$

Jos $\delta\sqrt{n} < 1$, niin

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\sqrt{n} - \log\delta},$$

joten ottamalla raja-arvot, kun $\delta \to 0$, saadaan

$$\underline{\dim}_B F \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

ja

$$\overline{\dim}_B F \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Toisaalta mikä tahansa joukko, jonka halkaisija on δ, sisältyy 2^n kuutioon, joiden sivun pituus on δ ja jotka ovat koordinaattiakselin suuntaisia ja joilla voi olla keskenään yhteisiä sivuja. Tällöin

$$N'_\delta(F) \leq 2^n N_\delta(F).$$

Näin ollen saadaan

$$\frac{N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \frac{\log 2^n N_\delta(F)}{-\log\delta} = \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} - \frac{\log 2^n}{\log\delta} \leq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta},$$

jolloin antamalla $\delta \to 0$ saadaan

$$\underline{\dim}_B F \geq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

ja

$$\overline{\dim}_B F \geq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Siispä vertaamalla määritelmään 2.13, huomataan, että voidaan valita luvuksi $N_\delta(F)$ luku $N'_\delta(F)$.

Vastaavasti voidaan osoittaa, että $N_\delta(F)$ voi olla myös pienin lukumäärä mielivaltaisesti järjestäytyneitä kuutioita, joiden sivun pituus on δ ja jotka peittävät joukon F. Saadaan siis, että myös kohdissa (1) ja (3) määriteltujen joukkojen lukumäärät antavat saman laatikkodimension arvon. Yhtäpitävyys seuraa, kun huomataan, että minkä tahansa kuution, jonka sivun pituus on δ, halkaisija on $\delta\sqrt{n}$ ja että mikä tahansa joukko, jonka halkaisija on enintään δ sisältyy kuutioon, jonka sivun pituus on δ. Samankaltaisella päättelyllä voidaan osoittaa myös kohdissa (1) ja (2) määriteltujen joukkojen lukumäärät antavat saman dimension.

Osoitetaan vielä lopuksi, että myös kohdassa (1) määritelty $N_\delta(F)$ ja kohdassa (5) määritelty $N''_\delta(F)$ antavat saman dimension:

Olkoon $N''_\delta(F)$ suurin lukumäärä erillisiä palloja, joiden säde on δ ja keskipiste kuuluu joukkoon F. Olkoot $B_1, ..., B_{N''_\delta}$ tällaisia palloja. Jos $x \in F$, niin pisteen x etäisyys jostain pallosta B_i on oltava korkeintaan δ. Muutoin voidaan lisätä pallojen kokoelmaan vielä yksi pallo, jonka keskipiste on x ja säde δ. Näin ollen $N''_\delta(F)$ palloa, jotka ovat pallojen B_i kanssa samankeskisiä, mutta joiden säde on 2δ, peittävät joukon F, jolloin

$$N_{4\delta} \leq N''_\delta(F).$$

Toisaalta olkoot $U_1, ..., U_k$ kokoelma joukkoja, joiden halkaisija on korkeintaan δ ja jotka peittävät joukon F. Koska joukon U_j täytyy peittää pallojen B_i keskipisteet, on jokaiseen palloon B_i kuuluttava ainakin yksi joukoista U_j. Koska pallot ovat erillisiä, on oltava vähintään yhtä monta joukkoa U_j kuin palloja B_i, joten saadaan

$$N''_\delta(F) \leq N_\delta(F).$$

Ottamalla logaritmit ja raja-arvot samalla tavoin kuin aiemminkin nähdään, että määritelmään 2.13 voidaan valita myös $N_\delta(F) = N''_\delta(F)$. □

2.3. Hausdorffin dimension ja laatikkodimension yhteys

On tärkeää ymmärtää, että Hausdorffin dimensiolla ja laatikkodimensiolla on yhteys toisiinsa. Seuraavassa luvussa osoitetaan, että itsesimilaaristen joukkojen Hausdorffin dimension ja laatikkodimension arvot ovat samat.

Hausdorffin mitan yhteydessä on määritelty

$$\mathscr{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ on joukon } F \ \delta\text{-peitto}\right\}.$$

Jos nyt joukko F voidaan peittää $N_\delta(F)$ joukolla, joiden halkaisija on δ, saadaan

$$\mathscr{H}^s_\delta(F) \leq N_\delta(F)\delta^s.$$

Jos $1 < \mathscr{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathscr{H}^s_\delta(F)$, niin $0 < \log N_\delta(F) + s\ \log\delta$. Näin ollen

$$s \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta},$$

joten Hausdorffin dimension määritelmästä seuraa

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

Karkeasti sanottuna laatikkodimension määritelmästä saadaan $N_\delta(F) \approx \delta^{-s}$ pienillä δ, missä $s = \dim_B F$. Tarkemmin ottaen saadaan

$$N_\delta(F)\delta^s \to \infty, \quad \text{jos } s < \dim_B F$$

ja

$$N_\delta(F)\delta^s \to 0, \quad \text{jos } s > \dim_B F.$$

On myös

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf\left\{ \sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ on joukon } F \text{ äärellinen } \delta\text{-peitto}\right\},$$

joka on helposti verrattavissa Hausdorffin mitan yhteydessä määriteltyyn

$$\mathscr{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ on joukon } F\ \delta\text{-peitto}\right\}.$$

Hausdorffin dimensioita laskettaessa asetetaan siis painoja $|U_i|^s$ peittäville joukoille U_i, kun taas laatikkodimensiossa paino on kaikille peittäville joukoille sama δ^s.

LUKU 3

Itsesimilaariset joukot

3.1. Itsesimilaarisuus

Monet fraktaalit muodostuvat osista, jotka muistuttavat tavalla tai toisella kokonaisuuttaan. Tällaista itsesimilaarisuutta käytetään usein määrittelemään fraktaaleja, vaikka se ei olekaan fraktaalien ainoita ominaisuuksia. Lisäksi itsesimilaarisuutta voi esiintyä myös joukoilla, jotka eivät ole fraktaaleja. Tämän luvun lähteenä on Falconerin *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.* [**6**]

Määritellään ensin käsitteet kutistus, similariteetti ja invariantti joukko:

MÄÄRITELMÄ 3.1. Kuvaus $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on *kutistus*, jos on olemassa vakio c siten, että $0 < c < 1$ siten, että $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Vakiota c kutsutaan kutistuksen *suhteeksi*.

Jos yhtäsuuruus pätee, eli $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$, niin S on *similariteetti*. Similariteetti muuntaa joukot geometrisesti samanlaisiksi.

MÄÄRITELMÄ 3.2. Olkoon D avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu osajoukko. Kuvaus $S : D \to D$ on *kutistus* joukossa D, jos on olemassa $0 < c < 1$ siten, että $|S(x)-S(y)| \leq c|x-y|$ kaikilla $x, y \in D$. Olkoot $S_1, ..., S_m$ kutistuksia. Joukon D osajoukko F on *invariantti* kuvaukselle S_i, jos

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Olkoon $\mathscr{S}$ joukon D kaikkien epätyhjien ja kompaktien osajoukkojen luokka. Kun tässä luokassa määritellään etäisyysfunktio kahden joukon välille, saadaan siitä metrinen avaruus.

MÄÄRITELMÄ 3.3. Joukon $A \in \mathscr{S}$ δ-ympäristö on joukko pisteitä, joiden etäisyys joukosta A on enintään δ, toisin sanoen $A_\delta = \{x \in D : |x - a| \leq \delta \text{ jollekin } a \in A\}$.

Luokka $\mathscr{S}$ saadaan metriseksi avaruudeksi määrittelemällä kahden joukon välinen etäisyys $d(A, B)$.

MÄÄRITELMÄ 3.4. Kahden joukon, A ja B, välinen *etäisyys*, $d(A, B)$ on pienin δ siten, että joukon A δ-ympäristö sisältää joukon B ja päinvastoin:

$$d(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ ja } B \subset A_\delta\}.$$

Todistus sille, että näin määriteltynä $(\mathscr{S}, d)$ on metrinen avaruus, ohitetaan tässä (katso [**4**] s. 66).

Seuraava lause osoittaa, että kutistusten perhe määrittelee yksikäsitteisen, kompaktin ja invariantin joukon, joka on epätyhjä.

LAUSE 3.5. *Olkoot $S_1, ..., S_m$ kutistuksia joukossa $D \in \mathbb{R}^n$ siten, että*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y|,$$

missä $c_i < 1$ kaikilla i. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen, epätyhjä ja kompakti joukko F siten, että se on invariantti kutistukselle S_i

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Lisäksi, jos määritellään muunnos S epätyhjien kompaktien joukkojen luokassa $\mathscr{S}$ siten, että

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)$$

ja merkitään, että S^k on muunnoksen S $k:s$ iteraatio siten, että $S^0(E) = E$, $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$, kun $k \geq 1$, niin tällöin on

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

jokaiselle joukolle $E \in \mathscr{S}$, jolle $S_i(E) \subset E$ kaikilla i.

TODISTUS. Koska $\mathscr{S}$ on epätyhjien kompaktien joukkojen luokka, muuntaa S tämän luokan joukot joukoiksi, jotka myös kuuluvat tähän luokkaan. Olkoon $E \in \mathscr{S}$ joukko, jolle $S_i(E) \subset E$ kaikilla i. (Tällainen joukko E on aina olemassa, sillä sellaiseksi voidaan valita esimerkiksi riittävän suuri pallo. Tällöin on $S_i(E) \subset E$ kaikilla i, sillä muunnokset S_i ovat kutistuksia.) Näin ollen $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$, jolloin siis $S^k(E)$ on pienenevä jono kompakteja ja epätyhjiä joukkoja. Välttämättä on siis oltava kompakti ja epätyhjä leikkaus $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$. Koska $S^k(E)$ on pienenevä jono, on oltava $F = S(F)$, joten F on invariantti.

Osoitetaan vielä, että F on yksikäsitteinen. Huomataan, että, jos $A, B \in \mathscr{S}$, niin

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)\right) \leq \max_{1\leq i\leq m} d(S_i(A), S_i(B)),$$

koska, jos on δ siten, että δ-ympäristö $(S_i(A))_\delta$ sisältää joukon $S_i(B)$, niin myös $\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A)\right)_\delta$ sisältää joukon $\bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)$. Siispä

$$d(S(A), S(B)) \leq \left(\max_{1\leq i\leq m} c_i\right) d(A, B). \tag{3.1}$$

Näin ollen, jos $S(A) = A$ ja $S(B) = B$ ovat kumpikin invariantteja, on $d(A, B) = 0$ ja $A = B$. □

Itseasiassa iteraatioiden jono $S^k(E)$ suppenee kohti joukkoa F millä tahansa joukolla $E \subset \mathscr{S}$:

Epäyhtälöstä (3.1) seuraa, että $d(S(E), F) = d(S(E), S(F)) \leq cd(E, F)$, joten $d(S^k(E), F) = d(S^k(E), S^k(F)) \leq c^k d(E, F)$, missä $c = \max_{1\leq i\leq m} c_i < 1$. Tällöin siis $d(S^k(E), F) \to 0$. Siispä joukkoa F voidaan approksimoida joukolla $S^k(E)$. Jos F on fraktaali kutsutaan approksimaatiota usein fraktaalin F esifraktaaliksi.

Jos $S_i(E)$ kuuluu joukkoon E jokaisella i ja $x \in F$, niin yhtälöstä $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$ seuraa, että on olemassa jono $(i_1, i_2, ...)$, jolle $x \in S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(E)$ kaikilla k. Siispä

$$F = \bigcup \{x_{i_1,i_2,...}\},$$

missä

$$x_{i_1,i_2,...} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \cdots S_{i_k}(E).$$

LEMMA 3.6. *Jos yhdiste*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$$

on erillinen, niin joukko F on täysin epäyhtenäinen.

TODISTUS. Jos $x_{i_1,i_2,...} \neq x_{i'_1,i'_2,...}$, niin on olemassa k, jolle $(i_1, ..., i_k) \neq (i'_1, ..., i'_k)$. Näin ollen on erilliset suljetut joukot $S_{i_1} \circ \cdots S_{i_k}(F)$ ja $S_{i'_1} \circ \cdots S_{i'_k}(F)$, joihin pisteet $x_{i_1,i_2,...}$ ja $x_{i'_1,i'_2,...}$ kuuluvat. Näiden suljettujen joukkojen sisältä voidaan valita avoimet joukot siten, että ne ovat erilliset ja pisteet $x_{i_1,i_2,...}$ ja $x_{i'_1,i'_2,...}$kuuluvat niihin. Näin ollen F on määritelmän nojalla epäyhtenäinen. □

Joukko F, joka on invariantti similariteettien kokoelmalle on itsesimilaarinen joukko:

MÄÄRITELMÄ 3.7. Olkoot $S_1, ..., S_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ similariteetteja ja joukko F invariantti näille similariteeteille siten, että

$$F = \bigcup_{i=1}^{k} S_i(F).$$

Tällöin F on *itsesimilaarinen* joukko.

3.2. Itsesimilaaristen joukkojen dimensiot

Itsesimilaarisille joukoille laatikko- ja Hausdorffin dimensioiden arvot ovat samat, kunhan seuraavaksi määritelty avoimen joukon ehto on voimassa. Tämä ehto takaa sen, että joukon F komponentit $S_i(F)$ eivät ole "liikaa" päällekäin.

MÄÄRITELMÄ 3.8. Sanotaan, että similariteettien kokoelma $\{S_i\}$ toteuttaa *avoimen joukon ehdon*, jos on olemassa epätyhjä, rajoitettu ja avoin joukko V siten, että

$$V \supset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(V),$$

missä yhdiste on erillinen.

Seuraava lause antaa siis ehdot sille, milloin $\dim_H F = \dim_B F$. Samoin lause antaa myös keinon laskea tämän arvon. Seuraavia lauseita tarvitaan myöhemmin Julian joukkoja tarkasteltaessa. Niiden todistaminen ei kuitenkaan ole tutkielman kannalta olennaista, joten todistukset ohitetaan.

LAUSE 3.9. *Oletetaan, että similariteetit S_i, joiden suhteet ovat c_i $(1 \leq i \leq m)$, toteuttavat avoimen joukon ehdon avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Jos F on invariantti joukko siten, että*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F), \tag{3.2}$$

niin $\dim_H F = \dim_B F = s$, *missä s saadaan yhtälöstä*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1. \tag{3.3}$$

Lisäksi tälle s on $0 < \mathscr{H}^s(F) < \infty$.

TODISTUS. Todistus on työläs, katso [**6**] s. 119-120. □

Seuraava lause antaa arvion dimension ylärajalle, kun F on invariantti kutistuksille, jotka eivät ole similariteetteja.

LAUSE 3.10. *Olkoot $S_1, ..., S_m$ kutistuksia avoimessa joukossa $D \subset \mathbb{R}^n$, ja suhteet $c_i < 1$ kaikilla i. Tällöin* $\dim_H F \leq s$ *ja* $\overline{\dim}_B F \leq s$, *missä* $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$.

TODISTUS. Todistus on helppo, katso [**6**] s. 123. □

Seuraavaksi arvioidaan dimension alarajaa, kun komponentit $S_i(F)$ ovat erillisiä, jolloin siis joukon F on oltava täysin epäyhtenäinen.

LAUSE 3.11. *Olkoot $S_1, ..., S_m$ kutistuksia avoimessa joukossa $D \subset \mathbb{R}^n$ siten, että*

$$b_i|x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)|,$$

missä $x, y \in D$ ja $0 < b_i < 1$ kaikilla i. Oletetaan, että F on invariantti kutistuksille S_i,

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F),$$

missä yhdiste on erillinen. Tällöin $\dim_H F \geq s$, *missä*

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^s = 1.$$

TODISTUS. Todistus on melko työläs, katso [**6**] s. 123-124. □

LUKU 4

Montelin-Caratheodoryn lause

Montelin-Caratheodoryn lause on tärkeässä osassa, kun seuraavassa luvussa määrittelemme Julian joukot. Julian joukot voidaan määritellä kahdella tavalla ja tämän lauseen avulla saadaan osoitettua, että nämä määritelmät ovat keskenään ekvivalentit. Tämä luku käytetäänkin Montelin-Caratheodoryn lauseen todistamiseen. Todistukseen tarvitaan Montelin lausetta, joten todistamme ensin sen. Aluksi kuitenkin määritellään kompleksitason normaali perhe, jota tarvitsemme myöhemmin myös Julian joukkojen määrittelyssä. Tämän luvun lähteinä toimii Palkan *An Introduction to Complex Function Theory* [**8**] sekä Conwayn *Functions of One Complex Variable* [**3**].

MÄÄRITELMÄ 4.1 (Normaali perhe). Olkoon $C(U)$ kokoelma kaikista kompleksiarvoisista funktioista, jotka ovat jatkuvia avoimessa joukossa $U \subset \mathbb{C}$. Osaperhe $\mathcal{F} \subset C(U)$ on *normaali joukossa* U, jos jokaisella jonolla $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ on osajono $\{f_{n_k}\}$, joka suppenee tasaisesti jokaisessa joukon U kompaktissa osajoukossa.

