

ϵ -harmoniset funktiot ja satunnaiskävely binääripuussa

HENRI LEINONEN

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

PRO GRADU -TUTKIELMA

HUHTIKUU 2012



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Sisältö

Johdanto	2
1 Määritelmiä	4
2 ϵ -harmonisten funktioiden reuna-arvot	5
3 Keskiarvoperiaate	12
4 ϵ -harmonisten funktioiden suppeneminen harmoniseen funktioon	15
5 Satunnaiskävely suunnatussa binääripuussa	20
6 ϵ -harmonisten funktioiden kuvaajia	29
Viitteet	36

Johdanto

Harmoniset funktiot ovat tärkeässä roolissa monilla eri matematiikan aloilla. Harmonisia funktioita on tutkittu erittäin paljon, mistä kertoo muun muassa se, että *MathSciNet* on listannut yli viisi tuhatta julkaisua vuoden 1940 jälkeen, joiden yhteydessä mainitaan sanat "*harmonic function*" [1]. Tämä tutkielma jakautuu kahteen osaan, joista ensimmäisessä keskitytään tarkastelemaan harmonisia ja ϵ -harmonisia funktioita. ϵ -harmoninen funktio määritellään siten, että se toteuttaa keskiarvoperiaatteen

$$u_\epsilon(x) = \int_{B(x,\epsilon)} u(y) dy$$

jollakin $\epsilon > 0$ joukossa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja reunaehdot joukossa Γ_ϵ , joka on saatu laajentamalla alkuperäisen joukon Ω reunaa vakion ϵ verran. Reunan laajennuksella varmistetaan, että keskiarvointegraali toimii myös reunan läheisyydessä. Harmoninen funktio taas on määritelty Laplace'n yhtälön avulla siten, että funktio u on harmoninen, jos

$$\Delta u = 0.$$

Harmoniset funktiot toteuttavat keskiarvoperiaatteen kaikilla $\epsilon > 0$ toisin kuin ϵ -harmoniset funktiot.

Tutkielmassa tarkastelun kohteena ovat ϵ -harmonisten funktioiden reuna-arvotekävät, joiden ratkaisujen olemassaoloa ja yksikäsitteisyyttä tutkitaan laajentaen tarkastelu aina diskreetistä yksiulotteisesta tapauksesta yleiseen tarkasteluun joukossa Ω . Relaksaatiomenetelmä (*Method of Relaxation*) osoittautuu erittäin käyttökelpoiseksi työkaluksi reuna-arvotekävien tarkastelussa. Työn lopussa sen avulla approksimoidaan ratkaisujen kuvaajia Matlab-ohjelmiston avulla.

Työn päätulos harmonisiin funktioihin liittyen osoittaa, että ϵ -harmonisen reuna-arvotekävän ratkaisu suppenee vastaavaan harmoniseen ratkaisuun, kun ϵ lähestyy nollaa. Todistus perustuu vertailuperiaatteeseen. Mikäli ϵ -harmonisille funktioille v ja w pätee $u(x) \leq w(x)$ kaikilla $x \in \Gamma_\epsilon$, niin keskiarvoperiaatteesta seuraa

$$u(x) \leq w(x) \text{ kaikilla } x \in \Omega.$$

Vertailuperiaatteen avulla löydetään ϵ -harmonisen funktion ylä- ja alapuolelta harmoniset funktiot, joiden pystytään osoittamaan suppenevan kohti harmonista ratkaisua, kun ϵ lähestyy nollaa. Tällöin niiden väliin jäävän ϵ -harmonisen funktion on myös lähestyttävä harmonista ratkaisua.

Työn toinen osio koostuu suunnatun binääripuun tarkastelusta. Binääripuuhun liitetään satunnaiskävelijä, joka kävelee puussa solmusta solmuun, lähestyen jotakin reunan pistettä. Reunalle on määritelty funktio, joka kertoo satunnaiskävelijän saaman palkkion kussakin reunan pisteessä. Satunnaiskävelyiden yhteys ϵ -harmonisiin funktioihin tulee esille keskiarvoperiaatteesta. Tarkastelemalla satunnaiskävelijän palkkion odotusarvoa suunnatussa binääripuussa huomataan, että tälle odotusarvolle pätee solmusta seuraavaan liikuttaessa vastaavanlainen keskiarvoperiaate kuin ϵ -harmonisilla funktioilla. Satunnaiskävelyjen odotusarvojen ja ϵ -harmonisten funktioiden reuna-arvot tehtävien tarkastelussa törmätäänkin moniin samankaltaisiin ominaisuuksiin.

Alunperin Kakutani [7] osoitti satunnaiskävelyn yhteyden harmonisiin funktioihin. Joseph Leo Doob käsittelee kirjassaan [4] klassista potentiaalteoriaa rinnakkain todennäköisyysteorian kanssa ja osoittaa, että niillä on monin paikoin selkeä yhteys. Tässä yhteydessä on syytä mainita, että Doob oli kehittämässä martingaalien teoriaa ja käsittelee teoksessaan ongelmia suurelta osin niiden avulla. Lisää martingaalien käytöstä satunnaiskävelyiden ja ϵ -harmonisten funktioiden yhteydessä voi lukea esimerkiksi tutkielmasta [8]. Relaksaatiomenetelmästä voitaneen mainita jo vuonna 1928 ilmestynyt teos [2], jossa Courant, Friedrichs ja Lewy käsittelevät osittaisdifferentiaaliyhtälöitä käyttäen relaksaatiomenetelmää approksimoidessaan jatkuvia Dirichlet'n ongelman ratkaisuja. Katso myös myöhemmin englanniksi ilmestynyt teos [3]. Satunnaiskävelyillä on myös käytännön sovellutuksia, joista yhtenä esimerkkinä voidaan mainita Doyle ja Snell [5], jotka käsittelevät satunnaiskävelyiden ja sähköverkkojen yhteyttä. Puhtaasti harmonisia funktioita kattavasti käsittelevä kirja on esimerkiksi vuonna 2000 ilmestynyt "*Harmonic Function Theory*" [1].

Tutkielma on järjestetty seuraavasti. Kappaleessa 2 käsitellään reuna-arvot tehtävien ratkaisujen olemassaoloa ja yksikäsitteisyyttä. Kappaleessa 3 osoitetaan harmonisten funktioiden toteuttavan keskiarvoperiaatteen. Kappaleessa 4 käsitellään vertailuperiaatetta ja osoitetaan tutkielman päätulos eli ϵ -harmonisten funktioiden suppeneminen harmoniseen funktioon. Kappale 5 koostuu satunnaiskävelyjen tarkastelusta suunnatussa binääripuussa, ja viimeinen kappale 6 käsittelee ϵ -harmonisten funktioiden kuvaajia Matlab-ohjelmiston avulla.

1 Määritelmiä

Määritelmä 1.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, rajoitettu ja sileä joukko. Olkoon $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että $u \in C^2(\Omega)$. Laplacen yhtälö on muotoa

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \Omega, \quad (1)$$

missä Δ on Laplacen operaattori. Laplacen operaattori määritellään

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}.$$

Huom. Läpi työn oletetaan, että joukko $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, rajoitettu ja sileä.

Määritelmä 1.2. Olkoon $u \in C^2(\Omega)$. Funktio u on *harmoninen funktio*, jos se toteuttaa Laplacen yhtälön (1).

Merkintä: Jatkossa käytetään merkintöjä

$$\int_{B(x,r)} u(y) dy = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy,$$

missä $\omega_n r^n$ on pallon $B(x, r)$ geometrinen mitta ja

$$\int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y),$$

missä $n\omega_n r^{n-1}$ on pallon kuoren $\partial B(x, r)$ geometrinen mitta.

