

# Kompleksiluvut ja kvaterniot kiertoina

Heikki Polvinen

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Syksy 2012

**Tiivistelmä:** Heikki Polvinen, *Kompleksiluvut ja kvaterniot kiertoina* (engl. *Complex numbers and quaternions as rotations*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 59. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2012.

Tässä tutkielmassa osoitetaan, kuinka kompleksiluvulla kertominen vastaa vektorin kiertoa tasossa, ja kuinka kvaterniolla konjugointi vektorin kiertoa avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ .

Kompleksiluvut ovat reaalityyppisiä lukuja  $(a, b)$ , joille on määritelty yhteenlasku ja kertolasku. Kompleksiluvut voidaan myös esittää napakoordinaattien avulla lukuina  $|z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Napakoordinaattiesityksen avulla johdetaan kompleksilukua vastaava matriisi. Vektorin kierto tasossa origon ympäri kulman  $\theta$  verran vastapäivään on isometria, jonka seurauksena alkuperäisen vektorin ja tuloksena saadun vektorin välinen kulma vastapäivään laskettuna on  $\theta$ . Toisessa luvussa osoitetaan, kuinka kiertokulmasta  $\theta$  riippuvalla kompleksiluvulla tai sitä vastaavalla matriisillä kertominen vastaa vektorin kiertoa tasossa kulman  $\theta$  verran vastapäivään.

Kvaterniot ovat neliulotteisia lukuja  $A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ , joille on määritelty yhteenlasku ja kertolasku. Kvaternioiden joukko  $\mathbb{H}$  on jakorengas ja määrittellemällä kvaternioiden kertolaskun avulla kertolasku avaruuden  $\mathbb{R}^4$  vektoreille osoitetaan, että myös  $\mathbb{R}^4$  on jakorengas. Kvaterniosta voidaan erottaa reaali-osa  $Re A = a$  ja imaginaariosa  $Im A = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ . Näin tekemällä huomataan, että kvaternioille pätevät hyvin samankaltaiset laskusäännöt kuin kompleksiluvuille. Imaginaariset kvaterniot voidaan kuvata bijektiivisellä isometrialla avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreiksi. Kvaternion  $A$  konjugointi kvaterniolla  $Q$  tarkoittaa kuvaamista isometrialla  $\delta_Q(A) = Q^{-1}AQ$  ja luvussa neljä näytetään, että imaginaarisen kvaternion konjugointi vastaa vektorin kiertoa avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ . Kierretään vektoria  $y$  yksikkövektorin  $x$  määräämän origon kautta kulkevan kiertoakselin ympäri kulman  $\theta$  verran. Kierto on isometria, joka säilyttää vektorin ja kiertoakselin välisen kulman. Jakamalla vektori  $y$  ja tuloksena saatu vektori  $y'$  kiertoakselin suuntaiseen ja sitä vastaan kohtisuoraan komponenttiin huomataan kohtisuorien komponenttien välisen kulman olevan yhtä suuri kuin kiertokulma. Katsottaessa origosta vektorin  $x$  suuntaan sanotaan kierroksen tapahtuvan vastapäivään, jos kierretään kohti vektoria  $y \times x$ . Vektorin  $y'$  koordinaattien ratkaisemisessa toimitaan seuraavasti: Kuvataan tarkasteltava vektori  $y$  imaginaariseksi kvaternioksi, konjugoidaan sitä kiertoakselin määräävästä yksikkövektorista  $x$  ja kiertokulmasta  $\theta$  riippuvalla kvaterniolla  $Q$  ja kuvataan tuloksena saatu imaginaarinen kvaternio avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoriksi  $y'$ .

Kvaterniot ovat tehokkaita välineitä käsiteltäessä avaruuden  $\mathbb{R}^3$  kiertoja. Kiertoa kuvaavasta kvaterniosta pystytään helposti tunnistamaan kiertokulma ja kiertoakseli. Verrattaessa kvaternioita ja kiertomatriiseja huomataan, että pelkästään tietämällä kiertokulma ja kiertoakselin määräävä yksikkövektori, pystytään heti sanomaan mikä on kiertoa kuvaava kvaternio. Vastaavan kiertomatriisin johtaminen vaatii huomattavasti enemmän työtä.

**Avainsanat:** Kompleksiluku, kierto, isometria, kvaternio, konjugointi.

## Sisältö

Luku 1. Johdattelua	1
1.1. Sir William Rowan Hamilton	1
1.2. Kvaternioiden löytäminen	1
Luku 2. Kompleksiluvut ja tason kierrot	4
2.1. Kompleksiluvut ja $-$ taso	4
2.2. Kompleksilukujen matriisiesitys	5
2.3. Kompleksiluvut tason kiertoina	8
2.4. Algebraa kolmiulotteisessa reaaliavaruudessa	12
Luku 3. Kvaterniot	14
3.1. Kvaternioiden matriisiesitys	14
3.2. Kvaternioiden algebraa	16
3.3. Kvaternioiden ominaisuuksia	21
3.4. Imaginaariset kvaterniot	25
Luku 4. Kvaterniot kiertoina	30
4.1. Kvaterniolla konjugointi	30
4.2. Konjugointi ja kierto	34
4.3. Eulerin kulmat	48
Liite A.	56
1.1. Algebra	56
1.2. Trigonometrinen funktioiden laskusääntöjä	56
1.3. Vektorilaskentaa	57
1.4. Metriikka	57
Liite B. Merkintöjä	58
Lähdeluettelo	59

## LUKU 1

### Johdattelua

#### 1.1. Sir William Rowan Hamilton

William Rowan Hamilton syntyi 4. elokuuta vuonna 1805 Dublinissa Irlannissa. Williamin ollessa lapsi, hänen isänsä Archibald joutui usein olemaan Englannissa lakiasioita hoitamassa. Näin ollen Archibaldilla ei ollut aikaa opettaa Williamia, joka kolmen vuoden ikäisenä lähetettiin setänsä, Trimin hiippakunnan koulua johtavan pastori James Hamiltonin hoiviin. Tämä osoittautui merkittäväksi tapahtumaksi Williamin kehityksessä, sillä jo viisivuotiaana hän hallitsi latinan, kreikan ja heprean kielet. Saavutettuaan kymmenen vuoden iän William hallitsi jo kymmenen eri kieltä, edellisten lisäksi mm. ranskan, syyrian, ja sanskriitin kielet.

Hamilton alkoi tutustua enemmän matematiikkaan 13-vuotiaana, jolloin hän opiskeli Clairaut'n Algebran. Viidentoista vuoden ikäisenä Hamilton alkoi opiskella Newtonin ja Laplacen teoksia ja vuonna 1822 hän löysi virheen kuuluisasta Laplacen teoksesta *Mécanique Céleste*. Tämän löydöksen johdosta senaikaisen Irlannin Kuninkaallisen Astronomin John Birkleyn sanotaan todenneen Hamiltonista vapaasti suomennettuna seuraavasti: ”Tämä nuori mies, en sano että hänestä tulee, vaan että hän on ensimmäinen ikäisensä matemaatikko” [5].

Hamilton pääsi opiskelemaan Dublinin Trinity Collegeen 18-vuotiaana. Tästä eteenpäin Hamiltonin ura eteni meteorin lailla. Vuonna 1827 hänet nimitettiin Irlannin kuninkaalliseksi astronomiksi, mikä oli hyvin poikkeuksellinen nimitys 22-vuotiaalle opiskelijalle. Vuonna 1835 kolmenkymmenen vuoden ikäisestä Williamista tuli Sir William, kun hänet lyötiin ritariksi. Hamilton kunnostautui myös fysiikan alalla, ja hänen nimensä esiintyykin usein varsinkin mekaniikan julkaisuissa.

#### 1.2. Kvaternioiden löytäminen

Hamilton oli ollut kiinnostunut kompleksiluvuista 1830-luvun alkupuolelta lähtien, ja vuonna 1833 hän ensimmäisenä osoitti, että kompleksiluvut muodostavat lukuparien algebran. Seuraavaksi käydään lyhyesti läpi Hamiltonin varsinaisten kvaternioiden kehitykseen johtaneita ideoita lähteen [1] mukaisessa järjestyksessä. Selkeyden vuoksi käytetään nykyaikaisia merkintöjä.

Määritellään aluksi imaginaarinen yksikkö  $i$ , jolle ehto  $i^2 = -1$  on voimassa. Luvuille 1 ja  $i$  pätevät kertolaskusäännöt on esitelty taulukossa yksi. Kompleksilukujen algebran alkioita ovat lukujen 1 ja  $i$  lineaariyhdisteenä saatavat luvut  $\mathbb{A} = a1 + Ai$ , missä  $a$  ja  $A$  ovat reaalityyppisiä lukuja. Sanomalla, että kyseiset luvut

TAULUKKO 1. Imaginaaristen yksiköiden kertolaskusäännöt.

	1	i
1	i	i
i	i	-i

muodostavat algebran, tarkoitetaan, että tavalliset aritmeettisiä operaatioita koskevat laskusäännöt pätevät näillä luvuilla. Näin ollen annetun luvun  $\mathbb{A}$  ja vastaavasti määritellyn luvun  $\mathbb{B}$  välinen tulo on

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = ab - AB + i(aB + bA).$$

Nyt kompleksiluvut  $\mathbb{A}$  ja  $\mathbb{B}$  voidaan kirjoittaa pareina (tarkemmin järjestettyinä lukupareina)

$$\mathbb{A} = [[a, A]], \quad \mathbb{B} = [[b, B]]$$

ja niiden välinen tulo on myös pari:

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = [[ab - AB, aB + bA]].$$

Hamilton huomasi myös kuinka reaalityyppi  $a$  voidaan kirjoittaa kompleksisena parina

$$a = [[a, 0]].$$

Seuraavien kymmenen vuoden ajan Hamiltonin mieltä askarrutti lähes pakkomielteen omaisesti kaksi ongelmaa. Hän yritti laajentaa kompleksilukujen pariteytystä siten, että saisi määritellyksi lukukolmikot, missä on yksi reaalinen ja kaksi imaginaarista yksikköä. Tämä oli kuitenkin jopa Hamiltonin tasoiselle matemaatikolle mahdoton tehtävä.

Toisaalta Hamiltonin mielessä alkoi muotoutua vektorin käsite. On huomattavaa, että 1830-luvulla ei varsinaisesti sanaa vektori vielä käytetty, vaikka sen kaltaisilla otuksilla kuvattiin mm. voimia ja muita suureita. On selvää, että Hamiltonilla oli mielessään kuva vektoreiden yhteenlaskusta ja jonkinasteisesta kertolaskusta, mutta yksi operaatio kaiversi hänen mieltään. Tämä tuli selkeästi ilmi siten, että kulkiessaan yläkerrasta alakertaan aamiaiselle, Hamilton usein kuuli vanhemman poikansa kysyvän: ”Isä, joko olet oppinut jakamaan vektoreita?”

Palataanpa maanantaihin 16. lokakuuta 1843, päivään, joka on yksi matemaatiikan historian parhaiten dokumentoituja päiviä. Sattumoisin kyseinen päivä oli myös Hamiltonin luomukselle uuden merkityksen antaneen ranskalaisen Olinde Rodriguesin 49. syntymäpäivä. Kyseisenä aamuna Sir Hamilton, yhdessä Lady Hamiltonin kanssa, oli kävelemässä Dublinissa Royal Canalin vierellä kohti Kuninkaallista Irlannin Akatemiaa, jossa hänen tuli osallistua tapaamiseen. Kulkiessaan ohi Broomen sillan (Hamilton kutsui tätä siltaa Broughamin sillaksi, jolla nimellä se on tunnettu siitä lähtien), Hamilton oivalsi, että kahden imaginaarisen yksikön sijaan tarvitaankin kolme. Näiden tuli toteuttaa seuraavat laskusäännöt, jotka Hamilton kertomuksen mukaan kaiversi sillan kaiteeseen:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad ji = -k.$$

Lisäksi yksiköiden välisille tuloille pätevät ehdot:  $ik = -j, ki = j, jk = i$  ja  $kj = -i$ . Nyt Hamiltonilla oli neljä yksikköä, joiden muodostamaa lukua

$$\mathbb{A} = a1 + A_x i + A_y j + A_z k$$

hän kutsui kvaternioksi.

Tästä eteenpäin Hamilton keskittyi tutkimustyössään pelkästään kvaternioihin. Vuonna 1853 hän julkaisi teoksen Luentoja kvaternioista, mutta totesi, ettei se ollut riittävän hyvä kuvaamaan teoriaa kvaternioiden takana. Näin ollen Hamilton alkoi kirjoittaa seuraavaa kirjaansa, Kvaternioiden alkeet, jonka pituudeksi hän arvioi tulevan noin 400 sivua ja jonka kirjoitustyön hän arvioi kestävän kaksi vuotta. Loppujen lopuksi kirjasta tuli kaksi kertaa arvoitua pidempi ja kirjoitustyö kesti seitsemän vuotta, Hamiltonin 2. syyskuuta vuonna 1862 tapahtuneeseen kuolemaan saakka. Tässä vaiheessa kirjan viimeinen luku oli vielä kesken, ja kirjan julkaisikin lopulta hänen vanhin poikansa William Edwin Hamilton.

Vuodesta 1990 lähtien Maynoothin kansainvälisen yliopiston matematiikan laitoksella on ollut tapanaan järjestää joka vuosi 16. lokakuuta kulkue Sunsinkin observatoriolta kohti kuuluisaa siltaa. Luonnollisesti Hamiltonin kaiverrukset ovat jo kauan aikaa sitten kadonneet, mutta kulkueperinteellä halutaan kunnioida kuuluisan matemaatikon muistoa.

## LUKU 2

### Kompleksiluvut ja tason kierrot

#### 2.1. Kompleksiluvut ja -taso

Aloitetaan määrittelemällä kompleksiluvut, kuten lähteessä [4] on tehty. Yhtälöllä  $x^2 + 1 = 0$ , missä  $x \in \mathbb{R}$ , ei ole ratkaisua reaalilukujen joukossa. Laajennetaan  $\mathbb{R}$  kunnaksi  $\mathbb{C}$ , jossa tällä yhtälöllä on ratkaisu. Halutaan siis lisätä lukujärjestelmään alkio  $\sqrt{-1}$  siten, että reaalilukujen laskutoimitukset voidaan suorittaa myös tässä uudessa joukossa. Tämän joukon tulee sisältää ainakin kaikki muotoa  $a + b\sqrt{-1}$  olevat alkio, missä  $a, b \in \mathbb{R}$ . Kun ajatellaan lukua  $a + b\sqrt{-1}$  reaalilukuparina  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , voidaan asettaa täsmällinen määritelmä kompleksilukujen joukolle.

MÄÄRITELMÄ 2.1. *Kompleksilukujen joukko*  $\mathbb{C}$  on

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

varustettuna komponenteittaisella yhteenlaskulla

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

ja kertolaskulla, joka määritellään asettamalla

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Samastetaan reaalilukujen joukko kompleksilukujen ” $a$ -akselin” kanssa. Määritellään kuvaus  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  asettamalla  $s(x) = (x, 0)$ . Kuvauksen  $s$  määritelmästään nähdään selvästi, että jokaista reaalilukua vastaa vain yksi kompleksiluku.

SOPIMUS: Tästä eteenpäin samastetaan reaaliluvut vastaavan kompleksilukujen osajoukon  $s(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$  kanssa, ts. jos  $x \in \mathbb{R}$ , kirjoitetaan  $x = (x, 0) \in \mathbb{C}$ .

Kompleksilukua  $i = (0, 1)$  kutsutaan *imaginaariyksiköksi*. Jokainen kompleksiluku  $z = (a, b)$  voidaan nyt esittää summana

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib,$$

missä viimeisessä vaiheessa käytetään edellä määriteltyä samastusta luvuille  $a$  ja  $b$ .

Näillä merkinnöillä kompleksilukujen laskutoimitukset saavat muodot

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d) \\ (a + ib)(c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Edelleen nähdään, että  $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ , joten yhtälöllä  $x^2 = -1$  on todella ratkaisu kompleksilukujen joukossa.

Luku  $\bar{z} = a - ib$  on kompleksiluvun  $z = a + ib$  (*kompleksi*)*konjugaatti* eli *liittoluku*. Kompleksiluvun  $z = a + ib$  *normi* eli *itseisarvo* on

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|(a, b)\|,$$

missä  $\|\cdot\|$  on tason  $\mathbb{R}^2$  ”tavallinen” eli *euklidinen normi*.

Kompleksiluvut voidaan esittää myös napakoordinaattien avulla. Olkoon  $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ja olkoon  $\theta$  tason  $\mathbb{R}^2$  vektorien  $(1, 0)$  ja  $(a, b)$  välinen kulma vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan laskettuna. Tällöin

$$\begin{cases} a = \|(a, b)\| \cos \theta = |z| \cos \theta \text{ ja} \\ b = \|(a, b)\| \sin \theta = |z| \sin \theta, \end{cases}$$

joten voidaan kirjoittaa

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Kompleksiluvuille  $z$  ja  $w$  pätevät seuraavat laskusäännöt:

- (i)  $\overline{\bar{z}} = z$ ,
- (ii)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,
- (iii)  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot w$ ,
- (iv)  $|\bar{z}| = |z|$  ja
- (v)  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , kun  $z \neq 0$ .

Näiden ominaisuuksien todistaminen onnistuu helposti edellisten määritelmien perusteella ja niinpä jätänkin ne lukijalle harjoitustehtäviksi.

## 2.2. Kompleksilukujen matriisiesitys

Tämän kappaleen keskeinen kysymys on: kuinka kompleksiluvut saadaan esitettyä joukon  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  alkioina eli reaalisisina  $2 \times 2$ -matriiseina? Aloitetaan tarkastelemalla matriisia

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Nähdään, että  $A$  voidaan pilkkoa osiin ja esittää muodossa

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Merkitään nyt

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

jolloin voidaan kirjoittaa  $A = a\mathbf{I} + b\mathbf{J}$ . Näin ollen näyttäisi siltä, että matriisi  $\mathbf{I}$  voisi käyttäytyä, kuten luku 1 ja matriisi  $\mathbf{J}$  kuten luku  $i$ . Tarkastellaan asiaa muutaman yksinkertaisen laskutoimituksen kautta. Selvästi nähdään, että  $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$ , ja suoraan laskemalla huomataan, että

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I}.$$



Lisäksi huomataan, että  $B\mathbf{I} = B = \mathbf{I}B$  kaikilla  $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Vaikuttaa kovasti siltä, että näin määritellyt matriisit  $\mathbf{I}$  ja  $\mathbf{J}$  todella käyttäytyvät, kuten luvut 1 ja  $i$ .

Katsotaan seuraavaksi, kuinka tällainen vastaavuus määritellään tarkasti. On selvää, että joukot  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  ja  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  ovat lineaariavaruuksia [7] ja renkaita [6]. Määritellään kuvaus  $\kappa : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  asettamalla

$$\kappa(z) = \kappa(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Lähteiden [7] ja [8] mukaisesti lineaarikuvaukselle pätevät seuraavat ehdot: Lineaariavaruuksien  $V$  ja  $W$  välinen kuvaus  $L : V \rightarrow W$  on *lineaarinen* eli  $L$  on *lineaarikuvaus*, jos

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y)$$

kaikille  $x \in V$  ja  $y \in V$ , ja kaikille reaaliluvuille  $\lambda$  ja  $\mu$ . Lisäksi sanotaan, että lineaarikuvaus  $L : V \rightarrow W$  on

- (i) *injektiivinen* eli *injektio*, jos ehdosta  $Lx = Ly$  seuraa  $x = y$ ,
- (ii) *surjektiivinen* eli *surjektio*, jos jokaiselle  $y \in W$  on  $y = Lx$  jollekin  $x \in V$ , ja
- (iii) *bijektiivinen* eli *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio.

Olkoot  $(X, d_X)$  ja  $(Y, d_Y)$  metrisiä avaruuksia. Kuvaus  $i : X \rightarrow Y$ , on *isometrinen* eli *isometria*, jos se on bijektio ja

$$d_Y(i(a), i(b)) = d_X(a, b)$$

kaikilla  $a, b \in X$ .

Todetaan, että  $\kappa$  on lineaarikuvaus. Olkoot  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $z' = c + id \in \mathbb{C}$  ja  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda z + \mu z') &= \kappa(\lambda a + \mu c + i(\lambda b + \mu d)) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu c & -\lambda b - \mu d \\ \lambda b + \mu d & \lambda a + \mu c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \lambda \kappa(z) + \mu \kappa(z'). \end{aligned}$$

Selvästi kuvaus  $\kappa$  on injektio, joten jätän injektiivisyyden toteamisen lukijalle harjoitustehtäväksi. Sen sijaan osoitetaan, että kuvaus  $\kappa$  on rengashomomorfismi. Kompleksiluvuille  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ja  $z' = c + id \in \mathbb{C}$  pätevät seuraavat ehdot:

$$\begin{aligned} \kappa(z + z') &= \kappa((a + ib) + (c + id)) = \kappa((a + c) + i(b + d)) \\ &= \begin{pmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \kappa(z) + \kappa(z') \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\kappa(zz') &= \kappa((a+ib)(c+id)) = \kappa((ac-bd) + i(ad+bc)) \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \kappa(z)\kappa(z').\end{aligned}$$

Lisäksi kuvaukselle  $\kappa$  pätee ehto

$$\kappa(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I},$$

joten kertolaskun neutraalialkio kuvautuu neutraalialkioksi. Näin ollen kuvaus  $\kappa$  on rengashomomorfismi, joka kuvaa tuttuja kompleksilukuja seuraavasti:

$$\kappa(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{J},$$

sekä yleisemmin

$$\kappa(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\mathbf{I} \quad \text{ja} \quad \kappa(ib) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = b\mathbf{J}.$$

Olkoon nyt  $z = a + ib$  ja  $\kappa(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =: A$ . Tällöin huomataan, että

$$\det A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Edelleen nähdään, että

$$A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a\mathbf{I} - b\mathbf{J} = \kappa(\bar{z}).$$

Katsotaanpa seuraavaksi, kuinka pari tavallista kompleksilukujen laskusääntöä todistetaan matriisien avulla.