Määritellään lisäksi joitakin osaperheiden $\mathcal{F} \subset C(U)$ ominaisuuksia:

MÄÄRITELMÄ 4.2. Osaperhe $\mathcal{F} \subset C(U)$ on *pisteittäin rajoitettu joukossa* U, jos kaikilla kiinteillä $z \in U$ joukko $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ on rajoitettu joukko kompleksilukuja.

Perhe $\mathcal{F}$ on *lokaalisti rajoitettu joukossa* U, jos sen jäsenet ovat *tasaisesti rajoitettuja* kaikissa kompakteissa osajoukoissa $K \subset U$. Näin on, jos on olemassa vakio $m = m(K)$ siten, että $|f(z)| \leq m$ kaikilla $z \in K$ ja $f \in \mathcal{F}$.

MÄÄRITELMÄ 4.3. Perhe $\mathcal{F} \subset C(U)$ on *yhtäjatkuva pisteessä* $z_0 \in U$, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, kun $|z - z_0| < \delta$ ja $f \in \mathcal{F}$. Tässä δ ei saa riippua funktioista f.

Jos perhe $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva kaikissa joukon U pisteissä, se on *perheen* $C(U)$ *yhtäjatkuva osaperhe.*

Seuraavien kahden lemman avulla saadaan osoitettua funktiojonon normaalisuus.

LEMMA 4.4. *Olkoon* $\{f_n\}$ *yhtäjatkuvan osaperheen* $\mathcal{F} \subset C(U)$ *funktiojono. Oletetaan, että tämä jono suppenee pisteittäin joukossa* U*. Tällöin se suppenee tasaisesti jokaisessa joukon* U *kompaktissa osajoukossa.*

TODISTUS. Olkoot f jonon $\{f_n\}$ pisteittäinen rajafunktio joukossa U, ja K joukon U mielivaltainen kompakti osajoukko. Nyt lauseen 1.11 nojalla riittää osoittaa, että $\{f_n\}$ on tasainen Cauchy-jono joukossa K. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että näin ei ole.

Olkoon nyt $\epsilon > 0$, jolle ei ole olemassa kokonaislukua N siten, että $|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$ kaikilla $z \in K$ ja $m > n \geq N$. Erityisesti kaikilla kokonaisluvuilla k valinnasta $N = k$ seuraa, että on oltava indeksit n_k ja m_k, $m_k > n_k \geq k$, joille jollain $z_k \in K$ on $|f_{m_k}(z) - f_{n_k}(z)| \geq \epsilon$.

Olkoon nyt $\{z_k\}$ joukon K jono. Koska K on kompakti, on jonolla $\{z_k\}$ ainakin yksi kasautumispiste z_0 lauseen 1.13 nojalla. Koska perhe $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva, on olemassa $\delta > 0$ siten, että millä tahansa z, jolle $|z - z_0| < \delta$, pätee kaikilla n

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Nyt, kun $k \to \infty$, myös $n_k \to \infty$ ja $m_k \to \infty$, josta seuraa, että

$$|f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| \to |f(z_0) - f(z_0)| = 0,$$

kun $k \to \infty$. Tällöin on olemassa indeksi k_0 siten, että

$$|f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| < \frac{\epsilon}{3},$$

kun $k \geq k_0$. Koska $\{z_k\}$ kasautuu pisteeseen z_0, voidaan valita indeksi $k \geq k_0$, jolle $|z_k - z_0| < \delta$. Näin ollen tällä indeksin k valinnalla ja kolmioepäyhtälöä soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq |f_{m_k}(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \\ &\leq |f_{m_k}(z_k) - f_{m_k}(z_0)| + |f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| + |f_{n_k}(z_0) - f_{n_k}(z_k)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Näin ollen $\{f_n\}$ on tasainen Cauchy-jono joukossa K ja näin ollen suppenee tasaisesti tässä joukon U kompaktissa osajoukossa. □

LEMMA 4.5. *Olkoon $\{f_n\}$ yhtäjatkuvan osaperheen $\mathcal{F} \subset C(U)$ funktiojono. Oletetaan, että jono $\{f_n(\xi)\}$ on suppeneva jokaisella $\xi \in S$, missä S on joukon U tiheä osajoukko. Tällöin $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti joukon U kompakteissa osajoukoissa.*

TODISTUS. Edellisen lemman 4.4 nojalla riittää osoittaa, että $\{f_n\}$ suppenee pisteittäin joukossa U. Riittää siis osoittaa, että jokaisella $z \in U$ jono $\{f_n(z)\}$ on Cauchy-jono. Asetetaan $z \in U$ ja $\epsilon > 0$. Koska $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f_n(w) - f_n(z)| < \frac{\epsilon}{3}$ kaikilla indekseillä n, kun $|w - z| < \delta$.

Nyt koska S on tiheä joukossa U, voidaan valita $\xi \in S$ siten, että $|\xi - z| < \delta$. Määritelmän nojalla jono $\{f_n(\xi)\}$ on suppeneva. Näin ollen tämä jono on Cauchy-jono, jolloin on olemassa kokonaisluku N siten, että $|f_m(\xi) - f_n(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$, kun $m > n \geq N$. Siispä

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_m(\xi)| + |f_m(\xi) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f_n(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

kun $m > n \geq N$. Jono $\{f_n(z)\}$ on siis Cauchy-jono kaikilla $z \in U$, joten se suppenee pisteittäin joukossa U. Näin ollen lemman 4.4 nojalla väite on todistettu. □

Ennen Montelin lausetta, käsitellään Arzelà-Ascolin lause, joka karakterisoi normaaleja osaperheitä $\mathcal{F} \subset C(U)$. Tätä lausetta tarvitaan myös Montelin lauseen todistuksessa.

LAUSE 4.6 (Arzelà-Ascolin lause). *Osaperhe $\mathcal{F} \subset C(U)$ on normaali joukossa U jos ja vain jos se on sekä yhtäjatkuva että pisteittäin rajoitettu tässä avoimessa joukossa.*

TODISTUS. Oletetaan ensin, että $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva ja pisteittäin rajoitettu. Olkoon $\{f_n\}$ perheen $\mathcal{F}$ jono, jolloin pitää osoittaa, että sillä on osajono $\{f_{n_k}\}$, joka suppenee tasaisesti. Määritellään joukko $S_0 = \{z \in U : \Re z$ ja $\Im z$ ovat rationaalisia$\}$, missä $\Re z$ on kompleksiluvun $z = x + iy$ reaaliosa $x \in \mathbb{R}$ ja $\Im z$ sen imaginääriosa $y \in \mathbb{R}$. S_0 on tiheä joukossa U, sillä rationaaliluvut ovat reaaliakselin tiheä osajoukko. Järjestetään joukon S_0 alkioista jono $\{z_n\}$. Nyt voidaan määritellä kompleksilukujen jono $\{f_n(z_1)\}$, joka on rajoitettu perheen $\mathcal{F}$ pisteittäisen rajoittuvuuden nojalla. Nyt Bolzano-Weierstrassin lauseen nojalla (lause 1.13) tällä jonolla on vähintään yksi kasautumispiste kompleksitasossa. Olkoon w_1 tällainen piste. Tällöin lauseen 1.9 nojalla on jonolla $\{f_n(z_1)\}$ osajono, joka suppenee kohti pistettä w_1. Siis toisin sanoen, on olemassa jono indeksejä $m_1^{(1)} < m_2^{(1)} < m_3^{(1)} \cdots$ siten, että

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k^{(1)}}(z_1) = w_1.$$

Merkintä $m_k^{(1)}$ viittaa siihen, että tämä kokonaislukujen jono on muodostettu pisteen z_1 suhteen. Vastaavasti voidaan toimia pisteen z_2 suhteen, jolloin saadaan muodostettua jonon $\{m_k^{(1)}\}$ osajono $m_1^{(2)} < m_2^{(2)} < m_3^{(2)} \cdots$, jolle

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k^{(2)}}(z_2) = w_2.$$

Jatkamalla tätä induktiivisesti, jokaiselle l saadaan kasvava jono positiivisia kokonaislukuja $\{m_k^{(l)}\}$ siten, että

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k^{(l)}}(z_l) = w_l$$

ja jonka osajono on $\{m_k^{(l+1)}\}$. Kun $k \geq 1$, asetetaan $n_k = m_k^{(k)}$, jolloin $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Näin ollen $\{f_{n_k}\}$ on jonon $\{f_n\}$ aito osajono. Lisäksi, kiinnitetylle $l \geq 1$ jono $\{f_{n_k}\}$ on jonon $\{f_{m_k^{(l)}}\}$ osajono, lukuunottamatta mahdollisesti ensimmäistä $l-1$ termiä. Tämän seurauksena saadaan

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_l) = \lim_{k\to\infty} f_{m_k^{(l)}}(z_l) = w_l$$

kaikilla l. Siispä kaikilla pisteillä $\xi \in S_0$ on jonolla $\{f_{n_k}(\xi)\}$ olemassa raja-arvo. Tällöin lemman 4.5 nojalla jonon $\{f_n\}$ osajono $\{f_{n_k}\}$ suppenee tasaisesti joukon U jokaisella kompaktissa osajonossa, eli tällöin $\mathcal{F}$ on normaali joukossa U.

Oletetaan nyt, että $\mathcal{F}$ on normaali joukossa U. Olkoon $z_0 \in U$. Jos $\mathcal{F}$ ei ole yhtäjatkuva pisteessä z_0, on olemassa $\epsilon > 0$, jolle ei ole olemassa $\delta > 0$, joka toteuttaisi yhtäjatkuvuuden ehdot. Erityisesti, jos valitaan $\delta = n^{-1}$, missä n on positiivinen kokonaisluku, ehdot eivät toteudu. Tällöin voidaan jokaisella n valita funktio $f_n \in \mathcal{F}$ ja $z_n \in U$ siten, että $|z_n - z_0| < n^{-1}$, mutta $|f_n(z_n) - f_n(z_0)| \geq \epsilon$.

Oletuksen nojalla jonolla $\{f_n\}$ on osajono $\{f_{n_k}\}$, joka suppenee tasaisesti joukon U kompakteissa osajoukoissa. Olkoon f tämä rajafunktio. Tällöin f on jatkuva lauseen 1.12 nojalla ja kuuluu siten perheeseen $C(U)$. Funktion f jatkuvuudesta seuraa, että voidaan valita $\delta > 0$ siten, että suljettu kiekko $K = B(z_0, \delta)$ kuuluu joukkoon U ja $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ kaikilla $z \in K$. Koska siis oletuksen nojalla $f_{n_k} \to f$ tasaisesti joukossa K ja koska $z_{n_k} \to z_0$, voidaan valita indeksi k, jolle $|f_{n_k}(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}$

kaikilla $z \in K$ ja jolle $z_{n_k} \in K$. Tällä k saadaan

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z_0)| \\ &\leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})| + |f(z_{n_k}) - f(z_0)| + |f(z_0) - f_{n_k}(z_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

Tämän ristiriidan nojalla on perheen $\mathcal{F}$ oltava yhtäjatkuva pisteessä z_0, joten sen on oltava perheen $C(U)$ yhtäjatkuva osaperhe.

Lopuksi, jos $\mathcal{F}$ ei olisi pisteittäin rajoitettu joukossa U, olisi olemassa piste $z_0 \in U$ ja jono $\{f_n\} \in \mathcal{F}$, jolle $|f_n(z_0)| \to \infty$, kun $n \to \infty$. Tällaisella jonolla ei ole osajonoa, joka suppenisi tasaisesti joukon U kompakteissa osajoukoissa, joten sen olemassaolo olisi ristiriidassa sen kanssa, että perheen $\mathcal{F}$ oletetaan olevan normaali joukossa U. Näin ollen perheen $C(U)$ on oltava sekä yhtäjatkuva että pisteittäin rajoitettu joukossa U. □

Perheen $C(U)$ normaali osaperhe on siis pisteittäin rajoitettu. Seuraava lause vahvistaa tämän väitteen ja osoittaa, että normaali osaperhe on itse asiassa lokaalisti rajoitettu.

Lause 4.7. *Normaali osaperhe $\mathcal{F} \subset C(U)$ on lokaalisti rajoitettu joukossa U.*

Todistus. Olkoon K joukon U kompakti osajoukko. Tehdään antiteesi: jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle n voidaan valita funktio $f_n \in \mathcal{F}$ ja piste $z_n \in K$, joille $|f_n(z_n)| \geq n$. Koska $\mathcal{F}$ on normaali perhe, on jonolla $\{f_n\}$ osajono $\{f_{n_k}\}$, joka suppenee tasaisesti joukossa K. Olkoon tämä rajafunktio $f \in C(U)$. Jatkuva funktio $|f|$ saavuttaa maksimiarvonsa suljetussa joukossa K (lause 1.14). Olkoon m tämä maksimiarvo. Koska $f_{n_k} \to f$ tasaisesti joukossa K, on olemassa indeksi k_0 siten, että $|f_{n_k}(z) - f(z)| < 1$ kaikilla $z \in K$, kun $k \geq k_0$. Siispä, kun $k \geq k_0$, saadaan kolmioepäyhtälöä käyttämällä

$$n_k \leq |f_{n_k}(z_{n_k})| \leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})| + |f(z_{n_k})| \leq 1 + m.$$

Koska $n_k \to \infty$, kun $k \to \infty$, tämä on ristiriita. Näin ollen $\mathcal{F}$ on oltava lokaalisti rajoitettu joukossa U. □

Nyt pääsemme todistamaan Montelin lauseen.

Lause 4.8 (Montelin lause). *Olkoon $\mathcal{F}$ funktioperhe, jonka funktiot ovat analyyttisiä avoimessa joukossa U. Oletetaan, että $\mathcal{F}$ on lokaalisti rajoitettu joukossa U. Tällöin $\mathcal{F}$ on normaali perhe tässä joukossa.*

Todistus. Koska perhe $\mathcal{F}$ on lokaalisti rajoitettu, se on selvästi myös pisteittäin rajoitettu joukossa U. Näin ollen Arzelà-Ascolin lauseen 4.6 nojalla riittää osoittaa, että $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva joukossa U. Asetetaan nyt piste $z_0 \in U$ ja osoitetaan, että yhtäjatkuvuus pätee tässä pisteessä.

Olkoon $r > 0$ siten, että suljettu kiekko $K = \overline{B}(z_0, 2r)$ kuuluu joukkoon U. Oletuksen nojalla on olemassa vakio $m = m(K)$, jolle $|f(\zeta)| \leq m$, kun $f \in \mathcal{F}$ ja $\zeta \in K$. Sovelletaan Cauchyn integraalikaavaa: Olkoot $z \in B(z_0, r)$, ja $\gamma : [0, 2\pi] \to U$,

$\gamma(t) = z_0 + 2re^{it}$. Tällöin saadaan arvio kaikilla $f \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(z-z_0)f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \right| \\ &= \frac{|z-z_0|}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \right| \\ &\leq \frac{|z-z_0|}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|}. \end{aligned}$$

Nyt koska $\gamma(t) = z_0 + 2re^{it}$ on $|\zeta - z_0| = 2r$, $|\zeta - z| \leq r$ ja $|f(\zeta)| \leq m$, saadaan

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \frac{|z-z_0|m}{2\pi} \int_\gamma \frac{|d\zeta|}{2r^2} = \frac{m|z-z_0|}{2\pi r^2} \int_\gamma |d\zeta| \\ &= \frac{m|z-z_0|}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} 2r dt = \frac{m|z-z_0|}{2\pi r^2} 4\pi r = \frac{m|z-z_0|}{r} \end{aligned}$$

Asetetaan $\epsilon > 0$, ja valitaan $\delta = \min\{r, r\epsilon/m\}$. Tällöin kaikilla $f \in \mathcal{F}$ on $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, kunhan $|z - z_0| < \delta$. Näin ollen $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva joukossa U ja on siis yhtäjatkuvana ja pisteittäin rajoitettuna normaali perhe joukossa U. □

Vielä ennen Montelin-Caratheodoryn lausetta esitellään muutama tulos ja niiden seuraus, joita tarvitaan tämän todistamiseen. Hurwitzin lauseen nojalla suppenevan funktiojonon funktioilla sekä jonon rajafunktiolla on yhtä monta nollakohtaa, kun tietyt ehdot ovat voimassa. Montelin-Caratheodoryn lauseen todistamiseen tarvitaan erityisesti Hurwitzin lauseen seurausta.