Esimerkiksi kun $n = 2$, niin

$$\omega_n r^n = \pi r^2 = \text{”ympyrän pinta-ala”}$$

ja

$$n\omega_n r^{n-1} = 2\pi r = \text{”ympyrän kaaren pituus.”}$$

Määritelmä 1.3. Joukon Ω avulla määritellään joukko Γ_ϵ seuraavasti.

$$\Gamma_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\}.$$

Joukkoa Γ_ϵ tarvitaan ϵ -harmonisten funktioiden määrittelyssä.

Määritelmä 1.4. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen funktio, että $u \in C^2(\Omega)$. Olkoon $\epsilon > 0$. Funktion u sanotaan olevan ϵ -harmoninen funktio, jos

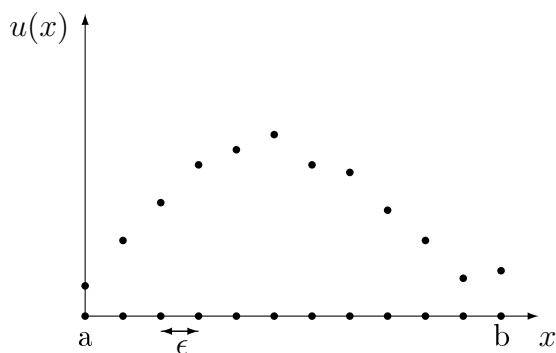
$$\begin{cases} u(x) = \int_{B(x,\epsilon)} u(y) dy, & \text{kun } x \in \Omega \\ u(x) = F(x), & \text{kun } x \in \Gamma_\epsilon. \end{cases}$$

Huom. Läpi työn oletetaan, että reunalla funktiot F ovat sileitä C^∞ -funktioita.

2 ϵ -harmonisten funktioiden reuna-arvot

Tässä kappaleessa tutkitaan ensin diskreettien yksiulotteisten ϵ -harmonisten funktioiden reuna-arvot. Tarkoituksena on tämän jälkeen laajentaa tuloksia jatkuviin yksiulotteisiin tapauksiin. Jatkuvista tapauksista päästään luontevasti siirtymään yleisiin avaruuden \mathbb{R}^n tapauksiin. Yksiulotteiset tapaukset helpottavat hahmottamista ja todistuksissa käytetyt periaatteet ovat monin paikoin samoja sekä yksiulotteisissa että yleisissä tapauksissa.

Diskreetissä yksiulotteisessa tapauksessa tutkitaan funktiota, jonka määrittelyjoukko on diskreetti. Intuitiivisesti tämä tarkoittaa sitä, että reaaliakselin päällä on ϵ -hila. Funktio u on tässä tapauksessa määritelty vain näissä diskreeteissä, toisistaan etäisyyden ϵ päässä olevissa pisteissä.



Kuva 1: Diskreetti funktio

Määritelmä 2.1. Olkoot

$$\Omega_D = \{a, a + \epsilon, a + 2\epsilon, \dots, b - 2\epsilon, b - \epsilon, b\}$$

ja

$$\partial\Omega_D = \{a, b\},$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $b > a$. Diskreetti ϵ -harmoninen funktio joukossa Ω_D toteuttaa ehdon

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}u(x - \epsilon) + \frac{1}{2}u(x + \epsilon), & \text{kun } x \in \Omega_D \setminus \partial\Omega_D \\ u(x) = F(x), & \text{kun } x \in \partial\Omega_D. \end{cases}$$

Seuraava esimerkki havainnollistaa relaksaatiomenetelmää, jota käytetään esimerkiksi lauseessa 2.1 todistettaessa ϵ -harmonisen ratkaisun olemassaolo reuna-arvotetävässä.

Esimerkki 2.1. (Relaksaatiomenetelmä)

Relaksaatiomenetelmällä etsitään funktiota, joka toteuttaa keskiarvoperiaatteen tietyillä reunaehdoilla. Tässä esimerkissä on kyseessä kaksiulotteinen diskreetti tapaus. Tällaisessa tapauksessa funktio f toteuttaa keskiarvoperiaatteen, jos

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(f(x - \epsilon, y) + f(x + \epsilon, y) + f(x, y - \epsilon) + f(x, y + \epsilon))$$

Oletetaan esimerkissä, että reuna-arvot ovat 1 ja 0. Tilanne voi näyttää esimerkiksi kuvan 2 kaltaiselta.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & * & * & * & 1 \\ 1 & * & 0 & * & 1 \\ 1 & * & * & * & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Kuva 2: Kaksiulotteinen alue reuna-arvoilla 0 ja 1

Ensimmäisessä vaiheessa oletetaan, että etsitty funktio saa kaikissa pisteissä arvon 0. Tämän jälkeen lasketaan vuorotellen jokaiselle pisteelle keskiarvoperiaatteen avulla uusi arvo. Ensimmäisen kierroksen laskujen jälkeen tilanne näyttää kuvan 3 mukaiselta.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,500 & 0,375 & 0,59375 & 1 \\ 1 & 0,375 & 0 & 0,3984375 & 1 \\ 1 & 0,59375 & 0,398375 & 0,69921875 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Kuva 3: Relaksaatiomenetelmällä saadut arvot yhden iteraation jälkeen

Arvot on saatu laskemalla:

$$\begin{aligned}
0,500 &= \frac{1}{4}(1 + 1 + 0 + 0), \\
0,375 &= \frac{1}{4}(1 + .500 + 0 + 0), \\
0,59375 &= \frac{1}{4}(1 + .375 + 1 + 0), \\
0,375 &= \frac{1}{4}(1 + .500 + 0 + 0), \\
0,3984375 &= \frac{1}{4}(.59375 + 1 + 0 + 0), \\
0,59375 &= \frac{1}{4}(.375 + 1 + 1 + 0), \\
0,3984375 &= \frac{1}{4}(.593751 + 1 + 0 + 0), \\
0,69921875 &= \frac{1}{4}(.3984375 + .3984375 + 1 + 1).
\end{aligned}$$

Näille uusille arvoille voidaan toistaa samanlainen lasku, jolloin saadaan arvot, jotka ovat lähempänä oikeaa ratkaisua. Relaksaatiomenetelmästä on syytä huomata, että oikeaa ratkaisua ei saada tarkasti laskettua. Numeerisesti kuitenkin päästään niin lähelle oikeaa ratkaisua kuin halutaan. Ratkaisun olemassaolon todistamiseksi riittää osoittaa, että relaksaatiomenetelmällä löydetyt funktiot suppenevat kohti jotain funktiota. Jos näin on, täytyy ratkaisun olla olemassa.

Seuraavaksi osoitetaan relaksaatiomenetelmää apuna käyttäen, että diskreetillä yksiulotteisella reuna-arvotetävällä on ratkaisu. Kaikissa reuna-arvotetävissä oletettiin, että reunalla funktio F on sileä C^∞ -funktio.

Lause 2.1. (*Ratkaisun olemassaolo*)

Olkoon $u : \Omega_D \rightarrow \mathbb{R}$. Reuna-arvotetävällä

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}u(x - \epsilon) + \frac{1}{2}u(x + \epsilon), & \text{kun } x \in \Omega_D \setminus \partial\Omega_D \\ u(x) = F(x), & \text{kun } x \in \partial\Omega_D \end{cases}$$

on ratkaisu.

Todistus. Olkoon reunalla $u(a) = A$ ja $u(b) = B$, missä $A, B \in \mathbb{R}$. Tehdään oletus, että $A \leq B$. Todistus menee vastaavalla tavalla, jos $A > B$.

Etsitään ratkaisua relaksaatiomenetelmän avulla:

tehdään alkuarvaus

$$u_\epsilon^1(x) = A \text{ kaikilla } x \in]a, b[.$$

Määritellään

$$u_\epsilon^2(x) = \frac{1}{2}(u_\epsilon^1(x - \epsilon) + u_\epsilon^1(x + \epsilon)).$$

Samalla tavoin

$$u_\epsilon^s(x) = \frac{1}{2}(u_\epsilon^{s-1}(x - \epsilon) + u_\epsilon^{s-1}(x + \epsilon)).$$

Huom. Kaikki funktiot u_ϵ^s toteuttavat lisäksi reunaehdot reunapisteissä a ja b .