**LAUSE 2.2.** *Olkoot  $z$  ja  $z'$  kompleksilukuja. Tällöin*

(i) *normeille pätee  $|zz'| = |z||z'|$ ,*

(ii) *jos  $z \neq 0$ , kompleksiluvun  $z$  käänteisluvulle  $z^{-1}$  saadaan esitys  $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$ .*

**TODISTUS.** (i) Olkoot  $\kappa(z) = A$  ja  $\kappa(z') = A'$ . Tällöin lineaarialgebrasta [7] tunnetun laskusäännön  $\det(AA') = \det A \cdot \det A'$  avulla saadaan

$$|zz'|^2 = \det(AA') = \det A \cdot \det A' = |z|^2|z'|^2.$$

Tästä seuraa, että  $|zz'| = |z||z'|$ .

(ii) Olkoot  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$  ja  $\kappa(z) = A$ . Tällöin  $A$  ei ole nollamatriisi ja  $\det A = |z|^2 \neq 0$ , joten matriisi  $A$  on kääntyvä. Edelleen huomataan, että

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^T = \frac{1}{|z|^2} \kappa(\bar{z}).$$

Koska  $\kappa$  on homomorfismi, saadaan

$$AA^{-1} = \mathbf{I} = \kappa(1) = \kappa(zz^{-1}) = \kappa(z)\kappa(z^{-1}).$$

Koska oletuksen mukaan  $\kappa(z) = A$ , ylläoleva ehto on yhtäpitävä sen kanssa, että  $\kappa(z^{-1}) = A^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \kappa(\bar{z}) = \kappa(\frac{1}{|z|^2} \bar{z})$ . Kuvauksen  $\kappa$  injektiivisyyden nojalla

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}.$$

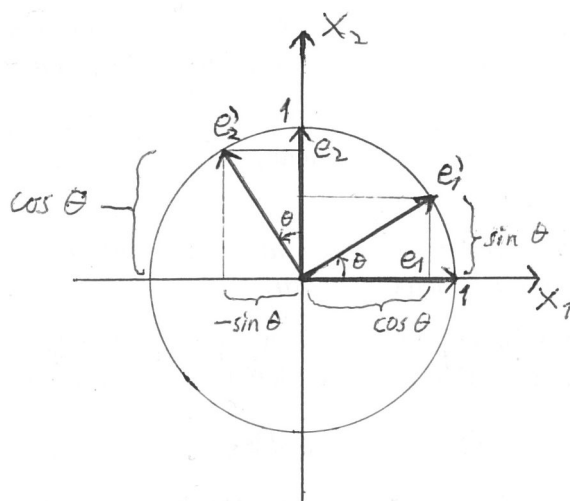
□

### 2.3. Kompleksiluvut tason kiertoina

Sovitaan aluksi, että käytettäessä termiä vektori, tarkoitetaan nimenomaan origosta lähteviä vektoreita.

Puhuttaessa kierroista täytyy olla selvää mitä kierretään ja mihin suuntaan. Pitää siis tehdä selvä ero sen välille, kierretäänkö yksittäistä vektoria vai koko koordinaattistoa. Kaksiulotteisessa tapauksessa vektorin kiertämisellä tarkoitetaan, että vektoria ikään kuin pyöritetään origon ympäri tietyn kulman verran. Koordinaatiston kiertäminen taas tarkoittaa kaksiulotteisessa tapauksessa koordinaattiakselien kääntämistä siten, että ne säilyvät kohtisuorassa toisiaan vasten. Siten voidaan ajatella, että koordinaattiakselien kierrossa vektorit pysyvät paikallaan, mutta niiden koordinaatit muuttuvat. Molemmissa tapauksissa vektorien pituudet säilyvät ennallaan. Huomataan, että koordinaattitason kiertäminen tietyn kulman verran myötäpäivään muuttaa vektorin koordinaatteja samalla tavalla kuin vektorin kiertäminen yhtäsuuren kulman verran vastapäivään.

Olkoot tason  $\mathbb{R}^2$  luonnolliset kantavektorit  $e_1 = (1, 0)$  ja  $e_2 = (0, 1)$  sekä niitä vastaavat koordinaattiakselit  $x_1$  ja  $x_2$ . Vektorin  $(x, y)$  kierrolla tasossa origon ympäri kulman  $\theta$  verran vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan tarkoitetaan isometristä eli vektorin pituuden säilyttävää lineaarikuvausta, jossa vektorien  $(x, y)$  sekä  $(x', y')$  välinen kulma vastapäivään laskettuna on  $\theta$ . Tällaisessa kierrossa kantavektorit  $e_1$  ja  $e_2$  muuntuvat kuvan 2.1 mukaisesti



KUVA 2.1. Kantavektorien  $e_1$  ja  $e_2$  kierto tasossa kulman  $\theta$  verran vastapäivään.

vektoreiksi

$$\begin{aligned} e'_1 &= (\cos \theta, \sin \theta) \text{ ja} \\ e'_2 &= (-\sin \theta, \cos \theta). \end{aligned}$$

Olkoot  $x$  ja  $y$  reaalityyji. Tällöin vektorit  $xe_1 = (x, 0)$  ja  $ye_2 = (0, y)$  muuntuvat kierrossa edellisen perusteella vektoreiksi

$$\begin{aligned} xe'_1 &= (x \cos \theta, x \sin \theta) \text{ ja} \\ ye'_2 &= (-y \sin \theta, y \cos \theta). \end{aligned}$$

Yhdistämällä edelliset saadaan, että yleinen vektori  $(x, y)$  muuntuu kierron seurauksena vektoriksi

$$(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Määritellään vektorin kiertoa tasossa kulman  $\theta$  verran vastapäivään vastaava kuvaus  $L_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  asettamalla

$$L_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Kuvaus  $L_\theta$  on selvästi lineaarinen bijektio, joten jätän tämän toteamisen luki-jalle harjoitustehtäväksi.

SOPIMUS: Tästä eteenpäin samastetaan avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektorit vastaaviksi sarakevektoreiksi, ts. jos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , kirjoitetaan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R}).$$

Vastaavaa samastusta käytetään myöhemmin avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreille. Huomataan, että voidaan myös samastaa

$$L_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Toisaalta nähdään, että

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Näin ollen lineaarikuvausta  $L_\theta$  vastaa matriisi

$$K_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Tämän perusteella voidaan todeta, että vektorin kierrossa tasossa kulman  $\theta$  verran vastapäivään mielivaltaisen vektorin  $(x, y)$  uudet koordinaatit saadaan samastamalla se sarakevektoriksi ja kertomalla sitä vasemmalta kiertomatriisilla  $K_\theta$ .

Kirjataan vielä edellä määritellyt kierron ehdot matemaattisina lausekkeina. Alkuperäisestä vektorista  $(x, y)$  tulee kierron seurauksena uusi vektori  $(x', y')$ , jolle pätevät seuraavat ehdot:

$$(i) \|(x', y')\| = \|(x, y)\|, \text{ ja}$$

$$(ii) \cos \theta = \frac{\left( (x, y) | (x', y') \right)}{\|(x, y)\|^2}.$$

LAUSE 2.3. Kierretään tason vektoria  $u = (x, y)$  kulman  $\theta$  verran vastapäivään. Olkoon

$$v = L_\theta u = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

Tällöin vektorit  $u$  ja  $v$  täyttävät edellä määritetyt ehdot.

TODISTUS. Aloitetaan osoittamalla, että  $\|u\| = \|v\|$ . Suoraan laskemalla nähdään, että

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \|(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)\|^2 \\ &= x^2 \cos^2 \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta + 2xy \sin \theta \cos \theta + y^2 \cos^2 \theta \\ &= x^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= x^2 + y^2 = \|u\|^2. \end{aligned}$$

Vektorit  $u$  ja  $v$  ovat siis samanpituiset, joten kuvaus  $L_\theta$  on isometria. Nyt tulee vielä osoittaa, että

$$\cos \theta = \frac{(u|v)}{\|u\|^2}.$$

Suoraan laskemalla nähdään, että

$$\begin{aligned} \frac{(u|v)}{\|u\|^2} &= \frac{x^2 \cos \theta - xy \sin \theta + yx \sin \theta + y^2 \cos \theta}{\|u\|^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \cos \theta \\ &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Näin ollen myös kulman ehto toteutuu. □

Olkoon kompleksiluku  $z_\theta = (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ . Nyt huomataan, että

$$\kappa(z_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = K_\theta$$

ja

$$|z_\theta|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Toisaalta nähdään, että

$$z_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) = L_\theta(x, y).$$

Näin voidaan sanoa kompleksiluvulla  $z_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$  ja matriisilla  $K_\theta = \kappa(z_\theta)$  vasemmalta kertomisen vastaavan operointia lineaarikuvauksella  $L_\theta$  eli vektorin kiertoa tasossa kulman  $\theta$  verran vastapäivään. Matriisia  $K_\theta$  kutsutaankin usein kiertomatriisiksi.

Tarkastellaan nyt kahta yksinkertaista kiertoa ja tarkistetaan, että kompleksiluvulla kertominen antaa tulokseksi oikean vektorin. Kierretään vektoria tasossa kulman  $\pi$  verran vastapäivään. Tällöin jokainen tason vektori  $(x, y)$  muuntuu vastakkaisuuntaiseksi vektoriksi  $(-x, -y)$ , joten tätä kiertoa vastaa lineaarikuvaus  $L_\pi$ , jolle kaikilla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pätee

$$L_\pi(x, y) = (x \cos \pi - y \sin \pi, x \sin \pi + y \cos \pi) = (-x, -y).$$

Tätä kiertoa vastaa kertominen kompleksiluvulla  $z_\pi = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$ , ja suoraan laskemalla nähdään, että

$$z_\pi(x, y) = (-1, 0)(x, y) = (-x, -y).$$

Kierretään vektoria tasossa kulman  $2\pi$  verran vastapäivään. Tällöin kierretään kokonainen kierros, joten vektorin  $(x, y)$  koordinaatit eivät muutu. Näin ollen tätä kiertoa vastaa lineaarikuvaus  $L_{2\pi}$ , jolle kaikilla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pätee

$$L_{2\pi}(x, y) = (x \cos 2\pi - y \sin 2\pi, x \sin 2\pi + y \cos 2\pi) = (x, y).$$

Tätä kiertoa vastaa kertominen kompleksiluvulla  $z_{2\pi} = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0)$ , ja suoraan laskemalla nähdään, että

$$z_{2\pi}u = (1, 0)(x, y) = (x, y).$$

Tarkastellaan kiertojen ja kompleksilukujen yhteyttä vielä yhden monimutkaisemman esimerkin kautta.

**ESIMERKKI 2.4.** Kierretään tason  $\mathbb{R}^2$  vektoreita  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  ja  $v = (2, 1)$  kulman  $\frac{\pi}{4}$  verran vastapäivään. Mitkä vektorit saadaan tulokseksi?

Ratkaisu: Kiertokulman suuruus on  $\frac{\pi}{4}$  ja  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$ , joten kiertoa vastaavaksi kiertomatriisiksi  $K_{\frac{\pi}{4}}$  saadaan

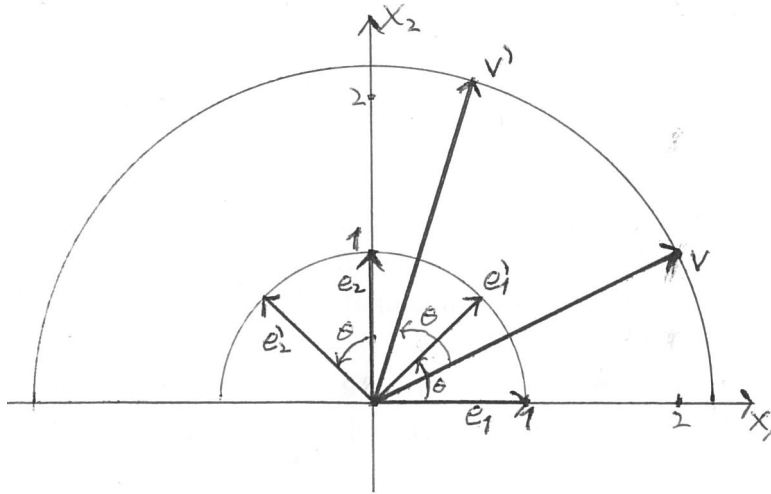
$$K_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Uudet vektorit saadaan ratkaistuksi samastamalla alkuperäiset vektorit sarakvektoreiksi ja kertomalla niitä vasemmalta kiertomatriisilla  $K_{\frac{\pi}{4}}$ . Uudet vektorit saadaan näin ollen seuraavasti:

$$\begin{aligned} e'_1 &= K_{\frac{\pi}{4}}e_1 = K_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \leftrightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ e'_2 &= K_{\frac{\pi}{4}}e_2 = K_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \leftrightarrow \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ v' &= K_{\frac{\pi}{4}}v = K_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \leftrightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Tilannetta on hahmoteltu kuvassa 2.2. Katsotaan vielä, kuinka sama tulos saadaan toisella tavalla. Vektorin kiertoa kulman  $\frac{\pi}{4}$  verran myötäpäivään vastaa kertominen kompleksiluvulla  $z_{\frac{\pi}{4}} = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Edellä määriteltiin  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , joten tarkasteltavat vektorit kuuluvat kompleksilukujen joukkoon. Näin ollen voidaan kertoa kompleksilukuja  $e_1, e_2$  ja  $v$  kompleksiluvulla  $z_{\frac{\pi}{4}}$ , jolloin edellä määritellyn kompleksilukujen kertolaskun avulla saadaan

$$\begin{aligned} e'_1 &= z_{\frac{\pi}{4}}(1, 0) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)(1, 0) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ e'_2 &= z_{\frac{\pi}{4}}(0, 1) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)(0, 1) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ ja} \\ v' &= z_{\frac{\pi}{4}}(2, 1) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)(2, 1) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$



KUVA 2.2. Vektoreiden kierto tasossa kulman  $\theta = \frac{\pi}{4}$  verran vastapäivään.

#### 2.4. Algebraa kolmiulotteisessa reaaliavaruudessa

Hamiltonin toimesta kompleksiluvut saatiin määriteltyä järjestettyinä reaali-lukupareina. Mielenkiintoinen kysymys on, voitaisiinko joukossa  $\mathbb{R}^3$  määritellä kertolasku siten, että siitä tulisi kunta. Tarvittavat kunnan algebralliset ominaisuudet on esitetty liitteessä A ja kuntien algebraa on käsitelty tarkemmin lähteessä [6].

Hamilton pohti kaksiulotteisten kompleksilukujen  $a + ib$ , jossa  $i^2 = -1$  laajentamista kolmiulotteisiksi luvuiksi  $a + ib + jc$ , jossa  $i^2 = -1 = j^2$ . Tämä näyttää lähes onnistuneelta määritelmältä, sillä kun on valittuna avaruuden  $\mathbb{R}^3$  luonnollinen kanta  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , tulo  $i^2$  vastaa kulman  $\pi$  suuruista kiertoa kantavektoria  $e_1$  vastaavan koordinaattiakselin ympäri ja tulo  $j^2$  taas saman suuruista kiertoa kantavektoria  $e_3$  vastaavan koordinaattiakselin ympäri. Yhteenlasku määritellään luonnollisella tavalla

$$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j$$

Miten kertolasku tulisi määritellä? ”Helpoin” tapa tehdä tämä olisi tietenkin määritellä kahden reaali-lukukolmikon  $(a, b, c)$  ja  $(a', b', c')$  väliseksi tuloksi suoraan

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (aa', bb', cc').$$

Tällä määrittelyllä kertolaskun neutraali-alkio on  $(1, 1, 1)$ , sillä

$$(1, 1, 1)(a, b, c) = (a, b, c) = (a, b, c)(1, 1, 1)$$

kaikilla  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Tässä määrittelytavassa ongelmalliseksi muodostuu se, että esimerkiksi alkioilla  $(1, 0, 0)$  ei ole käänteisalkiota, sillä

$$(1, 0, 0) \cdot (a, b, c) = (a, 0, 0) \neq (1, 1, 1)$$

kaikilla  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

Monien erilaisten kokeilujen jälkeen Hamilton lopulta havaitsi, että kyseisen laskutoimituksen määrittäminen on mahdotonta joukossa  $\mathbb{R}^3$ . Nykymatematiikan avulla tämä pystytään todistamaan kohtuullisen vähällä vaivalla.

**LAUSE 2.5.** *Oletetaan, että joukko  $\mathbb{R}^3$  rakennetaan lähtemällä liikkeelle kompleksitasosta  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  ja lisäämällä siihen yksi akseli. Tällöin joukossa  $\mathbb{R}^3$  ei voi määritellä kertolaskua siten, että  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  olisi kunta.*

**TODISTUS.** [3]: Huomataan aluksi, että laskutoimituksella varustetun joukon  $(\mathbb{R}^3, +)$  osoittaminen ryhmäksi on helppoa, kun yhteenlasku on määritelty kuten edellä. Osoitetaan lauseen väite todeksi tekemällä vastaväite: Joukossa  $\mathbb{R}^3$  on määritelty kertolasku  $\cdot$  siten, että  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  on kunta. Oletuksen mukaan joukon  $\mathbb{R}^3$  alkio  $(x, y, 0)$  vastaa kompleksitason  $\mathbb{C}$  pistettä  $(x, y)$ . Merkitään  $1 = (1, 0, 0)$ ,  $i = (0, 1, 0)$ ,  $j = (0, 0, 1)$  ja olkoon  $ij = (x, y, z) = x1 + yi + zj$ , missä  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Kompleksiluvuista tiedetään, että  $i^2 = -1$ , joten  $i(ij) = i^2j = -j$ . Näin ollen

$$\begin{aligned} (-1)j &= -j = i(ij) = i(x1 + yi + zj) = xi - y1 + zij \\ &= xi - y1 + z(x1 + yi + zj) = (zx - y)1 + (zy + x)i + z^2j. \end{aligned}$$

Näin ollen tulisi olla  $z^2 = -1$ . Tämä on mahdotonta, sillä oletuksen mukaan  $z \in \mathbb{R}$ . Näin ollen saatiin ristiriita, joten väite on tosi.  $\square$



## LUKU 3

### Kvaterniot

Tämän ja seuraavan luvun tavoitteena on määritellä kvaterniot ja osoittaa, kuinka niitä voidaan soveltaa kiertojen yhteydessä. Etenemisjärjestys on osittain lähteen [2] mukainen.

#### 3.1. Kvaternioiden matriisiesitys

Kuvattaessa järjestettyä reaalityyppistä lukuparia  $(a, b)$  kompleksiluvulla  $a + ib$  tai matriisilla  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  voidaan puhua järjestettyjen lukuparien summasta, tulosta ja normista eli itseisarvosta. Vastaavasti kuvattaessa järjestettyä reaalityyppistä lukunelikkoa  $(a, b, c, d)$  matriisilla

$$A = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}),$$

missä  $z = a + ib$  ja  $w = c + id$ , voidaan puhua järjestettyjen lukunelikkojen summasta, tulosta ja normista. Sanotaan, että tällainen matriisi  $A$  on *kvaternio*. Kvaternioiden joukolle käytetään Hamiltonin kunniaksi usein merkintää  $\mathbb{H}$ . Täsmällisesti määriteltynä

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}).$$

Määritellään kuvaus  $\alpha : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{H}$  asettamalla

$$\alpha(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix},$$

missä  $z = a + ib$  ja  $w = c + id$ .

Selvästi  $\alpha$  on lineaarikuvaus. Tämä osoitetaan, kuten kompleksilukujen tapauksessa kuvaukselle  $\kappa$ , joten jätän osoituksen lukijalle harjoitustehtäväksi. Sen sijaan osoitetaan ”vahvempia” ominaisuuksia.

**LAUSE 3.1.** *Kuvaus  $\alpha$  on bijektio.*

**TODISTUS.** On osoitettava, että  $\alpha$  on (i) injektio ja (ii) surjektio.

(i) Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\bar{w}' & \bar{z}' \end{pmatrix}$$

kvaternioita, ja olkoon  $A = B$ . Merkitään  $z = a + ib, z' = a' + ib', w = c + id$  ja  $w' = c' + id'$ , missä  $a, a', b, b', c, c', d$  ja  $d'$  ovat reaalilukuja. Tällöin ehdosta

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\bar{w}' & \bar{z}' \end{pmatrix}$$

seuraa, että  $z = z'$  ja  $w = w'$ . Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että  $a = a', b = b', c = c'$  ja  $d = d'$ . Näin ollen  $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$ , mistä seuraa, että kuvaus  $\alpha$  on injektio.