LAUSE 4.9 (Hurwitzin lause). *Olkoot U alue ja $\{f_n\} \subset C(U)$ jono, joka suppenee kohti funktiota f. Jos $f \not\equiv 0$, $\overline{B}(a, R) \subset U$ ja $f(z) \neq 0$, kun $|z - a| = R$, niin on olemassa kokonaisluku N siten, että kaikilla $n \geq N$, on funktioilla f ja f_n yhtä monta nollakohtaa joukossa $B(a, R)$.*

TODISTUS. Koska $f \neq 0$, kun $|x - a| = R$, on

$$\delta = \inf\{|f(z)| : |z - a| = R\} > 0.$$

Nyt f_n lähestyy tasaisesti funktiota f joukossa $\{z : |z - a| = R\}$, joten on olemassa kokonaisluku N siten, että jos $n \geq N$ ja $|z - a| = R$, niin $f_n(z) \neq 0$ ja

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{1}{2}\delta < |f(z)| \leq |f(z)| + |f_n(z)|.$$

Koska funktioilla f ja f_n ei ole eristettyjä singulariteettejä, niillä ei myöskään ole napoja, joten Rouchén lauseesta 1.45 seuraa, että funktioilla f ja f_n on yhtä monta nollakohtaa joukossa $B(a, R)$. □

SEURAUS 4.10. *Jos U on alue, jono $\{f_n\} \subset C(U)$ suppenee kohti funktiota $f \in C(U)$ ja mikään funktio f_n ei saa arvoa nolla joukossa U, niin joko $f \equiv 0$ tai f ei koskaan saa arvoa nolla.*

Montelin-Caratheodoryn lauseen todistamisessa tärkeässä roolissa on Schottkyn lause, joka osoittaa, että tietyin ehdoin analyyttisen funktion kuva voidaan rajoittaa kiekkoon. Tämä lause muodostetaan ja todistetaan myöhemmin, mutta sitä varten määritellään ensin Landaun vakio ja osoitetaan, että tietyin ehdoin analyyttinen funktio kuvaa yksikköympyrän alueeksi, joka sisältää kiekon, jonka säde on Landaun vakio.

MÄÄRITELMÄ 4.11. Olkoon $\mathcal{F}$ kaikkien yksikköympyrässä analyyttisten funktioiden kokoelma. Määritellään kaikille $f \in \mathcal{F}$, joille $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$,

$$\lambda(f) = \sup\{r : f(D) \text{ sisältää } r\text{-säteisen kiekon}\}.$$

Landaun vakio L on

$$L = \inf\{\lambda(f) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Landaun vakiolle on $L > 0$, mikä seuraa seuraavasta Blochin lauseesta. Lauseen todistus kuitenkin sivuutetaan tässä.

LAUSE 4.12 (Blochin lause). *Olkoon f analyyttinen funktio alueessa, joka sisältää yksikköympyrän sulkeuman $\overline{D}$, ja jolle $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Tällöin on olemassa kiekko $S \subset D$, jossa funktio f on injektiivinen ja jolle joukko $f(S)$ sisältää kiekon, jonka säde on $\frac{1}{72}$.*

TODISTUS. Todistus on melko työläs, katso [**3**] s. 293-295. □

LEMMA 4.13. *Jos f on analyyttinen alueessa, joka sisältää kiekon $D = \{z : |z| < 1\}$ sulkeuman, $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$, niin $f(D)$ sisältää kiekon, jonka säde on L.*

TODISTUS. Riittää osoittaa, että $f(D)$ sisältää kiekon, joka säde on $\lambda := \lambda(f)$, sillä kiekko jonka säde on L sisältyy tähän kiekkoon. Jokaiselle n on olemassa piste $\alpha_n \in f(D)$ siten, että $B(\alpha_n, \lambda - 1/n) \subset f(D)$. Nyt siis $\alpha_n \in f(D) \subset f(\overline{D})$, joista viimeinen joukko on kompakti. Näin ollen on olemassa piste $\alpha \in f(\overline{D})$ ja osajono $\{a_{n_k}\}$, jolle $\alpha_{n_k} \to \alpha$. Jos $w \in B(\alpha, \lambda)$, niin $|w - \alpha| < \lambda$ ja voidaan valita n_0 siten, että $|w - \alpha| < \lambda - 1/n_0$. Nyt on olemassa kokonaisluku $n_1 > n_0$ siten, että

$$|\alpha_n - \alpha| < \lambda - \frac{1}{n_0} - |w - \alpha|,$$

kun $n \geq n_1$. Tällöin on

$$|w - \alpha_n| \leq |w - \alpha| + |\alpha - \alpha_n| < \lambda - \frac{1}{n_0} < \lambda - \frac{1}{n},$$

kun $n \geq n_1$. Siispä $w \in B(\alpha_n, \lambda - 1/n) \subset f(D)$. Koska w valittiin mielivaltaisesti, on $B(\alpha, \lambda) \subset f(D)$. □

SEURAUS 4.14. *Olkoon f analyyttinen alueessa, joka sisältää suljetun kiekon $\overline{B}(0, R)$. Tällöin $f(B(0, R))$ sisältää kiekon, jonka säde on $R|f'(0)|L$.*

Myös seuraavat kaksi lemmaa ovat tarpeen, kun todistetaan Schottkyn lause.

LEMMA 4.15. *Olkoon G yhdesti yhtenäinen alue, eli alue, jolle $\mathbb{C} \backslash G$ on yhtenäinen. Olkoon lisäksi funktio f analyyttinen tässä alueessa. Oletetaan myös, että f ei saa arvoja* 0 *tai* 1*. Tällöin on olemassa analyyttinen funktio g joukossa G siten, että*

$$f(z) = -e^{i\pi \cosh[2g(z)]},$$

kun $g \in G$. Tässä $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ *on hyperbolinen kosini.*

Seuraavaa lausetta tarvitaan tämän lauseen todistamiseen. Sen nojalla funktiolla f on logartimin haara alueessa G. Todistus tälle kuitenkin sivuutetaan, katso [**8**] s. 196-197.

LAUSE 4.16. *Olkoon D kompleksitason alue. Tällöin D on yhdesti yhtenäinen (eli $\mathbb{C}\setminus D$ on yhtenäinen) jos ja vain jos jokaisella funktiolla f, joka on analyyttinen ja ei saa arvoa nolla alueessa D, on olemassa logaritmin haara* $\log f(z)$ *tässä alueessa.*

LAUSEEN 4.15 TODISTUS. Lauseen 4.16 nojalla on olemassa logaritmin $\log f(z)$ haara l, joka on määritelty joukossa G. Olkoon $F(z) = (2\pi i)^{-1} l(z)$. Jos nyt $F(a) = n$ jollakin kokonaisluvulla n, niin $f(a) = e^{2\pi i n} = 1$, mikä on ristiriita. Siispä F ei saa kokonaislukuarvoja, jolloin se ei siis myös saa arvoja 0 tai 1. Nyt voidaan määritellä funktio

$$H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z) - 1}.$$

Tälle funktiolle on $H(z) \neq 0$ kaikilla z, joten on mahdollista määritellä logaritmin $\log H(z)$ haara g joukossa G. Hyperbolisen kosinin määritelmän nojalla on

$$\begin{aligned}\cosh(2g) + 1 &= \frac{1}{2}(e^{2g} + e^{-2g}) + 1 = \frac{1}{2}(e^{g} + e^{-g})^2 = \frac{1}{2}(H + 1/H)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{H^2 + 1}{H}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2F - 2\sqrt{F^2 - F}}{\sqrt{F} - \sqrt{F - 1}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4F(2F - 2\sqrt{F^2 - F} - 1)}{2F - 2\sqrt{F^2 - F} - 1}\right) = 2F = \frac{1}{\pi i} l.\end{aligned}$$

Näin ollen $f = e^{l} = e^{\pi i + \pi i \cosh(2g)} = -e^{\pi i \cosh(2g)}$. □

LEMMA 4.17. *Olkoot G, f ja g kuten lemmassa 4.15. Tällöin joukko $g(G)$ ei sisällä mitään kiekkoa, jonka säde on 1.*

TODISTUS. Olkoot n positiivinen kokonaisluku ja m mikä tahansa kokonaisluku. Jos on olemassa $a \in G$, jolle $g(a) = \pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2} i m \pi$, niin

$$\begin{aligned}2\cosh(2g(a)) &= e^{2g(a)} + e^{-2g(a)} = e^{im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + e^{-im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\mp 2} \\ &= (-1)^m((\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\mp 2}) \\ &= (-1)^m((\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} \mp \sqrt{n-1})^2) \\ &= (-1)^m(2(2n-1)),\end{aligned}$$

eli $\cosh(2g(a)) = (-1)^m(2n-1)$. Tällöin $f(a) = -e^{(-1)^m(2n-1)\pi i}$ ja koska kokonaisluvun $(2n-1)$ on oltava pariton, on $f(a) = 1$. Siispä g ei voi saada arvoja

$$\{\pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2} i m \pi : n \geq 1, m = 0, \pm 1, ...\}.$$

Nämä pisteet ovat suorakulmioiden kärkipisteet, jotka muodostavat tasossa ruudukon. Jokaisen tällaisen suorakulmion korkeus on

$$\left|\frac{1}{2} i m \pi - \frac{1}{2} i(m+1)\pi\right| = \frac{1}{2}\pi < \sqrt{3}$$

ja leveys on $\log(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) > 0$. Funktio $\phi(x) = \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) - \log(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$ on määritelty, kun $x \geq 1$, ja se on vähenevä funktio, sillä sen derivaatta on $\phi'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x}}$, joka on negatiivinen kaikilla $x \geq 1$. Näin ollen minkä tahansa suorakulmion leveys on korkeintaan $\phi(1) = log(1+\sqrt{2}) < \log e = 1$. Siispä minkä tahansa suorakaiteen halkaisija on korkeintaan 2. $\square$

Lause 4.18 (Schottkyn lause). *Olkoot $0 < \alpha < \infty$ ja $0 \leq \beta \leq 1$ ja f analyyttinen funktio yhtenäisessä alueessa, joka sisältää joukon $\overline{B}(0,1)$, ei saa arvoja 0 ja 1, ja jolle $|f(0)| \leq \alpha$. Tällöin on olemassa vakio $c = c(\alpha, \beta)$ siten, että $|f(z)| \leq c(\alpha,\beta)$, kun $|z| \leq \beta$.*

Todistus. Riittää osoittaa, että väite pätee, kun $1 \leq \alpha < \infty$, sillä jos tämä saadaan todistettua, niin $|f(z)| \leq C(1,\beta)$, kun $|f(0)| < \alpha' < 1$ ja $|z| \leq \beta$. Todistetaan tämä kahdessa osassa.

(1) Oletetaan, että $\frac{1}{2} \leq |f(0)| \leq \alpha$. Olkoot funktiot F, H ja g kuten lemmassa 4.15 ja tarkennetaan logaritmien haaroja l ja g seuraavasti:

$$0 \leq \Im l(0) \leq 2\pi,$$
$$0 \leq \Im g(0) \leq 2\pi.$$

Tällöin saadaan

$$|F(0)| = \frac{1}{2\pi} |\log|f(0)| + i\Im l(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \log \alpha + 1.$$

Olkoon $C_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \log\alpha + 1$, jolloin

$$\begin{aligned}
|\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0)-1}| &\leq |\sqrt{F(0)}| + |\sqrt{F(0)-1}| \\
&= e^{\frac{1}{2}\log|F(0)|} + e^{\frac{1}{2}\log|F(0)-1|} \\
&= |F(0)|^{\frac{1}{2}} + |F(0)-1|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + (C_0(\alpha)+1)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Olkoon $C_1(\alpha) = C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + (C_0(\alpha)+1)^{\frac{1}{2}}$. Nyt jos $|H(0)| \geq 1$, on

$$\begin{aligned}
|g(0)| &= |\log|H(0)| + i\Im g(0)| \leq \log|H(0)| + 2\pi \\
&= \log|\sqrt{F(0)} - \sqrt{F(0)-1}| + 2\pi \leq \log C_1(\alpha) + 2\pi.
\end{aligned}$$

Jos $|H(0)| < 1$, saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned}
|g(0)| &\leq -\log|H(0)| + 2\pi = \log\left(\frac{1}{|H(0)|}\right) + 2\pi \\
&= \log|\sqrt{F(0)} + \sqrt{F(0)-1}| + 2\pi \leq \log C_1(\alpha) + 2\pi.
\end{aligned}$$

Olkoon $C_2(\alpha) = \log C_1(\alpha) + 2\pi$.

Jos $|a| < 1$, niin seurauksen 4.14 nojalla joukko $g(B(a, 1-|a|))$ sisältää kiekon, jonka säde on $L(1-|a|)|g'(a)|$. Toisaalta lemman 4.17 nojalla joukko $g(B(0,1))$ ei sisällä joukkoa, jonka säde on 1. Siispä on oltava $L(1-|a|)|g'(a)| < 1$, eli

$$|g'(a)| < (L(1-|a|))^{-1}, \text{ kun } |a| < 1.$$

Jos $|a| < 1$ ja γ on jana $[0, a]$, niin

$$|g(a)| \leq |g(0)| + |g(a) - g(0)| \leq C_2(\alpha) + \left| \int_\gamma g'(z)dz \right|$$
$$\leq C_2(\alpha) + |a| \max\{|g'(z)| : z \in [0, a]\}.$$

On siis

$$|g(a)| \leq C_2(\alpha) + \frac{|a|}{L(1 - |a|)}.$$

Jos $C_3(\alpha, \beta) = C_2(\alpha) + \beta(L(1 - \beta))^{-1}$, niin saadaan

$$|g(z)| \leq C_3(\alpha, \beta),$$

jos $|z| < \beta$. Edelleen, jos $|z| < \beta$, niin

$$|f(z)| = |e^{\pi i \cosh 2g(z)}| \leq e^{\pi |\cosh 2g(x)|} \leq e^{\pi e^{2|g(z)|}} \leq e^{\pi e^{2C_3(\alpha,\beta)}},$$

jolloin määritellään $C_4(\alpha, \beta) = e^{\pi e^{2C_3(\alpha,\beta)}}$.

(2) Oletetaan, että $0 < |f(0)| < \frac{1}{2}$. Tässä tapauksessa $(1 - f)$ toteuttaa kohdan (1) ehdot, joten $|1 - f(z)| \leq C_4(1, \beta)$, jos $|z| \leq \beta$. Siispä $|f(z)| \leq 1 + C_4(1, \beta)$. Määritellään $C(\alpha, \beta) = \max\{C_4(\alpha, \beta), 1 + C_4(1, \beta)\}$, jolloin väite on todistettu.

□

Seuraus 4.19. *Olkoon f analyyttinen funktio yhtenäisessä alueessa, joka sisältää joukon $\overline{B}(0, R)$, ja oletetaan, että f ei saa arvoja 0 ja 1. Jos $C(\alpha, \beta)$ on Schottkyn lauseen vakio ja $|f(0)| \leq \alpha$, niin $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$, kun $|z| \leq \beta R$.*

Schottkyn lause ja sen seuraus osoittavat, että tietynlaiset funktioperheet ovat tasaisesti rajoitettuja yksikkökiekon sopivissa osakiekoissa. Tällaiset funktioperheet ovat Montelin lauseen nojalla normaaleja perheitä. Tätä tarvitaan, kun seuraavaksi osoitetaan Montelin-Caratheodoryn lauseen.

Lause 4.20 (Montelin-Caratheodoryn lause). *Olkoon funktioperhe $\mathcal{F} = \{f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ analyyttinen$\}$. Tällöin $\mathcal{F}$ on normaali joukossa U.*

Todistus. Kiinnitetään piste $z_0 \in U$ ja määritellään perheet $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ siten, että

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \leq 1\} \text{ ja}$$
$$\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\},$$

jolloin $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$. Osoitetaan, että $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ ovat normaaleja joukossa U.

Olkoot $a \in U$ ja γ käyrä pisteestä z_0 pisteeseen a joukossa U. Olkoot $D_0, D_1, \ldots, D_n$ joukon U kiekkoja, joiden keskipisteet ovat $z_0, z_1, \ldots, z_n = a \in |\gamma|$ ja joille $z_{k-1}, z_k \in D_{k-1} \cap D_k$. Tällaiset kiekot ovat olemassa, sillä $|\gamma|$ on avoimen joukon U kompakti osajoukko, jolloin on olemassa positiivinen etäisyys r joukkojen $|\gamma|$ ja U reunojen välillä. Lisäksi kiekkoja voidaan kertoa sopivalla reaaliluvulla siten, että ne menevät päällekäin. Oletetaan myös, että $\overline{D} \subset U$ kaikilla k.

Piste z_0 voidaan siirtää sopivalla kuvauksella origoon, jolloin voidaan soveltaa Schottkyn lausetta 4.18 kiekkoon D_0. Sen nojalla on olemassa vakio c_0, jolle $|f(z)| \leq c_0$, kun $z \in D_0$ ja $f \in \mathcal{G}$. Jos $D_0 = B(z_0, r)$ ja $r < R$ siten, että $\overline{B}(z_0, R) \subset U$, niin seurauksen 4.19 nojalla on $|f(z)| \leq c(1, \beta)$, kun $z \in D_0$ ja $f \in \mathcal{G}$, missä β

on valittu siten, että $r < \beta R$. Siispä vakio c_0 riippuu kiekon D_0 säteestä. Koska myös $z_1 \in D_0$, on $|f(z_1)| \leq c_0$. Nyt Schottkyn lauseen nojalla löytyy vakio c_1, jolle $|f(z)| \leq c_1$, kun $z \in D_1$. Vakio c_1 riippuu nyt vakiosta c_0 eli kiekon D_0 säteestä. Siispä $\mathcal{G}$ on tasaisesti rajoitettu vakiolla c_1 joukossa D_1. Näin jatkamalla saadaan, että $\mathcal{G}$ on tasaisesti rajoitettu joukossa D_n. Annettu joukon U kompakti joukko K voidaan peittää äärellisellä määrällä avoimia joukkoja. Näin ollen $n = n(a)$ on rajoitettu joukossa K ja siten $\mathcal{G}$ on lokaalisti rajoitettu. Nyt Montelin lauseen 4.8 nojalla $\mathcal{G}$ on normaali joukossa U.