Osoitetaan, että u_ϵ^s suppenee, kun $s \rightarrow \infty$. Tehdään tämä osoittamalla induktiivisesti, että $u_\epsilon^{s+1} \geq u_\epsilon^s$.

Kun $s = 1$, niin

$$u_\epsilon^1(x) = A \text{ kaikilla } x \in]a, b[.$$

Kun $s = 2$, niin

$$u_\epsilon^2(x) = \begin{cases} A, & \text{kun } x \in]a, b - \epsilon[\\ \frac{1}{2}(A + B), & \text{kun } x = b - \epsilon. \end{cases}$$

Tällöin selvästi $u_\epsilon^2 \geq u_\epsilon^1$.

Oletetaan, että on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että $u_\epsilon^{k+1}(x) \geq u_\epsilon^k(x)$ kaikilla $x \in]a, b[$. Tällöin

$$\begin{aligned} u_\epsilon^{k+2}(x) &= \frac{1}{2}(u_\epsilon^{k+1}(x - \epsilon) + u_\epsilon^{k+1}(x + \epsilon)) \\ &\geq \frac{1}{2}(u_\epsilon^k(x - \epsilon) + u_\epsilon^k(x + \epsilon)) = u_\epsilon^{k+1}(x). \end{aligned}$$

Nyt koska funktiojono u_ϵ^s on kasvava ja lisäksi rajoitettu ylhäältä, on sen lähestyttävä jotakin rajafunktiota u_ϵ . On siis löydetty funktio, joka toteuttaa reuna-arvot. Lisäksi funktiojonon määritelmästä nähdään suoraan, että löydetty funktio on ϵ -harmoninen. \square

Olemissaolon lisäksi halutaan tietää, onko ratkaisu yksikäsitteinen. Yksikäsitteisyyden todistamiseen tarvitaan avuksi maksimiperiaattia. Maksimiperiaattia käyttämällä voidaan osoittaa ratkaisun yksikäsitteisyys.

Lause 2.2. (ϵ -harmonisen funktion maksimiperiaate diskreetissä tapauksessa) Olkoon u_ϵ ϵ -harmoninen joukossa Ω_D . Tällöin u_ϵ saavuttaa maksimiarvonsa M ja minimiarvonsa m reunalla $\partial\Omega_D$.

Todistus. Olkoon $M \in \mathbb{R}$ sellainen vakio, että $u_\epsilon(x) \leq M$ kaikilla $x \in \Omega_D$. Nyt jos $u_\epsilon(x) = M$ jossakin sisäpisteessä x , niin keskiarvoperiaatteesta seuraa

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{2}(u_\epsilon(x - \epsilon) + u_\epsilon(x + \epsilon)) = M.$$

Koska M on maksimiarvo, niin $u_\epsilon(x - \epsilon) = u_\epsilon(x + \epsilon) = M$. Samalla periaatteella jatkamalla nähdään myös, että

$$u_\epsilon(x - 2\epsilon) = u_\epsilon(x + 2\epsilon) = M.$$

Tätä voidaan jatkaa kunnes saavutetaan reunapiste a tai b . Jos reunapiste a saavutetaan ensin, niin huomataan, että $f(a) = M$. Jos taas ensin saavutetaan reunapiste b , niin huomataan, että $f(b) = M$. Vastaavalla päättelyllä myös minimiarvo m saavutetaan reunalla $\partial\Omega_D$. \square

Lause 2.3. Olkoot f ja g sellaisia ϵ -harmonisia funktioita alueessa Ω_D , että ne täyttävät samat reunaehdot $f(a) = g(a) = A$ ja $f(b) = g(b) = B$. Tällöin $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in \Omega_D$.

Todistus. Olkoon $h(x) = f(x) - g(x)$. Jos $x \in \Omega_D \setminus \partial\Omega_D$, niin

$$\frac{h(x - \epsilon) + h(x + \epsilon)}{2} = \frac{f(x - \epsilon) + f(x + \epsilon)}{2} - \frac{g(x - \epsilon) + g(x + \epsilon)}{2}.$$

Lisäksi tiedetään, että h on ϵ -harmoninen. Nyt $h(x) = 0$, kun $x \in \partial\Omega_D$, koska $f(a) = g(a) = A$ ja $f(b) = g(b) = B$. Maksimiperiaatteesta seuraa, että funktion h maksimiarvo sekä minimiarvo ovat 0. Tämä pätee vain, kun $h(x) = 0$ kaikilla $x \in \Omega_D$. Koska $h(x) = 0$, niin $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in \Omega_D$. \square

Diskreeteistä tapauksista päästään luontevasti siirtymään jatkuviin yksiuolotteisiin tapauksiin. Jatkuvissa tapauksissa oletetaan, että funktiot ovat määritelty jollain välillä $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Samoin kuin diskreetissä tapauksessa, ensin osoitetaan reuna-arvotettävän ratkaisun olemassaolo ja tämän jälkeen ratkaisun yksikäsitteisyys. Jatkuvissa tapauksissa määritellään välille $[a, b]$ reuna Γ_ϵ siten, että

$$\Gamma_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} \setminus]a, b[\mid \text{dist}(x, \{a, b\}) \leq \epsilon\}.$$

Vertaa määritelmään 1.3.

Lause 2.4. Olkoon $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Reuna-arvotekävällä

$$\begin{cases} u(x) = \int_{B(x,\epsilon)} u(y) dy, & \text{kun } x \in]a, b[\\ u(x) = F(x), & \text{kun } x \in \Gamma_\epsilon \end{cases}$$

on ratkaisu.

Todistus. Olkoot reunalla $u(a) = A$ ja $u(b) = B$ joillakin $A, B \in \mathbb{R}$. Tehdään oletus, että $A \leq B$. Todistus menee vastaavalla tavalla, jos $A > B$.

Etsitään ratkaisua: tehdään alkuarvaus $u_\epsilon^1(x) = A$ kaikilla $x \in]a, b[$. Määritellään kaikissa pisteissä $x \in]a, b[$

$$u_\epsilon^2(x) = \int_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon^1(y) dy.$$

Samalla tavoin

$$u_\epsilon^s(x) = \int_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon^{s-1}(y) dy.$$

Huom. Kaikki funktiot u_ϵ^s toteuttavat lisäksi reunaehdot vyöhykkeessä Γ_ϵ .

Osoitetaan, että u_ϵ^s suppenee, kun $s \rightarrow \infty$. Tehdään tämä osoittamalla induktiivisesti, että $u_\epsilon^{s+1} \geq u_\epsilon^s$.

Kun $s = 1$, niin

$$u_\epsilon^1(x) = A \text{ kaikilla } x \in]a, b[.$$

Kun ollaan välillä $]b - \epsilon, b[$, niin funktion u_ϵ^2 määrittelystä seuraa, että

$$u_\epsilon^2 \geq u_\epsilon^1.$$

Oletetaan, että on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että $u_\epsilon^{k+1}(x) \geq u_\epsilon^k(x)$ kaikilla $x \in]a, b[$. Tällöin

$$u_\epsilon^{k+2}(x) = \int_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon^{k+1}(y) dy \geq \int_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon^k(y) dy = u_\epsilon^{k+1}(x).$$

Nyt koska funktiojono u_ϵ^s on kasvava ja rajoitettu ylhäältä, on sen lähestyttävä jotakin rajafunktiota u_ϵ . Ollaan siis löydetty ϵ -harmoninen funktio, joka toteuttaa reunaehdot. \square

Yksikäsitteisyyteen tarvitaan jatkuvassa tapauksessa myös maksimiperiaattia.

Lause 2.5. (ϵ -harmonisten funktioiden maksimiperiaate jatkuvassa tapauksessa) Olkoon u_ϵ ϵ -harmoninen joukossa $[a, b]$. Tällöin u_ϵ saavuttaa maksimiarvonsa $M \in \mathbb{R}$ reunalla Γ_ϵ .