(ii) Selvästi  $\alpha(\mathbb{R}^4) \subset \mathbb{H}$ . Osoitetaan siis, että  $\alpha(\mathbb{R}^4) \supset \mathbb{H}$ . Olkoon  $A \in \mathbb{H}$ . Tällöin

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

joillain kompleksiluvuilla  $z$  ja  $w$ . Edelleen tällöin  $z = a + ib$  ja  $w = c + id$  joillain reaaliluvuilla  $a, b, c$  ja  $d$ . Merkitään  $x = (a, b, c, d)$ , jolloin

$$\alpha(x) = \alpha(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = A,$$

joten  $\alpha$  on surjektio. Kohtien (i) ja (ii) perusteella kuvaus  $\alpha$  on bijektio.  $\square$

Vastaavasti, kuten kompleksilukujen tapauksessa, kvaternio

$$A = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}$$

voidaan myös pilkkoa osiin:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Saatuja matriiseja merkitään seuraavasti:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{j} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nähdään, että selvästi  $\mathbf{I}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  ovat kvaternioita. Siis kvaternio  $A$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$A = a\mathbf{I} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

Kahdeksan kvaternion joukossa  $\{\pm\mathbf{I}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\} =: G$  pätevät seuraavat kertolaskun ominaisuudet: Ensinnäkin kvaternioiden tulot itsensä kanssa antavat

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{I}.$$

Toisaalta matriisien välisille tuloille pätevät

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \\ \mathbf{jk} &= -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \text{ ja} \\ \mathbf{ki} &= -\mathbf{ik} = \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Näiden kvaternioiden välinen kertolasku voidaan esittää seuraavanlaisena kertotauluna.

	<b>I</b>	<b>i</b>	<b>j</b>	<b>k</b>
<b>I</b>	<b>I</b>	<b>i</b>	<b>j</b>	<b>k</b>
<b>i</b>	<b>i</b>	<b>-I</b>	<b>k</b>	<b>-j</b>
<b>j</b>	<b>j</b>	<b>-k</b>	<b>-I</b>	<b>i</b>
<b>k</b>	<b>k</b>	<b>j</b>	<b>-i</b>	<b>-I</b>

### 3.2. Kvaternioiden algebraa

Osoitetaan seuraavaksi, että kahdeksan kvaternion joukko  $G = \{\pm\mathbf{I}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$  varustettuna kvaternioiden kertolaskulla on ryhmä. Ehdot sille, että laskutoimituksella varustettu joukko on ryhmä, löytyvät liitteestä A.

Matriisien kertolaskuun liittyvistä ominaisuuksista [7] tiedetään, että matriisien välinen kertolasku on assosiatiivinen, joten assosiatiivisuus periytyy luonnollisesti kvaternioiden kertolaskuun. Edelleen tiedetään, että olemassa kertolaskun neutraalialkio  $\mathbf{I} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ , sillä

$$\mathbf{IB} = B = \mathbf{BI},$$

kaikilla  $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ . Erityisesti  $\mathbf{I}$  on neutraalialkio joukossa  $G$ . Vielä pitää todeta, että jokaisella joukon  $G$  alkiolla on käänteisalkio kertolaskun suhteen. Tämän toteaminen onnistuu seuraavasti: Huomataan, että

$$(-\mathbf{i})\mathbf{i} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} = \mathbf{i}(-\mathbf{i}),$$

eli kvaternion  $\mathbf{i}$  käänteisalkio on  $-\mathbf{i}$ . Vastaavasti nähdään, että

$$\begin{aligned} (-\mathbf{j})\mathbf{j} &= \mathbf{I} = \mathbf{j}(-\mathbf{j}), \text{ ja} \\ (-\mathbf{k})\mathbf{k} &= \mathbf{I} = \mathbf{k}(-\mathbf{k}), \end{aligned}$$

joten kvaternion  $\mathbf{j}$  käänteisalkio on  $-\mathbf{j}$  ja kvaternion  $\mathbf{k}$  käänteisalkio on  $-\mathbf{k}$ . Näin on saatu osoitettua, että joukko  $G$  varustettuna kertolaskulla todella on ryhmä.

Tarkastellaan seuraavaksi kvaternioiden joukon  $\mathbb{H}$  ja neliulotteisen reaaliavaruuden  $\mathbb{R}^4$  algebrallisia ominaisuuksia.

Olkoot  $A$  ja  $B$  kvaternioita, jotka ovat muotoa

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \text{ ja} \quad B = \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\bar{w}' & \bar{z}' \end{pmatrix}.$$

Hyödyntämällä kompleksilukujen liittolukuihin liittyviä laskusääntöjä saadaan kvaternioiden  $A$  ja  $B$  väliseksi summaksi

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\bar{w}' & \bar{z}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z + z' & w + w' \\ -\bar{w} - \bar{w}' & \bar{z} + \bar{z}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z + z' & w + w' \\ -\bar{w} - \bar{w}' & \bar{z} + \bar{z}' \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} s & t \\ -\bar{t} & \bar{s} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

missä  $s$  ja  $t$  ovat kompleksilukuja. Siten  $A + B \in \mathbb{H}$ . Kvaternioiden  $A$  ja  $B$  väliseksi tuloksi taas saadaan

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\bar{w}' & \bar{z}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} zz' - w\bar{w}' & zw' + w\bar{z}' \\ -\bar{w}z' - \bar{z}w' & -\bar{w}w' + \bar{z}z' \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

missä  $s, t, u$  ja  $v$  ovat kompleksilukuja. Nyt nähdään, että kompleksilukujen liittoluvuille pätevien laskusääntöjen perusteella

$$\begin{aligned} v &= -\bar{w}w' + \bar{z}z' = \overline{zz' - w\bar{w}'} = \bar{s}, \text{ ja} \\ u &= -\bar{w}z' - \bar{z}w' = -\overline{(zw' + w\bar{z}')} = -\bar{t}, \end{aligned}$$

joten

$$AB = \begin{pmatrix} s & t \\ -\bar{t} & \bar{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}.$$

Näin ollen yhteenlasku ja kertolasku ovat laskutoimituksia kvaternioiden joukossa  $\mathbb{H}$ , toisin sanoen  $\mathbb{H}$  on suljettu yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen.

**LAUSE 3.2.** *Joukko  $\mathbb{H}$  varustettuna yhteenlaskulla ja kertolaskulla on jakorengas.*

**TODISTUS.** (Tarvittaessa katso jakorengaan ominaisuudet liitteestä A.) Todetaan ensinnäkin, että  $(\mathbb{H}, +)$  on kommutatiivinen ryhmä: Selvästi yhteenlasku on assosiatiivinen ja kommutatiivinen. Edelleen joukossa  $\mathbb{H}$  on neutraalialkio yhteenlaskun suhteen. Tämä on nollakvaternio

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lisäksi jokaisella  $A \in \mathbb{H}$  on käänteisalkio yhteenlaskun suhteen. Tämä on luonnollisesti  $-A \in \mathbb{H}$ , sillä  $A - A = 0$ . Näin ollen laskutoimituksella varustettu joukko  $(\mathbb{H}, +)$  on kommutatiivinen ryhmä.

Tarkastetaan seuraavaksi loput jakorengaan ominaisuudet: Matriisien yhteenlaskun ja kertolaskun ominaisuuksista seuraa, että

$$A(B + C) = AB + AC \text{ ja } (B + C)A = BA + CA$$

kaikilla  $A, B, C \in \mathbb{H}$ . Kertolaskulla on neutraalialkio  $\mathbf{I} \in \mathbb{H}$ . Olkoon  $A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$  ja  $A \neq 0$ . Tällöin

$$\det A = \begin{vmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{vmatrix} = |z|^2 + |w|^2 \neq 0,$$

joten matriisi  $A$  on kääntyvä ja sillä on olemassa käänteismatriisi  $A^{-1}$ . Nyt herää kysymys, kuuluuko käänteismatriisi  $A^{-1}$  kvaternioiden joukkon. Tarkastetaanpa tämä: Huomataan, että  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix}$ , sillä

$$A^{-1}A = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \mathbf{I} = AA^{-1}.$$

Käänteismatriisi  $A^{-1}$  saadaan esitettyä muodossa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\bar{w}' & \bar{z}' \end{pmatrix},$$

kun valitaan  $z' = \frac{1}{\det A} \bar{z} \in \mathbb{C}$  ja  $w' = -\frac{1}{\det A} w \in \mathbb{C}$ . Siten määritelmän perusteella  $A^{-1} \in \mathbb{H}$ . Näin ollen jokaisella kvaterniolla  $A \neq 0$  on käänteisalkio  $A^{-1}$  kertolaskun suhteen, toisin sanoen kaikki joukon  $\mathbb{H}$  alkiot ovat yksiköitä. Siten laskutoimituksilla varustettu joukko  $(\mathbb{H}, +, \cdot)$  on jakorengas.  $\square$

Joukko  $\mathbb{H}$  varustettuna yhteenlaskulla ja kertolaskulla ei kuitenkaan ole kunta, sillä kuten aiemmin havaittiin, kvaternioiden välinen kertolasku ei kommutoi.

Tarkastellaan seuraavaksi laskutoimituksia joukossa  $\mathbb{R}^4$ . Yhteenlasku määritellään luonnollisesti komponenteittain, joten selvästi  $(\mathbb{R}^4, +)$  on kommutatiivinen ryhmä ja yhteenlaskun neutraalialkio on  $(0, 0, 0, 0)$ .

Määritellään seuraavaksi kertolasku joukossa  $\mathbb{R}^4$ . Tehdään tässä kohdassa sellainen temppu, että lasketaan ensin mitä kertolasku  $\alpha(x)\alpha(y)$  antaa tulokseksi. Tämä laskutoimitus on kahden kvaternion välinen tulo, ja määritellään sen avulla kertolasku joukkoon  $\mathbb{R}^4$ . Olkoot  $x = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  ja  $y = (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$ . Olkoot lisäksi  $z = a + ib, w = c + id, z' = a' + ib'$  ja  $w' = c' + id'$ . Edellä käytetyin merkinnöin  $\alpha(x) = A$  ja  $\alpha(y) = B$ , joten

$$\alpha(x)\alpha(y) = AB = \begin{pmatrix} zz' - w\bar{w}' & zw' + w\bar{z}' \\ -\bar{w}z' - \bar{z}w' & -\bar{w}w' + \bar{z}z' \end{pmatrix}.$$

Nyt huomataan, että

$$\begin{aligned} zz' - w\bar{w}' &= aa' + aib' + iba' - bb' - cc' + cid' - idc' - dd' \\ &= aa' - bb' - cc' - dd' + i(ab' + ba' + cd' - dc') \text{ ja} \\ zw' + w\bar{z}' &= ac' + aid' + ibc' - bd' + ca' - cib' + ida' + db' \\ &= ac' + ca' + db' - bd' + i(ad' + da' + bc' - cb'). \end{aligned}$$

Hyödynnetään tätä tulosta ja määritellään joukkoon  $\mathbb{R}^4$  kertolasku asettamalla

$$\begin{aligned} xy &= (a, b, c, d)(a', b', c', d') \\ &= (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - dc', ac' + ca' + db' - bd', ad' + da' + bc' - cb'). \end{aligned}$$

Koska kertolasku määriteltiin käyttämällä hyväksi matriisien välistä tuloa, on selvää, että laskutoimitusten distributiivisuus säilyy. Toisin sanoen kaikilla avaruuden  $\mathbb{R}^4$  vektoreilla  $x, y$  ja  $z$  ehdot

$$z(x + y) = zx + zy \text{ ja } (x + y)z = xz + yz$$

ovat voimassa. Näin määritellyn kertolaskun neutraalialkio on  $(1, 0, 0, 0)$ , sillä

$$(1, 0, 0, 0)(a, b, c, d) = (a, b, c, d) = (a, b, c, d)(1, 0, 0, 0)$$

kaikilla  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Näin saatiin osoitettua, että laskutoimituksilla varustettu joukko  $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$  on rengas.

Osoitetaan seuraavaksi, että kuvaus  $\alpha$  on rengashomomorfismi. On siis osoitettava, että kaikille  $x, y \in \mathbb{R}^4$  pätevät ehdot

$$\begin{aligned} (i) \quad & \alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y), \text{ ja} \\ (ii) \quad & \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y). \end{aligned}$$

Aloitetaan osoittamalla kohta (i): Merkitään  $x = (a, b, c, d)$  ja  $y = (a', b', c', d')$ , jolloin

$$\begin{aligned} \alpha(x + y) &= \alpha(a + a', b + b', c + c', d + d') \\ &= \begin{pmatrix} a + a' + i(b + b') & c + c' + i(d + d') \\ -c - c' + i(d + d') & a + a' - i(b + b') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' + ib' & c' + id' \\ -c' + id' & a' - ib' \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x) + \alpha(y). \end{aligned}$$

Kohdan (ii) osoittamisessa hyödynnetään edellä määriteltyä kertolaskua joukossa  $\mathbb{R}^4$ . Tämän avulla huomataan, että

$$\begin{aligned} \alpha(xy) &= \begin{pmatrix} aa' - bb' - cc' - dd' + i(ab' + ba' + cd' - dc') \\ -(ac' + ca' + db' - bd') + i(ad' + da' + bc' - cb') \\ aa' - bb' - cc' - dd' - i(ab' + ba' + cd' - dc') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} zz' - \overline{w}w' & zw' + w\overline{z}' \\ -\overline{w}z' - \overline{z}w' & -\overline{w}w' + \overline{z}z' \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x)\alpha(y). \end{aligned}$$

Näin on saatu osoitettua, että kuvaus  $\alpha$  on homomorfismi. Lauseen 3.1 perusteella  $\alpha$  on myös bijektio, joten kuvaus  $\alpha$  on isomorfismi. Joukkojen  $\mathbb{R}^4$  ja  $\mathbb{H}$  voidaankin siis sanoa olevan isomorfiset.

Koska joukossa  $\mathbb{H}$  jokaisella nollasta eroavalla alkiolla  $A$  on käänteisalkio kertolaskun suhteen, myös jokaisella joukon  $\mathbb{R}^4$  alkiolla  $x$  on käänteisalkio kertolaskun suhteen. Tämän periytyminen isomorfismilla kuvattaessa nähdään seuraavasti: Jos  $\alpha(x) = A$ , pätee  $\alpha^{-1}(A) = x$  ja jos  $A$  ei ole nollakvaternio, saadaan

$$(1, 0, 0, 0) = \alpha^{-1}(\mathbf{1}) = \alpha^{-1}(AA^{-1}) = \alpha^{-1}(A)\alpha^{-1}(A^{-1}) = x\alpha^{-1}(A^{-1})$$

ja vastaavasti

$$(1, 0, 0, 0) = \alpha^{-1}(\mathbf{I}) = \alpha^{-1}(A^{-1}A) = \alpha^{-1}(A^{-1})\alpha^{-1}(A) = \alpha^{-1}(A^{-1})x.$$

Siten alkion  $x \in \mathbb{R}^4$  käänteisalkio kertolaskun suhteen on  $x^{-1} = \alpha^{-1}(A^{-1})$ .

Näin saatiin todettua, että myös joukko  $\mathbb{R}^4$  varustettuna edellä määritellyillä yhteenlaskulla ja kertolaskulla on jakorengas.

**MÄÄRITELMÄ 3.3.** Joukko  $Z$  on renkaan  $(G, +, \cdot)$  keskus, jos sen jokainen alkio on kertolaskun suhteen vaihdannainen jokaisen joukon  $G$  alkion kanssa. Toisin sanoen

$$Z(G) = \{g \in G : g \cdot r = r \cdot g, \text{ kaikilla } r \in G\}.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että kvaternioiden joukon  $\mathbb{H}$  keskus on joukko  $Re(\mathbb{H}) = \{a\mathbf{I} : a \in \mathbb{R}\}$ . Aloitetaan esittelemällä apulos.

**LEMMA 3.4.** *Olkoot  $a, b, c$  ja  $d$  reaalityypiset luvut ja olkoon  $A = a\mathbf{I} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ . Tällöin*

- (i) ehdosta  $A\mathbf{i} = \mathbf{i}A$  seuraa, että  $c = d = 0$ ,
- (ii) ehdosta  $A\mathbf{j} = \mathbf{j}A$  seuraa, että  $b = d = 0$  ja
- (iii) ehdosta  $A\mathbf{k} = \mathbf{k}A$  seuraa, että  $b = c = 0$ .

**TODISTUS.** (i) Koska selvästi kvaternion kertominen reaalityypisellä kommutoi, suoraan laskemalla nähdään, että

$$\begin{aligned} A\mathbf{i} &= a\mathbf{I}\mathbf{i} + b\mathbf{i}^2 + c\mathbf{j}\mathbf{i} + d\mathbf{k}\mathbf{i} \\ &= a\mathbf{i} - b - c\mathbf{k} + d\mathbf{j} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{i}A &= \mathbf{i}a + \mathbf{i}^2b + \mathbf{i}c + \mathbf{i}kd \\ &= a\mathbf{i} - b + c\mathbf{k} - d\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Saaduista kertolaskujen tuloksista huomataan, että  $A\mathbf{i} = \mathbf{i}A$  on mahdollista vain kun  $c = d = 0$ .

(ii) Suoraan laskemalla huomataan, että

$$\begin{aligned} A\mathbf{j} &= a\mathbf{I}\mathbf{j} + b\mathbf{i}\mathbf{j} + c\mathbf{j}^2 + d\mathbf{k}\mathbf{j} \\ &= a\mathbf{j} + b\mathbf{k} - c - d\mathbf{i} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{j}A &= \mathbf{j}a + \mathbf{j}ib + \mathbf{j}^2c + \mathbf{j}kd \\ &= a\mathbf{j} - b\mathbf{k} - c + d\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Nähdään, että  $A\mathbf{j} = \mathbf{j}A$  on mahdollista ainoastaan, kun  $b = d = 0$ .

(iii) Suoralla laskulla nähdään, että

$$\begin{aligned} A\mathbf{k} &= a\mathbf{I}\mathbf{k} + b\mathbf{i}\mathbf{k} + c\mathbf{j}\mathbf{k} + d\mathbf{k}^2 \\ &= a\mathbf{k} - b\mathbf{j} + c\mathbf{i} - d \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathbf{k}A &= \mathbf{kI}a + \mathbf{kib} + \mathbf{kj}c + \mathbf{k}^2d \\ &= a\mathbf{k} + b\mathbf{j} - c\mathbf{i} - d.\end{aligned}$$

Huomataan, että  $A\mathbf{k} = \mathbf{k}A$  on mahdollista ainoastaan, kun  $b = c = 0$ .  $\square$

Tämän aputuloksen avulla seuraavan lauseen todistus on nopea tehtävä.

**LAUSE 3.5.** *Olkoot  $a, b, c$  ja  $d$  reaalityypin lukuja ja olkoon  $A = a\mathbf{I} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ . Tällöin*

$$RA = AR$$

*kaikilla kvaternioilla  $R$  jos ja vain jos  $b = c = d = 0$ .*

**TODISTUS.** Valitaan  $R = \mathbf{i}$ . Tällöin väitteen mukaan on oltava

$$\mathbf{i}A = A\mathbf{i}.$$

Lemman 3.4 kohdan (i) perusteella tämä on mahdollista vain kun  $c = d = 0$ . Valitaan  $R = \mathbf{j}$ . Tällöin väitteen mukaan on oltava

$$\mathbf{j}A = A\mathbf{j}.$$

Lemman 3.4 kohdan (ii) perusteella tämä on mahdollista vain kun  $b = d = 0$ . Yhdistämällä nämä tulokset huomataan, että väite  $RA = AR$  pätee kaikilla kvaternioilla  $R$  ainoastaan, kun  $b = c = d = 0$ .  $\square$

Lauseen 3.5 mukaan ehto  $RA = AR$  pätee kaikilla kvaternioilla  $R$  vain kun  $A \in \text{Re}(\mathbb{H})$ . Näin ollen kvaternioiden joukon  $\mathbb{H}$  keskus on määritelmän 3.3 mukaisesti joukko  $\text{Re}(\mathbb{H})$ .

### 3.3. Kvaternioiden ominaisuuksia

**MÄÄRITELMÄ 3.6.** Sanotaan, että kvaternio  $A = a\mathbf{I} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  on *reaalinen kvaternio*, jos  $A \in \text{Re}(\mathbb{H}) = \{a\mathbf{I} : a \in \mathbb{R}\}$ . Toisin sanoen kvaternio  $A$  on reaalinen, jos  $b = c = d = 0$ . Vastaavasti, kun  $a = 0$ , ts.  $A = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ , kyseessä on *imaginaarinen kvaternio*, eli *puhdas kvaternio*.

**HUOMAUTUS 3.7.** Olkoot  $a, b, c$  ja  $d$  reaalityypin lukuja ja olkoon  $A = a\mathbf{I} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ . Jatkossa kvaternion  $A$  reaaliosalle  $a\mathbf{I}$  käytetään yksinkertaisesti merkintää  $a$ .