Tarkastellaan nyt perhettä $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\}$. Jos $f \in \mathcal{H}$, niin $1/f$ on analyyttinen joukossa U, sillä f ei häviä. Myöskään $1/f$ ei häviä eikä koskaan saa arvoa 1; erityisesti $|(1/f)(z_0)| \leq 1$. Näin ollen $\mathcal{H}' = \{1/f : f \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}'$ on normaali joukossa U. Siispä jonolla $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$ on osajono $\{f_{n_k}\}$ siten, että $\{1/f_{n_k}\}$ suppenee analyyttiseen funktioon h. Nyt seurauksen 4.10 nojalla joko $h \equiv 0$ tai h ei koskaan häviä. Jos $h \equiv 0$ nähdään selvästi, että $f_{n_k}(z) \to \infty$ tasaisesti joukon U kompakteissa osajoukoissa. Jos taas h ei häviä, on $1/h$ analyyttinen, jolloin $f_{n_k}(z) \to 1/h(z)$ tasaisesti joukon U kompakteissa osajoukoissa. Näin ollen siis myös $\mathcal{H}$ on normaali joukossa U. $\square$

Kun Montelin-Caratheodoryn lauseesta muodostetaan negaatio, saadaan tutkielman kannalta hyvin käyttökelpoinen seuraus:

SEURAUS 4.21. *Jos analyyttisten funktioiden perhe $\mathcal{F}$ ei ole normaali joukossa U, niin joukko $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ on koko kompleksitaso lukuunottamatta korkeintaan yhtä pistettä.*

LUKU 5

Julian joukot

Tässä luvussa määritellään Julian joukot ja tutkitaan niiden ominaisuuksia. Lähteenä toimii Falconerin *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications* [**6**].

MÄÄRITELMÄ 5.1. Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksikertoiminen polynomifunktio, jonka asteluku on $n \geq 2$, $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$. Merkintä f^p tarkoittaa yhdistettyä funktiota $\underbrace{f \circ ... \circ f}_{p \text{ kpl}}$.

(1) Jos $f(w) = w$, on w funktion f kiintopiste.
(2) Jos $f^p(w) = w$, jollain kokonaisluvulle $p \geq 1$, on w funktion f jaksollinen piste.
(3) Pienin kokonaisluku $p \geq 1$, jolle $f^p(w) = w$, on pisteen w jakso.
(4) Jakson p rata on $w, f(w), ..., f^p(w)$.
(5) Olkoon w jakson p jaksollinen piste, jolle $(f^p)'(w) = \lambda$. Tällön piste w on

- erityisen puoleensavetävä, jos $\lambda = 0$
- puoleensavetävä, jos $0 \leq |\lambda| < 1$
- neutraali, jos $|\lambda| = 1$
- hylkivä, jos $|\lambda| > 1$.

Tässä luvussa funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oletetaan olevan edellisen määritelmän kaltainen polynomi.

Funktion f *Julian joukko* voidaan määritellä kahdella tavalla. Ensimmäinen määritelmä on intuitiivisesti helpompi ymmärtää:

MÄÄRITELMÄ 5.2. Julian joukko $J(f)$ on funktion f hylkivien jaksollisten pisteiden sulkeuma.

Tehdään tästä yksinkertaisin mahdollinen esimerkki.

ESIMERKKI 5.3. Olkoon $f(z) = z^2$, jolloin sen k:s iteraatio on $f^k(z) = z^{2^k}$. Etsitään tämän funktion jaksolliset pisteet, eli pisteet, joille $f^p(z) = z$. Etsitään siis ratkaisua yhtälölle $z^{2^p} - z = 0$. Eräs ratkaisu tälle on selvästi $z = 0$, muut ratkaisut saadaan ratkaisemalla yhtälö $z^{2^p - 1} = 1$. Etsitään siis ykkösen $2^p - 1$. juuria, joita on $2^p - 1$ kappaletta. Nämä juuret ovat

$$\{e^{\frac{2\pi ik}{2^p - 1}} : k \in \{0, 1, ..., 2^p - 2\}\},$$

sillä $(e^{\frac{2\pi ik}{2^p-1}})^{2^p-1} = e^{2\pi ik} = 1$, kun $k = 1, 2, \ldots, 2^p - 1$. Funktion f jaksolliset pisteet, lukuunottamatta pistettä $z = 0$, ovat hylkiviä, sillä

$$(f^p)'(z) = 2^p z^{2^p - 1},$$

jolloin jaksollisissa pisteissä
$$|(f^p)'(z)| = 2^p.$$
Edellisen määritelmän mukaan Julian joukko $J(f)$ on hylkivien jaksollisten pisteiden sulkeuma. Kun jakso p kasvaa rajatta, tihenee jaksollisten pisteiden määrä yksikköympyrällä, joten niiden sulkeuma $J(f)$ on yksikköympyrä $|z| = 1$.

Kun $|z| < 1$, niin selvästi $f^k(z) \to 0$, kun $k \to \infty$, ja kun $|z| > 1$, niin $f^k(z) \to \infty$. Julian joukko J rajoittaa siis kahta joukkoa, joista toisen pisteet iteroituvat kohti nollaa ja toisen pisteet kohti ääretöntä.

Julian joukkojen toinen määritelmä tehdään normaalien funktioperheiden avulla. Normaalisuus on kuitenkin määriteltävä nyt uudelleen siten, että se sallii myös suppenemisen äärettömyyteen.

Määritelmä 5.4 (Normaali* perhe). Olkoon $C(U)$ kokoelma kaikista kompleksiarvoisista funktioista, jotka ovat analyyttisiä avoimessa joukossa $U \subset \mathbb{C}$. Osaperhe $\mathcal{F} \subset C(U)$ on *normaali* joukossa* U, jos jokaisella jonolla $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ on osajono $\{f_{n_k}\}$, joka suppenee tasaisesti kohti joko rajoitettua analyyttistä funktiota tai ääretöntä jokaisessa joukon U kompaktissa osajoukossa.

Perhe $\mathcal{F}$ on *normaali* pisteessä* $z_0 \in U$, jos on olemassa avoin joukko $V \subset U$, joka sisältää pisteen z_0 ja jossa $\mathcal{F}$ on normaali* perhe.

Normaaliuteen perustuva Julian joukkojen määritelmä on laskennallisesti käyttökelpoisempi, sillä sitä voidaan käsitellä kompleksianalyysin keinoin:

Määritelmä 5.5. Julian joukko on joukko
$$J_0(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{perhe } \left\{f^k\right\}_{k\geq 0} \text{ ei ole normaali}^* \text{ pisteessä } z \right\}.$$

Myöhemmin tässä luvussa osoitetaan, että määritelmät ovat keskenään ekvivalentit, eli $J(f) = J_0(f)$. Ennen kuin tämä voidaan osoittaa, täytyy kuitenkin tutkia ominaisuuksia, joita joukolla $J_0(f)$ on. Osoitetaan aluksi, että joukko $J_0(f)$ on kompakti ja epätyhjä:

Lause 5.6. *Jos funktio f on polynomi, $J_0(f)$ on kompakti.*

Todistus. Joukon $J_0(f)$ komplementti,
$$F_0 = \mathbb{C}\backslash J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{on olemassa avoin joukko } V, \text{ jolle } z \in V \text{ ja } \{f^k\} \\ \text{on normaali}^* \text{ joukossa } V\},$$
on selvästi avoin joukko, joten $J_0(f)$ on suljettu.

Koska f on polynomi, jonka asteluku on suurempi kuin 2, on kolmioepäyhtälön nojalla olemassa r siten, että $|f(z)| \geq 2|z|$, kun $|z| \geq r$. Tällöin $|f^k(z)| > 2^k r$, kun $|z| > r$. Siispä $f^k(z) \to \infty$ tasaisesti avoimessa joukossa $V = \{z : |z| > r\}$. Määritelmän mukaan $\left\{f^k\right\}$ on normaali* joukossa V, joten on oltava $V \subset \mathbb{C}\backslash J_0(f)$. Näin ollen $J_0(f)$ on myös rajoitettu, eli se on kompakti. □

Lause 5.7. *Joukko $J_0(f)$ on epätyhjä.*

Todistus. Oletetaan, että $J_0(f) = \emptyset$. Tällöin kaikille avoimille kiekoille $B(0, r)$, $r > 0$, perhe $\left\{f^k\right\}$ on normaali*. Koska f on polynomi, voidaan r valita niin suureksi, että kiekkoon $B(0, r)$ kuuluu piste z, jolle $|f^k(z)| \to \infty$ sekä kiintopiste w, jolle

$f^k(w) = w$ kaikilla k. Siispä mikään perheen $\{f^k\}$ osajono ei voi supeta tasaisesti mihinkään rajoitettuun funktioon tai äärettömään missään kiekon $B(0,r)$ osajoukossa, joka sisältää pisteet z ja w. Näin ollen $\{f^k\}$ ei ole normaali* perhe, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. □

$J_0(f)$ on invariantti kuvaukselle f, eli joukko ei muutu, kun sitä kuvataan polynomilla f tai sen käänteisfunktiolla.

Lause 5.8. *Joukko $J_0(f)$ on kumpaankin suuntaan invariantti, eli $J_0 = f(J_0) = f^{-1}(J_0)$.*

Todistus. Osoitetaan, että joukon $J_0(f)$ komplementti $F_0(f)$ on invariantti. Olkoon V avoin joukko siten, että $\{f^k\}$ on normaali* perhe joukossa V. Koska f on jatkuva, on $f^{-1}(V)$ avoin. Jonolla $\{f^{k+1}\}$ on osajono $\{f^{k'+1}\}$, joka suppenee tasaisesti joukon V kompakteissa osajoukoissa. Olkoon D joukon $f^{-1}(V)$ kompakti osajoukko. Tällöin $\{f^{k'+1}\}$ suppenee tasaisesti joukossa $f(D)$ ja $\{f^{k'}\}$ suppenee tasaisesti joukossa D. Siispä $\{f^k\}$ on normaali* joukossa $f^{-1}(V)$, joten $F_0 \subset f^{-1}(F_0)$.

Olkoon $f(U)$ avoin joukko siten, että $\{f^{k-1}\}$ on normaali* tässä joukossa. Funktion f jatkuvuuden nojalla myös U on avoin joukko. Jonon $\{f^k\}$ osajono $\{f^{k_i}\}$ suppenee tasaisesti joukon $f(U)$ kompakteissa osajoukoissa. Olkoon E joukon U kompakti osajoukko, jolloin $\{f^{k_i}\}$ suppenee tasaisesti joukossa $f(E)$. Näin ollen jono $\{f^{k_i-1}\}$ suppenee tasaisesti joukossa E, joten $\{f^{k-1}\}$ on normaali* joukossa U. Siis $f(F_0) \subset F_0$. Vastaavin päätelmin saadaan osoitettua, että F_0 on invariantti, jolloin sen komplementin $J_0(f)$ on oltava invariantti. □

Julian joukko $J_0(f)$ ei myöskään muutu, kun funktiota f iteroidaan:

Lause 5.9. *$J_0(f^p) = J_0(f)$ kaikille positiivisille kokonaisluvuille p.*

Todistus. Osoitetaan väite jälleen komplementille F_0. Selvästi $F_0(f) \supset F_0(f^p)$, sillä jos jonolla $\{f^{pk}\}_{k\geq 1}$ on osajono, joka suppenee tasaisesti annetussa joukossa, niin se on myös jonon $\{f^k\}$ osajono, joka suppenee tasaisesti.

Jos D on kompakti joukko ja perhe $\{g_k\}$ suppenee tasaisesti tässä joukossa, myös perhe $\{h \circ g_k\}$ käyttäytyy näin, kaikilla polynomeilla h. Siispä, jos $\{f^{pk}\}_{k\geq 1}$ on normaali* avoimessa joukossa V, myös $\{f^{pk+r}\}_{k\geq 1}$, missä $r = 0, 1, ..., p-1$, on normaali* perhe tässä joukossa. Nyt perheen $\{f^k\}_{k\geq 1}$ jokainen osajono sisältää perheen $\{f^{pk+r}\}_{k\geq 1}$ äärettömän osajonon, jollakin r, jolle $0 \leq r \leq p-1$. Tämä osajono suppenee tasaisesti joukon V kompakteissa osajoukoissa. Siispä $\{f^k\}$ on normaali* ja $F_0(f) \subset F_0(f^p)$. □

Seuraava ominaisuus osoittaa, että minkä tahansa joukon J_0 pisteen ympäristö leviää ympäri kompleksitasoa, kun sitä iteroidaan funktiolla f.

Lause 5.10. *Olkoot funktio f polynomi, piste $w \in J_0(f)$ ja U pisteen w jokin ympäristö. Tällöin $W := \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ on koko kompleksitaso $\mathbb{C}$ mahdollisesti yhtä yksittäistä pistettä lukuunottamatta. Tämä piste ei kuulu joukkoon $J_0(f)$ ja se on riippumaton pisteestä w ja ympäristöstä U.*

Todistus. Määritelmän nojalla perhe $\{f^k\}$ ei ole normaali* pisteessä w, joten ensimmäinen väite seuraa suoraan Montelin-Caratheodoryn lauseen seurauksesta 4.21.

Oletetaan, että $v \notin W$. Jos $f(z) = v$, on oltava $z \notin W$, sillä $f(W) \subset W$. Koska joukossa $\mathbb{C}\backslash W$ on korkeintaan yksi piste, on oltava $z = v$. Koska funktio f on polynomi, jonka asteluku on n ja yhtälön $f(z) - v = 0$ ainoa ratkaisu on $z = v$, on $f(z) - v = c(z-v)^n$ jollain vakiolla c. Kun z on riittävän lähellä pistettä v, $f^k(z) \to 0$, kun $k \to \infty$. Näin ollen perhe $\{f^k\}$ on normaali pisteessä v, joten $v \notin J_0(f)$. Selvää on myös, että piste v riippuu ainoastaan polynomista f. □

Seuraava lause on seuraus lauseesta 5.10.

LAUSE 5.11. (1) *Jos U on avoin joukko, joka leikkaa joukkoa $J_0(f)$, niin $f^{-k}(z)$ leikkaa joukkoa U äärettömän monella kokonaisluvun k arvolla, kaikilla $z \in \mathbb{C}$ korkeintaan yhtä poikkeusta lukuunottamatta.*
(2) *Jos $z \in J_0(f)$, niin $J_0(f)$ on yhdisteen $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ sulkeuma.*

TODISTUS. (1) Piste z ei ole edellisen lauseen poikkeuksellinen piste, eli $z \in f^k(U)$, joten $f^{-k}(z)$ leikkaa joukkoa U jollakin kokonaisluvulla k. Toistamalla tätä, saadaan ääretön määrä kokonaislukuja, joilla väite tulee todistetuksi.
(2) Jos $z \in J_0(f)$, niin lauseen 5.10 nojalla piste z ei voi olla kyseisessä lauseessa mainittu poikkeuksellinen piste. Nyt lauseen 5.8 nojalla $f^{-k}(z) \subset J_0(f)$. Tällöin siis yhdiste $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ ja sen sulkeuma kuuluvat suljettuun joukkoon $J_0(f)$. Toisaalta, jos U on avoin joukko, joka sisältää pisteen $z \in J_0(f)$, niin edellisen kohdan nojalla $f^{-k}(z)$ leikkaa joukkoa U äärettömän monella k. Näin ollen $J_0(f)$ sisältyy yhdisteen $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ sulkeumaan.

□

Myös seuraava lause seuraa lauseesta 5.10. Se osoittaa, että Julian joukolla ei ole sisusta.

LAUSE 5.12. *Jos funktio f on polynomi, joukon $J_0(f)$ sisus on tyhjä.*

TODISTUS. Olkoon U avoin joukko joukossa $J_0(f)$. Tällöin lauseen 5.8 nojalla $f^k(U) \subset J_0(f)$ kaikilla k, jolloin myös $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \subset J_0(f)$. Tällöin lauseen 5.10 nojalla $J_0(f)$ on koko kompleksitaso $\mathbb{C}$ lukuunottamatta mahdollisesti yhtä pistettä. Tämä on kuitenkin ristiriidassa lauseen 5.6 kanssa, sillä sen mukaan $J_0(f)$ on rajoitettu. □

LAUSE 5.13. *$J_0(f)$ on perfekti.*

TODISTUS. Joukon perfektiys saadaan todistettua osoittamalla, että joukko on suljettu ja siinä ei ole eristettyjä pisteitä. Lauseen 5.6 nojalla tiedetään jo, että $J_0(f)$ on kompakti ja siten suljettu. Riittää siis osoittaa, että siihen ei kuulu eristettyjä pisteitä.