Todistus. Olkoon M sellainen vakio, että $u_\epsilon(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$. Jos $u_\epsilon(x) = M$ jossakin sisäpisteessä $x \in]a, b[$, niin keskiarvoperiaatteesta seuraa, että

$$u_\epsilon(x) = \int_{B(x, \epsilon)} u_\epsilon(y) dy = M.$$

Koska M on maksimi, niin $u_\epsilon(x) = M$ melkein kaikilla $x \in B(x, \epsilon)$. Erityisesti

$$u_\epsilon(x - \epsilon) = u_\epsilon(x + \epsilon) = M.$$

Toistamalla samanlainen tarkastelu näille pisteille nähdään, että myös

$$u_\epsilon(x - 2\epsilon) = u_\epsilon(x + 2\epsilon) = M.$$

Näin jatkamalla saavutetaan jossakin vaiheessa reuna Γ_ϵ , jolloin nähdään, että $u_\epsilon(x) = M$ jollakin $x \in \Gamma_\epsilon$. Samanlainen tarkastelu pätee myös minimille m . \square

Lause 2.6. Olkoot f ja g ϵ -harmonisia alueessa $[a, b]$. Jos $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in \Gamma_\epsilon$, niin tällöin $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Todistus. Olkoon $h(x) = f(x) - g(x)$. Tällöin $h(x) = 0$, kun $x \in \Gamma_\epsilon$. Maksimiperiaatteesta seuraa, että $h(x) = 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tällöin $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$. \square

Yksiulotteisten tapauksen jälkeen todistetaan yleisen tapauksen olemassaolo. Yleisessä tapauksessa joukolle Γ_ϵ asetettiin määritelmässä 1.3

$$\Gamma_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\}.$$

Lause 2.7. (Yleisen tapauksen olemassaolo) Reuna-arvotekävällä

$$\begin{cases} u(x) = \int_{B(x, \epsilon)} u(y) dy, & \text{kun } x \in \Omega \\ u(x) = F(x), & \text{kun } x \in \Gamma_\epsilon \end{cases}$$

on ratkaisu.

Todistus. Maksimiperiaatteen nojalla tiedetään, että u saavuttaa maksiminsa ja miniminsä reunalla Γ_ϵ . Olkoot $\max u = M$ ja $\min u = m$. Etsitään

ratkaisua: tehdään alkuarvaus $u_\epsilon^1(x) = m$ kaikilla $x \in \Omega \setminus \partial\Omega$. Määritellään kaikissa pisteissä $x \in \Omega \setminus \partial\Omega$

$$u_\epsilon^2(x) = \int_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon^1(y) dy$$

ja samalla tavoin

$$u_\epsilon^s(x) = \int_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon^{s-1}(y) dy.$$

Huom. Kaikki funktiot u_ϵ^s toteuttavat lisäksi reunaehdot vyöhykkeessä Γ_ϵ .

Osoitetaan, että u_ϵ^s suppenee, kun $s \rightarrow \infty$. Tehdään tämä osoittamalla induktiivisesti, että $u_\epsilon^{s+1} \geq u_\epsilon^s$. Kun $s = 1$, niin

$$u_\epsilon^1(x) = m \text{ kaikilla } x \in \Omega \setminus \partial\Omega.$$

Kun $x \in \Omega$ siten, että $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \epsilon$, niin funktion u_ϵ^2 määrittelystä seuraa, että

$$u_\epsilon^2(x) \geq u_\epsilon^1(x).$$

Oletetaan, että on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että $u_\epsilon^{k+1}(x) \geq u_\epsilon^k(x)$ kaikilla $x \in \Omega$. Tällöin

$$u_\epsilon^{k+2}(x) = \int_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon^{k+1}(y) dy \geq \int_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon^k(y) dy = u_\epsilon^{k+1}(x).$$

Nyt koska funktiojono u_ϵ^s on kasvava ja rajoitettu ylhäältä, on sen lähestyttävä jotakin rajafunktiota u_ϵ . On siis olemassa ϵ -harmoninen funktio, joka toteuttaa reunaehdot. \square

Yksikäsitteisyys saadaan yleisessä tapauksessa täsmälleen samalla tavalla kuin jatkuvassa yksiulotteisessa tapauksessa.

3 Keskiarvoperiaate

Keskiarvoperiaate on erittäin keskeinen tulos harmonisia funktioita tutkittaessa. Funktio joka toteuttaa keskiarvoperiaatteen on aina harmoninen ja harmoninen funktio toteuttaa aina keskiarvoperiaatteen. Tässä osiossa todistetaan keskiarvoperiaate yleisemmässä tapauksessa $\Delta u = C$. Keskiarvoperiaatteen todistuksessa tarvitaan apuna pallokoordinaatteja, joita koskeva lause on muotoiltu seuraavaksi.

Lause 3.1. *Olkoon $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin*

$$\int_{B(x,r)} u(y)dy = \int_0^R \left(\int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) \right) dr.$$

Todistus. Katso [6, s.628]. □

Lause 3.2. *(keskiarvoperiaate tapauksessa $\Delta u = C$)*

Olkoon u sileä ja $\Delta u = C$, missä $C \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) + Cr^2 = \int_{B(x,r)} u(y)dy + Cr^2.$$

Todistus. Asetetaan

$$\phi(r) := \int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) = \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz)dS(z).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(r+h) - \phi(r)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\partial B(0,1)} u(x + (r+h)z)dS(z) - \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz)dS(z) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial B(0,1)} \frac{u(x + (r+h)z) - u(x + rz)}{h} dS(z). \end{aligned}$$

Koska u on sileä, niin raja-arvon ja integraalin paikkaa voidaan vaihtaa.

$$\phi'(r) = \int_{\partial B(0,1)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + (r+h)z) - u(x + rz)}{h} dS(z).$$

Tästä saadaan Greenin kaavan avulla [6, s.26]. Katso myös [6, s.628].

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B(0,1)} D_z u(x + rz)dS(z) \\ &= \int_{\partial B(0,1)} Du(x + rz)z dS(z) \\ &= \int_{\partial B(x,r)} Du(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\ &= \int_{\partial B(x,r)} Du(y) \cdot \nu dS(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y) \\
&= \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy \\
&= \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} C dy \\
&= r \frac{C}{n},
\end{aligned}$$

missä ν on ulkonormaali. Eli

$$\int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \phi(r) = \frac{Cr^2}{2n} + d = \frac{Cr^2}{n} + d.$$

Nyt koska u on jatkuva, niin

$$\int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \rightarrow u(x), \text{ kun } r \rightarrow 0.$$

Lisäksi

$$\frac{Cr^2}{n} + d \rightarrow d, \text{ kun } r \rightarrow 0.$$

Eli $u(x) = d$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \phi(r) = \frac{Cr^2}{2n} + d = \frac{Cr^2}{n} + u(x),$$

josta nähdään suoraan, että

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) + \frac{Cr^2}{n}.$$

Osoitetaan vielä, että

$$u(x) = \int_{B(x,r)} u(y) dS(y) + \frac{Cr^2}{n}.$$

Lauseen 3.1 avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} u(y) dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u(y) dS(y) \right) ds \\
&= \left(u(x) - \frac{Cr^2}{n} \right) \int_0^r ds = \omega_n r^n \left(u(x) - \frac{Cr^2}{n} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

Lause 3.3. (*Harmonisten funktioiden keskiarvoperiaate*) Olkoon u sileä ja $\Delta u = 0$. Tällöin

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \int_{B(x,r)} u(y) dy.$$

Todistus. Valitaan lauseessa 3.2 $C = 0$. Tällöin nähdään suoraan, että

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \int_{B(x,r)} u(y) dy. \quad \square$$

Erona ϵ -harmonisiin funktioihin harmoninen funktio toteuttaa keskiarvoperiaatteen kaikilla $r > 0$, joilla $B(x, r) \subset \Omega$.