Käytetään reaalisten kvaternioiden joukolle jo edeltä tuttua merkintää  $\text{Re}(\mathbb{H})$ . Huomautuksen 3.7 perusteella voidaan merkitä

$$\text{Re}(\mathbb{H}) = \{a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Tällä samastuksella nähdään, että  $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ . Imaginaariset kvaterniot muodostavat joukon

$$\text{Im}(\mathbb{H}) = \{b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$



Kuvauksen  $\alpha$  avulla määritellään kahden kvaternion sisätulo  $(\cdot|\cdot) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  asettamalla

$$(A|B) = \left( \alpha^{-1}(A) | \alpha^{-1}(B) \right).$$

Olkoot kvaterniot  $A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  ja  $B = a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}$ . Tällöin kuvauksen  $\alpha$  määritelmän nojalla  $\alpha^{-1}(A) = (a, b, c, d)$  ja  $\alpha^{-1}(B) = (a', b', c', d')$ , joten

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left( \alpha^{-1}(A) | \alpha^{-1}(B) \right) = \left( (a, b, c, d) | (a', b', c', d') \right) \\ &= aa' + bb' + cc' + dd'. \end{aligned}$$

Sisätulon avulla määriteltyä lukua

$$|A| = (A|A)^{\frac{1}{2}}$$

kutsutaan kvaternion  $A$  normiksi eli *itseisarvoksi*.

Olkoon kvaternio  $A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ . Tällöin sisätulon määritelmän perusteella

$$|A| = (A|A)^{\frac{1}{2}} = \left( \alpha^{-1}(A) | \alpha^{-1}(A) \right)^{\frac{1}{2}} = \|\alpha^{-1}(A)\|,$$

joten kvaternion  $A$  normi on yhtäsuuri kuin avaruuden  $\mathbb{R}^4$  vektorin  $\alpha^{-1}(A) = (a, b, c, d)$  euklidinen normi. Euklidinen normi  $\|\cdot\|$  antaa tunnetusti metriikan (ks. metriikan ominaisuudet liitteestä A). Näin ollen myös kvaternion normi  $|\cdot|$  antaa metriikan, joten kvaternioiden joukko  $(\mathbb{H}, |\cdot|)$  on metrinen avaruus. Koska

$$|A - B| = \|\alpha^{-1}(A) - \alpha^{-1}(B)\|,$$

kuvaus  $\alpha : (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{H}, |\cdot|)$  on isometria.

Kvaternion  $A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  matriisiesityksestä huomataan, että

$$\det A = \begin{vmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |A|^2.$$

Näin ollen matriisin  $A$  determinantti on yhtä suuri kuin kvaternion  $A$  normin neliö.

**MÄÄRITELMÄ 3.8.** Olkoon kvaternio  $A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ . Lukua

$$\bar{A} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

kutsutaan kvaternion  $A$  konjugaatiksi.

Nyt huomataan, että

$$\begin{aligned} A\bar{A} &= (a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) \\ &= a^2 - abi - acj - adk + bai - b^2\mathbf{i}^2 - bcij - bdik \\ &\quad + caj - cbji - c^2\mathbf{j}^2 - cdjk + dak - dbki - dckj - d^2\mathbf{k}^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |A|^2, \end{aligned}$$

joten kvaternion  $A$  normille saadaan lauseke

$$(3.1) \quad |A| = \sqrt{A\bar{A}}.$$

Toisaalta determinantin laskusääntöjen nojalla

$$|A|^2|B|^2 = \det(A)\det(B) = \det(AB) = |AB|^2.$$

Näin ollen kaikille kvaternioille  $A$  ja  $B$  pätee ehto

$$(3.2) \quad |AB| = |A||B|.$$

Huomataan, että kvaternioiden laskusäännöt (3.1) ja (3.2) ovat tuttuja kompleksilukujen tapauksesta.

Sanotaan, että kvaternio  $A$  on *yksikkökvaternio*, jos

$$A\bar{A} = 1, \quad \text{toisin sanoen} \quad |A|^2 = 1.$$

Erityisesti, jos imaginaariselle kvaterniolle  $u$  pätee ehto  $|u|^2 = 1$ , sanotaan, että  $u$  on *imaginaarinen yksikkökvaternio*.

Jos kvaterniota  $A$  vastaava matriisi ei ole nollamatriisi, matriisi  $A$  on kääntyvä. Käänteisalkion  $A^{-1}$  lauseke saadaan ratkaistua suraavasti: Olkoon kvaternio  $A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \neq 0$ . Tällöin lausekkeen (3.1) nojalla

$$\begin{aligned} A\bar{A} &= |A|^2 \\ \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{|A|^2}\bar{A}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow A^{-1} &= \frac{1}{|A|^2}\bar{A}. \end{aligned}$$

Tästä huomataan, että

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|^2}|\bar{A}| = \frac{1}{|A|}.$$

Katsotaanpa millainen kvaternion  $A$  käänteisalkio on matriisimuodossa esitettyä. Huomataan, että

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|^2}(a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = \frac{1}{|A|^2} \begin{pmatrix} a - ib & -c - id \\ c - id & a + ib \end{pmatrix}.$$

Merkitsemällä  $z' = \frac{1}{|A|^2}(a + ib)$  ja  $w' = \frac{1}{|A|^2}(-c - id)$  saadaan käänteismatriisille  $A^{-1}$  lauseesta 3.2 tuttu esitys

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} z' & w' \\ -w' & z' \end{pmatrix}.$$

Edellä osoitettiin, että  $\mathbb{R}^4$  on jakorengas, joten jokaisella  $x = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, x \neq 0$  on kertolaskun suhteen käänteisalkio  $x^{-1}$ . Osoitetaan, että

$$x^{-1} = \frac{1}{\|x\|^2}(a, -b, -c, -d).$$

Jos  $\alpha(x) = A$ , kuvauksen  $\alpha$  lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{1}{\|x\|^2}(a, -b, -c, -d)\right) &= \frac{1}{\|x\|^2} \alpha(a, -b, -c, -d) \\ &= \frac{1}{|A|^2} \begin{pmatrix} a - ib & -c - id \\ c - id & a + ib \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|^2}\bar{A} = A^{-1}. \end{aligned}$$

Kuvauksen  $\alpha$  isomorfisuuden perusteella  $\alpha^{-1}(A^{-1}) = x^{-1}$ , joten väite pätee.

Huomattavaa on, että kvaternion (matriisin)  $A$  konjugaatin lauseketta ei saada konjugoimalla matriisin jokaista alkiota, vaan konjugoimalla matriisin  $A$  transpoosin  $A^T$  jokaista alkiota. Osoitetaan tämä: Olkoon  $\tilde{A}$ , sellainen kompleksinen matriisi, jossa matriisin  $A$  jokaisesta alkioista on otettu kompleksikonjugaatti.

Merkitään  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $w = c + id \in \mathbb{C}$  ja  $A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \widetilde{A^T} &= \begin{pmatrix} \widetilde{z} & \widetilde{-\bar{w}} \\ \widetilde{w} & \widetilde{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - ib & -c - id \\ c - id & a + ib \end{pmatrix} \\ &= a - bi - cj - dk = \bar{A} \end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että  $\overline{AB} = \bar{B} \cdot \bar{A}$ : Merkitään

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\bar{w}' & \bar{z}' \end{pmatrix}.$$

Näillä merkinnöillä

$$\bar{A} = \widetilde{A^T} = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{B} = \widetilde{B^T} = \begin{pmatrix} \bar{z}' & -w' \\ \bar{w}' & z' \end{pmatrix}.$$

Toisaalta kvaternioiden  $A$  ja  $B$  tulo on

$$AB = \begin{pmatrix} zz' - w\bar{w}' & zw' + w\bar{z}' \\ -\bar{w}z' - \bar{z}w' & -\bar{w}w' + \bar{z}z' \end{pmatrix},$$

joten

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} zz' - w\bar{w}' & -\bar{w}z' - \bar{z}w' \\ zw' + w\bar{z}' & -\bar{w}w' + \bar{z}z' \end{pmatrix}.$$

Näin ollen liittokvaterniolle  $\overline{AB}$  pätee

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \widetilde{(AB)^T} = \begin{pmatrix} \overline{zz' - w\bar{w}'} & \overline{-\bar{w}z' - \bar{z}w'} \\ \overline{zw' + w\bar{z}'} & \overline{-\bar{w}w' + \bar{z}z'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{z}' & -w' \\ \bar{w}' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \\ &= \widetilde{B^T} \widetilde{A^T} \\ &= \bar{B} \cdot \bar{A}. \end{aligned}$$

Tämän avulla saadaan johdettua kvaternioiden konjugaateille pari laskusääntöä, jotka esitetään seuraavassa lauseessa.

**LAUSE 3.9.** *Olkoot  $A$  ja  $B$  kvaternioita. Tällöin seuraavat ehdot ovat voimassa:*

- (i)  $(AB)(\overline{AB}) = A(\overline{AB})\bar{B} = A(\bar{B}\bar{B})\bar{A}$  ja
- (ii)  $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$ .

**TODISTUS.** Osoitetaan molemmat väitteet suoraan laskemalla.

(i) Ensiksikin huomataan, että

$$\begin{aligned} (AB)(\overline{AB}) &= |AB|^2 = \det AB = \det A \det B = |A|^2 |B|^2 \\ &= (A\bar{A})(B\bar{B}) = A\bar{A}B\bar{B} = A(\bar{A}B)\bar{B} \end{aligned}$$

ja toisaalta aiemmin lasketun perusteella

$$(AB)\overline{(AB)} = (AB)(\overline{B} \cdot \overline{A}) = A(B\overline{B})\overline{A}.$$

(ii) Merkitään

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\overline{w'} & \overline{z'} \end{pmatrix}.$$

Edellä lasketun perusteella kvaternioiden  $A$  ja  $B$  konjugaatit ovat

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{z} & -w \\ \overline{w} & z \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{z'} & -w' \\ \overline{w'} & z' \end{pmatrix}.$$

Näin ollen

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} z+z' & w+w' \\ -\overline{w}-\overline{w'} & \overline{z}+\overline{z'} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} z+z' & -\overline{w}-\overline{w'} \\ w+w' & \overline{z}+\overline{z'} \end{pmatrix}$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \overline{A+B} &= \begin{pmatrix} \overline{z}+\overline{z'} & -w-w' \\ \overline{w}+\overline{w'} & z+z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{z} & -w \\ \overline{w} & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{z'} & -w' \\ \overline{w'} & z' \end{pmatrix} \\ &= \overline{A} + \overline{B}. \end{aligned}$$

□

### 3.4. Imaginaariset kvaterniot

Tarkastellaan seuraavaksi imaginaaristen kvaternioiden ominaisuuksia. Määritellään kuvaus  $\beta : Im(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  asettamalla

$$\beta(b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = (b, c, d).$$

Kuvauksen  $\beta$  lineaarisuus osoitetaan samalla tavalla kuin kompleksilukujen tapauksessa kuvauksen  $\kappa$  lineaarisuus. Kuvauksen  $\beta$  bijektiivisyys todistetaan samalla tavalla kuin kuvauksen  $\alpha$  bijektiivisyys lauseessa 3.1. Kuvaus  $\beta$  on myös isometria, minkä osoittaminen onnistuu vastaavasti kuin kuvaukselle  $\alpha$ . Näin ollen jätän nämä osoitukset lukijalle harjoitustehtäviksi.

Kuten aiemmin todettiin, kahden imaginaarisen kvaternion tulo ei välttämättä ole imaginaarinen kvaternio ( $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$ ). Tämä tarkoittaa sitä, että kertolasku ei ole laskutoimitus joukossa  $Im(\mathbb{H})$ , joten  $Im(\mathbb{H})$  ei ole rengas. Näin ollen kuvaus  $\beta$  ei ole isomorfismi, vaikka se säilyttääkin summat.

Katsotaan seuraavaksi, kuinka imaginaarisille kvaternioille saadaan määriteltyä vektorilaskennasta tunnettuja laskutoimituksia. Aikaisemmin määriteltiin kahden kvaternion  $A$  ja  $B$  sisätulo asettamalla  $(A|B) = (\alpha^{-1}(A)|\alpha^{-1}(B))$ . Vastaavasti kuvausta  $\beta$  hyödyntämällä määritellään kahden imaginaarisen kvaternion  $u$  ja  $v$  sisätulo  $(\cdot|\cdot) : Im(\mathbb{H}) \times Im(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}$  asettamalla

$$(u|v) = (\beta(u)|\beta(v)).$$

Imaginaarisille kvaternioille määritellään ristitulo  $(\cdot \times \cdot) : Im(\mathbb{H}) \times Im(\mathbb{H}) \rightarrow Im(\mathbb{H})$  asettamalla

$$u \times v = \beta^{-1}(\beta(u) \times \beta(v)).$$

Imaginaaristen kvaternioiden välisen sisätulon ja ristitulon laskemisessa edetään siis seuraavasti: Kuvataan kvaterniot ensin kuvauksella  $\beta$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreiksi ja suoritetaan haluttu laskutoimitus siellä. Sisätulon tapauksessa ollaan tässä vaiheessa jo valmiita, mutta ristitulon tapauksessa pitää vielä palauttaa tulos imaginaaristen kvaternioiden joukkoon käyttämällä kuvausta  $\beta^{-1}$ . Avaruudessa  $\mathbb{R}^3$  määritellyn ristitulon laskemiseen löytyy kätevä menetelmä liitteestä A.

Katsotaanpa mitä hyötyä näin määritellyistä laskutoimituksista on. Olkoon kvaternio  $A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ . Merkitään kvaternion  $A$  reaali-osaa

$$Re A = a$$

ja imaginaariosaa

$$Im A = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = u.$$

Tällöin kvaternio  $A$  saadaan esitettyä muodossa

$$A = a + u.$$

Olkoon lisäksi kvaternio  $B = a' + v$ , missä  $v = b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}$ . Tällöin imaginaaristen kvaternioiden  $u$  ja  $v$  välinen sisätulo on edellä määritellyn mukaisesti

$$\begin{aligned} (u|v) &= (\beta(u)|\beta(v)) = ((b, c, d)|(b', c', d')) \\ &= bb' + cc' + dd'. \end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi imaginaaristen kvaternioiden  $u$  ja  $v$  välinen ristitulo. Vektorien  $\beta(u)$  ja  $\beta(v)$  välinen ristitulo, antaa tulokseksi vektorin

$$\begin{aligned} \beta(u) \times \beta(v) &= (b, c, d) \times (b', c', d') \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b & c & d \\ b' & c' & d' \end{vmatrix} = (cd' - dc')e_1 - (bd' - db')e_2 + (bc' - cb')e_3. \end{aligned}$$

Näin ollen kvaternioiden  $u$  ja  $v$  välinen ristitulo antaa tulokseksi kvaternion

$$u \times v = \beta^{-1}(\beta(u) \times \beta(v)) = (cd' - dc')\mathbf{i} - (bd' - db')\mathbf{j} + (bc' - cb')\mathbf{k}.$$

Lasketaan seuraavaksi kvaternioiden  $A$  ja  $B$  välinen kertolasku. Suoraan laskemalla nähdään, että

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} aa' - bb' - cc' - dd' + i(ab' + ba' + cd' - dc') \\ -(ac' + ca' + db' - bd') + i(ad' + da' + bc' - cb') \\ ac' + ca' + db' - bd' + i(ad' + da' + bc' - cb') \\ aa' - bb' - cc' - dd' - i(ab' + ba' + cd' - dc') \end{pmatrix} \\
 &= aa' - bb' - cc' - dd' + \mathbf{i}(ab' + ba' + cd' - dc') + \\
 &\quad \mathbf{j}(ac' + ca' + db' - bd') + \mathbf{k}(ad' + da' + bc' - cb') \\
 &= aa' - bb' - cc' - dd' + a(\mathbf{i}b' + \mathbf{j}c' + \mathbf{k}d') + a'(\mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d) + \\
 &\quad \mathbf{i}(cd' - dc') - \mathbf{j}(bd' - db') + \mathbf{k}(bc' - cb').
 \end{aligned}$$

Hyödynnetään nyt edellä saatua sisätulon lauseketta  $(u|v) = bb' + cc' + dd'$  ja ristitulon lauseketta  $u \times v = (cd' - dc')\mathbf{i} - (bd' - db')\mathbf{j} + (bc' - cb')\mathbf{k}$ , joiden avulla kvaternioiden  $A$  ja  $B$  tulo saadaan muotoon

$$(3.3) \quad AB = aa' - (u|v) + av + a'u + u \times v.$$

Näillä merkinnöillä saadaan muitakin kvaternioiden välisiä laskutoimituksia hieman yksinkertaistettua. Kvaternioiden yhteen- ja vähennyslaskulle saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned}
 A + B &= (a + u) + (a' + v) = a + a' + u + v \\
 A - B &= (a + u) - (a' + v) = a - a' + u - v.
 \end{aligned}$$

Kvaternion  $A$  kertominen reaalityylillä saadaan  $r$  esitettyä muodossa

$$rA = ra + ru$$

ja vastaavasti kvaternion  $A$  konjugaatille saadaan lauseke

$$\bar{A} = a - u.$$

Lisäksi kvaternion  $A$  käänteiskvaternio  $A^{-1}$  saadaan esitettyä muodossa

$$(3.4) \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|^2} \bar{A} = \frac{1}{|A|^2} (a - u).$$

Huomataan, että kvaternioille saadaan lisää ominaisuuksia, jotka ovat tuttuja kompleksilukujen käsittelystä. Kyseiset ominaisuudet ovat

$$\begin{aligned}
 (i) \quad Re A &= \frac{1}{2}(A + \bar{A}), \\
 (ii) \quad Im A &= \frac{1}{2}(A - \bar{A}) \quad \text{ja} \\
 (iii) \quad Re A &= Re \bar{A}.
 \end{aligned}$$

Näiden johtaminen on helppoa, kun käytetään hyväksi edellisiä merkintöjä. Suoraan laskemalla nähdään, että

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \frac{1}{2}(A + \bar{A}) &= \frac{1}{2}(a + u + a - u) = a = Re A, \\
 (ii) \quad \frac{1}{2}(A - \bar{A}) &= \frac{1}{2}(a + u - a - u) = u = Im A \quad \text{ja} \\
 (iii) \quad Re A &= a = Re \bar{A}.
 \end{aligned}$$

Nähdään, että kvaternioiden ja kompleksilukujen käsittely on huomattavan samankaltaista laskusääntöjen ym. ominaisuuksien kannalta. Yksi merkittävä ja jo aiemmin mainittu ero näiden välillä kuitenkin on, nimittäin se, että kvaternioiden kertolasku ei kommutoi.

On selvää, että imaginaarisen kvaternion summa on imaginaarinen. Edellä saadusta kvaternioiden välisen kertolaskun lausekkeesta (3.3) taas nähdään, että kahden imaginaarisen kvaternion  $u = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  ja  $v = b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}$  välinen tulo on

$$(3.5) \quad uv = -(u|v) + u \times v.$$

Koska sisätulo  $(u|v)$  antaa tulokseksi reaaliluvun, lausekkeesta (3.5) nähdään, että kertolaskun  $uv$  tuloksena saatava kvaternio on imaginaarinen, ts.  $uv \in \text{Im}(\mathbb{H})$  ainoastaan silloin, kun  $(u|v) = 0$ . Tämä tarkoittaa, että vektorien  $\beta(u)$  ja  $\beta(v)$  tulee olla ortogonaalisia eli kohtisuorassa toisiinsa nähden.

Vastaavasti lausekkeesta (3.5) nähdään, että kertolaskun  $uv$  tuloksena saatava kvaternio on reaalinen jos ja vain jos  $u \times v = 0$ , ts. vektorien  $\beta(u)$  ja  $\beta(v)$  tulee olla yhdensuuntaisia. Lisäksi nähdään, että imaginaariselle yksikkökvaterniolle  $u$  pätee ehto

$$u^2 = -(u|u) = -|u|^2 = -1.$$

Siten jokainen imaginaarinen yksikkökvaternio voidaan samastaa luvun  $-1$  neliöjuureksi. Tämä ominaisuus osoittaa mm. että kvaternioiden joukossa polynomien ratkeavuudelle eivät päde kaikki tavalliset säännöt. Jos näin olisi, yhtälöllä  $u^2 = -1$  olisi korkeintaan kaksi ratkaisua.

**ESIMERKKI 3.10.** Olkoot imaginaariset kvaterniot  $u = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$  ja  $v = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  ja merkitään  $x = \beta(u)$  sekä  $y = \beta(v)$ . Lausekkeen (3.5) mukaisesti

$$\begin{aligned} uv &= -(u|v) + u \times v \\ &= -\left(\beta(u)|\beta(v)\right) + \beta^{-1}\left(\beta(u) \times \beta(v)\right) \\ &= -(x|y) + \beta^{-1}(x \times y). \end{aligned}$$

Koska  $-(x|y) = -\left((1, -2, 1)|(-1, 2, 5)\right) = 0$ , vektorit  $\beta(u) = x$  ja  $\beta(v) = y$  ovat ortogonaaliset. Toisaalta

$$\begin{aligned} x \times y &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (-2 \cdot 5 - 1 \cdot 2)e_1 - (1 \cdot 5 - 1 \cdot (-1))e_2 + (1 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1))e_3 \\ &= -12e_1 - 6e_2 = (-12, -6, 0), \end{aligned}$$

joten

$$uv = \beta^{-1}(-12, -6, 0) = -12\mathbf{i} - 6\mathbf{j}.$$

Vektorioperaatioiden avulla voidaan yksinkertaistaa monien kvaternioiden ominaisuuksien tarkastelemista. Esitetään nyt vaihtoehtoinen todistus lauseelle 3.5.