Olkoot piste $v \in J_0(f)$ ja U jokin sen ympäristö. Osoitetaan, että ympäristöön U kuuluu myös muita joukon $J_0(f)$ pisteitä.

- Oletetaan, että v ei ole funktion f kiintopiste tai jaksollinen piste. Lauseen 5.11 nojalla U sisältää pisteeen $f^{-k}(v)$ jollain kokonaisluvulla $k \geq 1$. Lisäksi lauseen 5.8 nojalla $f^{-k}(v) \subset J_0(f)$. Tämä piste on myös oltava eri piste kuin v, sillä v ei ole kiinto- eikä jaksollinen piste, joten $v \in J_0(f)$ ei ole eristetty.
- Oletetaan, että v on funktion f kiintopiste. Jos yhtälöllä $f(z) = v$ ei ole muuta ratkaisua kuin $z = v$ voidaan osoittaa, kuten lauseen 5.10 todistuksessa on tehty, että $v \notin J_0(f)$. On siis oltava $w \neq v$ siten, että $f(w) = v$. Lauseen

5.11 nojalla $f^{-k}(w) \in U$ jollain $k \geq 1$. Edelleen invarianttisuuden nojalla $f^{-k}(w) \subset J_0(f)$ ja koska v on kiintopiste, on $f^{-k}(w) \neq v$.

- Oletetaan, että v on funktion f jaksollinen piste. Lauseen 5.9 nojalla $J_0(f) = J_0(f^p)$, jolloin edellisen kohdan nojalla U sisältää joukon $J_0(f) = J_0(f^p)$ pisteen, joka on eri piste kuin v.

Siispä joukossa $J_0(f)$ ei ole eristettyjä pisteitä. □

LAUSE 5.14. *$J_0(f)$ on ylinumeroituva.*

Tämän todistamiseen tarvitaan seuraavaa Bairen lausetta, jota ei kuitenkaan tässä yhteydessä todisteta, sillä se ei ole olennaista tutkielman kannalta. Katso [**9**] s. 74.

LEMMA 5.15 (Bairen lause). *Olkoot X kompakti metrinen avaruus ja $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ perhe avaruuden X avoimia tiheitä osajoukkoja. Tällöin $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ on tiheä avaruudessa X. Erityisesti siis $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$.*

LAUSEEN 5.14 TODISTUS. Lauseen 5.6 nojalla $J_0(f)$ on kompakti. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että $J_0(f)$ olisikin numeroituva, toisin sanoen $J_0(f) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Olkoon $V_n = J_0(f)\backslash\{x_n\}$ avoin joukossa $J_0(f)$. Lisäksi V_n on tiheä tässä joukossa, sillä x_n on joukon $J_0(f)$ kasautumispiste edellisen lauseen nojalla. Tällöin Bairen lauseen mukaan on oltava $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$. Nyt kuitenkin $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_0(f)\backslash\{x_n\} = \emptyset$, mikä on ristiriita. Joukon $J_0(f)$ on siis oltava ylinumeroituva. □

Nyt pääsemme viimein osoittamaan, että $J(f) = J_0(f)$. Toisin sanoen siis pisteet, joissa perhe $\{f^k\}$ ei ole normaali*, ovat itse asiassa hylkivien jaksollisten pisteiden sulkeuma.

LAUSE 5.16. *Jos funktio f on polynomi, niin $J(f) = J_0(f)$.*

TODISTUS. Olkoon w funktion f hylkivä jaksollinen piste jaksolla p. Tällöin siis w on funktion $g = f^p$ hylkivä kiintopiste. Oletetaan, että perhe $\{g^k\}$ on normaali* pisteessä w, jolloin pisteellä w on avoin ympäristö V, jossa osajono $\{g^{k_i}\}$ suppenee kohti äärellistä analyyttistä funktiota g_0 (suppeneminen kohti ääretöntä on mahdotonta, sillä $g^k(w) = w$ kaikilla k). Tällöin on oltava myös $(g^{k_i})'(z) \to (g_0)'(z)$, jos $z \in V$. Nyt kuitenkin ketjusäännön nojalla $|(g^{k_i})'(w)| = |(g'(w))^{k_i}| \to \infty$, koska w on hylkivä piste ja tällöin määritelmän nojalla $|g'(w)| > 1$. Tämä on ristiriita derivaatan $g_0'(w)$ äärellisyyden kanssa joten $\{g^k\}$ ei voi olla normaali* pisteessä w. Siispä lauseen 5.9 nojalla $w \in J_0(g) = J_0(f^p) = J_0(f)$. Koska $J_0(f)$ on suljettu, on oltava $J(f) \subset J_0(f)$.

Olkoon

$$K = \{w \in J_0(f) : \text{ on olemassa } z \neq w, \text{ jolle } f(z) = w \text{ ja } f'(z) \neq 0\}.$$

Oletetaan, että $w \in K$. Tällöin on olemassa pisteen w avoin ympäristö V, jossa löydetään lokaali analyyttinen käänteiskuvaus $f^{-1} : V \to \mathbb{C}\backslash V$ siten, että $f(f^{-1}(z)) = z$, $z \in V$. Määritellään joukossa V analyyttisten funktioiden $\{h_k\}$ perhe:

$$h_k(z) = \frac{(f^k(z) - z)}{(f^{-1}(z) - z)}.$$

Olkoon U pisteen w jokin ympäristö siten, että $U \subset V$. Koska $w \in J_0(f)$ perhe $\{f^k\}$ ei ole normaali* joukossa U, joten määritelmän nojalla myöskään perhe $\{h_k\}$

ei ole normaali* joukossa U. Montelin-Caratheodoryn lauseen (lause 4.20) nojalla joillain $k \in \mathbb{Z}$ ja $z \in U$ on oltava $h_k(z) = 0$ tai $h_k(z) = 1$. Jos $h_k(z) = 0$, on $f^k(z) = z$. Jos taas $h_k(z) = 1$, on $f^k(z) = f^{-1}(z)$ ja siis $f^{k+1}(z) = z$. Siispä U sisältää funktion f jaksollisen pisteen. Lisäksi voidaan osoittaa, että funktiolla f on ei-hylkiviä jaksollisia pisteitä äärellinen määrä (katso [**2**] lause 9.6.1). Tällöin joukossa U on hylkivä jaksollinen piste, joten $w \in J(f)$. On siis osoitettu, että $K \subset J(f)$, joten myös $\overline{K} \subset \overline{J(f)} = J(f)$.

Lauseen 5.8 nojalla on kaikille pisteille $w \in J_0(f)$ olemassa piste $z \in J_0(f)$ siten, että $f(z) = w$. Nyt $f'(z)$ on analyyttinen, joten sen nollakohtien joukko on diskreetti, eli sillä ei ole kasautumispisteitä. Koska lauseen 5.6 nojalla $J_0(f)$ on rajoitettu, on Bolzano-Weierstrassin lauseen nojalla nollakohtien joukon oltava äärellinen. Myös kiintopisteitä on äärellinen määrä, koska f on polynomi. Näin ollen siis K sisältää kaikki joukon $J_0(f)$ pisteet lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä. Koska joukossa $J_0(f)$ ei lauseen 5.13 nojalla ole eristettyjä pisteitä, on $J_0(f) = \overline{K} \subset J(f)$. □

Määritellään vielä puoleensavetävän kiintopisteen w attraktioallas, joka antaa välineet tutkia Julian joukkoja. Attraktioaltaalla tarkoitetaan joukkoa, jonka pisteet iteroituvat kohti puoleensavetävää kiintopistettä.

Määritelmä 5.17. Jos piste w on funktion f puoleensavetävä kiintopiste, on pisteen w *attraktioallas*

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \to w \text{ kun } k \to \infty\}.$$

Seuraava lause osoittaa, että attraktioaltaan reuna on itseasiassa sama kuin funktion f Julian joukko $J(f)$:

Lause 5.18. *Olkoon piste w funktion f puoleensavetävä kiintopiste. Tällöin*

$$\partial A(w) = J(f).$$

Tämä pätee myös silloin, kun $w = \infty$.

Todistus. Jos $z \in J(f)$, niin $f^k(z) \in J(f)$ kaikilla k, joten se ei voi supeta kohti puoleensavetävää kiintopistettä, eli $z \notin A(w)$. Jos U on jokin pisteen z ympäristö, joukko $f^k(U)$ sisältää pisteitä joukosta $A(w)$ jollakin k:n arvolla, sillä lauseen 5.10 nojalla joukkojen $f^k(U)$ yhdiste on koko kompleksitaso mahdollisesti yhtä pistettä lukuunottamatta. Toisin sanoen pisteen z lähellä on pisteitä, jotka iteroituvat kohti pistettä w. Siispä $z \in \overline{A(w)}$, ja koska $z \notin A(w)$, on oltava $z \in \partial A(w)$.

Oletetaan, että $z \in \partial A(w)$, mutta $z \notin J(f) = J_0(f)$. Tällöin joukon $J_0(f)$ määritelmän nojalla pisteellä z on yhtenäinen avoin ympäristö V, jossa jonolla $\{f^k\}$ on osajono, joka suppenee kohti ääretöntä tai jotain analyyttistä funktiota. Osajono suppenee kohti pistettä w joukossa $V \cap A(w)$, joka on avoin ja yhtenäinen, jolloin se suppenee kohti tätä pistettä koko joukossa V. Tällöin kaikki joukon V pisteet kuuluvat joukkoon $A(w)$, jolloin piste $z \in A(w)$, mikä on ristiriita, sillä oletuksen mukaan $z \in \partial A(w)$. □

Palautetaan mieleen esimerkki 5.3:

Funktion $f(z) = z^2$ Julian joukon osoitettiin olevan yksikköympyrä. Osoitettiin myös, että $f^k(z) \to 0$, kun $|z| < 1$ ja $f^k(z) \to \infty$, kun $|z| > 1$. Toisin sanoen siis yksikköympyrä on sekä attraktioaltaiden $A(0)$ sekä $A(\infty)$ reuna.

LUKU 6

Mandelbrotin joukko

Tämä luku käsittelee Julian joukkojen indeksijoukkoa eli Mandelbrotin joukkoa. Luvun pääasiallisena lähteenä toimii Falconerin *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications* [**6**].

Luvussa tarkastellaan kompleksitason neliöllisiä funktioita. Riittää tutkia muotoa

$$f_c(z) = z^2 + c$$

olevia polynomeja ja niiden Julian joukkoja, sillä määrittelemällä funktio

$$h(z) := \alpha z + \beta, \; (\alpha \neq 0),$$

saadaan osoitettua, että funktioita f_c tutkittaessa, tutkitaan kaikkia neliöllisiä funktioita f.

Huomataan, että

$$h^{-1}(f_c(h(z))) = (\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta)/\alpha.$$

Kaikki neliölliset funktiot f voidaan ilmoittaa tässä muodossa, kunhan valitaan oikeat α, β ja c. Siispä $h^{-1} \circ f_c \circ h = f$, joten on myös $h^{-1} \circ f_c^k \circ h = f^k$. Kuvaus h siis liittää yhteen funktioiden f ja f_c kuvat. Piste z on funktion f jakson p jaksollinen piste jos ja vain jos piste $h(z)$ on funktion f_c jakson p jaksollinen piste. Siispä funktion f Julian joukko on funktion f_c Julian joukko kuvattuna kuvauksella h^{-1}. Koska kuvaus h on similariteettimuunnos, on minkä tahansa neliöllisen funktion Julian joukko geometrisesti samanlainen kuin tähän funktioon liityvän funktion f_c Julian joukko.

Tässä kappaleessa on syytä pitää mielessä, että kyseisen funktion käänteiskuvauksella on kaksi haaraa, sillä $f^{-1}(z) = \pm(z - c)^{1/2}$, lukuunottamatta tilannetta $z = c$.

6.1. Mandelbrotin joukon määritelmät

Kuten Julian joukotkin, myös Mandelbrotin joukko voidaan määritellä kahdella tavalla, joista toinen on intuitiivisesti helposti ymmärrettävä ja toinen laskennallisesti käyttökelpoisempi.

Määritelmä 6.1 (Mandelbrotin joukko). *Mandelbrotin joukko* on parametrien c joukko, joille funktion f_c Julian joukko on yhtenäinen:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ on yhtenäinen}\}.$$

Toinen määritelmä muodostetaan funktion f_c iteraatioiden avulla.

Määritelmä 6.2 (Mandelbrotin joukko).

$$\begin{aligned} M_0 &= \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^k(0)\}_{k\geq 1} \text{ on rajoitettu}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : f_c^k(0) \not\to \infty \text{ kun } k \to \infty\}. \end{aligned}$$

Määritelmässä tarkastellaan origon iteraatioita, sillä origo on funktion f_c kriittinen piste, eli piste, jolle $f_c'(z) = 0$. Kriittisissä pisteissä f_c ei ole lokaali bijektio, mitä ominaisuutta tarvitaan myöhemmin, kun todistetaan, että Mandelbrotin joukon määritelmät ovat yhtäpitävät.

Koska on olemassa r siten, että $|f_c(z)| > 2|z|$, kun $|z| > r$ (vrt. lauseen 5.6 todistus), on selvää, että $f_c^k(0) \nrightarrow \infty$ jos ja vain jos $\{f_c^k(0)\}$ on rajoitettu. Näin ollen siis määritelmän M_0 muodot ovat yhtäpitäviä keskenään.

Ennen kuin voimme osoittaa, että määritelmät ovat ekvivalentit, eli $M = M_0$, on tutkittava, mitä muunnos f_c tekee sileille käyrille.

Määritelmä 6.3. *Silmukka* on sileä, suljettu ja yksinkertainen käyrä kompleksitasossa. Silmukan *sisäpuoli* ja *ulkopuoli* ovat kompleksitason ne osat, jotka ovat silmukan sisä- ja ulkopuolella, kuten Jordanin käyrälauseessa 1.16. *Kahdeksikko* on suljettu, sileä käyrä, joka leikkaa itseään yhden kerran.

Lemma 6.4. *Olkoon C kompleksitason silmukka.*

(1) *Jos piste c on silmukan C sisäpuolella, niin $f_c^{-1}(C)$ on silmukka, jonka sisäpuoli on silmukan C sisäpuolen alkukuva.*
(2) *Jos piste c on silmukan C piste, niin $f_c^{-1}(C)$ on kahdeksikko, jonka silmukoiden sisäpuolet ovat silmukan C sisäpuolen alkukuva.*

Todistus. Huomaa, että käänteiskuvaus on $f_c^{-1}(z) = (z-c)^{1/2}$ ja sen derivaatta on $(f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z-c)^{-1/2}$, joka on äärellinen ja nollasta eroava, kun $z \neq c$. Funktion f_c käänteiskuvauksella on kaksi haaraa. Siispä, jos valitsemme toisen käänteiskuvauksen $f_c^{-1}(z)$ haaroista, joukko $f^{-1}(C)$ on lokaalisti sileä käyrä, kunhan $c \notin C$. Merkitään näitä haaroja merkinnöin g_c ja h_c.

(1) Oletetaan, että piste c on silmukan C sisäpuolella. Valitaan alkupiste $w \in C$ ja valitaan toinen käänteiskuvauksen haara g_c. Kun z liikkuu pitkin silmukkaa C, piirtää piste $g_c(z)$ sileää käyrää. Kun z saavuttaa alkupisteen w, valitaan toinen käänteiskuvauksen haara h_c. Pisteen z kulkiessa uudestaan pitkin silmukkaa, $h_c(z)$ jatkaa sileää käyrää, joka sulkeutuu lopulta, kun z saavuttaa alkupisteen toisen kerran. Näin muodostunut silmukka on silmukan C alkukuva $f_c^{-1}(C)$. Koska $c \notin C$, niin $0 \notin f_c^{-1}(C)$, jolloin myös $(f_c^{-1})'(z) \neq 0$ käyrällä $f_c^{-1}(C)$. Siispä f_c on lokaalisti bijektiivinen muunnos pisteiden $f^{-1}(C)$ lähellä. Erityisesti $z \in f_c^{-1}(C)$ ei voi olla piste, jossa käyrä $f_c^{-1}(C)$ leikkaa itseään, sillä muutoin piste $f_c(z)$ olisi piste, jossa käyrä C leikkaisi itseään, mikä on ristiriita, sillä C on silmukka.

Koska f_c on jatkuva funktio, joka kuvaa silmukan $f_c^{-1}(C)$ silmukaksi C bijektiivisesti, on polynomin f_c kuvattava silmukan $f_c^{-1}(C)$ sisäpuoli ja ulkopuoli vastaavasti silmukan C sisäpuoleksi ja ulkopuoleksi. Näin ollen f_c^{-1} kuvaa silmukan C sisäpuolen silmukan $f_c^{-1}(C)$ sisäpuoleksi.