4 ϵ -harmonisten funktioiden suppeneminen harmoniseen funktioon

Kappaleessa 2 osoitettiin, että reuna-arvotekävällä on aina yksikäsitteinen ratkaisu. Tässä kappaleessa tavoitteena on osoittaa, että määritelmän 1.4 ϵ -harmoninen funktio u_ϵ lähestyy samat reunaehdot toteuttavaa harmonista funktiota, kun ϵ lähestyy nollaa. Ensimmäiseksi todistetaan ϵ -harmonisten funktioiden vertailuperiaate. Todistuksessa käytetään tietoa, että ϵ -harmoniset funktiot u ja v ovat jatkuvia joukossa Ω .

Lause 4.1. (*Vertailuperiaate*) Olkoot u ja v sellaisia ϵ -harmonisia funktioita, että $u(x) \leq v(x)$, kun $x \in \Gamma_\epsilon$. Tällöin $u(x) \leq v(x)$ kaikilla $x \in \Omega$.

Todistus. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että on olemassa sellainen $x_0 \in \Omega$, että $u(x_0) > v(x_0)$. Olkoot

$$M = \sup_{\Omega} (u - v) > 0.$$

ja

$$A = \{x \in \Omega : u(x) - v(x) = M\} \neq \emptyset.$$

Olkoon $x_0 \in A$. Vakion M määritelmästä saadaan

$$u(x_0) - v(x_0) \geq u(x) - v(x) \text{ kaikilla } x \in B(x_0, \epsilon).$$

Jos olisi

$$u(x_0) - v(x_0) > u(x) - v(x)$$

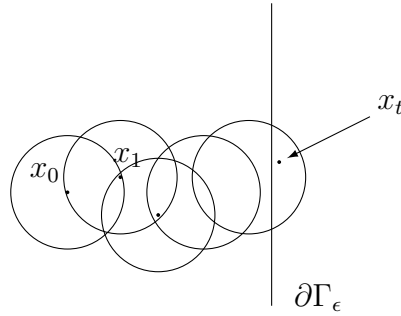
positiivimittaisessa joukossa, joka kuuluu palloon $B(x_0, \epsilon)$, niin olisi myös

$$v(x) - v(x_0) > u(x) - u(x_0)$$

palloon $B(x_0, \epsilon)$ kuuluvassa positiivimittaisessa joukossa. Tällöin

$$\begin{aligned} 0 = v(x_0) - v(x_0) &= \int_{B(x_0, \epsilon)} v(y) dy - v(x_0) = \int_{B(x_0, \epsilon)} v(y) - v(x_0) dy \\ &> \int_{B(x_0, \epsilon)} u(y) - u(x_0) dy = u(x_0) - u(x_0) = 0, \end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Tästä seuraa, että $u(x_0) - v(x_0) = u(x) - v(x)$ melkein kaikilla $x \in B(x_0, \epsilon)$. Tällöin melkein kaikki pallon $B(x_0, \epsilon)$ pisteet kuuluvat joukkoon A . Tällaisista pisteistä voidaan esimerkiksi valita aina sellainen piste x_1 , joka on etäisyyden $\frac{\epsilon}{2}$ lähempänä reunaa kuin piste x_0 . Tälle pisteelle x_1 voidaan toteuttaa samanlainen tarkastelu kuin pisteelle x_0 , jonka seurauksena huomataan, että myös melkein kaikki pallon $B(x_1, \epsilon)$ pisteet kuuluvat joukkoon A . Näin jatkamalla voidaan aina valita piste x_t siten, että se on etäisyyden $\frac{\epsilon}{2}$ lähempänä reunaa kuin piste x_{t-1} . Koska alue on rajoitettu, niin löydetään reunalta Γ_ϵ piste x_t , joka kuuluu joukkoon A . Tämä on ristiriita, sillä kaikilla $x \in \Gamma_\epsilon$ pätee $u(x) \leq v(x)$. Kuva 4 havainnollistaa pisteen x_t löytämistä. \square



Kuva 4: Pisteen x_t löytäminen

Lause 4.2. (Vahva vertailuperiaate ϵ -harmonisille funktioille) Olkoot u_ϵ ja v_ϵ sellaisia ϵ -harmonisia funktioita, joille kaikilla $x \in \Gamma_\epsilon$ pätee $u_\epsilon(x) \leq v_\epsilon(x)$. Jos on olemassa sellainen piste $x_0 \in \Omega$, että $u_\epsilon(x_0) = v_\epsilon(x_0)$, niin $u_\epsilon(x) = v_\epsilon(x)$ kaikilla $x \in \Omega$ ja lisäksi $u_\epsilon(y) = v_\epsilon(y)$ kaikilla $y \in \Gamma_\epsilon$.

Todistus. Koska u_ϵ ja v_ϵ ovat ϵ -harmonisia, toteuttavat ne yhtälöt

$$u_\epsilon(x_0) = \int_{B(x_0, \epsilon)} u_\epsilon(y) dy, \quad (2)$$

$$v_\epsilon(x_0) = \int_{B(x_0, \epsilon)} v_\epsilon(y) dy, \quad (3)$$

kun $x_0 \in \Omega$. Vähennetään yhtälö (2) yhtälöstä (3). Tällöin jos $u_\epsilon(x_0) = v_\epsilon(x_0)$, niin

$$\int_{B(x_0, \epsilon)} (v_\epsilon(y) - u_\epsilon(y)) dy = 0. \quad (4)$$

Koska $u_\epsilon(x) \leq v_\epsilon(x)$ kaikilla $x \in \Gamma_\epsilon$, niin lauseesta 4.1 seuraa, että $u_\epsilon \leq v_\epsilon$ joukossa Ω . Erityisesti pallossa $B(x_0, \epsilon)$ pätee siis $v_\epsilon - u_\epsilon \geq 0$, joten yhtälöstä (4) seuraa, että $u_\epsilon = v_\epsilon$ melkein kaikkialla pallossa $B(x_0, \epsilon)$.

Kuten vertailuperiaatteen todistuksessa, voidaan tarkastelu toistaa valitsemalla pallostä $B(x_0, \epsilon)$ pisteen x_1 , joka on lähempänä reunaa kuin x_0 . Samankaltaisella tarkastelulla nähdään, että melkein kaikilla $x \in \Gamma_\epsilon$ pätee $u_\epsilon(x) = v_\epsilon(x)$. Koska reuna-arvot ovat jatkuvia, niin täytyy olla $u_\epsilon(x) = v_\epsilon(x)$ kaikilla $x \in \Gamma_\epsilon$. Tästä seuraa välittömästi myös se, että $u_\epsilon = v_\epsilon$ kaikkialla joukossa Ω . \square

Seuraavaksi tavoitteena on osoittaa vertailuperiaatetta hyväksikäyttämällä ϵ -harmonisen reuna-arvotekävän ratkaisun suppeneminen vastaavaan harmoniseen ratkaisuun. Todistus on jaettu selkeyden vuoksi kolmeen osaan, jotka ovat lauseet 4.3, 4.4 ja 4.5.

Määritelmä 4.1. Olkoon Ω avoin, rajoitettu ja sileä joukko. Tällöin joukko Ω_ϵ on

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, \Omega) \leq \epsilon\}.$$

Joukko Ω_ϵ saadaan siis, kun laajennetaan joukkoa Ω joka suuntaan ϵ verran.

Huom. Seuraavassa lauseessa oletetaan lisäksi, että Ω_ϵ on sellainen joukko, että harmonisten funktioiden säännöllisyystulokset pätevät reunalle asti. Erityisesti on syytä huomata, että joukko $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_\epsilon$ ei saa olla liian pieni. Varoittavana esimerkkinä voidaan ajatella tilannetta, jossa laajennuksen jälkeen saatu joukko ei olisikaan enää sileä. Näin voi tapahtua esimerkiksi tilanteessa, jossa laajennetun joukon keskelle jää yksittäinen piste, joka ei kuulu joukkoon. Jatkossa siis oletetaan, että laajennuksen jälkeen saadut joukot Ω_ϵ ovat sileitä.