Oletetaan siis, että  $A$  on jokin kvaternio. Väitetään, että  $RA = AR$  kaikilla kvaternioilla  $R$  jos ja vain jos  $A$  on reaalinen.

TODISTUS. Koska ehdon  $RA = AR$  on oltava voimassa kaikilla kvaternioilla  $R$ , voidaan olettaa, että  $R = a + u$ , missä  $u \neq 0$ . Olkoon lisäksi  $A = a' + v$ . Tällöin lausekkeen (3.3) mukaisesti

$$RA = aa' - (u|v) + av + a'u + u \times v, \text{ ja}$$

$$AR = a'a - (v|u) + a'u + av + v \times u.$$

Pitää siis olla  $aa' - (u|v) = a'a - (v|u)$ , mikä on totta kaikilla  $a, a' \in \mathbb{R}$  ja  $v, u \in Im(\mathbb{H})$ , sillä vektorien sisätulon vaihdannaisuudesta seuraa imaginaaristen kvaternoiden sisätulon vaihdannaisuus. Lisäksi on oltava

$$av + a'u + u \times v = a'u + av + v \times u,$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että  $u \times v = v \times u$ . Ristitulon laskusäännöistä tiedetään, että  $x \times y = -y \times x$  kaikille  $x, y \in \mathbb{R}^3$ . Tämä ominaisuus luonnollisesti periytyy kvaternioiden väliselle ristitulolle, joten yllä saatu yhtälö saa muodon

$$u \times v = v \times u = -u \times v.$$

Tämä on voimassa vain kun  $u$  tai  $v$  on nollakvaternio, tai  $v = \lambda u$  jollain reaaliluvulla  $\lambda \neq 0$ . Koska väitteen tulee päteä kaikilla kvaternioilla  $R$ , toisin sanoen kaikilla imaginaarisilla kvaternioilla  $u$ , voidaan valita  $v \neq \lambda u$  kaikilla reaaliluvuilla  $\lambda \neq 0$ . Koska oletuksen mukaan  $u \neq 0$ , on oltava  $v = 0$ . Näin ollen kvaternio  $A$  on reaalinen.  $\square$



## LUKU 4

### Kvaterniot kiertoina

#### 4.1. Kvaterniolla konjugointi

Olkoon  $R \neq 0$  jokin kvaternio. Määritellään kuvaus  $\delta_R : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  asettamalla

$$\delta_R(A) = R^{-1}AR.$$

Kuvauksella  $\delta_R$  operointia sanotaan *konjugoinniksi kvaterniolla  $R$* .

Olkoot  $A, B \in \mathbb{H}$ . Koska kvaternioiden väliset laskutoimitukset noudattavat osittelulakia, saadaan

$$\delta_R(A + B) = R^{-1}(A + B)R = R^{-1}AR + R^{-1}BR = \delta_R(A) + \delta_R(B).$$

Olkoon  $r \in \mathbb{R}$ . Koska kvaternioiden joukon keskus on reaalilukujen joukko, saadaan

$$\delta_R(rA) = R^{-1}(rA)R = r(R^{-1}AR) = r\delta_R(A).$$

Kuvaus  $\delta_R$  on siten lineaarikuvaus kvaternioiden joukolta itselleen. Osoitetaan, että kuvaus  $\delta_R$  on isometria: On siis osoitettava, että kaikille kvaternioille  $A, B$  ja  $R$  pätee ehto

$$|A - B| = |\delta_R(A) - \delta_R(B)|.$$

Tämän osoittaminen onnistuu suoraan laskemalla. Nimittäin normin laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} |\delta_R(A) - \delta_R(B)| &= |R^{-1}AR - R^{-1}BR| = |R^{-1}(A - B)R| \\ &= |R^{-1}||A - B||R| = \frac{1}{|R|}|R||A - B| \\ &= |A - B|. \end{aligned}$$

Näin ollen kuvaus  $\delta_R$  on isometria.

**LAUSE 4.1.** *Olkoon kvaternio  $R \neq 0$ . Tällöin on olemassa sellainen yksikkökvaternio  $R'$ , että  $\delta_R(A) = \delta_{R'}(A)$ . Olkoon lisäksi kvaternio  $Q \neq 0$ . Jos ehto  $\delta_R(A) = \delta_Q(A)$  on voimassa kaikille kvaternioille  $A$ , jollain reaaliluvulla  $r$  pätee ehto  $R = rQ$ .*

TODISTUS. Huomataan, että kaikille kvaternioille  $A$  saadaan

$$\begin{aligned}\delta_R(A) &= R^{-1}AR = \frac{1}{|R|^2}\bar{R}AR \\ &= \frac{\bar{R}}{|R|}A\frac{R}{|R|} = R'^{-1}AR' \\ &= \delta_{R'}(A),\end{aligned}$$

kun valitaan  $R' = \frac{R}{|R|}$ . Tällä tavalla valitulle kvaterniolle  $R'$  pätee  $|R'| = 1$ , joten  $R'$  on yksikkökvaternio. Toisaalta kaikilla kvaternioilla  $A$  on

$$\begin{aligned}R^{-1}AR &= Q^{-1}AQ \\ \Leftrightarrow RR^{-1}ARQ^{-1} &= RQ^{-1}AQQ^{-1} \\ \Leftrightarrow A(RQ^{-1}) &= (RQ^{-1})A,\end{aligned}$$

joten kvaternio  $RQ^{-1}$  on lauseen 3.5 nojalla reaalinen. Koska kvaternio  $RQ^{-1}$  on reaalinen, jollain reaaliluvulla  $r$  pätee

$$r = RQ^{-1}.$$

Kertomalla yllä olevaa yhtälöä oikealta kvaterniolla  $Q$  saadaan

$$rQ = RQ^{-1}Q = R.$$

□

Tarkastellaan seuraavaksi matriisien ominaisarvoja. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}.$$

Matriisin  $A$  ominaisarvot saadaan ratkaistua seuraavasti: Lineaarialgebran perustella tiedetään, että luku  $\lambda$  on matriisin  $A = A_{n \times n}$  ominaisarvo täsmälleen silloin, kun se toteuttaa matriisin  $A$  karakteristisen yhtälön

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Ratkaistaan karakteristinen yhtälö.

$$\begin{aligned}0 &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a + ib - \lambda & c + id \\ -c + id & a - ib - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= \lambda^2 - 2a\lambda + \det A.\end{aligned}$$

Edelleen lineaarisuuden ja determinantin laskusääntöjen avulla saadaan

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det(A - \lambda I) \det I = \det(A - \lambda I) \det(R^{-1}R) \\ &= \det R^{-1} \det(A - \lambda I) \det R \\ &= \det(R^{-1}(A - \lambda I)R) \\ &= \det(R^{-1}AR - R^{-1}\lambda IR) \\ &= \det(R^{-1}AR - \lambda I).\end{aligned}$$

Tämän tarkastelun seurauksena huomataan, että matriiseilla  $A$  ja  $R^{-1}AR$  on sama karakteristinen yhtälö.

Seuraavan kahden lauseen avulla osoitetaan, että kuvaus  $\delta_R$  on bijektio. Kyseisen kuvauksen bijektiivisyys on hyvin tärkeä ominaisuus. Bijektiivisyys takaa sen, että konjugointi on yksikäsitteinen operaatio ja jokainen kvaternio saadaan esitettyä sopivasti valitun konjugoinnin tuloksena.

LAUSE 4.2. *Edellisillä merkinnöillä kuvauksen  $\delta_R$  rajoittuma reaalisten kvaternioiden joukkoon, toisin sanoen kuvaus  $\delta_R|_{Re(\mathbb{H})}$ , on identtinen kuvaus.*

TODISTUS. Olkoon reaalinen kvaternio  $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = r\mathbf{I}$  ja olkoon  $R$  jokin kvaternio. Tällöin

$$\begin{aligned} \delta_R(A) &= R^{-1}AR = R^{-1} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} R \\ &= R^{-1}r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R \\ &= rR^{-1}R = r\mathbf{I} = A. \end{aligned}$$

□

LAUSE 4.3. *Olkoon  $R$  jokin kvaternio. Kuvauksen  $\delta_R$  rajoittuma imaginaaristen kvaternioiden joukkoon, toisin sanoen kuvaus*

$$\begin{aligned} \delta_R|_{Im(\mathbb{H})} : Im(\mathbb{H}) &\rightarrow Im(\mathbb{H}), \\ \delta_R(u) &= R^{-1}uR \end{aligned}$$

*on bijektio.*

TODISTUS. Olkoon  $u \in Im(\mathbb{H})$ . Osoitetaan ensin, että  $\delta_R(u) = R^{-1}uR \in Im(\mathbb{H})$ . Olkoon  $R = a' + v$ , missä  $a' \in \mathbb{R}$  ja  $v \in Im(\mathbb{H})$ . Nyt tarvitsee tarkastella kvaternion  $\delta_R(u)$  reaaliosaa. Lausekkeen (3.4) mukaisesti  $R^{-1} = \frac{1}{|R|^2}(a' - v)$ , joten lauseketta (3.3) hyödyntämällä saadaan

$$\begin{aligned} \delta_R(u) &= R^{-1}uR = \frac{1}{|R|^2}(a' - v)u(a' + v) \\ &= \frac{1}{|R|^2}(a' - v) \left( -(u|v) + a'u + u \times v \right) \\ &= \frac{1}{|R|^2} \left( a'(-(u|v)) - ((-v)|(a'u + u \times v)) + \dots \right). \end{aligned}$$

Loput tulon termit ovat imaginaarisia. Huomataan, että sisä- ja ristitulon laskusääntöjen (ks. liite A) avulla kvaternion  $\delta_R(u)$  reaaliosalle saadaan

$$\begin{aligned} |R|^2 Re \delta_R(u) &= a'(-(u|v)) - ((-v)|(a'u + u \times v)) \\ &= -a'(u|v) + (v|a'u) + (v|(u \times v)) \\ &= -a'(u|v) + a'(u|v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Näin saatiin osoitettua, että  $\delta_R(Im(\mathbb{H})) \subset Im(\mathbb{H})$ .

Osoitetaan seuraavaksi bijektiivisyys. Huomataan, että kaikilla imaginaarisilla kvaternioilla  $u$  pätee ehto

$$\delta_{R^{-1}}(u) = (R^{-1})^{-1}uR^{-1} = RuR^{-1}.$$

Näin ollen

$$\delta_R \circ \delta_{R^{-1}}(u) = \delta_R(RuR^{-1}) = R^{-1}RuR^{-1}R = u$$

ja

$$\delta_{R^{-1}} \circ \delta_R(u) = \delta_{R^{-1}}(R^{-1}uR) = RR^{-1}uRR^{-1} = u,$$

joten kuvauksella  $\delta_R$  on käänteiskuvaus  $\delta_R^{-1} = \delta_{R^{-1}}$ . Siten kuvaus  $\delta_R|_{Im(\mathbb{H})}$  on bijektio.

Lauseen 4.2 perusteella jokainen reaalinen kvaternio kuvautuu itseksi kun sitä kuvataan kuvauksella  $\delta_R$ . Kuvaus  $\delta_R$  on reaalisten kvaternioiden välisenä identtisenä kuvauksena luonnollisesti myös bijektio. Lauseen 4.3 perusteella taas kuvaus  $\delta_R$  on bijektio imaginaaristen kvaternioiden välillä. Näin ollen on kahden vaiheen kautta todistettu, että kuvaus

$$\delta_R : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \delta_R(A) = R^{-1}AR$$

on bijektio. Koska kuvaus

$$\beta : Im(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \beta(b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = (b, c, d)$$

on bijektio, sillä on olemassa käänteiskuvaus  $\beta^{-1}$ . Koska myös kuvaus  $\delta_R|_{Im(\mathbb{H})}$  on bijektio, kuvaus

$$\beta \circ \delta_R \circ \beta^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

on lineaaristen bijektioiden yhdisteenä lineaarinen bijektio.

LAUSE 4.4. *Olkoot  $A$  ja  $R$  kvaternioita, ja  $R \neq 0$ . Tällöin*

$$(R^{-1}AR)(\overline{R^{-1}AR}) = A\overline{A}.$$

TODISTUS. Suoralla laskulla ja käyttämällä lauseen 3.9 mukaisia kvaternioiden konjugaattien laskusääntöjä nähdään, että

$$\begin{aligned} (R^{-1}AR)(\overline{R^{-1}AR}) &= (R^{-1}\overline{R^{-1}})(AR\overline{AR}) \\ &= (R^{-1}\overline{R^{-1}})(A\overline{A})(R\overline{R}) \\ &= |R^{-1}|^2(A\overline{A})|R|^2 \\ &= \frac{1}{|R|^2}|R|^2(A\overline{A}) = A\overline{A}. \end{aligned}$$

□

Lauseen 4.4 seurauksena saadaan, että jos vektorin  $x = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  normi on  $n$ , myös kvaternion  $\delta_R(\alpha(x))$  normi on  $n$ . Tämä seuraa tietenkin myös siitä, että kuvaukset  $\alpha$  ja  $\delta_R$  ovat isometrioita, jolloin myös niiden yhdiste on isometria. Koska myös kuvaus  $\beta$  on isometria, yhdistetty kuvaus  $\beta \circ \delta_R \circ \beta^{-1}$  on isometria. Siten kuvaus  $\beta \circ \delta_R \circ \beta^{-1}$  säilyttää pisteiden välisen etäisyyden ja lineaarisuuden perusteella on selvää, että origo kuvautuu origoksi.

## 4.2. Konjugointi ja kierto

Tarvittavat esivalmistelut on suoritettu, joten voidaan alkaa tarkastelemaan kvaternioiden ja avaruudessa  $\mathbb{R}^3$  tapahtuvien kiertojen välistä yhteyttä.

LAUSE 4.5. *Olkoon  $R = a + u$ , missä  $a$  on reaalityyppinen ja  $u$  imaginaarinen kvaternio. Tällöin  $\delta_R(u) = R^{-1}uR = u$ .*

TODISTUS. Koska kvaternion kertominen reaalityyppillä kommutoi, suoralla laskulla nähdään, että

$$Ru = (a + u)u = au + uu = ua + uu = u(a + u) = uR.$$

Kertomalla yllä olevaa lauseketta vasemmalta kvaterniolla  $R^{-1}$  saadaan

$$R^{-1}Ru = R^{-1}uR,$$

joten  $u = R^{-1}uR = \delta_R(u)$ . □

Katsotaan seuraavaksi, miten edellisestä lauseesta voidaan hyötyä.

SEURAUUS 4.6. *Olkoon  $a$  reaalityyppinen,  $u$  imaginaarinen yksikkökvaternio ja  $R = a + u$ . Olkoon lisäksi  $x$  sellainen avaruuden  $\mathbb{R}^3$  yksikkövektori, että  $\beta(u) = x$ . Tällöin  $\beta \circ \delta_R \circ \beta^{-1}(x) = x$ .*

TODISTUS. Lauseen 4.5 perusteella

$$\beta \circ \delta_R \circ \beta^{-1}(x) = \beta \circ \delta_R(u) = \beta(u) = x.$$

□

Nähdään, että seurauksen 4.6 oletuksilla kuvauksella  $\beta \circ \delta_R \circ \beta^{-1}$  kuvattaessa vektori  $x \in \mathbb{R}^3$  ei muutu. Myöhemmin osoittautuu, että näin määritelty vektori  $x$  toimii kiertoakselin määräävänä yksikkövektorina kierrossa, jonka kvaterniolla konjugointi indusoi.

Olkoon kvaternio

$$Q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

yksikkökvaternio, ts.  $|Q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Valitaan sellainen kulma  $\theta$ , että  $a = \cos \frac{1}{2}\theta$ . Tällöin saadaan

$$\sin^2 \frac{1}{2}\theta = 1 - \cos^2 \frac{1}{2}\theta = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a^2 = b^2 + c^2 + d^2.$$

Olkoot  $b'$ ,  $c'$  ja  $d'$  sellaisia reaalityyppisiä lukuja, että  $b = b' \sin \frac{1}{2}\theta$ ,  $c = c' \sin \frac{1}{2}\theta$  ja  $d = d' \sin \frac{1}{2}\theta$ . Tällaiset reaalityyppiset luvut voidaan aina löytää, sillä  $\sin \frac{1}{2}\theta$  on vain jokin reaalityyppinen luku väliltä  $[-1, 1]$ . Merkitään  $u = b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}$ . Näin ollen kvaternio  $Q$  saadaan muotoon

$$\begin{aligned} Q &= a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \\ &= \cos \frac{1}{2}\theta + b' \sin \frac{1}{2}\theta \mathbf{i} + c' \sin \frac{1}{2}\theta \mathbf{j} + d' \sin \frac{1}{2}\theta \mathbf{k} \\ &= \cos \frac{1}{2}\theta + u \sin \frac{1}{2}\theta. \end{aligned}$$

Ehdosta  $\sin \frac{1}{2}\theta = 0$  seuraa, että  $Q = a = \cos \frac{1}{2}\theta$ . Oletetaan, että  $\sin \frac{1}{2}\theta \neq 0$ . Tällöin

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{1}{2}\theta &= b^2 + c^2 + d^2 \\ &= (b'^2 + c'^2 + d'^2) \sin^2 \frac{1}{2}\theta,\end{aligned}$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että  $b'^2 + c'^2 + d'^2 = 1$ . Tästä seuraa, että kvaternio  $u = b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}$  on imaginaarinen yksikkökvaternio.

**HUOMAUTUS 4.7.** Jos  $u$  on imaginaarinen yksikkökvaternio, toisin sanoen  $u \in Im(\mathbb{H})$ ,  $|u|^2 = 1$ , vektorin  $\beta(u)$  päätepiste on avaruuden  $\mathbb{R}^3$  origokeskisen yksikköpallon pinnalla.