(2) Oletetaan, että piste c on silmukalla C. Valitaan nyt alkupisteeksi $w = c$, jolloin $f_c^{-1}(c) = 0$. Kun w kulkee silmukka C ensimmäisen kerran ympäri, valitaan haara g_c, jolloin $g_c(z)$ piirtää sileää käyrää. Kun w saa jälleen arvon c, on piirtynyt silmukka. Annetaan w:n kulkea pitkin käyrää C toisen kerran, ja valitaan nyt haara h_c. Jälleen piirtyy silmukka. Huomataan siis, että $f_c^{-1}(C)$ muodostuu kahdesta silmukasta, jotka leikkaavat pisteessä 0. Näin ollen $f_c^{-1}(C)$ on kahdeksikko.

Vastaavasti kuin kohdassa (1) voidaan perustella, että f_c^{-1} kuvaa silmukan C sisäpuolen sisäpuolen kahdeksikon $f_c^{-1}(C)$ silmukoiden sisäpuoleksi.

□

Nyt voimme osoittaa, että Mandelbrotin joukon määritelmät ovat yhtäpitävät.

Lause 6.5. $M = M_0$

Todistus. (1) Osoitetaan ensin, että jos $\{f_c^k(0)\}$ on rajoitettu, Julian joukko $J(f_c)$ on yhtenäinen.

Olkoon C suuri kompleksitason ympyrä siten, että kaikki pisteet $\{f_c^k(0)\}$ ovat sen sisäpuolella, $f_c^{-1}(C)$ kuuluu joukon C sisukseen ja joukon C ulkopuoliset pisteet iteroituvat äärettömyyteen iteroitaessa funktiolla f_c. Koska $c = f_c(0)$ on ympyrän sisäpuolella, on edellisen lemman (1)-kohdan nojalla $f_c^{-1}(C)$ silmukka, joka on joukon C sisäpuolella. Samoin $f_c(c) = f_c^2(0)$ on joukon C sisäpuolella ja f_c^{-1} kuvaa joukon C ulkopuoliset pisteet $f_c^{-1}(C)$:n ulkopuolelle, joten c on $f_c^{-1}(C)$:n sisäpuolella. Siispä $f_c^{-2}(C)$ on silmukka, joka on $f_c^{-1}(C)$:n sisuksessa.

Jatkamalla näin nähdään, että $\{f_c^{-k}(C)\}$ muodostuu silmukoiden jonosta, joista jokainen sisältyy edellisen sisukseen. Olkoon K joukko, jonka pisteet ovat silmukoilla $f_c^{-k}(C)$ tai niiden sisäpuolella kaikilla k:n arvoilla. Jos $z \in \mathbb{C}\backslash K$, niin jokin iteraatio $f_c^k(z)$ on joukon C ulkopuolella ja siten $f_c^k(z) \to \infty$. Siispä

$$A(\infty) = \{z : f_c^k(z) \to \infty \text{ kun } k \to \infty\} = \mathbb{C}\backslash K.$$

Lemman 5.18 nojalla Julian joukko $J(f_c)$ on joukon $\mathbb{C}\backslash K$ reuna, joka on sama kuin joukon K reuna. Joukko K on leikkaus jonosta pieneneviä joukkoja, jotka ovat suljettuja ja yhtenäisiä, joten selvästi myös K on yhtenäinen ja sillä on siten myös yhtenäinen reuna. Siispä $J(f_c)$ on yhtenäinen.

(2) Osoitetaan, että $J(f_c)$ ei ole yhtenäinen, jos $f_c^k(0)$ ei ole rajoitettu. Olkoon C suuri kompleksitason ympyrä siten, että $f_c^{-1}(C)$ on sen sisäpuolella, sen ulkopuoliset pisteet iteroituvat äärettömyyteen ja jollakin p piste $f_c^{p-1}(c) = f_c^p(0) \in C$, jolloin $f_c^k(0)$ on joukon C sisä- tai ulkopuolella riippuen siitä onko k pienempi vai suurempi kuin p. Kuten edellä saadaan aikaan jono silmukoita $f_c^{-k}(C)$, jotka sisältyvät aina edellisen silmukan sisukseen, kunnes päästään silmukkaan $f_c^{1-p}(C)$. Koska $c \in f_c^{1-p}(C)$, on edellisen lemman (2)-kohdan nojalla $E := f_c^{-p}(C)$ on kahdeksikko, joka on silmukan $f_c^{1-p}(C)$ sisuksessa, ja f_c kuvaa kahdeksikon E silmukoiden sisukset silmukan $f_c^{1-p}(C)$ sisukseksi. Julian joukon $J(f_c)$ on oltava E:n silmukoiden sisuksessa, koska muut pisteet iteroituvat äärettömyyteen. Koska $J(f_c)$ on invariantti on osia siitä oltava kummassakin kahdeksikon E silmukassa, joten kahdeksikko tekee Julian joukosta epäyhtenäisen.

□

6.2. Neliöllisten funktioiden Julian joukot

Tässä kappaleessa tarkastellaan Julian joukon $J(f_c)$ muotoa, kun parametrin c arvo vaihtelee. Samalla nähdään, millainen merkitys on Mandelbrotin joukon eri osilla.

Seuraava lemma osoittaa, että jos w on polynomin f äärellinen puoleensavetävä piste, niin on olemassa kriittinen piste, z $(f'(z) = 0)$, jonka iteraation $f^k(z)$ rata menee kohti pistettä w, toisin sanoen iteraation *puoleensavetävä rata* sisältää pisteen w.

LEMMA 6.6. *Olkoon $w \neq \infty$ polynomin f puoleensavetävä jaksollinen piste. Tällöin on olemassa kriittinen piste $z \in A(w)$.*

TODISTUS. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että $z \notin A(w)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $f'(z) = 0$.

Olkoon U avoin kiekko, jolle $w \in U \subset A(w)$. Joukko $A(w)$ on avoin, sillä määritelmän nojalla pisteen $\in A(w)$ ympäristö V sisältyy joukkoon $A(w)$. Tällöin $f^k(z) \notin U$ kaikilla k ja kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $f'(z) = 0$. Näin ollen lemman 1.26 nojalla voidaan kaikilla k valita käänteiskuvauksen haara f^{-k}, joka on analyyttinen joukossa U ja jolle $f^{-k}(w) = w$. Jos $c \in f^{-k}(U)$, niin $f^k(c) \in U \subset A(w)$, joten $c \in A(w)$. Näin ollen siis $f^{-k}(U) \subset A(w)$ kaikilla k.

Koska $A(w)$ on kompleksitason rajoitettu osajoukko, on Montelin lauseen 4.8 nojalla kokoelma $\{f^{-k}\}_{k=0}^{\infty}$ normaali perhe joukossa U. Kuitenkin, koska w on funktion f^{-1} hylkivä kiintopiste, ei mikään jonon $\{f^{-k}(c)\}$ osajono voi supeta tasaisesti kohti analyyttistä funktiota lähellä pistettä w, joten normaalin perheen määritelmän 4.1 nojalla $\{f^{-k}\}_{k=0}^{\infty}$ ei voi olla normaali perhe.

Tästä ristiriidasta seuraa, että jollekin pisteelle z, jolle $f'(z) = 0$, pätee $z \in A(w)$. □

Koska funktion f_c ainoa kriittinen piste on 0, on sen iteraatioilla oltava korkeintaan yksi puoleensavetävä rata. Erityisesti, jos $c \notin M$, niin määritelmän nojalla $f_c^k(0) \to \infty$, eli iteraatiolla ei ole puoleensavetävää rataa. Voidaan siis jo epäillä, että ne parametrit c, joilla polynomilla f_c on puoleensavetävä rata, muodostavat Mandelbrotin joukon sisäpuolen. Itse asiassa parametrin c arvot, jotka vastaavat eri puoleensavetävien jaksojen ratoja p, voidaan samaistaa Mandelbrotin joukon eri alueiksi.

Tutkitaan aluksi tilannetta, jossa $c \notin M$, jolloin polynomilla f_c ei ole lainkaan puoleensavetäviä jaksollisia pisteitä. Määritelmän nojalla tiedetään, että $J(f_c)$ ei tällöin ole yhtenäinen. Tarkemmin ottaen $J(f_c)$ on täysin epäyhtenäinen ja esitettävissä erillisenä yhdisteenä: $J = S_1(J) \cup S_2(J)$, missä S_1 ja S_2 ovat käänteiskuvauksen f_c^{-1} kaksi haaraa joukossa J.

Tämä seuraa lauseen 6.5 todistuksen jälkimmäisestä osasta, jonka mukaan f_c kuvaa kahdeksikon E silmukoiden sisäpuolet alueeksi D, joka sisältää joukon E. Kuvauksia S_1 ja S_2 voidaan pitää käänteiskuvauksen f_c^{-1} rajoittumina kumpaankin silmukkaan. Koska $S_1(J)$ ja $S_2(J)$ ovat kahdeksikon E puoliskojen sisäpuolet, ne ovat erilliset, joten joukon J on oltava täysin epäyhtenäinen lemman 3.6 nojalla.

Tarkastellaan tilannetta yksityiskohtaisemmin, kun c on niin suuri, että voidaan tehdä joitain yksinkertaistuksia.

LAUSE 6.7. *Olkoon $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$. Tällöin $J(f_c)$ on täysin epäyhtenäinen ja invariantti kutistuksille, jotka on saatu käänteiskuvauksen kahdesta haarasta pisteissä z lähellä joukkoa J. Tällöin pätee myös*

$$\frac{2\log 2}{\log 4(|c| + |2c|^{1/2})} \leq \dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) \leq \frac{2\log 2}{\log 4(|c| - |2c|^{1/2})}.$$

Todistus. Olkoot C origokeskinen ympyrä, jonka säde on $|c|$, ja D sen sisäpuoli. Tällöin

$$f_c^{-1}(C) = \{(ce^{i\theta} - c)^{1/2} : 0 \le \theta \le 4\pi\},$$

joka on kahdeksikko (kuten lemman 6.4 nojalla pitääkin olla) ja leikkaa itseään origossa. Koska $|c| > 2$, niin $|f_c^{-1}(C)| = |(ce^{i\theta} - c)^{1/2}| \le |2c|^{1/2} < |c^2|^{1/2} = |c|$, joten $f_c^{-1}(C) \subset D$. Lemman 6.4 nojalla kahdeksikon $f_c^{-1}(C)$ silmukoiden sisäpuolet kuvautuvat funktiolla f_c bijektiivisesti joukoksi D. Jos nyt määritellään $S_1, S_2 : D \to D$ käänteisfunktion $f_c^{-1}(z)$ haaroiksi kummassakin silmukassa, niin $S_1(D)$ ja $S_2(D)$ ovat näiden kahden silmukan sisäpuolet.

Olkoon V kiekko $\{z : |z| < |2c|^{1/2}\}$, jolloin $f_c^{-1}(C) \subset V \subset D$, joten $S_1(D), S_2(D) \subset V \subset D$. Näin ollen $S_1(V), S_2(V) \subset V$ ja $S_1(\overline{V})$ ja $S_2(\overline{V})$ ovat erilliset. Nyt

$$S_1'(z) = S_2'(z) = (f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z-c)^{-1/2}.$$

Siispä, jos $z \in \overline{V}$, on

$$\frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2} \le |S_i'(z)| \le \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2}. \tag{6.1}$$

Tarkastellaan tämän epäyhtälön ylärajaa $\sqrt{\frac{1}{4(|c|-\sqrt{2}\sqrt{|c|})}}$: Tämä luku on pienempää kuin 1 silloin, kun $4(|c| - \sqrt{2}\sqrt{|c|}) > 1$. Tutkitaan siis milloin tämä epäyhtälö toteutuu. Ratkaisemalla yhtälöstä $4(|c| - \sqrt{2}\sqrt{|c|}) - 1 = 0$ luku $\sqrt{|c|}$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla, saadaan $\sqrt{|c|} = \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}{2}$, mistä negatiivinen ratkaisu voidaan unohtaa. Yhtälö siis toteutuu, kun $|c| = \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$. Derivoimalla funktiota $\phi(|c|) = 4(|c| - \sqrt{2}\sqrt{|c|}) - 1$ ja tarkastelemalla sen kulkukaaviota huomataan, että funktio on kasvava, kun $|c| > \frac{1}{2}$. Toisin sanoen $4(|c| - \sqrt{2}\sqrt{|c|}) - 1 > 0$, kun $|c| > \frac{1}{2}$.

Koska nyt $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) > \frac{1}{2}$, on $4(|c| - \sqrt{2}\sqrt{|c|}) > 1$, joten epäyhtälön (6.1) ylärajalle on $\frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2} < 1$. Siispä kuvaukset S_1 ja S_2 ovat kutistuksia kiekossa $\overline{V}$. Näin ollen lauseen 3.5 nojalla on olemassa yksikäsitteinen, epätyhjä ja kompakti joukko $F \subset \overline{V}$, jolle

$$F = S_1(F) \cup S_2(F).$$

Koska $S_1(\overline{V})$ ja $S_2(\overline{V})$ ovat erilliset, niin myös $S_1(F)$ ja $S_2(F)$ ovat erilliset, jolloin lemman 3.6 nojalla F on täysin epäyhtenäinen.

Joukko F on itseasiassa Julian joukko $J = J(f_c)$:

Funktion f_c eräs kiintopiste on $z_1 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$. Derivaatta tässä pisteessä on $|f_c'(z_1)| = |1+\sqrt{1-4c}|$. Koska $|c| > \frac{1}{4}(5+2\sqrt{6})$, niin $1-4c \in \mathbb{C}\backslash B(1, 5+2\sqrt{6}) \subset \mathbb{C}\backslash B(0, 4+2\sqrt{6})$. Tällöin $\sqrt{1-4c} \in \mathbb{C}\backslash B(0, \sqrt{4+2\sqrt{6}}) \subset \mathbb{C}\backslash B(-1, \sqrt{4+2\sqrt{6}} - 1)$. Näin ollen

$$|f_c'(z_1)| = |1 + \sqrt{1-4c}| > \sqrt{4+2\sqrt{6}} - 1 > 1{,}9 > 1,$$

joten z_1 on määritelmän nojalla hylkivä kiintopiste.

Osoitetaan, että $z_1 \in \overline{V}$. Selvästi nähdään, että $\left|\frac{1-4c}{4}\right|^{1/2} = \left|c - \frac{1}{4}\right|^{1/2} < |c|^{1/2}$. Lisäksi $|(\sqrt{2}-1)^2 \cdot c| = (\sqrt{2}-1)^2|c| > 0{,}1715 \cdot \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) > 0{,}424 > \frac{1}{4}$, jolloin $\left|\frac{1}{4}\right|^{1/2} < (\sqrt{2}-1) \cdot |c|^{1/2}$. Tällöin

$$|z_1| = \left|\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right| \leq \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{1-4c}}{2}\right| = \left|\frac{1}{4}\right|^{1/2} + \left|\frac{1-4c}{4}\right|^{1/2}$$
$$< (\sqrt{2}-1)\cdot|c|^{1/2} + |c|^{1/2} = |2c|^{1/2}.$$

Näin ollen siis $\overline{V}$ sisältää ainakin yhden pisteen $z \in J$.

Siispä J on joukon $(\bigcup_{k=1}^{\infty} f_c^{-k}(c)) \subset \overline{V}$ sulkeuma, sillä $f_c^{-k}(\overline{V}) \subset \overline{V}$. Nyt koska on osoitettu, että $J = J_0$, voidaan käyttää lausetta 5.8, jonka nojalla siis $J = S_1(J) \cup S_2(J)$. Siispä joukon F yksikäsitteisyyden nojalla on oltava $F = J$.

Lopuksi vielä arvioidaan joukon $J(f_c)$ dimensiota. Lauseen 3.9 nojalla $\dim_H = \dim_B$. Käyttämällä epäyhtälöä 6.1 ja väliarvolausetta saadaan

$$\frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2} \leq \frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2},$$

jos $z_1, z_2 \in \overline{V}$ ovat eri pisteitä. Lauseiden 3.10 ja 3.11 nojalla yläraja Hausdorffin dimensiolle $\dim_H J(f_c)$ saadaan yhtälön $2(\frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2})^s = 1$ ratkaisusta ja alaraja yhtälön $2(\frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2})^s = 1$ ratkaisusta. Ratkaistaan yhtälö $2(\frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2})^s = 1$, jolloin

$$s = \frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2}} = \frac{-\log 2}{-\log 2 - \frac{1}{2}\log(|c| - |2c|^{1/2})} = \frac{2\log 2}{\log 4(|c| - |2c|^{1/2})}.$$

Ratkaisemalla toinen yhtälö vastaavasti saadaan

$$\frac{2\log 2}{\log 4(|c| + |2c|^{1/2})} \leq s \leq \frac{2\log 2}{\log 4(|c| - |2c|^{1/2})}.$$

□

Seuraavaksi siirrytään tilanteeseen, jossa $|c|$ on pieni. Esimerkin 5.3 nojalla tiedetään, että kun $c = 0$, on $J(f_c)$ yksikköympyrä. Piste $z_2 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ on funktion f_c kiintopiste, sillä $f_c(z_2) = z_2$. Kun $|c|$ on pieni, niin $1 - 4c \in B(1, \epsilon)$, missä $\epsilon > 0$ on pieni luku, ja $\sqrt{1-4c} \in B(1, \sqrt{\epsilon})$. Toisin sanoen $\sqrt{1-4c}$ on likimain 1, jolloin $|1-\sqrt{1-4c}|$ on likimain 0. Näin ollen, kun $|c|$ on pieni, on $|f_c'(z_2)| = |1-\sqrt{1-4c}| < 1$, eli piste z_2 on funktion f_c puoleensavetävä kiintopiste.