Lause 4.3. Olkoon $F : \Gamma_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ sileä C^∞ -funktio. Olkoot Ω ja Ω_ϵ kuten määritelmässä 4.1. Kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että ratkaistaessa reuna-arvotehtävä

$$\begin{cases} \Delta v_\epsilon(x) = 0, & \text{kun } x \in \Omega_\epsilon \\ v_\epsilon(x) = F(x) + \delta, & \text{kun } x \in \partial\Omega_\epsilon, \end{cases}$$

ratkaisulle pätee

$$v_\epsilon(x) \geq F(x), \text{ kaikilla } x \in \partial\Omega.$$

Todistus. v_ϵ on harmonisena funktiona sileä [6, s.28, s.326], jolloin se on myös Hölder-jatkuva. Eli

$$|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)| \leq L|x - y|^a,$$

joillakin $L, a > 0$. Erityisesti kun $x_0 \in \partial\Omega_\epsilon$ ja $y_0 \in \partial\Omega$, niin

$$|v_\epsilon(x_0) - v_\epsilon(y_0)| \leq L\epsilon^a.$$

Funktion v_ϵ määrittelystä reunalla $\partial\Omega_\epsilon$ seuraa, että

$$|F(x_0) + \delta - v_\epsilon(y_0)| \leq L\epsilon^a,$$

$$F(x_0) + \delta - v_\epsilon(y_0) \leq L\epsilon^a.$$

Tällöin saadaan arvio

$$v_\epsilon(y_0) \geq F(x_0) + \delta - L\epsilon^a.$$

Lisäksi F on Lipschitz-jatkuva sileänä, jolloin

$$|F(x_0) - F(y_0)| \leq L\epsilon,$$

$$|F(y_0) - F(x_0)| \leq L\epsilon,$$

$$F(y_0) - F(x_0) \leq L\epsilon,$$

$$F(x_0) \geq F(y_0) - L\epsilon.$$

Tällöin saadaan

$$v_\epsilon(y_0) \geq F(x_0) + \delta - L\epsilon^a \geq F(y_0) - L\epsilon - L\epsilon^a + \delta.$$

Tästä nähdään, että

$$v_\epsilon(y_0) \geq F(y_0), \text{ kun } \delta > L\epsilon^a + L\epsilon.$$

Vakio δ voidaan siis aina valita siten, että ratkaisu joukossa Ω_ϵ on funktion F yläpuolella alkuperäisen joukon Ω reunalla. Lisäksi huomataan, että δ riippuu laajennuksen ϵ suuruudesta. Pienemmälle ϵ riittää siis pienempi δ .

Samanlaisella tarkastelulla nähdään myös, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen δ , että ratkaistaessa reuna-arvotettava

$$\begin{cases} \Delta w_\epsilon(x) = 0, & \text{kun } x \in \Omega_\epsilon \\ w_\epsilon(x) = F(x) - \delta, & \text{kun } x \in \partial\Omega_\epsilon, \end{cases}$$

ratkaisulle pätee $w_\epsilon(x) \leq F(x)$ kaikilla $x \in \partial\Omega$. \square

Nyt siis tiedetään, että $v_\epsilon \geq u_\epsilon \geq w_\epsilon$ reunalla $\partial\Omega$. Koska v_ϵ ja w_ϵ ovat harmonisina funktioina myös ϵ -harmonisia, antaa ϵ -harmonisten funktioiden vertailuperiaate suoraan, että

$$v_\epsilon(x) \geq u_\epsilon(x) \geq w_\epsilon(x), \text{ kun } x \in \Omega.$$

Jos saadaan osoitettua, että funktiot v_ϵ ja w_ϵ lähestyvät harmonista funktiota alkuperäisessä joukossa, kun $\epsilon \rightarrow 0$, niin myös funktion u_ϵ on lähestyttävä tätä samaa funktiota. Tämä tehdään seuraavaksi.

Lause 4.4. *Olkoon h reuna-arvotettävän*

$$\begin{cases} \Delta h(x) = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ h(x) = F(x), & \text{kun } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ratkaisu alueessa Ω . Tällöin $v_\epsilon \rightarrow h$, kun $\epsilon, \delta \rightarrow 0$, missä $\delta > L\epsilon^a + L\epsilon$.

Todistus. Funktio v_ϵ on reunalla $\partial\Omega$ korkeintaan vakion δ päässä ratkaisun h arvosta. Valitaan vakio η lauseen 4.3 perusteella siten, että $\eta > \delta > L\epsilon^2 + L\epsilon$. Olkoon \bar{h} reuna-arvotettävän

$$\begin{cases} \Delta \bar{h}(x) = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ \bar{h}(x) = F(x) + \eta, & \text{kun } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ratkaisu. Harmonisten funktioiden vertailuperiaatteen [6] nojalla $v_\epsilon \leq \bar{h}$ kaikilla joukossa Ω . Tällöin siis $h \leq v_\epsilon \leq \bar{h}$. Lisäksi koska $\eta > L\epsilon^2 + L\epsilon$, niin voidaan valita vakio η siten, että

$$\eta \rightarrow 0, \text{ kun } \epsilon \rightarrow 0.$$

Koska $\bar{h} = h + \eta$, niin ratkaisu $\bar{h} \rightarrow h$, kun $\epsilon \rightarrow 0$. Tällöin myös $v_\epsilon \rightarrow h$, kun $\epsilon \rightarrow 0$. Samanlainen tarkastelu voidaan tehdä funktiolle w_ϵ jolloin nähdään, että $w_\epsilon \rightarrow h$, kun $\epsilon \rightarrow 0$. \square

Lause 4.5. Olkoon u_ϵ reuna-arvotehtävän

$$\begin{cases} u_\epsilon(x) = \int_{B(x,\epsilon)} u(y)dy, & \text{kun } x \in \Omega \\ u(x) = F(x), & \text{kun } x \in \Gamma_\epsilon \end{cases}$$

ratkaisu ja olkoon h reuna-arvotehtävän

$$\begin{cases} \Delta h(x) = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ h(x) = F(x), & \text{kun } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ratkaisu. Tällöin $u_\epsilon \rightarrow h$, kun $\epsilon \rightarrow 0$.

Todistus. Lauseen 4.4 ja vertailuperiaatteen nojalla tiedetään, että

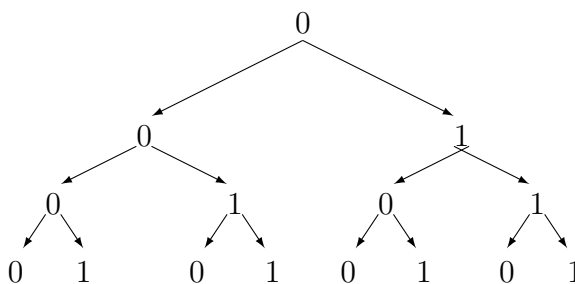
$$v_\epsilon(x) \geq u_\epsilon(x) \geq w_\epsilon(x), \text{ kun } x \in \Omega.$$

Lauseessa 4.5 osoitettiin, että $v_\epsilon \rightarrow h$ ja $w_\epsilon \rightarrow h$, kun $\epsilon \rightarrow 0$. Tällöin myös $u_\epsilon \rightarrow h$, kun $\epsilon \rightarrow 0$. \square

5 Satunnaiskävely suunnatussa binääripuussa

Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan satunnaiskävelyjä suunnatussa binääripuussa.

Määritelmä 5.1. Suunnattu binääripuu E on puu, jonka jokainen solmu nimetään joko solmuksi 0 tai solmuksi 1. Jokaisesta solmusta johtaa polku sekä solmuun 0 että solmuun 1. Binääripuun reunaksi Y kutsutaan kaikkien polkujen raja-arvojen joukkoa.