**LAUSE 4.8.** *Olkkoon  $v$  imaginaarinen kvaternio,  $u$  imaginaarinen yksikkökvaternio ja olkkoon  $Q = \cos \frac{1}{2}\theta + u \sin \frac{1}{2}\theta$ . Tällöin*

$$\delta_Q(v) = v \cos \theta + (v \times u) \sin \theta + u(v|u)(1 - \cos \theta).$$

*Jos lisäksi  $(v|u) = 0$ , saadaan*

$$\delta_Q(v) = v \cos \theta + (v \times u) \sin \theta.$$

**TODISTUS.** Koska  $|Q|^2 = \cos^2 \frac{1}{2}\theta + \sin^2 \frac{1}{2}\theta = 1$ , kvaternio  $Q$  on yksikkökvaternio. Tällöin sen käänteiskvaternio on lausekkeen (3.4) mukaisesti

$$Q^{-1} = \cos \frac{1}{2}\theta - u \sin \frac{1}{2}\theta.$$

Näillä merkinnöillä lausekkeen (3.3) mukaisesti saadaan

$$\begin{aligned}\delta_Q(v) &= Q^{-1}vQ = \left( \cos \frac{1}{2}\theta - u \sin \frac{1}{2}\theta \right) v \left( \cos \frac{1}{2}\theta + u \sin \frac{1}{2}\theta \right) \\ &= \left( \cos \frac{1}{2}\theta - u \sin \frac{1}{2}\theta \right) \left( - (v|u) \sin \frac{1}{2}\theta + v \cos \frac{1}{2}\theta + (v \times u) \sin \frac{1}{2}\theta \right).\end{aligned}$$

Ehto  $Re \delta_Q(v) = 0$  seuraa lauseesta 4.3, jonka mukaan  $\delta_Q(v)$  on imaginaarinen aina kun  $v$  on imaginaarinen. Edelleen imaginaariosalle käyttämällä oletusta  $1 = |u|^2 = (u|u)$  ja sisätulon, ristitulon sekä trigonometristen funktioiden laskusääntöjä (ks. liite A) saadaan

$$\begin{aligned}Im \delta_Q(v) &= \cos \frac{1}{2}\theta \left( v \cos \frac{1}{2}\theta + (v \times u) \sin \frac{1}{2}\theta \right) + ((v|u) \sin \frac{1}{2}\theta) (u \sin \frac{1}{2}\theta) \\ &\quad + \left( - (u \sin \frac{1}{2}\theta) \times (v \cos \frac{1}{2}\theta + (v \times u) \sin \frac{1}{2}\theta) \right) \\ &= v \cos^2 \frac{1}{2}\theta + (v \times u) \cos \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta - (u \times v) \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta \\ &\quad + u(v|u) \sin^2 \frac{1}{2}\theta - (u \times (v \times u)) \sin^2 \frac{1}{2}\theta \\ &= v \cos^2 \frac{1}{2}\theta + 2(v \times u) \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta + u(v|u) \sin^2 \frac{1}{2}\theta \\ &\quad - (v(u|u) - u(u|v)) \sin^2 \frac{1}{2}\theta \\ &= v(\cos^2 \frac{1}{2}\theta - \sin^2 \frac{1}{2}\theta) + 2(v \times u) \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta + 2u(v|u) \sin^2 \frac{1}{2}\theta \\ &= v \cos \theta + (v \times u) \sin \theta + u(v|u)(1 - \cos \theta).\end{aligned}$$

Koska  $Re \delta_Q(v) = 0$ , saadaan

$$\delta_Q(v) = Im \delta_Q(v) = v \cos \theta + (v \times u) \sin \theta + u(v|u)(1 - \cos \theta).$$

Kun  $(u|v) = 0$ , edellä saatu lauseke saadaan muotoon

$$\delta_Q(v) = v \cos \theta + (v \times u) \sin \theta.$$

□

**SEURAUUS 4.9.** *Olkoot lauseen 4.8 oletukset voimassa ja olkoon  $(v|u) = 0$ . Tällöin  $(\delta_Q(v)|u) = 0$ .*

**TODISTUS.** Sisätulon ja ristitulon laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} (\delta_Q(v)|u) &= (Q^{-1}vQ|u) = \left( (v \cos \theta + (v \times u) \sin \theta) | u \right) \\ &= (v|u) \cos \theta + ((v \times u)|u) \sin \theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Kootaan nyt hieman mitä on tähän mennessä todettu. Olkoon  $u$  imaginaarinen yksikkökvaternio ja  $v$  imaginaarinen kvaternio. Kun konjugoidaan imaginaarista kvaterniota kvaterniolla

$$Q = \cos \frac{1}{2}\theta + u \sin \frac{1}{2}\theta,$$

ts. kuvataan kuvauksella  $\delta_Q$ , lauseiden 4.5 ja 4.8 perusteella

$$(4.1) \quad \delta_Q(u) = u \quad \text{ja}$$

$$(4.2) \quad \delta_Q(v) = v \cos \theta + (v \times u) \sin \theta + u(v|u)(1 - \cos \theta)$$

Jos lisäksi  $(v|u) = 0$ , lauseen 4.8 ja seurauksen 4.9 perusteella

$$(4.3) \quad \delta_Q(v) = v \cos \theta + (v \times u) \sin \theta \quad \text{ja}$$

$$(4.4) \quad (\delta_Q(v)|u) = 0.$$

Siirrytään nyt avaruuteen  $\mathbb{R}^3$ . Tarkastellaan, mitä saadut tulokset tarkoittavat avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreille  $x = \beta(u)$  ja  $y = \beta(v)$ . Ehto (4.1) osoittaa, että kaikille reaalityyppisille  $r$  pätee ehto

$$\beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(rx) = rx,$$

joten vektori  $rx$  ei näin kuvattaessa muutu. Ehdon (4.2) mukaisesti konjugoinnin tuloksena saadaan vektori

$$\beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(y) = y \cos \theta + (y \times x) \sin \theta + x(y|x)(1 - \cos \theta).$$

Oletuksesta  $(v|u) = 0$  seuraa, että  $(x|y) = 0$ , toisin sanoen vektorit  $x$  ja  $y$  ovat kohtisuorassa toisiaan vasten. Ehdot (4.3) ja (4.4) ovat yhtäpitäviä sen kanssa, että

$$\begin{aligned} \beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(y) &= y \cos \theta + (y \times x) \sin \theta \quad \text{ja} \\ (\beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(y)|x) &= 0. \end{aligned}$$

Näin ollen jos vektorit  $y$  ja  $x$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, vektorit  $\beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(y)$  ja  $x$  ovat myös kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Kuten kompleksilukujen ja tason kiertojen välisen yhteyden tarkastelussa tehtiin, käydään nyt läpi ehdot kvaternioiden ja vektorien kiertojen väliselle yhteydelle. Tätä varten tarvitaan skalaariprojektiota, joka määritellään seuraavasti [7]: vektorin  $y$  skalaarinen projektiio  $proj_x(y)$  vektorin  $x \neq 0$  suuntaan on

$$proj_x(y) = \left( y \left| \frac{x}{\|x\|} \right. \right).$$

Tällainen määrittely merkitsee kohtisuoraa projisointia vektorin  $x$  määräämälle suoralle.

Olkoon vektori  $y \in \mathbb{R}^3$  ja olkoon yksikkövektori  $x \in \mathbb{R}^3$ . Kierretään vektoria  $y$  kulman  $\theta$  verran vektorin  $x$  määräämän kiertoakselin ympäri. Kierron seurauksena saadaan vektori  $y'$ , jonka tulee olla samanpituisen kuin vektorin  $y$ . Vektorien  $y'$  ja  $x$  välisen kulman  $\phi'$  tulee olla yhtä suuri kuin vektorien  $y$  ja  $x$  välinen kulma  $\phi$ . Huomataan, että vektorit  $proj_x(y)x$  ja  $proj_x(y')x$  ovat kiertoakselin suuntaiset, joten vektorit  $y - proj_x(y)x$  ja  $y' - proj_x(y')x$  ovat kiertoakselia vastaan kohtisuorassa tasossa. Näin ollen vektorit  $y$  ja  $y'$  on jaettu kiertoakselin kanssa yhdensuuntaiseen ja sitä vastaan kohtisuoraan komponenttiin. Tämän avulla saadaan kierrolle kolmas ehto: Vektorien  $y - proj_x(y)x$  ja  $y' - proj_x(y')x$  välisen kulman tulee olla yhtä suuri kuin kiertokulman  $\theta$ . Matemaattisilla lausekkeilla ilmaistuna kierron ehdot ovat

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|y'\| = \|y\|, \\ (ii) \quad & (y'|x) = (y|x) \text{ ja} \\ (iii) \quad & \cos \theta = \frac{\left( (y - proj_x(y)x) | (y' - proj_x(y')x) \right)}{\|y - proj_x(y)x\|^2}. \end{aligned}$$

Huomaa, että ehto (ii) saatiin vektorien välisen kulman määritelmästä, jonka mukaan

$$\frac{(y'|x)}{\|y'\|\|x\|} = \cos \phi' = \cos \phi = \frac{(y|x)}{\|y\|\|x\|}.$$

Lisäksi ehtojen (i) ja (ii) mukaan saadaan tulos

$$\|y' - proj_x(y')x\| = \|y - proj_x(y)x\|,$$

jota hyödynnettiin ehdon (iii) määrittelyssä. Osoitetaan seuraavassa lauseessa, että vektori  $y' = \beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(y)$  täyttää annetut ehdot.

**LAUSE 4.10.** *Olkoon vektori  $y \in \mathbb{R}^3$  ja olkoon yksikkövektori  $x \in \mathbb{R}^3$ . Olkoot kvaterniot  $u = \beta^{-1}(x)$  ja  $Q = \cos \frac{1}{2}\theta + u \sin \frac{1}{2}\theta$ . Kierretään vektoria  $y$  kulman  $\theta$  verran vektorin  $x$  määräävän kiertoakselin ympäri. Tällöin vektorille*

$$y' = \beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(y) = y \cos \theta + (y \times x) \sin \theta + x(y|x)(1 - \cos \theta)$$

*pätevät edellä määritetyt ehdot (i)-(iii).*



TODISTUS. Koska kuvaus  $\beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}$  on isometrinen, ehto (i) pätee. Oletuksen  $\|x\| = 1$  sekä sisä- ja ristitulon laskusääntöjen mukaan

$$\begin{aligned}(y'|x) &= \left( (y \cos \theta + (y \times x) \sin \theta + x(y|x)(1 - \cos \theta)) | x \right) \\ &= (y|x) \cos \theta + ((y \times x)|x) \sin \theta + (x|x)(y|x)(1 - \cos \theta) \\ &= (y|x).\end{aligned}$$

Näin ollen myös ehto (ii) pätee. Skalaariprojektion määritelmän ja edellä saadun perusteella

$$\begin{aligned}proj_x(y') &= \left( y' \left| \frac{x}{\|x\|} \right. \right) = (y'|x) \\ &= (y|x) = \left( y \left| \frac{x}{\|x\|} \right. \right) = proj_x(y).\end{aligned}$$

Ehdon (iii) lausekkeessa esiintyville vektoreille saadaan näin ollen lausekkeet  $y - proj_x(y)x = y - (y|x)x$  ja

$$\begin{aligned}y' - proj_x(y')x &= y \cos \theta + (y \times x) \sin \theta + x(y|x)(1 - \cos \theta) - (y|x)x \\ &= y \cos \theta + (y \times x) \sin \theta - x(y|x) \cos \theta.\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}&\left( (y - proj_x(y)x) | (y' - proj_x(y')x) \right) \\ &= \left( (y - (y|x)x) | (y \cos \theta + (y \times x) \sin \theta - x(y|x) \cos \theta) \right) \\ &= (y|y) \cos \theta + (y|(y \times x)) \sin \theta - (y|x)(y|x) \cos \theta \\ &\quad - (y|x)(x|y) \cos \theta - (y|x)(x|(y \times x)) \sin \theta + (y|x)(x|x)(y|x) \cos \theta \\ &= \|y\|^2 \cos \theta - (y|x)^2 \cos \theta \\ &= (\|y\|^2 - (y|x)^2) \cos \theta.\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}\|y - proj_x(y)x\|^2 &= \|y - (y|x)x\|^2 = \left( (y - (y|x)x) | (y - (y|x)x) \right) \\ &= (y|y) - (y|x)(y|x) - (y|x)(x|y) + (y|x)(x|x)(y|x) \\ &= \|y\|^2 - (y|x)^2,\end{aligned}$$

josta seuraa, että

$$\begin{aligned}\frac{\left( (y - proj_x(y)x) | (y' - proj_x(y')x) \right)}{\|y - proj_x(y)x\|^2} &= \frac{(\|y\|^2 - (y|x)^2) \cos \theta}{\|y\|^2 - (y|x)^2} \\ &= \cos \theta.\end{aligned}$$

Siten myös ehto (iii) on voimassa. Koska kaikki kolme ehtoa pätevät, väite on todistettu.  $\square$

Huomataan, että edellä määritellyt ehdot (i)-(iii) eivät riitä kertomaan tapahtuuko kierto myötä- vai vastapäivään. Tämän toteamiseen tarvitaan vektorien ristituloa. Sovitaan, että puhuttaessa kierrosta vasta- tai myötäpäivään, ajatellaan katsojan olevan origossa ja katsovan vektorin määräämään suuntaan. Tiedetään, että avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreille  $x$  ja  $y$  pätee  $((y \times x)|x) = 0 = ((y \times x)|y)$ ,

joten vektori  $y \times x$  on kohtisuorassa sekä vektoria  $x$ , että vektoria  $y$  vastaan. Kun kierretään vektoria  $y$  vektorin  $x$  ympäri vektoria  $y \times x$  kohti, kierto tapahtuu vastapäivään. Jos taas kierretään vektorista  $y \times x$  pois päin, kierto tapahtuu myötäpäivään.

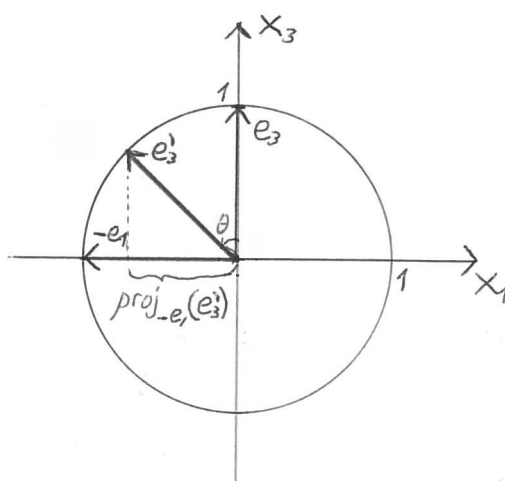
Tämä voidaan esittää kätevästi projektioiden avulla. Jotta suunta pystytään määrittämään yksikäsitteisesti, rajoitetaan kiertokulma  $\theta$  välille  $]-\pi, \pi]$ . Kierretään vektoria  $y$  vektorin  $x$  ympäri kulman  $\theta$  verran, jolloin tulokseksi saadaan vektori  $y'$ . Edellä määritellyn kolmen ehdon lisäksi saadaan seuraava ehto: Jos

$$(iv) \text{proj}_{(y \times x)}(y') \geq 0,$$

kierto tapahtuu vastapäivään. Huomaa, että positiivisilla kulman  $\theta$  arvoilla kierto tapahtuu vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan, kuten on totuttu. Projektion käytön hyöty nähdään parhaiten yksinkertaisen esimerkin avulla. Seuraavissa esimerkeissä luonnollisen kannan kantavektoreita  $e_1$ ,  $e_2$  ja  $e_3$  vastaavat koordinaattiakselit  $x_1$ ,  $x_2$  ja  $x_3$ .

ESIMERKKI 4.11. Kierretään kantavektoria  $e_3 = (0, 0, 1)$  kantavektorin  $e_2 = (0, 1, 0)$  määräävän kiertoakselin ympäri kulman  $\theta = \frac{\pi}{4}$  verran vastapäivään. Kierto tapahtuu koordinaattiakselien  $x_1$  ja  $x_3$  määräämässä tasossa. Tilanne voidaankin rinnastaa edellä määriteltyihin tason kiertoihin. Näin ollen on kohtuullisen helppo todeta vektorin  $e_3 = (0, 0, 1)$  muuntuvan kyseisessä kierrossa vektoriksi  $e'_3 = (-\sin \theta, 0, \cos \theta) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Tämä nähdään hyvin myös kuvasta 4.1. Tarkastellaan vektorin  $e'_3$  projektiota vektorin  $e_3 \times e_2 = -e_1$  suuntaan. Suoraan laskemalla nähdään, että

$$\begin{aligned} \text{proj}_{-e_1}(e'_3) &= \left( e'_3 \left| \frac{-e_1}{\| -e_1 \|} \right. \right) \\ &= (e'_3 | -e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



KUVA 4.1. Kantavektorin  $e_3$  kierto koordinaattiakselien  $x_1$  ja  $x_3$  määräämässä tasossa kulman  $\theta = \frac{\pi}{4}$  verran vastapäivään  $x_2$ -akselin toimiessa kiertoakselina. Akseli  $x_2$  osoittaa katsojasta paperia kohti.

Näin ollen todellakin vastapäivään tapahtuvassa kierrossa kierretyn vektorin  $e'_3$  projektio vektorin  $e_3 \times e_2 = -e_1$  suuntaan on positiivinen.

Olkoot lauseen 4.10 oletukset voimassa. Oletetaan lisäksi, että rajoitetaan kiertokulma  $\theta$  välille  $] -\pi, \pi]$ . Tällöin vektorille  $y'$  myös ehto (iv) on voimassa. Todistetaan tämä: Suoraan laskemalla nähdään, että

$$\begin{aligned} \text{proj}_{(y \times x)}(y') &= \left( y' \mid \frac{y \times x}{\|y \times x\|} \right) \\ &= \frac{1}{\|y \times x\|} (y' \mid (y \times x)). \end{aligned}$$

Tutkitaan aluksi sisätulon  $(y' \mid (y \times x))$  käyttäytymistä. Kyseisen sisätulon tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} (y' \mid (y \times x)) &= \left( (y \cos \theta + (y \times x) \sin \theta + x(y|x)(1 - \cos \theta)) \mid (y \times x) \right) \\ &= (y \mid (y \times x)) \cos \theta + ((y \times x) \mid (y \times x)) \sin \theta \\ &\quad + (x \mid (y \times x))(y|x)(1 - \cos \theta) \\ &= ((y \times x) \mid (y \times x)) \sin \theta \\ &= \|y \times x\|^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Yhdistämällä edellä saadut lausekkeet saadaan

$$(4.5) \quad \text{proj}_{(y \times x)}(y') = \frac{1}{\|y \times x\|} \|y \times x\|^2 \sin \theta = \|y \times x\| \sin \theta.$$

Kierretäessä vastapäivään  $0 \leq \theta \leq \pi$  ja sinifunktion käyttäytymisestä tiedetään, että tällöin  $\sin \theta \geq 0$ . Näin ollen projektio  $\text{proj}_{(y \times x)}(y')$  on positiivinen, kuten pitääkin. Toisaalta kierretäessä myötäpäivään  $-\pi < \theta < 0$  ja tiedetään, että tällöin  $\sin \theta < 0$ . Näin ollen projektio  $\text{proj}_{(y \times x)}(y')$  on negatiivinen, kuten pitääkin.

**HUOMAUTUS 4.12.** Vaikka projektion tarkastelussa oletettiin, että kiertokulma  $\theta$  rajoitetaan välille  $] -\pi, \pi]$ , lauseen 4.10 antama kierretyn vektorin lauseke toimii kaiken suuruisille kiertokulmille.

**SEURAUUS 4.13.** *Olkoot lauseen 4.10 oletukset voimassa. Jos lisäksi  $(y|x) = 0$ , vektori*

$$y' = \beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(y) = y \cos \theta + (y \times x) \sin \theta$$

*täyttää ehdot (i)-(iv).*

Tarkastellaan aluksi kahta yksinkertaista kiertoa ja tarkistetaan, että konjugoinnin tuloksena saadaan oikeat vektorit. Olkoot vektorit  $x$  ja  $y$  kohtisuorassa toisiaan vasten. Kierretään vektoria  $y$  kiertoakselin määräävän yksikkövektorin  $x$  ympäri kulman  $\pi$  verran. Tällöin vektori  $y$  muuntuu vastakkaisuuntaiseksi vektoriksi  $-y$ . Olkoon  $u$  sellainen imaginaarinen yksikkökvaternio, että  $\beta(u) = x$ . Tällöin lauseen 4.10 mukaan kyseistä kiertoa vastaa konjugointi kvaterniolla

$$Q(\pi) = \cos \frac{1}{2}\pi + u \sin \frac{1}{2}\pi = u.$$

Koska  $(y|x) = 0$ , konjugointi antaa seurauksen 4.13 mukaisesti tuloksena vektorin

$$\beta \circ \delta_{Q(\pi)} \circ \beta^{-1}(y) = y \cos \pi + (y \times x) \sin \pi = -y,$$

kuten pitääkin. Jos taas kiertokulmana on  $2\pi$ , kierretään kokonainen kierros ja vektorin  $y$  koordinaatit eivät muutu. Kyseistä kiertoa vastaa konjugointi kvaterniolla

$$Q(2\pi) = \cos\left(\frac{1}{2} \cdot 2\pi\right) + u \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 2\pi\right) = -1.$$

Konjugointi antaa tuloksena vektorin

$$\beta \circ \delta_{Q(2\pi)} \circ \beta^{-1}(y) = y \cos 2\pi + (y \times x) \sin 2\pi = y,$$

kuten odottaa saattaa.

Ratkaistaan seuraavaksi esimerkki 4.11 seurauksen 4.13 avulla.

**ESIMERKKI 4.14.** Kierretään kantavektoria  $e_3 = (0, 0, 1)$  kiertoakselin määräävän kantavektorin  $e_2 = (0, 1, 0)$  ympäri kulman  $\theta = \frac{\pi}{4}$  verran vastapäivään. Mitkä ovat tuloksena saadun vektorin koordinaatit seurauksen 4.13 mukaan?

Ratkaisu: Olkoon  $u$  sellainen imaginaarinen yksikkökvaternio, että  $e_2 = \beta(u)$ . Selvästi  $(e_3|e_2) = 0$  ja  $\|e_2\| = 1$ . Trigonometrisista funktioista tiedetään, että  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$ . Näin ollen kiertoa vastaa konjugointi kvaterniolla

$$Q = \cos \frac{1}{2}\theta + u \sin \frac{1}{2}\theta.$$

Kierron tuloksena saadaan vektori

$$\begin{aligned} e'_3 &= \beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(e_3) = e_3 \cos \theta + (e_3 \times e_2) \sin \theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

kuten myös esimerkissä 4.11.

Jatketaan tarkastelemalla monimutkaisempaa esimerkkiä.

**ESIMERKKI 4.15.** Kierretään vektoria  $y = (1, 2, 3)$  kiertoakselin määräävän vektorin  $x' = (-1, -1, 1)$  ympäri kulman  $\theta = \frac{\pi}{4}$  verran vastapäivään. Mikä vektori saadaan tulokseksi?