Jos $|c|$ on pieni ja $|z|$ riittävän pieni, nähdään selvästi, että $f_c^k(z) \to \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4c})$, kun $k \to \infty$. Toisaalta, kun z on suuri, on selvästi $f_c^k(z) \to \infty$. Voidaankin osoittaa, että kun c poikkeaa nollasta hieman, muuttuu yksikköympyrä yksinkertaiseksi suljetuksi käyräksi ja nämä kaksi eri tapausta erottuvat.

Näin itseasiassa käy juuri silloin, kun funktiolla f_c on puoleensavetävä kiintopiste. Kun siis vaaditaan, että $|f_c'(z_2)| < 1$, saadaan ääritapaus parametrille c asettamalla

$$1 - \sqrt{1-4c} = e^{i\theta},$$

missä $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ratkaisemalla tästä c saadaan, että ehto toteutuu, kun c kuuluu käyrän $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sisäpuolelle. Tämä joukko on Mandelbrotin joukon "keskiosa", katso luvun 8 kuva 8.3

Tarkastellaan tapausta $|c| < \frac{1}{4}$:

Lause 6.8. *Jos $|c| < \frac{1}{4}$, niin $J(f_c)$ on yksinkertainen, suljettu käyrä.*

TODISTUS. Olkoon C_0 ympyrä $|z| < \frac{1}{2}$. Tällöin c kuuluu sen sisäpuoleen, samoin kuin funktion f_c kiintopiste $z_2 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$, sillä kun $|c| < \frac{1}{4}$, niin $1-4c \in B(1,1)$, jolloin $|\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}| < \frac{1}{2}$. Tämä kiintopiste on puoleensavetävä, sillä $|f_c'(z_2)| = |1-\sqrt{1-4c}| < 1$. Tällöin alkukuva $f_c^{-1}(C_0)$ on silmukka C_1, joka ympäröi silmukkaa C_0. Näiden silmukoiden väliin jäävä alue A_1 voidaan täyttää janojen jatkumoilla, joita sanotaan radoiksi ja jotka lähtevät silmukalta C_0 ja kohtaavat silmukan C_1 kohtisuoraan. Olkoot kaikilla θ $\psi_1(\theta)$ radan päätepiste silmukalla C_1, kun sen alkupiste silmukalla C_0 on $\psi_0(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta}$. Alkukuva $f_c^{-1}(A_1)$ on alue A_2, jota rajoittaa silmukka C_1 ja silmukka $f_c^{-1}(C_1) = C_2$. Silmukoita C_0 ja C_1 yhdistävien ratojen alkukuvia ovat radat, jotka yhdistävät silmukoita C_1 ja C_2. Olkoon $\psi_2(\theta)$ radan päätepiste silmukalla C_2 ja $\psi_1(\theta)$ sen alkupiste silmukalla C_1. Jatkamalla näin, saadaan jono silmukoita C_k, joista jokainen ympäröi edeltäjäänsä. Samoin saadaan ratojen perhe, jotka yhdistävät pisteet $\psi_k(\theta)$ silmukalla C_k pisteisiin $\psi_{k+1}(\theta)$ silmukalla C_{k+1} kaikilla k.

Kun $k \to \infty$, käyrät C_k lähestyvät pisteen w attraktioaltaan reunaa. Tällöin lauseen 5.18 nojalla tämä reuna on Julian joukko $J(f_c)$. Koska $|f_c'(z)| > \gamma$, jollakin $\gamma > 1$, silmukan C_1 ulkopuolella, niin f_c^{-1} supistuu lähellä joukkoa J. Siispä radan, joka yhdistää pisteet $\psi_k(\theta)$ ja $\psi_{k+1}(\theta)$, pituus lähestyy nollaa, kun $k \to \infty$. Näin ollen $\psi_k(\theta)$ suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota $\psi(\theta)$, kun $k \to \infty$ ja J on suljettu käyrä $\psi(\theta)$, missä $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Pitää siis osoittaa vielä, että $\psi(\theta)$ on yksinkertainen käyrä. Oletetaan, että $\psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$. Olkoon D alue, jota rajoittaa silmukka C_0 ja ne kaksi rataa, jotka yhdistävät pisteet $\psi_0(\theta_1)$ ja $\psi_0(\theta_2)$ pisteeseen $\psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$. Alueen D reuna pysyy rajoitettuna iteroitaessa funktiolla f_c. Nyt lauseen 5.10 nojalla D:n sisäpuolella ei voi olla yhtään joukon J pistettä. Siispä ei voi olla $\psi(\theta) = \psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$ kaikilla $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Funktiolla $\psi(\theta)$ ei siis voi olla pistettä, jossa se leikkaa itseään. $\square$

Tarkastellaan vielä tilanne, missä funktiolla f_c on puoleensavetävä rata jaksolla $p = 2$. Suoralla laskulla nähdään, että näin on silloin, kun $|c + 1| < \frac{1}{4}$. Tällöin c on Mandelbrotin joukon suurimmassa kiekossa, joka on kiinni "keskiosassa", katso luvun 8 kuva 8.3.

Koska f_c^2 on neljännen asteen polynomi, funktiolla f_c on kaksi kiintopistettä ja kaksi jaksollista pistettä jaksolla 2. Kuten edellisen lauseen todistuksessa, voidaan osoittaa, että puoleensavetävän jaksollisen pisteen w_i attraktioallas sisältää alueen, jota rajoittaa yksinkertainen suljettu käyrä C_i, joka ympäröi pisteen w_i $(i = 1, 2)$. Tällöin lauseen 5.18 ja lauseen 5.9 nojalla $C_i \subset J(f_c^2) = J(f_c)$.

Käyrät C_i kuvautuvat itselleen funktiolla f_c^2, jolloin kummallakin C_i on oltava funktion f_c^2 kiintopiste. Jaksolliset pisteet ovat näiden käyrien sisäpuolella, joten jokaisella C_i on oltava funktion f_c kiintopiste. Koska funktiolla f_c kuvattuna käyrät C_i kuvautuvat toisikseen, on käyrien C_1 ja C_2 koskettava toisiaan yhdessä kiintopisteessä.

Käänteiskuvaus f_c^{-1} saa kaksi arvoa käyrällä C_1. Toinen alkukuvista on C_2, joka ympäröi pistettä w_2. Toinen haara $f_c^{-1}(C_1)$ on yksinkertainen suljettu käyrä, joka ympäröi toista arvoa, jonka $f_c^{-1}(w_1)$ saa.

Tällä tavalla voidaan jatkaa alkukuvien tutkimista, jolloin havaitaan, että $J(f_c)$ muodostuu äärellisen monesta yksinkertaisesta suljetusta käyrästä, jotka ympäröivät pisteiden w_1 ja w_2 alkukuvia kaikissa järjestyksissä ja koskevat toisiaan pareittain.

Siispä näin saatu Julian joukko on paljon monimutkaisempi kuin aiemmissa tapauksissa.

Hyvä tapa tutkia Julian joukkoja, kun c kuuluu Mandelbrotin joukon eri osiin, on piirtää kuvia tietokoneella. Tästä puhutaan enemmän luvussa 8.

LUKU 7

Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmä on helppo tapa approksimoida epälineaaristen yhtälöiden ratkaisuja. Olkoon $p(x)$ reaalifunktio, jolla on jatkuva derivaatta. Tällöin funktiota $f(x) = x - p(x)/p'(x)$ iteroimalla lähestytään yhtälön $p(x) = 0$ ratkaisua, kunhan $p'(x) \neq 0$ ja alkuarvo x on valittu sopivasti. Tämä menetelmä osoittautuu käyttökelpoiseksi myös kompleksitasossa. Tässä luvussa tutkitaan, miten Newtonin menetelmällä saadaan muodostettua Julian joukkoja. Luvun lähteenä on Falconerin *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications* [**6**].

Olkoon $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksikertoiminen polynomi. Muodostetaan rationaalifunktio $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$f(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}.$$

Tästä huomataan, että funktion f kiintopisteitä ovat ne pisteet, joille $p(z)/p'(z) = 0$, sillä tällöin $f(z) = z$. Kiintopisteitä ovat siis funktion p nollakohdat sekä ∞. Kun tarkastellaan funktion f derivaattaa

$$f'(z) = 1 - \frac{p'(z)^2 - p(z)p''(z)}{p'(z)^2} = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2}$$

huomataan, että funktion p nollakohdassa z on $f'(z) = 0$, eli z on funktion f erityisen puoleensavetävä piste, kunhan $p'(z) \neq 0$. Jos $|z|$ on suuri, voidaan funktiota f arvioida

$$\begin{aligned} f(z) &= z - \frac{p(z)}{p'(z)} = z - \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + 2 a_2 z + a_1} \\ &= z \left(1 - \frac{a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_2 z + a_1 + \frac{a_0}{z}}{n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + 2 a_2 z + a_1} \right) \approx z \left(1 - \frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

missä n on siis polynomin p asteluku. Nyt tätä funktiota iteroimalla huomataan, että iteraatiot lähestyvät nollaa, eli etääntyvät äärettömyydestä. Näin ollen ∞ on funktion f hylkivä piste.

Kuten luvussa 5 on määritelty, on pisteen w attraktioallas

$$A(w) = \{z : f^k(z) \to w\}.$$

Attraktioallas on siis niiden lähtöpisteiden joukko, jotka Newtonin menetelmällä lähestyvät pistettä w. Koska nollakohdat ovat puoleensavetäviä, allas $A(w)$ sisältää pisteen w ja sen avoimen ympäristön.

Luvussa 5 käsiteltiin polynomien Julian joukkoja. Myös rationaalifunktioille voidaan muodostaa Julian joukkoja. Rationaalifunktioiden Julian joukkojen ominaisuudet poikkeavat jonkin verran polynomien Julian joukoista. Tämän luvun kannalta olennaisinta on kuitenkin se, että lause 5.18 pätee myös rationaalifunktioiden Julian joukoille.

LAUSE 7.1. *Olkoon funktio f rationaalifunktio ja w sen puoleensavetävä kiintopiste. Tällöin $\partial A(w) = J(f)$.*

TODISTUS. Todistus on aivan vastaava kuin lauseen 5.18 todistus. Myös siinä käytetty lauseen 5.10 tulos on suora seuraus Montelin-Caratheodoryn lauseesta 4.20, joka pätee myös rationaalifunktioille. □

Tutkitaan yksinkertaista funktiota

$$p(z) = z^2 - c,$$

jonka nollakohdat ovat $\pm\sqrt{c}$, Newtonin menetelmän avulla. Kuten luvun 5 alussa, myös tässä tapauksessa tämän funktion tutkiminen riittää, sillä samalla saadaan tietoa kaikista neliöllisistä funktioista. Soveltamalla edellä esitettyä menetelmää saadaan funktio

$$f(z) = z - \frac{z^2 - c}{2z} = \frac{z^2 + c}{2z}.$$

Nyt lisäämällä kummallekin puolelle $\pm\sqrt{c}$ saadaan

$$f(z) \pm \sqrt{c} = \frac{z^2 \pm 2z\sqrt{c} + c}{2z} = \frac{(z \pm \sqrt{c})^2}{2z},$$

jolloin

$$\frac{f(z) + \sqrt{c}}{f(z) - \sqrt{c}} = \left(\frac{z + \sqrt{c}}{z - \sqrt{c}}\right)^2.$$

Nyt huomataan selvästi, että jos $\frac{|z+\sqrt{c}|}{|z-\sqrt{c}|} < 1$, niin $\frac{|f^k(z)+\sqrt{c}|}{|f^k(z)-\sqrt{c}|} \to 0$, eli siis $f^k(z) \to -\sqrt{c}$, kun $k \to \infty$. Vastaavasti, jos $\frac{|z+\sqrt{c}|}{|z-\sqrt{c}|} > 1$, niin $f^k(z) \to \sqrt{c}$, kun $k \to \infty$.

Julian joukko $J(f)$ on tässä tapauksessa suora $|z + \sqrt{c}| = |z - \sqrt{c}|$, eli pisteiden $\sqrt{c}$ ja $-\sqrt{c}$ välisen janan keskinormaali. Attraktioaltaat $A(\sqrt{c})$ ja $A(-\sqrt{c})$ ovat puolitasot, jotka tämä suora muodostaa.

Polynomit, joiden asteluku on suurempi kuin 2 eivät kuitenkaan käyttäydy aivan näin yksinkertaisesti. Jos polynomilla p on nollakohdat $z_1, z_2, ..., z_n$, joille $p'(z) \neq 0$, on lauseen 5.18 nojalla Julian joukko $J(f)$ jokaisen nollakohdan attraktioaltaan reuna, toisin sanoen

$$J(f) = \partial A(z_1) = \partial A(z_2) = ... = \partial A(z_n).$$

ESIMERKKI 7.2. Polynomilla

$$p(z) = z^3 - 1$$

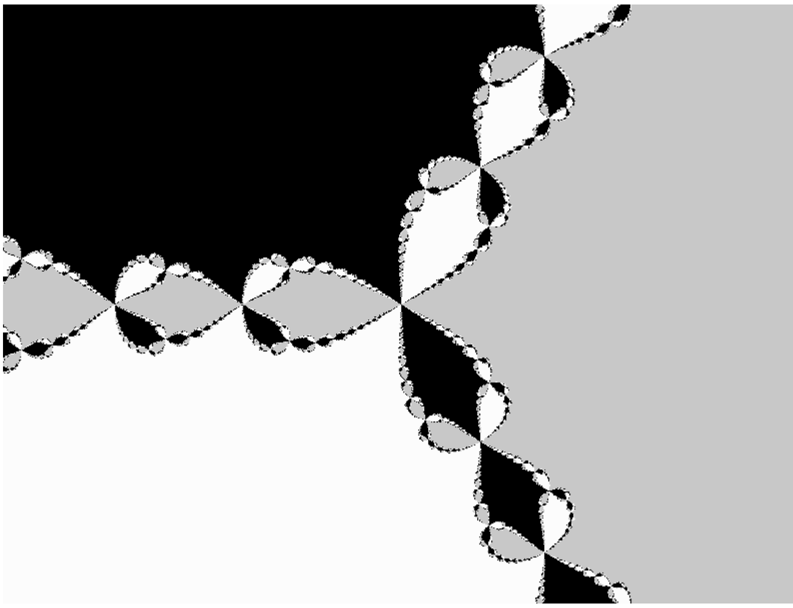
on kolme nollakohtaa $1, e^{i2\pi/3}$ ja $e^{i4\pi/3}$. Muodostetaan funktio

$$f(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}.$$

Kuvaus $\rho(z) = ze^{i2\pi/3}$ on 120° kierto origon ympäri. Nyt huomataan, että

$$f(\rho(z)) = \frac{2z^3e^{2\pi i} + 1}{3z^2e^{i4\pi/3}} = \frac{2z^3 + 1}{3z^2e^{i4\pi/3}} = \frac{2z^3e^{2i\pi/3} + e^{2i\pi/3}}{3z^2} = \rho(f(z)),$$

jolloin 120° kierto origon ympäri kuvaa joukon $A(w)$ joukoksi $A(we^{2i\pi/3})$ kaikilla kolmella nollakohdalla w.



KUVA 7.1. Newtonin menetelmä sovellettuna funktioon $p(z) = z^3 - 1$. Funktion $f(z) = z - p(z)/p'(z)$ attraktioaltaat.

Jos z on reaaliluku, niin $f^k(z)$ on reaalinen kaikilla k. Helposti nähdään, että luku 1 on funktion $f(z)$ kiintopiste ja derivaatta $f'(z)$ kohdassa $z = 1$ on nolla. Näin ollen 1 on funktion $f(z)$ erityisen puoleensavetävä piste. Kuitenkin, jos $z = \sqrt[3]{-1/2}$ on $f(z) = 0$, jolloin iteraatio $f^2(z)$ ei ole määritelty ja $f^k(z) \not\to 1$. Siis kaikilla niillä reaalisilla alkuarvoilla z, jotka jollakin iteraatiolla l antavat funktion arvoksi 0, on $f^k(z) \not\to 1$. Tällaisia reaalisia alkuarvoja on numeroituva määrä.