Kuva 5: Suunnattu binääripuu

Välin $[0, 1]$ ja reunan Y välillä on surjektiivinen kuvaus x . Jokainen reunan Y piste voidaan ajatella välin $[0, 1]$ pisteeksi. Määritellään tämä kuvaus x seuraavalla tavalla. Olkoon

$$v = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots) \in Y.$$

Tällöin

$$x : Y \rightarrow [0, 1], x(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \in [0, 1].$$

Esimerkiksi lukua $\frac{1}{2}$ vastaa polku 0.0111..., sillä

$$x(0.0111\dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Nyt huomataan, että funktio x ei ole bijektio, sillä esimerkiksi

$$x(0.1000\dots) = x(0.0111\dots) = \frac{1}{2}.$$

Jos $v_k = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, niin asetetaan kuvaukselle x

$$x(a_1, \dots, a_k) = x(a_1, \dots, a_k, 0, 0, 0, \dots).$$

Jos $v_k = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ on päättyvä polku, niin asetetaan se vastaamaan sellaista väliä, johon kaikki pisteestä v_k lähtevät polut päättyvät. Merkitään tällaista väliä I_v . Välin I_v pituus on $\frac{1}{2^k}$. Päättyvälle polulle v_k asetetaan kuvaus

$$\theta : v \rightarrow I_v = [x(v_k), x(v_k) + \frac{1}{2^k}].$$

Esimerkiksi päättyvää polkua (0.1) vastaa väli

$$\theta(0.1) = [x(0.1000\dots), x(0.1000) + \frac{1}{2^1}] = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}] = [\frac{1}{2}, 1].$$

Päättyvää polkua (0.11) vastaa

$$\theta(0.11) = [x(0.11000\dots), x(0.11000\dots) + \frac{1}{2^2}] = [\frac{3}{4}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}] = [\frac{3}{4}, 1].$$

Tämä on intuitiivisesti melko selvää, sillä voidaan ajatella esimerkiksi, että mentäessä ensimmäisestä haarasta solmuun 1, voidaan enää päätyä välille $[\frac{1}{2}, 1]$.

Pelitulkinta

Binääripuun avulla voidaan pelata seuraavanlaista peliä [9, s.26]. Ajatellaan, että satunnaiskävelijä lähtee liikkeelle puun yläosasta kohti puun reunaa, johon on liitetty jatkuva palkkiofunktio $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(v) = F(x(v)), v \in Y. \tag{5}$$

Satunnaiskävelijä saa siis palkkion $F(a)$ reunalla kohdassa $a \in [0, 1]$. Satunnaiskävelijä heittää kolikkoa jokaisessa solmussa. Jos kolikosta saadaan puoli 1, valitaan reitti, joka johtaa solmuun 0. Jos kolikosta saadaan puoli 2, valitaan reitti, joka johtaa solmuun 1. Oletetaan, että todennäköisyys α saada kolikon puoli 1 on yhtä suuri kuin todennäköisyys β saada kolikon puoli 2. Eli $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Tällä tavalla binääripuussa edeten ei kuitenkaan koskaan saavuteta reunaa Y . Palkkion odotusarvoa voidaan sen sijaan tutkia. Seuraavaksi tarkastellaankin palkkion odotusarvoa yksittäisessä pelissä. Tarkastelua varten tarvitaan todennäköisyysmitta joko joukolle Y tai välille $[0, 1]$, joka on liitetty joukkoon Y .

Todennäköisyysmitan konstruointia varten tarvitaan Lebesguen mitta. Seuraavat määritelmät on muotoiltu n -ulotteisissa tapauksissa, mutta niitä tullaan käyttämään vain 1-ulotteisina.

Määritelmä 5.2. Avoin n -ulotteinen väli (n -väli) on

$$\begin{aligned} I &= \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\} \\ &=]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_n, b_n[\\ &= I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n. \end{aligned}$$

Määritelmä 5.3. Joukon I geometrinen mitta on

$$V(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Määritelmä 5.4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Lebesguen mitta joukosta A on

$$m(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} V(I_i),$$

missä I_i ovat avoimia n -välejä kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $A \subset I_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 5.5. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ mitallinen. Funktio f on integroitava, jos sekä

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx < \infty \text{ että } \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx < \infty.$$

Funktio $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ ja funktio $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Jos f on integroitava, niin merkitään $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Lause 5.1. (Fatoun lemma) Olkoot $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ mitallisia. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i dx \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx.$$

Todistus. Katso [10, s.158]. □

Lause 5.2. (Lebesguen dominoidun konvergenssin lause)
Olkoot $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ mitallisia ja

1. $|f_i| \leq g$, melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, g integroituva
2. $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$, kun $x \in \mathbb{R}^n$.

Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x) dx < \infty.$$

Todistus. $|f_i| \leq g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, joten

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_i| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g dx < \infty \Rightarrow |f_i| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Nyt koska $|f_i| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin $f_i \in L^1(\mathbb{R}^n)$ kaikilla i . Lisäksi

$$g \geq \lim_{i \rightarrow \infty} |f_i| = |f|,$$

joten myös $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Fatoun lemman avulla saadaan

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + g) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{i \rightarrow \infty} (f_i + g) dx \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f_i + g) dx.$$

Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx + \int_{\mathbb{R}^n} g dx \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx + \int_{\mathbb{R}^n} g dx.$$

Eli

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx.$$

Tehdään samankaltainen tarkastelu myös erotukselle $g - f$. Fatoun lemman avulla saadaan

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g - f) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{i \rightarrow \infty} (g - f_i) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g dx + \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} -f_i dx.$$

Tällöin

$$-\int_{\mathbb{R}^n} f dx \leq + \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} -f_i dx = - \limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx,$$

josta seuraa

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx.$$

Eli

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f dx \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx.$$

Koska aina pätee

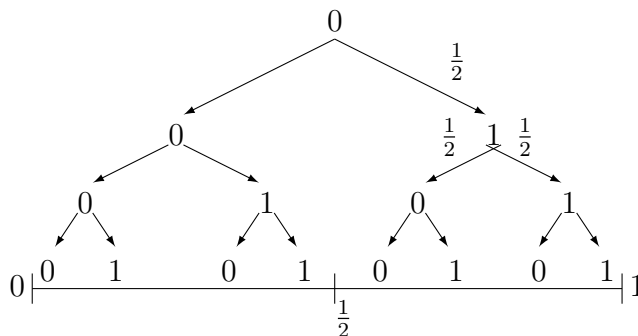
$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx,$$

niin

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx. \quad \square$$

Määritellään todennäköisyysmitta intuitiivisesti muutaman esimerkin avulla. Mietitään ensin todennäköisyyttä sille, että kuljettu polku päättyy välille $[\frac{1}{2}, 1]$. Selvästikin ensimmäisessä vaiheessa täytyy valita solmu 1, jos halutaan päätyä tälle välille. Todennäköisyys että satunnaiskävelijä valitsee ensimmäisessä askeleessa solmun 1 on $\frac{1}{2}$. Tämän jälkeen solmun valinnalla ei ole enää väliä, sillä kaikki solmusta 0.1 lähtevät polut päättyvät välille $[\frac{1}{2}, 1]$. Tällöin todennäköisyydeksi saadaan riippumattomien kokeiden tulosäännön avulla:

$$\mathbb{P}(\text{polut, jotka päättyvät välille } [\frac{1}{2}, 1]) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = m([\frac{1}{2}, 1]).$$



Kuva 6: Todennäköisyysmitan konstruointi

Huomataan siis, että todennäköisyys päätyä tietylle välille puun ensimmäisestä solmusta lähdettäessä vastaa tämän välin Lebesguen mitta.

Edellisessä esimerkissä satunnaiskävelijä aloittaa kävelynsä puun ensimmäisestä solmusta. Tilanne muuttuu hieman, kun liikkeelle lähdetään jostakin solmusta, joka ei ole ensimmäinen solmu. Lasketaan todennäköisyys sille, että lähdettäessä solmusta 0.1 päädytään välille $[\frac{5}{8}, \frac{6}{8}]$.