Ratkaisu: Huomataan, että  $(y|x') = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 0$ , toisin sanoen vektorit  $y$  ja  $x'$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Kiertoakselin määräävä yksikkövektori on

$$\frac{x'}{\|x'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}x' =: x.$$

Kiertoa vastaa konjugointi kvaterniolla

$$Q = \cos \frac{1}{2}\theta + \beta^{-1}(x) \sin \frac{1}{2}\theta.$$

Suoraan laskemalla nähdään, että

$$y \times x = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(5e_1 - 4e_2 + e_3).$$

Nyt voidaan käyttää seurauksen 4.13 tulosta. Sen mukaisesti kierron tuloksena saadaan vektori

$$\begin{aligned}
 y' &= \beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(y) = y \cos \theta + (y \times x) \sin \theta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}}(5e_1 - 4e_2 + e_3) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + 2e_2 + 3e_3) + \frac{1}{\sqrt{6}}(5e_1 - 4e_2 + e_3) \\
 &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}}, \sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{6} + 5\sqrt{2}, 2\sqrt{6} - 4\sqrt{2}, 3\sqrt{6} + \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

Tilannetta on hahmoteltu kuvassa 4.2. Varmistetaan vielä, että saatu vektori täyttää kierrolle asetetut ehdot. Suoraan laskemalla nähdään, että normeille pätee

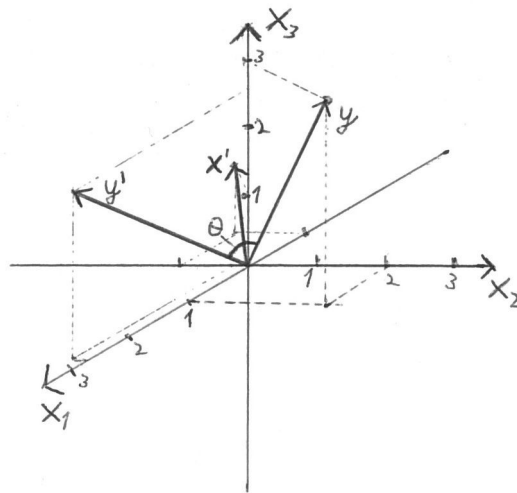
$$\begin{aligned}
 \|y'\| &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( (\sqrt{6} + 5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6} - 4\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{14} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \|y\|,
 \end{aligned}$$

joten ehto (i) on voimassa. Sisätulolle pätee

$$(y'|x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-\sqrt{6} - 5\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 0 = (y|x),$$

joten ehto (ii) pätee. Lisäksi

$$\text{proj}_x(y) = \left( y \left| \frac{x}{\|x\|} \right. \right) = 0 = \text{proj}_x(y'),$$



KUVA 4.2. Vektorin  $y = (1, 2, 3)$  kierto kulman  $\theta = \frac{\pi}{4}$  verran vastapäivään vektorin  $x' = (-1, -1, 1)$  määrävän kiertoakselin ympäri.

joten

$$\begin{aligned} & \frac{\left( (y - \text{proj}_x(y)x) | (y' - \text{proj}_x(y')x) \right)}{\|y - \text{proj}_x(y)x\|^2} \\ &= \frac{(y|y')}{\|y\|^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{6} + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{6} - 8\sqrt{2} + 9\sqrt{6} + 3\sqrt{2})}{\sqrt{14}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \cos \frac{\pi}{4} = \cos \theta. \end{aligned}$$

Näin ollen ehto (iii) on voimassa. Tarkastetaan vielä kiertosuunnan ehto. Lausekkeen (4.5) mukaisesti

$$\text{proj}_{y \times x}(y') = \|y \times x\| \sin \theta = \|y \times x\| \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|y \times x\|,$$

joten projektio on positiivinen, kuten pitääkin. Näin ollen tuloksena saatu vektori on oikein laskettu.

Nyt on käyty läpi, kuinka kiertyneen vektorin koordinaatit saadaan ratkaistua tilanteessa, jossa kiertoakseli on kohtisuorassa tarkasteltavaa vektoria vastaan. Jos kiertoakseli ei ole kohtisuorassa tarkasteltavaa vektoria vastaan, tilanne voidaan palauttaa edellisen mukaiseksi. Tämä voidaan tehdä seuraavasti: Kun kiertoakselin määräävä vektori on valittu, normitetaan se, ja asetetaan se yhdeksi kantavektoriksi. Sitten ratkaistaan sen avulla muut kaksi kantavektoria ja esitetään kierrettävä vektori näiden kantavektorien lineaariyhdisteenä. Sen jälkeen rajoitutaan tarkastelemaan kierrettävää vektoria komponentteittain. Kiertoakselin suuntainen komponentti ei muutu, ja muut komponentit saadaan ratkaistua seurauksen 4.13 avulla. Kiertyneen vektorin koordinaatit voidaan ratkaista myös suoraan lauseen 4.10 tulosta hyödyntämällä, mutta edellä kuvailtu tarkastelu helpottaa tilanteen geometrista hahmottamista.

**ESIMERKKI 4.16.** Kierretään vektoria  $y = (1, 1, 1)$  kiertoakselin määräävän vektorin  $x = (1, 1, 0)$  ympäri kulman  $\theta = \frac{\pi}{4}$  verran vastapäivään. Mitkä ovat tuloksena saadun vektorin  $y'$  koordinaatit?

Ratkaisu: Huomataan, että  $(y|x) = 2 \neq 0$ , joten tarkasteltava vektori  $y$  ja kiertoakselin määräävä vektori  $x$  eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan. Jaetaan vektori  $y$  kiertoakselin suuntaiseen ja sitä vastaan kohtisuoriin komponentteihin tekemällä kannanvaihto. Merkitään avaruuden  $\mathbb{R}^3$  luonnollista kantaa  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Halutaan määrittellä sellainen ortonormaali kanta avaruuteen  $\mathbb{R}^3$ , että kiertoakselin määräävä vektori on jonkun kantavektorin suuntainen. Valitaan aluksi  $b_1 = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ . Näin määritelty vektori  $b_1$  on selvästi vektorin  $x$  suuntainen ja  $\|b_1\| = 1$ . Valitaan seuraavaksi kantavektoriksi  $b_2$  sellainen yksikkövektori, että  $b_1 \perp b_2$ . Voidaan valita  $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ , sillä näin määritellylle vektorille  $b_2$  pätee  $(b_1|b_2) = 0$  ja  $\|b_2\| = 1$ . Valitaan kolmanneksi kantavektoriksi vektori  $b_3$ , joka määritellään asettamalla

$$b_3 = b_2 \times b_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1+1)e_3 = (0, 0, 1).$$

Merkitään  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ . Selvästi  $\mathcal{B}$  on ortonormaali kanta, mikä tarkoittaa, että kaikki sen vektorit ovat yksikkövektoreita ja toisiaan vastaan kohtisuorassa. Koska  $\mathcal{B}$  on ortonormaali kanta, vektorin  $y = (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{B}}$  komponentit kannassa  $\mathcal{B}$  saadaan ratkaistua sisätulon avulla. Merkitään selkeyden vuoksi seuraavissa sisätulolaskuissa näkyviin se, missä kannassa vektori kulloinkin on esitetty. Uusiksi komponenteiksi saadaan

$$\begin{aligned} y_1 &= ((y)_{\mathcal{E}} | (b_1)_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \\ y_2 &= ((y)_{\mathcal{E}} | (b_2)_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \text{ ja} \\ y_3 &= ((y)_{\mathcal{E}} | (b_3)_{\mathcal{E}}) = 1. \end{aligned}$$

Näin ollen  $y = (1, 1, 1)_{\mathcal{E}} = (\sqrt{2}, 0, 1)_{\mathcal{B}}$ . Määritellään vektorit

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (y_1, 0, 0)_{\mathcal{B}} = (\sqrt{2}, 0, 0)_{\mathcal{B}}, \\ \dot{y}_2 &= (0, y_2, 0)_{\mathcal{B}} = (0, 0, 0)_{\mathcal{B}} \text{ ja} \\ \dot{y}_3 &= (0, 0, y_3)_{\mathcal{B}} = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = b_3, \end{aligned}$$

joille ehto  $y = \dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3$  on voimassa. Koska  $x = \sqrt{2}b_1$ , voidaan valita kiertoakselin määrääväksi yksikkövektoriksi kantavektori  $b_1$ . Nyt voidaan tarkastella erikseen vektorien  $\dot{y}_1, \dot{y}_2$  ja  $\dot{y}_3$  muuntumista kierrossa kiertoakselin määräävän yksikkövektorin  $b_1$  ympäri. Koska vektori  $\dot{y}_1$  on kiertoakselin suuntainen, se ei muutu kierrossa, ts.  $\dot{y}'_1 = \dot{y}_1$ . Koska  $\dot{y}_2 = (0, 0, 0)_{\mathcal{B}}$ , sekään ei muutu kierrossa, ts.  $\dot{y}'_2 = \dot{y}_2$ . Näin ollen riittää tarkastaa, kuinka  $\dot{y}_3 = b_3$  muuntuu kierron seurauksena. Kiertoa vastaa konjugointi kvaterniolla

$$Q = \cos \frac{1}{2}\theta + \beta^{-1}(b_1) \sin \frac{1}{2}\theta.$$

Seurauksen 4.13 perusteella kierron tuloksena saadaan vektori

$$\begin{aligned} \dot{y}'_3 &= \beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(\dot{y}_3) = \beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(b_3) \\ &= b_3 \cos \theta + (b_3 \times b_1) \sin \theta. \end{aligned}$$

Vektorien  $b_3$  ja  $b_1$  ristitulon tuloksena saadaan vektori

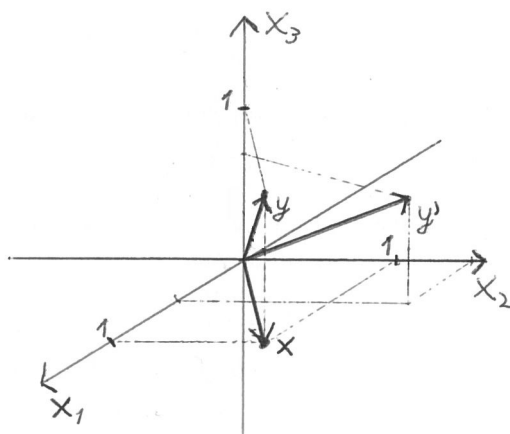
$$b_3 \times b_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 = -b_2.$$

Näin ollen vektorille  $\dot{y}'_3$  saadaan esitys

$$\begin{aligned} \dot{y}'_3 &= b_3 \cos \theta + -b_2 \sin \theta = b_3 \cos \frac{\pi}{4} - b_2 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}b_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}b_2 \\ &= (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Yhdistämällä edellä saadut tulokset, saadaan kierretty vektori esitettyä muodossa

$$\begin{aligned} y' &= \dot{y}'_1 + \dot{y}'_2 + \dot{y}'_3 \\ &= (\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$



KUVA 4.3. Vektorin  $y = (1, 1, 1)$  kierto kulman  $\theta = \frac{\pi}{4}$  verran vastapäivään vektorin  $x = (1, 1, 0)$  määräävän kiertoakselin ympäri.

Vektorin  $y' = (y'_1, y'_2, y'_3)_\mathcal{E}$  komponentit luonnollisessa kannassa  $\mathcal{E}$  saadaan jälleen sisätulon avulla. Komponentit kannassa  $\mathcal{E}$  ovat

$$\begin{aligned} y'_1 &= ((y')_{\mathcal{B}} | (b_1)_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}, \\ y'_2 &= ((y')_{\mathcal{B}} | (b_2)_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2} \text{ ja} \\ y'_3 &= ((y')_{\mathcal{B}} | (b_3)_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Näin ollen  $y' = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})_\mathcal{E}$ .

Tilannetta on hahmoteltu kuvassa 4.3. Tarkistetaan vielä, että saadun vektorin lauseke on oikein ratkaistu. Normeille pätee

$$\|y'\|^2 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 3 = \|y\|^2,$$

joten ehto (i) toteutuu. Sisätuloille saadaan

$$(y' | b_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}) = \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = (y | b_1),$$

joten ehto (ii) on voimassa. Lisäksi

$$\text{proj}_{b_1}(y) = \left( b_1 \left| \frac{b_1}{\|b_1\|} \right. \right) = (y | b_1) = \sqrt{2} = (y' | b_1) = \left( y' \left| \frac{b_1}{\|b_1\|} \right. \right) = \text{proj}_{b_1}(y'),$$

joten

$$\begin{aligned} & \frac{\left( (y - \text{proj}_{b_1}(y)x) | (y' - \text{proj}_{b_1}(y')x) \right)}{\|y - \text{proj}_{b_1}(y)x\|^2} \\ &= \frac{\left( (y - \sqrt{2}b_1) | (y' - \sqrt{2}b_1) \right)}{\|y - \sqrt{2}b_1\|^2} = \frac{\left( (0, 0, 1) | (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right)}{\|(0, 0, 1)\|^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} = \cos \theta. \end{aligned}$$



Näin ollen ehto (iii) on voimassa. Tarkastetaan vielä kiertosuunnan ehto. Lausekkeen (4.5) mukaisesti

$$\text{proj}_{y \times b_1}(y') = \|y \times b_1\| \sin \theta = \|y \times b_1\| \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|y \times b_1\|,$$

joten projektiio on positiivinen, kuten pitääkin. Näin ollen tuloksena saatu vektori on oikein laskettu.

Esimerkki 4.16 voidaan ratkaista myös suoraan lausetta 4.10 hyödyntämällä. Kiertoa vastaa konjugointi kvaterniolla

$$Q = \cos \frac{1}{2}\theta + \beta^{-1}(b_1) \sin \frac{1}{2}\theta.$$

Edellä lasketun perusteella  $\|b_1\| = 1$  ja suoraan laskemalla nähdään, että

$$(y|b_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ ja}$$

$$y \times b_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2).$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} y' &= \beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(y) = y \cos \theta + (y \times b_1) \sin \theta + b_1(y|b_1)(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2 + e_3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

joten saatiin sama tulos kuin edellä. Huomataan, että kierretyn vektorin lausekkeen ratkaiseminen tätä laskentamenetelmää käyttäen vaatii vähemmän laskutoimituksia, kuin edellä käytetty kannanvaihtoon perustuva menetelmä.

Kvaternioiden lisäksi avaruudessa  $\mathbb{R}^3$  origon kautta kulkevan kiertoakselin ympäri tapahtuvia kiertoja voidaan kuvata ortogonaalisilla  $3 \times 3$ -matriiseilla, joiden determinantti on 1. Katsotaanpa millainen matriisi vastaa esimerkissä 4.16 esiintynyttä kiertoa. Käytetään lauseen 4.10 tulosta kierretyn vektorin lausekkeen ratkaisemiseksi ja tarkastellaan miten kantavektorit muuntuvat kierrossa. Huomataan, että  $(e_1|b_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ja

$$e_1 \times b_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_3.$$

Näin ollen kantavektori  $e_1$  muuntuu vektoriksi

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 \cos \theta + (e_1 \times b_1) \sin \theta + b_1(e_1|b_1)(1 - \cos \theta) \\ &= e_1 \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos \theta)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)e_1 + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin \theta e_3. \end{aligned}$$

Kantavektorille  $e_2$  saadaan  $(e_2|b_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ja

$$e_2 \times b_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_3.$$

Näin ollen kantavektori  $e_2$  muuntuu vektoriksi

$$\begin{aligned} e'_2 &= e_2 \cos \theta + (e_2 \times b_1) \sin \theta + b_1(e_2|b_1)(1 - \cos \theta) \\ &= e_2 \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos \theta)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)e_1 + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin \theta e_3. \end{aligned}$$

Kantavektorille  $e_3$  saadaan  $(e_3|b_1) = 0$  ja

$$e_3 \times b_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2.$$

Näin ollen kantavektori  $e_3$  muuntuu vektoriksi

$$\begin{aligned} e'_3 &= e_3 \cos \theta + (e_3 \times b_1) \sin \theta + b_1(e_3|b_1)(1 - \cos \theta) \\ &= \cos \theta e_3 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\right) \sin \theta \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin \theta e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin \theta e_2 + \cos \theta e_3. \end{aligned}$$

Kiertomatriisi saadaan asettamalla muuntuneet kantavektorit sarakevektoreiksi, toisin sanoen

$$K_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) & \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin \theta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) & \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin \theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Tarkistetaan vielä, että kiertomatriisi on laskettu oikein. Kierretään jälleen vektoria  $y = (1, 1, 1)$  vektorin  $x$  määräämän kiertoakselin ympäri kulman  $\theta = \frac{\pi}{4}$  verran. Kiertomatriisi on tällöin

$$K_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ja kierrettyksi vektoriksi saadaan

$$\begin{aligned} y' &= K_{\frac{\pi}{4}} y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Näin ollen  $y' = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ , kuten edellä saatiin. On ratkaistu kiertyneen vektorin lauseke kolmella eri tavalla ja päästy joka kerralla samaan tulokseen. Huomataan, että kaikista eniten laskutoimituksia vaati menetelmä, jossa tarkasteltava vektori jaettiin kiertoakselin suuntaiseen ja kiertoakselin kanssa kohtisuoriin komponentteihin. Toisaalta kiertomatriisin ratkaiseminen vaati myös useita eri vaiheita. Vähiten laskutoimituksia tarvittiin kierretyn vektorin lausekkeen ratkaisemiseksi suoraan yhdellä kvaternion konjugoinnilla.

Edellä johdettua kiertomatriisia  $K_{\theta}$  tarkastelemalla huomataan, että siinä esiintyy kiertokulma  $\theta$ , mutta kiertoakselin tunnistaminen matriisista suoraan on käytännössä mahdotonta. Kiertoakselin määräävä yksikkövektori  $u$  saadaan kuitenkin selville ratkaisemalla yhtälö  $K_{\theta}u = u$ . Yhtälö voidaan ratkaista esimerkiksi lineaarialgebrasta [7] tutuilla menetelmillä, mutta ratkaiseminen on kohtuullisen työlästä.

Voidaankin todeta, että kvaterniot ovat hyvin tehokkaita, kun analysoidaan tilanteita avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ . Kvaternio on myös tavallaan ytimekkäämpi esitys kierrolle kuin matriisi, jossa neljän riippumattoman alkion lisäksi on viisi ”ylimääräistä” alkia. Kvaternioiden yhteys geometriaan käy myös selvemmin ilmi, sillä kiertoa kuvaavasta kvaterniosta pystytään selvästi tunnistamaan kiertokulma ja kiertoakseli. Jos lisäksi halutaan yhdistää kaksi kiertoa, kvaternioiden tapauksessa selvittäään tässäkin tapauksessa vähemmällä, sillä kahden kiertomatriisin johtaminen millä tahansa menetelmällä on kovin työlästä. Seuraavassa osiossa esitellään Eulerin kulmat, joihin liittyvien kiertojen esittämisessä kvaternioiden edut tulevat selkeästi ilmi.

Kvaternioiden avulla voidaan kuvata myös neliulotteisia kiertoja ja lukija voi halutessaan tutustua näihin esimerkiksi lähteestä [3].

### 4.3. Eulerin kulmat

Ajatellaan mielivaltaista kiertoa avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ . Jokainen tällainen kierto voidaan esittää kolmen koordinaattiakselien ympäri tapahtuvan kierron yhdisteenä. Näitä kolmea kiertoa vastaavat Eulerin kulmat  $\phi, \theta$  ja  $\psi$ . Eulerin kulmien avulla voidaan mikä tahansa avaruuden vektori kiertää mihin tahansa asentoon. Jos sallitaan lisäksi venytykset, vektori saadaan muunnettua mikä tahansa toiseksi vektoriksi. Kvaternioita voidaan hyödyntää Eulerin kulmia vastaavien kiertomatriisien johtamisessa ja toisaalta kierrot voidaan kokonaisuudessaan esittää pelkästään kvaternioiden avulla. Eulerin kulmilla on sovelluksia mm. mekaniikassa, jossa jäykän kappaleen liikettä kuvaavat Eulerin

yhtälöt perustuvat Eulerin kulmien käyttöön. Johdetaan nyt Eulerin kulmia vastaavat kierrot.

Kierretään ensin kantavektorin  $e_3 = (0, 0, 1)$  määräämän kiertoakselin ympäri kulman  $\phi$  verran vastapäivään. Soveltamalla seurausta 4.13 nähdään kuinka kantavektorit  $e_1 = (1, 0, 0)$  ja  $e_2 = (0, 1, 0)$  kiertyvät. Tätä kiertoa kuvaa konjugointi kvaterniolla

$$Q_3(\phi) = \cos \frac{1}{2}\phi + \beta^{-1}(e_3) \sin \frac{1}{2}\phi$$

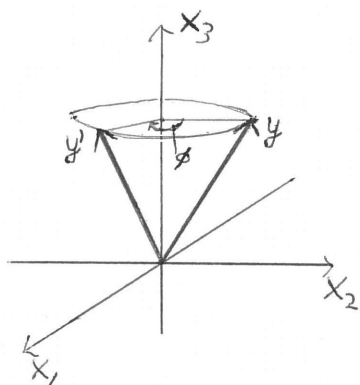
ja kiertyneiden kantavektorien lausekkeet ovat

$$e'_1 = \beta \circ \delta_{Q_3(\phi)} \circ \beta^{-1}(e_1) = e_1 \cos \phi + (e_1 \times e_3) \sin \phi = e_1 \cos \phi - e_2 \sin \phi \text{ ja}$$

$$e'_2 = \beta \circ \delta_{Q_3(\phi)} \circ \beta^{-1}(e_2) = e_2 \cos \phi + (e_2 \times e_3) \sin \phi = e_2 \cos \phi + e_1 \sin \phi.$$

Tässä kierrossa  $e_3$  ei muutu, joten kiertomatriisi saadaan muotoon

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



KUVA 4.4. Vektorin  $y$  kierto Eulerin kulmaa  $\phi$  vastaavassa kierrossa vektoriksi  $y'$ .