Näin ollen siis $f^k(z) \to 1$ lukuunottamatta numeroituvaa joukkoa reaalisia lukuja z. Tällöin attraktioaltaaseen $A(1)$ sisältyy reaaliakseli lukuunottamatta numeroituvaa määrää pisteitä. Symmetrian nojalla altaat $A(e^{2i\pi/3})$ ja $A(e^{4i\pi/3})$ sisältävät suorat, jotka kulkevat origon kautta ja muodostavat 120° ja 240° kulmat reaaliakselin kanssa, lukuunottamatta jälleen numeroituvaa määrää pisteitä. Lisäksi tiedetään, että $A(w)$ sisältää pisteen w avoimen ympäristön, mikä tahansa piste joukon $A(w)$ reunalta kuuluu kaikkien kolmen joukon reunaan ja että näitä pisteitä on ylinumeroituva määrä.

Kuvassa 7.1 on attraktioallas $A(1)$ kuvattu harmaana, allas $A(e^{2i\pi/3})$ mustalla ja $A(e^{4i\pi/3})$ valkoisella. Julian joukko on siis näiden kaikkien näiden alueiden yhteinen reuna.

LUKU 8

Julian joukkojen piirtäminen tietokoneella

Aiemmissa luvuissa on pyritty matemaattisesti tutkimaan ja kuvailemaan, miltä Julian joukot näyttävät. Kuten jo luvun 5 lopussa huomattiin, tarkastelu muuttuu kuitenkin helposti monimutkaiseksi, jolloin joukkoja on helpoin tutkia tietokoneella piirrettyjen kuvien avulla. Tässä luvussa lähteenä on Barnsleyn *Fractals Everywhere* [**1**]. Luvussa olevat kuvat on piirretty *FractInt for Windows* -ohjelmalla.

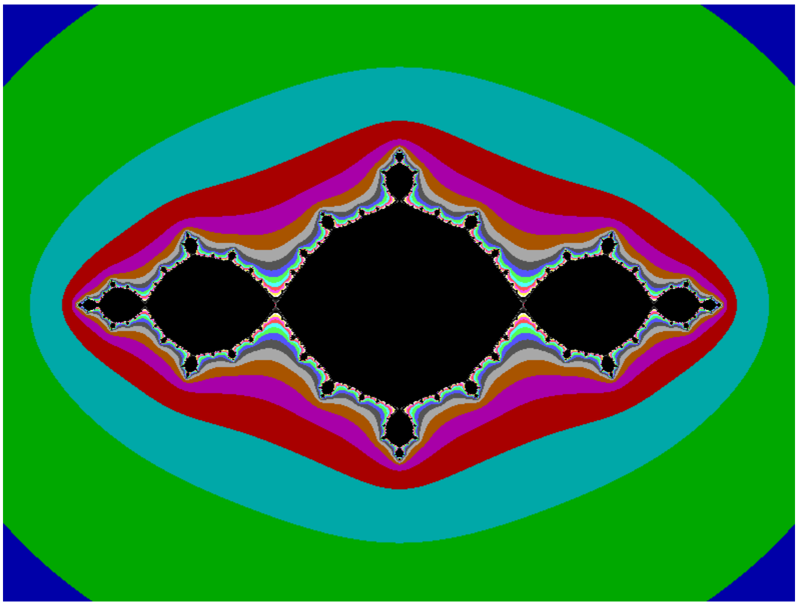
Tarkastellaan ensin Julian joukkoja. Lauseen 5.8 nojalla Julian joukko J_0 on invariantti. Toisin sanoen, kun Julian joukon pisteitä iteroidaan, ne pysyvät kyseisessä joukossa. Koska Julian joukko on hylkivien pisteiden reuna, niitä voidaan piirtää seuraavanlaisella algoritmilla.

Algoritmi 1. Olkoon funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + c$, missä c on jokin vakio kompleksitasosta.

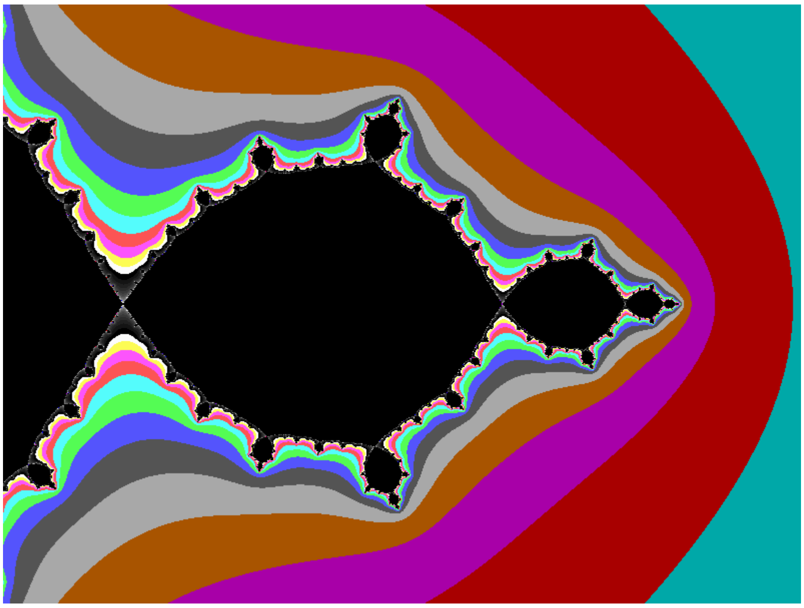
(1) Ajatellaan, että tietokoneen näyttö on tason suorakaide. Jaetaan se ruudukoksi, jossa yksi ruutu vastaa yhtä pikseliä.
(2) Valitaan kaksi suurta lukua $N \in \mathbb{N}$ ja $M \in \mathbb{N}$.
(3) Valitaan jokaisesta ruudusta luku z ja lasketaan iteraation $f^k(z)$ arvoja, kun $k = 1, 2, ..., N$.
(4) Jos jollakin k on $|f^k(z)| \geq M$, niin tulkitaan, että z iteroituu kohti ääretöntä. Väritetään pikseli ennalta määrätyllä värillä, joka riippuu siitä, millä k :n arvolla iteraatio ylittää rajan.
(5) Jos kaikilla k on $|f^k(z)| \leq M$, niin tulkitaan, että joko z iteroituu kohti nollaa, tai se kuuluu Julian joukkoon $J(f)$. Väritetään pikseli mustaksi.

Näin muodostuvan mustan alueen reuna on määritelmän nojalla kyseisen funktion Julian joukko. Värit voidaan valita sen mukaan kuinka monella iteraatiolla päästään rajan M yli. Mitä enemmän iteraatioita vaaditaan rajan ylittämiseen, sitä lähempänä Julian joukkoa piste sijaitsee. Jos taas jo ensimmäiset iteraatiot ylittävät rajan, on piste hyvin kaukana joukosta J_0. Näin ollen voidaan värit valita esimerkiksi siten, että mitä pienemmillä k :n arvoilla raja ylitetään sen vaaleammalla värillä pikseli väritetään. Kuvassa 8.1 on edellisen algoritmin tapaan piirretty Julian joukko funktiolle $f(z) = z^2 - 1$.

Luvussa 3.1 on mainittu, että usein fraktaalit muodostuvat osista, jotka muistuttavat kokonaisuuttaan. Kuvassa 8.2 on suurennettu kuvan 8.1 Julian joukkoa oikeasta reunastaan. Kuten huomataan, kuvio toistuu aina vain pienempänä.

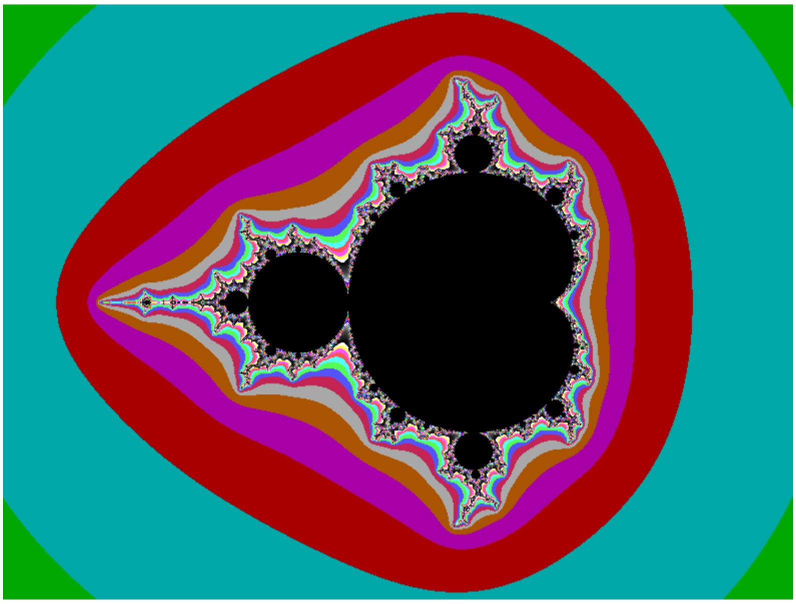


KUVA 8.1. Julian joukko $J(f)$, kun $f(z) = z^2 - 1$.



KUVA 8.2. Kuvan 8.1 Julian joukko suurrennettuna.

Mandelbrotin joukko määriteltiin luvussa 6 siten, että se koostuu niistä parametreistä c, joilla nollan iteraatiot eivät lähesty ääretöntä. Näin ollen Mandelbrotin joukkoja voidaan piirtää hyvin samantapaisen algoritmin avulla kuin Julian joukkojakin. Tässä algoritmissa erona on kuitenkin se, että ruuduista valitaan parametrien c arvoja ja iteroidaan arvolla nolla.



KUVA 8.3. Mandelbrotin joukko

ALGORITMI 2. Olkoon funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + c$.

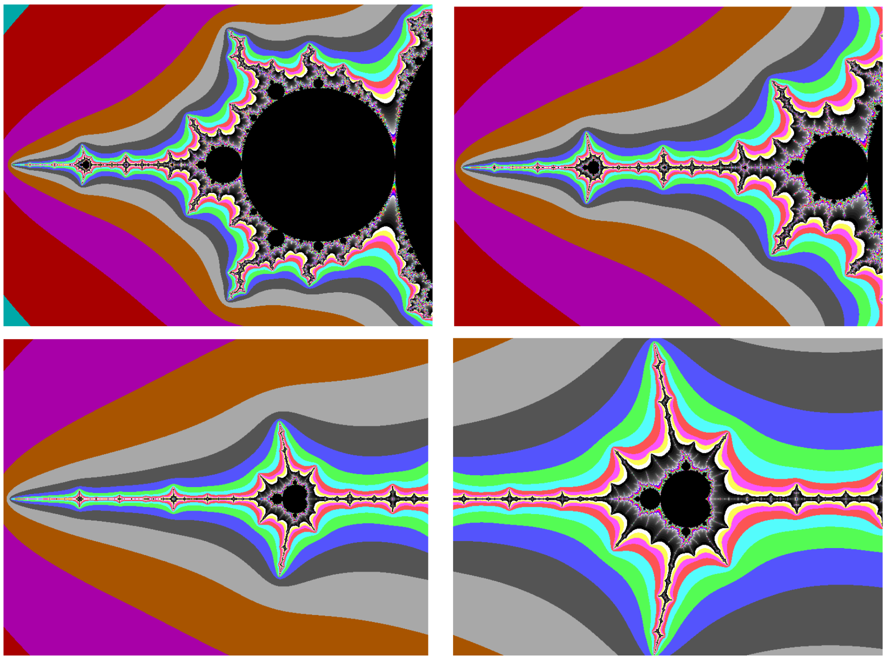
(1) Ajatellaan, että tietokoneen näyttö on tason suorakaide. Jaetaan se ruudukoksi, jossa yksi ruutu vastaa yhtä pikseliä.
(2) Valitaan kaksi suurta lukua $N \in \mathbb{N}$ ja $M \in \mathbb{N}$.
(3) Valitaan jokaisesta ruudusta parametri c ja lasketaan iteraation $f^k(0)$ arvoja, kun $k = 1, 2, ..., N$.
(4) Jos jollakin k on $|f^k(0)| \geq M$, niin tulkitaan, että nolla iteroituu kohti ääretöntä. Väritetään pikseli ennalta määrätyllä värillä, joka riippuu siitä, millä k :n arvolla iteraatio ylittää rajan.
(5) Jos kaikilla k on $|f^k(z)| \leq M$, niin tulkitaan, että iteraatio ei lähesty ääretöntä, eli c kuuluu Mandelbrotin joukkoon. Väritetään pikseli mustaksi.

Näin muodostunut musta alue koostuu siis niistä parametreistä, joilla nolla ei iteroidu kohti ääretöntä. Tämä alue on siis määritelmän nojalla Mandelbrotin joukko (kuva 8.3).

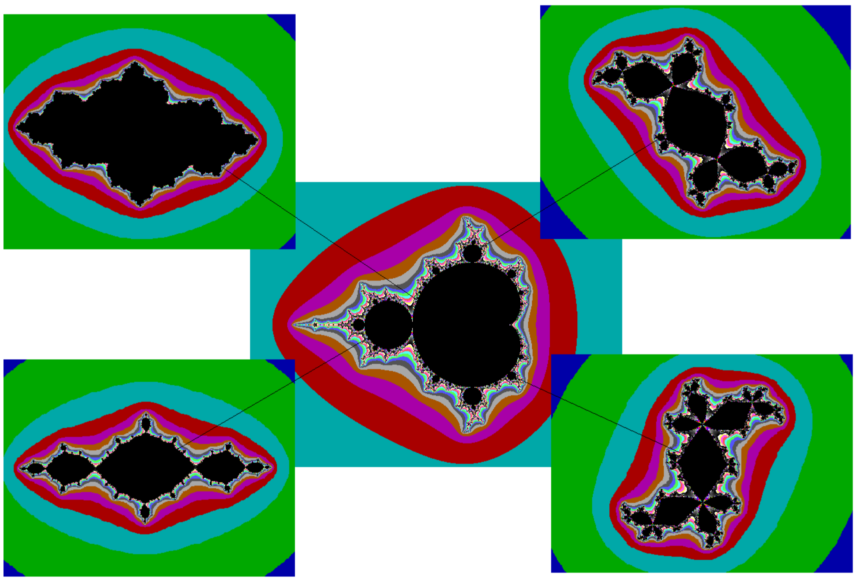
Suurennetaan kuvaa 8.3, jolloin huomataan, että myös tämä fraktaali muodostuu osista, jotka muistuttavat kokonaisuuttaan. Kun suurentamista jatketaan riittävän pitkälle, huomataan, että Mandelbrotin joukosta lähtevissä ohuissa haaroissa toistuu kuvio yhä uudelleen. Kuvassa 8.4 on suurennettu Mandelbrotin joukkoa vaiheittain.

Mandelbrotin joukko on Julian joukkojen indeksijoukko, ja siksi onkin mielekästä tutkia, miltä Julian joukot näyttävät, kun parametri c on valittu Mandelbrotin joukon eri osista. Luvussa 6 tätä tutkittiin matemaattisesti ja todettiin, että se muuttuu hyvin äkkiä vaikeaksi ja joukkoja on helpompi tutkia tietokoneen avulla.

Mandelbrotin joukon määritelmän nojalla on Julian joukko epäyhtenäinen, jos parametri c on valittu Mandelbrotin joukon ulkopuolelta. Tämän lisäksi luvussa 6 osoitettiin, että Mandelbrotin joukon "keskiosaan" kuuluvilla parametreilla Julian joukko



KUVA 8.4. Mandelbrotin joukon suurennoksia.



KUVA 8.5. Julian joukkoja, kun parametri on valittu Mandelbrotin eri osista.

on yksinkertainen suljettu käyrä, kuten kuvassa 8.5 nähdään. Tähän kuvaan on piirretty Julian joukkoja, kun parametrit on valittu myös muista Mandelbrotin joukon eri osista. Vasemmalla ylhäällä on Julian joukko, kun parametri c on Mandelbrotin joukon keskiosasta ja se muodostaa yhtenäisen alueen. Muissa kuvissa parametri c on valittu jostain kiekosta, joka on kiinni keskiosassa, jolloin Julian joukot muodostuvat useasta yksinkertaisesta, suljetusta käyrästä, jotka koskevat toisiaan pareittain.

Kirjallisuutta

[1] Michael Barnsley *Fractals Ewerywhere.* Academic Press, Inc., 1988.

[2] Alan F. Beardon *Iteration of Rational Functions.* Springer-Verlag New York Inc., 1991.

[3] John B. Conway *Functions of One Complex Variable* Springer-Verlag New York Inc., 1973, 1978.

[4] Gerald E. Edgar *Measure, Topology and Fractal Geometry.* Springer-Verlag New York Inc., 1990.

[5] Lawrence C. Evans, Ronald F. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions* CRC Press, 1992.

[6] Kenneth Falconer: *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.* John Wiley & Sons Ltd, 1990.

[7] Pertti Mattila *Geometry of Sets and Measures in Euclidian Space: Fractals and rectifiability.* Cambridge University Press, 1995.

[8] Bruce P. Palka: *An introduction to Complex Function Theory.* Springer-Verlag New York Inc, 1991.

[9] Jussi Väisälä: *Topologia II.* Limes ry, 1999.