Toisena kiertona on kierto kantavektorin  $e_1$  määräämän kiertoakselin ympäri kulman  $\theta$  verran vastapäivään. Kiertoa kuvaa konjugointi kvaterniolla

$$Q_1(\theta) = \cos \frac{1}{2}\theta + \beta^{-1}(e_1) \sin \frac{1}{2}\theta$$

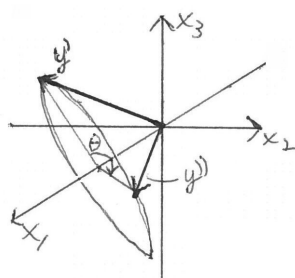
ja kiertyneiden kantavektorien lausekkeet ovat

$$e''_2 = \beta \circ \delta_{Q_1(\theta)} \circ \beta^{-1}(e_2) = e_2 \cos \theta + (e_2 \times e_1) \sin \theta = e_2 \cos \theta - e_3 \sin \theta \text{ ja}$$

$$e''_3 = \beta \circ \delta_{Q_1(\theta)} \circ \beta^{-1}(e_3) = e_3 \cos \theta + (e_3 \times e_1) \sin \theta = e_3 \cos \theta + e_2 \sin \theta.$$

Tässä kierrossa  $e_1$  ei muutu, joten kiertomatriisi saadaan muotoon

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$



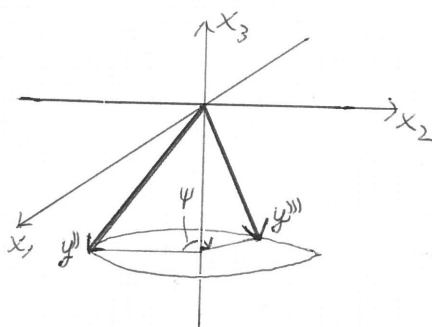
KUVA 4.5. Vektorin  $y'$  kierto Eulerin kulmaa  $\theta$  vastaavassa kierrossa vektoriksi  $y''$ .

Kolmantena kiertona on jälleen kierto kantavektorin  $e_3$  määräämään kiertoakselin ympäri, mutta tällä kertaa kulman  $\psi$  verran vastapäivään. Näin ollen kiertoa kuvaa konjugointi kvaterniolla

$$Q_3(\psi) = \cos \frac{1}{2}\psi + \beta^{-1}(e_3) \sin \frac{1}{2}\psi$$

ja kiertomatriisi on ensimmäisen kohdan perusteella

$$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



KUVA 4.6. Vektorin  $y''$  kierto Eulerin kulmaa  $\psi$  vastaavassa kierrossa vektoriksi  $y'''$ .

Olkoon vektori  $y \in \mathbb{R}^3$ . Suorittamalla edelliset kolme kiertoa peräkkäin vektori  $y$  muuntuu vektoriksi  $y'''$ , jonka koordinaatit saadaan ratkaistua kierto-matriisien tai kvaternioiden avulla. Matriisien avulla laskettaessa vektorille  $y'''$  saadaan esitys

$$y''' = R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi)y,$$

missä kokonaiskiertomatriisi  $R$  on

$$\begin{aligned}
R &= R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi) \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Esimerkiksi kantavektori  $e_3$  muuntuu kokonaiskierrossa vektoriksi

$$e_3''' = Re_3 = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Tehdäänpä sama kvaternioiden avulla. Konjugointien kautta vektorille  $y'''$  saadaan esitys

$$y''' = \beta \circ \delta_{Q_3(\psi)} \circ \delta_{Q_1(\theta)} \circ \delta_{Q_3(\phi)} \circ \beta^{-1}(y).$$

Ensimmäisessä kierrossa kiertoakselin määrää kantavektori  $e_3$ . Nyt on huomattavaa, että missään kierroista kiertoakseli ei välttämättä ole kohtisuorassa kierrettävää vektoria vastaan. Lauseen 4.10 mukaan

$$y' = \beta \circ \delta_{Q_3(\phi)} \circ \beta^{-1}(y) = y \cos \phi + (y \times e_3) \sin \phi + e_3(y|e_3)(1 - \cos \phi).$$

Seuraavassa kierrossa kiertoakselin määrää vektori  $e_1$ . Tämän kierron tuloksena saadaan vektori

$$y'' = \beta \circ \delta_{Q_1(\theta)} \circ \beta^{-1}(y') = y' \cos \theta + (y' \times e_1) \sin \theta + e_1(y'|e_1)(1 - \cos \theta)$$

Viimeisessä kierrossa kiertoakselin määrää jälleen kantavektori  $e_3$ . Näin ollen viimeisen kierron tuloksena saadaan vektori

$$y''' = \beta \circ \delta_{Q_3(\psi)} \circ \beta^{-1}(y'') = y'' \cos \psi + (y'' \times e_3) \sin \psi + e_3(y''|e_3)(1 - \cos \psi).$$

Huomataan tässä vaiheessa, että ei kannata lähteä sijoittamaan vektoreiden  $y''$  ja  $y'$  lausekkeita saatuun vektorin  $y'''$  lausekkeeseen, sillä tämä johtaa helposti tarpeettoman pitkiin esityksiin. Onkin järkevämpää suorittaa kierto vaiheittain.

Katsotaan nyt, kuinka kantavektorille  $e_3$  käy kvaternioiden avulla lasketuissa peräkkäisissä kierroissa. Ensimmäisessä kierrossa vektori  $e_3$  on kiertoakselin suuntainen, joten se ei muutu. Toisessa kierrossa  $e_3$  muuntuu edellä lasketun mukaisesti vektoriksi

$$e_3'' = e_3 \cos \theta + e_2 \sin \theta.$$

Jäljelle jää tarkastaa, kuinka vektorille  $e_3''$  käy kolmannessa kierrossa, jossa kiertoakselin määrää vektori  $e_3$ . Edellä lasketun mukaisesti kierron tuloksena

saadaan vektori

$$\begin{aligned}
 e_3''' &= \beta \circ \delta_{Q_3(\psi)} \circ \beta^{-1}(e_3'') = e_3'' \cos \psi + (e_3'' \times e_3) \sin \psi + e_3(e_3''|e_3)(1 - \cos \psi) \\
 &= (e_3 \cos \theta + e_2 \sin \theta) \cos \psi + ((e_3 \cos \theta + e_2 \sin \theta) \times e_3) \sin \psi \\
 &\quad + e_3((e_3 \cos \theta + e_2 \sin \theta)|e_3)(1 - \cos \psi) \\
 &= e_3 \cos \theta \cos \psi + e_2 \sin \theta \cos \psi + e_1 \sin \theta \sin \psi \\
 &\quad + e_3 \cos \theta(1 - \cos \psi) \\
 &= e_1 \sin \psi \sin \theta + e_2 \cos \psi \sin \theta + e_3 \cos \theta \\
 &= \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Näin ollen saatiin sama tulos kuin edellä. Katsotaan seuraavan esimerkin avulla kuinka oikeat Eulerin kulmat valitaan.

**ESIMERKKI 4.17.** Halutaan kiertää vektori  $y = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$  koordinaattiakselin  $x_1$  suuntaiseksi, osoittamaan nimenomaan positiiviseen suuntaan. Millaiset Eulerin kulmat tulee valita ja mikä vektori saadaan tulokseksi?

Ratkaisu: Esitetään vektori  $y$  kahden vektorin summana

$$y = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0) + (0, 0, 1) = y_p + e_3.$$

Nähdään, että vektori  $y_p$  on selvästi koordinaattiakselien  $x_1$  ja  $x_2$  määräämässä tasossa. Olkoon vektorin  $y_p$  ja kantavektorin  $e_1$  välinen kulma vastapäivään  $\gamma$ . Huomataan, että  $\|y_p\| = 1$  ja

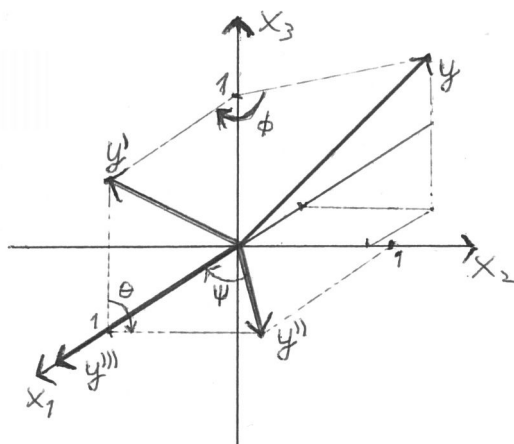
$$\cos \gamma = \frac{(y_p|e_1)}{\|y_p\| \|e_1\|} = -\frac{1}{2},$$

joten  $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ . Valitaan tämä ensimmäiseksi kiertokulmaksi, toisin sanoen valitaan  $\phi = \gamma = \frac{2\pi}{3}$ . Suoritetaan ensimmäinen kierto ja ratkaistaan kiertyneen vektorin lauseke kvaternioiden avulla. Kiertoakselin määrää kantavektori  $e_3$  ja kiertoa kuvaa konjugointi kvaterniolla  $Q_3(\phi) = \cos \frac{1}{2}\phi + \beta^{-1}(e_3) \sin \frac{1}{2}\phi$ . Huomataan, että

$$y \times e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$$

ja  $(y|e_3) = 1$ . Näin ollen lauseen 4.10 perusteella kierron tuloksena saadaan vektori

$$\begin{aligned}
 y' &= \beta \circ \delta_{Q_3(\phi)} \circ \beta^{-1}(y) = y \cos \phi + (y \times e_3) \sin \phi + e_3(y|e_3)(1 - \cos \phi) \\
 &= -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}(y \times e_3) + \frac{3}{2}e_3 \\
 &= \frac{1}{4}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}e_2 - \frac{1}{2}e_3 + \frac{3}{4}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}e_2 + \frac{3}{2}e_3 \\
 &= e_1 + e_3 = (1, 0, 1).
 \end{aligned}$$



KUVA 4.7. Vektorin  $y$  kierto vektoriksi  $y'''$  Eulerin kulmia käyttäen.

Kierretään seuraavaksi vektori  $y'$  sellaiseksi vektoriksi, joka on  $x_1$ - ja  $x_2$ -akselien määräämässä tasossa. Kiertoakselin määrää nyt kantavektori  $e_1$  ja huomataan, että vektori  $y'$  on  $x_1$ - ja  $x_3$ -akselien määräämässä tasossa. Näin ollen kiertokulmaksi on valittava  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ja kiertoa kuvaa konjugointi kvaterniolla  $Q_1(\theta) = \cos \frac{1}{2}\theta + \beta^{-1}(e_1) \sin \frac{1}{2}\theta$ . Suoraan laskemalla nähdään, että

$$y' \times e_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = e_2$$

ja  $(y'|e_1) = 1$ . Näin ollen kierron tuloksena saadaan vektori

$$\begin{aligned} y'' &= \beta \circ \delta_{Q_1(\theta)} \circ \beta^{-1}(y') = y' \cos \theta + (y' \times e_1) \sin \theta + e_1(y'|e_1)(1 - \cos \theta) \\ &= (y' \times e_1) + e_1 \\ &= e_2 + e_1 = (1, 1, 0). \end{aligned}$$

Viimeisellä kierrolla saadaan vektori  $y''$  kierrettyä  $x_1$ -akselin suuntaiseksi vektoriksi ja osoittamaan nimenomaan positiiviseen suuntaan. Kiertoakselin määrää jälleen kantavektori  $e_3$  ja huomataan, että vektorin  $y''$  ja  $x_1$ -akselin välinen kulma on  $\frac{\pi}{4}$ . Näin ollen kiertokulmaksi on valittava  $\psi = \frac{\pi}{4}$  ja kiertoa kuvaa konjugointi kvaterniolla  $Q_3(\psi) = \cos \frac{1}{2}\psi + \beta^{-1}(e_3) \sin \frac{1}{2}\psi$ . Huomataan, että

$$y'' \times e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e_1 - e_2$$



sekä  $(y''|e_3) = 0$ . Näin ollen seurauksen 4.13 perusteella kierron tuloksena saadaan vektori

$$\begin{aligned} y''' &= \beta \circ \delta_{Q_3(\psi)} \circ \beta^{-1}(y'') = y'' \cos \psi + (y'' \times e_3) \sin \psi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{1}{\sqrt{2}}(y'' \times e_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) \\ &= \sqrt{2}e_1, \end{aligned}$$

joka selvästi on  $x_1$ -akselin suuntainen ja samanpituisen kuin vektori  $y$ . Kiertoja on hahmoteltu kuvassa 4.7.

Esimerkki 4.17 voidaan ratkaista myös pelkästään yhdellä kierrolla. Koska  $\|y\| = \sqrt{2}$ , halutaan kierron tuloksena saada vektori  $y''' = \sqrt{2}e_1$ . Valitaan kiertokulmaksi  $\nu$  vektorien  $y$  ja  $y'''$  välinen kulma, toisin sanoen

$$\cos \nu = \frac{(y|y''')}{\|y\| \|y'''\|} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Huomataan, että kulman  $\nu$  tarkkaa arvoa ei saada ratkaistua, vaan ainoastaan likiarvo  $\nu \approx 1,932$ , mikä vastaa noin  $110,7$  astetta. Tämä ei kuitenkaan ole esteenä tehtävän ratkaisemiselle. Edellä annetulle kulmalle  $\nu = \cos^{-1}(-\frac{1}{2\sqrt{2}})$  pätee  $\sin \nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$ . Valitaan kiertoakselin määrääväksi vektoriksi sellainen vektori  $x'$ , jolle

$$x' = y''' \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e_3.$$

Olkoon yksikkövektori  $x = \frac{x'}{\|x'\|} = \sqrt{\frac{2}{7}}(-\sqrt{2}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e_3)$ . Sisä- ja ristitulon laskusääntöjen perusteella

$$0 = (y|(y''' \times y)) = (y|x'),$$

joten  $(y|x) = 0$ . Lisäksi

$$y \times x = \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{2}{7}} \left( \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right) e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_3 \right).$$

Kierretään vektoria  $y$  vektorin  $x$  määräämän kiertoakselin ympäri kulman  $\nu$  verran vastapäivään. Kiertoa vastaa konjugointi kvaterniolla

$$\begin{aligned} Q &= \cos \frac{1}{2}\nu + \beta^{-1}(x) \sin \frac{1}{2}\nu \\ &= \cos \left( \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \right) + \sqrt{\frac{2}{7}} \left( -\sqrt{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \right) \sin \left( \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Tarkistetaan, että näin valitulla kvaterniolla konjugointi antaa tuloksena oikean vektorin. Seurauksen 4.13 perusteella kierretty vektori on

$$\begin{aligned}
 \beta \circ \delta_Q \circ \beta^{-1}(y) &= y \cos \nu + (y \times x) \sin \nu \\
 &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 + e_3\right) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{\frac{2}{7}}\left(\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3\right) \\
 &= \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e_1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)e_2 \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)e_3 \\
 &= \sqrt{2}e_1 = y''',
 \end{aligned}$$

joten kiertoakseli, kiertokulma ja kiertoa kuvaava kvaternio ovat oikein valitut.

Esimerkissä 4.17 esitettiin yksi tapa jakaa avaruuden  $\mathbb{R}^3$  kierto Eulerin kulmia vastaaviin kiertoihin. Eulerin kulmat voidaan valita myös muilla tavoin ja jätänkin lukijalle viimeiseksi harjoitustehtäväksi keksiä toisenlaiset Eulerin kulmat esimerkin 4.17 ratkaisemiseksi.

## LIITE A

Tämä liite sisältää tunnetuiksi oletettujen algebrallisten käsitteiden määritelmiä sekä todistuksissa ja esimerkeissä käytettyjä trigonometrinen funktioiden ja vektorilaskennan laskusääntöjä.

### 1.1. Algebra

Olkoon  $R$  jokin epätyhjä joukko, jossa on määritelty laskutoimitus  $+$ . Tällöin  $(R, +)$  on *ryhmä*, jos

- (i)  $+$  on assosiatiivinen, ts  $a + (b + c) = (a + b) + c$  kaikilla  $a, b, c \in R$ ,
- (ii) joukossa  $R$  on neutraali-alkio  $0_R \in R$ , jolle ehto  $a + 0_R = a = 0_R + a$  pätee kaikilla  $a \in R$  ja
- (iii) jokaisella  $a \in R$  on vasta-alkio  $-a$ , jolle pätee ehto  $a + (-a) = 0_R$ .

Ryhmä  $(R, +)$  on

- (iv) kommutatiivinen, jos  $a + b = b + a$  kaikilla  $a, b \in R$ .

Otetaan nyt käyttöön toinen joukossa  $R$  määritelty laskutoimitus  $\cdot$ . Nyt  $(R, +, \cdot)$  on (ykkösellinen) *rengas*, jos  $(R, +)$  on kommutatiivinen ryhmä,

- (v) laskutoimitukset noudattavat osittelulakia (ovat distributiivisia), ts.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  sekä  $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$  kaikilla  $a, b, c \in R$  ja

- (vi) kertolaskulla on neutraali-alkio  $1 = 1_R \in R$ , jolle ehto  $1_R \cdot a = a = a \cdot 1_R$  pätee kaikilla  $a \in R$ .

Edelleen, jos

- (vii) jokaisella  $a \in R, a \neq 0$  on käänteisalkio kertolaskun suhteen, ts. kaikki joukon  $R$  nollasta eroavat alkiot ovat yksiköitä,  
 $R$  on *jakorengas* (*vino kunta*).

Jakorengas on

- (viii) kommutatiivinen, jos  $a \cdot b = b \cdot a$  kaikilla  $a, b \in R$ .

Kommutatiivinen jakorengas on *kunta*.

### 1.2. Trigonometrinen funktioiden laskusääntöjä

Kaikille reaalityyppisille  $x$  ja  $y$  pätevät seuraavat ehdot:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1.$$

### 1.3. Vektorilaskentaa

Euklidinen sisätulo on kuvaus  $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , joka määritellään asettamalla

$$(x|y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

kaikille  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ja  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Olkoot  $x, y \in \mathbb{R}^3$  ja olkoon  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ja  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . Olkoon lisäksi avaruuden  $\mathbb{R}^3$  luonnollinen kanta  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Tällöin vektoreiden  $x$  ja  $y$  välinen ristitulo on

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)e_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1)e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)e_3.$$

Olkoot  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ . Ristitulolle ja sisätulolle pätevät seuraavat laskusäännöt:

$$\begin{aligned} ((x \times y)|x) &= 0 = ((x \times y)|y), \\ x \times y &= -y \times x, \\ x \times (y + z) &= x \times y + x \times z, \\ (rx) \times y &= x \times (ry) = r(x \times y), \text{ kun } r \in \mathbb{R}, \\ (x|(y \times z)) &= (y|(z \times x)) = (z|(x \times y)) \text{ ja} \\ x \times (y \times x) &= y(x|x) - x(x|y). \end{aligned}$$

### 1.4. Metriikka

Lineaariavaruuden  $X$  funktio  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$  on *metriikka* eli *etäisyys*, jos

- (i)  $d(x, x) = 0$  kaikilla  $x \in X$ ,
- (ii)  $d(x, y) > 0$  kaikilla  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ ,
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$  kaikilla  $x, y \in X$ , ja
- (iv)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  kaikilla  $x, y, z \in X$ .

## LIITE B

### Merkintöjä

<i>Merkintä</i>	<i>Selitys</i>
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko: $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{H}$	Kvaternioiden joukko: $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
<i>Re A</i>	Kvaternion A reaaliosa: $Re A = a$ , kun $A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$
<i>Im A</i>	Kvaternion A imaginaariosa: $Im A = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ , kun $A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$
<i>Re</i> ( $\mathbb{H}$ )	Reaalisten kvaternioiden joukko: $Re (\mathbb{H}) = \{a = a\mathbf{I} : a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$
<i>Im</i> ( $\mathbb{H}$ )	Imaginaaristen kvaternioiden joukko: $Im (\mathbb{H}) = \{b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : b, c, d \in \mathbb{R}\}$
$  \alpha  $	Euklidinen normi: $  \alpha   = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$ , kun $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$
$ z $	Kompleksiluvun $z$ normi: $ z  = \sqrt{a^2 + b^2}$ , kun $z = (a, b) = a + ib \in \mathbb{C}$
$ A $	Kvaternion A normi: $ A  = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ , kun $A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$

## Lähdeluettelo

- [1] ALTMANN, SIMON L.: *Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal*, Mathematics magazine VOL. 62, NO. 5, December 1989.
- [2] BURN, R.P.: *Groups: A Path to Geometry*, Cambridge University Press, 1985, 178-183.
- [3] LAITINEN JUHA: *Kvaternio* -diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, teknisluonnontieteellinen osasto, 2005.
- [4] LEHRBÄCK, JUHA JA JOUNI PARKKONEN: *Lukualueet*. Verkkojulkaisu, Jyväskylän Yliopisto. Internet: <http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA120.pdf>, luettu 16.11.2012.
- [5] O'CONNOR, J.J. AND ROBERTSON E.F.: *Sir William Rowan Hamilton*. Verkkojulkaisu. Internet: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hamilton.html>, luettu 16.11.2012.
- [6] PARKKONEN JOUNI: *Algebra*. Verkkojulkaisu, Jyväskylän Yliopisto. Internet: <http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA220.pdf>, luettu 16.11.2012.
- [7] PURMONEN, VEIKKO T.: *Lineaarinen algebra ja geometria 1*. Luentomoniste 58, Jyväskylän yliopistopaino, 2007.
- [8] PURMONEN, VEIKKO T.: *Lineaarinen algebra ja geometria 2*. Luentomoniste 59, Jyväskylän yliopistopaino, 2008.
- [9] STILLWELL, JOHN: *Naive Lie Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.