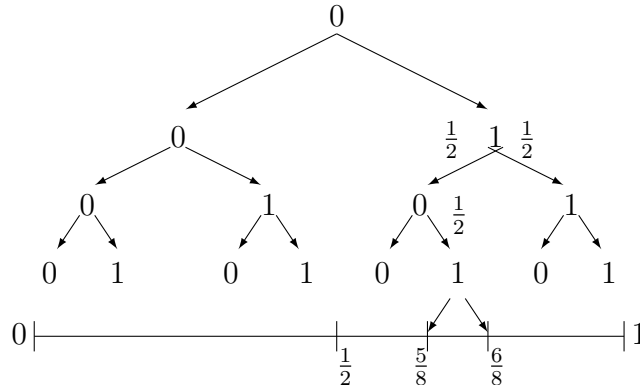
Solmusta 0.1 täytyy ensin kulkea solmuun 0.10 ja tästä solmuun 0.101, mikäli halutaan päätyä välille $[\frac{5}{8}, \frac{6}{8}]$. Todennäköisyys on tällöin

$$\mathbb{P}(\text{polut, jotka alkavat } 0.1 \text{ ja päätyvät välille } [\frac{5}{8}, \frac{6}{8}]) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} \neq m[\frac{5}{8}, \frac{6}{8}].$$

Tässä tapauksessa todennäköisyys ei vastaakaan Lebesguen mitta välistä $[\frac{5}{8}, \frac{6}{8}]$. Osoittautuu kuitenkin, että

$$\mathbb{P}(\text{polut, jotka alkavat } 0.1 \text{ ja päätyvät välille } [\frac{5}{8}, \frac{6}{8}]) = \frac{m([\frac{5}{8}, \frac{6}{8}])}{m([\frac{1}{2}, 1])},$$

missä $m([\frac{1}{2}, 1]) = \mathbb{P}(\text{polut, jotka kulkevat } 0.1 \text{ kautta})$.



Kuva 7: Todennäköisyysmitan konstruointi

Samalla tavoin voidaan konstruoida todennäköisyysmitta mille tahansa välille päätyvälle polulle. Jos polun alkupiste on v_k , missä k ilmaisee montako askelta on kuljettu ensimmäisestä solmusta, niin todennäköisyys päätyä välille $[a, b] \subset [0, 1]$ on

$$\mathbb{P}_{v_k}([a, b]) = \frac{m([a, b] \cap I_{v_k})}{\frac{1}{2^k}} = \frac{m([a, b] \cap I_{v_k})}{I_{v_k}}.$$

Määritelmä 5.6. Odotusarvoa solmussa $v_k = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ merkitään \mathbb{E}_{v_k} . Olkoon $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka kertoo palkkion puun reunalla. Tällöin odotusarvo on

$$\mathbb{E}_{v_k}(F(x(v))) = \int_{\text{kaikki polut } v_k \text{ eteenpäin}} F(x(v)) d\mathbb{P}(v) = \int_{I_{v_k}} F(x) dm(x).$$

Merkitään $I_{v_k} = [b_1, b_2] \subset [0, 1]$. Koska F on jatkuva, voidaan odotusarvo \mathbb{E}_{v_k} kirjoittaa muotoon

$$\mathbb{E}_{v_k}(F(x(v))) = \frac{1}{m(I_{v_k})} \int_{b_1}^{b_2} F(x) dm(x).$$

Merkitään jatkossa $u(v_k) = \mathbb{E}_{v_k}(F(x(v)))$.

Määritelmä 5.7. Olkoot $v_k = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ binääripuun mielivaltainen solmu ja olkoon F jatkuva palkkiofunktio (5). Tällöin sanotaan, että funktio

$$\begin{cases} u(v_k) = \frac{1}{2}u(a_1, a_2, \dots, a_k, 0) + \frac{1}{2}u(a_1, a_2, \dots, a_k, 1) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} u(v_k) = F(x(a_1, a_2, \dots)) \end{cases}$$

on ϵ -harmoninen binääripuussa.

Seuraavaksi tarkastellaan ϵ -harmonisten funktioiden vertailuperiaatetta, maksimiperiaatetta ja yksikäsitteisyyttä binääripuussa.

Lause 5.3. (Vertailuperiaate) Olkoot u_1 ja u_2 ϵ -harmonisia siten, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_1(v_k) = F_1(x(a_1, a_2, \dots)) \leq F_2(x(a_1, a_2, \dots)) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_2(v_k).$$

Tällöin vastaaville ϵ -harmonisille funktioille pätee $u_1(v_k) \leq u_2(v_k)$ kaikissa solmuissa v_k .

Todistus. Koska

$$F_1(x) \leq F_2(x),$$

niin

$$\int_{b_1}^{b_2} F_1(x) dm(x) \leq \int_{b_1}^{b_2} F_2(x) dm(x).$$

Tällöin kaikille solmuille v_k pätee

$$u_1(v_k) = \frac{1}{m(I_{v_k})} \int_{b_1}^{b_2} F_1(x) dm(x) \leq \frac{1}{m(I_{v_k})} \int_{b_1}^{b_2} F_2(x) dm(x) = u_2(v_k),$$

kun $[b_1, b_2] \subset [0, 1]$. □

Lause 5.4. (Maksimiperiaate) Olkoon $M \in \mathbb{R}$ ja olkoon u ϵ -harmoninen. Olkoon F palkkiofunktio siten, että $F(x) \leq M$ kaikilla $x \in [0, 1]$. Jos jollakin v_k pätee

$$u(v_k) = u(a_1, a_2, \dots, a_k) = M,$$

niin $F(x) = M$ kaikilla $x \in I_{v_k}$.

Todistus. Oletetaan, että on olemassa sellainen väli $I_{v_l} \subset I_{v_k}$, että $F(x_0) < M$, kun $x_0 \in I_{v_l}$. Tällöin $u(v_l) = s < M$. Koska

$$u(v_k) = \frac{1}{2}u(a_1, \dots, a_k, 0) + \frac{1}{2}u(a_1, \dots, a_k, 1) = M$$

ja M on maksimi, niin myös $u(a_1, \dots, a_k, 0) = M$ ja $u(a_1, \dots, a_k, 1) = M$. Samanlaisella tarkastelulla nähdään, että $u(a_1, \dots, a_k, \dots) = M$ aina. Erityisesti

$$u(v_l) = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_l) = M.$$

Tämä on ristiriita sillä alussa oletettiin, että $u(v_l) = s < M$. Siis melkein kaikilla $x \in I_{v_k}$ pätee $F(x) = M$. Koska F on jatkuva, niin väite pätee kaikilla välin I_{v_k} pisteillä.

Vastaava väite pätee myös funktion F minimille. Jos $F(x) \geq m$ kaikilla $x \in [0, 1]$ ja $u(v_k) = m$ jossakin mielivaltaisessa solmussa v_k , niin $F(x_0) = m$ kaikilla $x_0 \in I_{v_k}$. Siis maksimiarvo M ja minimiarvo m saavutetaan aina reunalla. \square

Lause 5.5. (Yksikäsitteisyys) Olkoot u ja s ϵ -harmonisia binääripuussa. Tällöin jos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(v_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(v_k),$$

niin $u = s$ jokaisessa puun solmussa.

Todistus. Olkoon h ϵ -harmoninen funktio jolle

$$h(v_k) = u(v_k) - s(v_k).$$

Tällöin

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(v_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(v_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} s(v_k) = 0$$

kaikilla poluilla v_k . Lauseen 5.4 perusteella $h(v_k) = 0$ kaikissa solmuissa v_k , koska ϵ -harmoninen funktio saavuttaa reunalla miniminsä ja maksiminsa. Tämä toteutuu ainoastaan silloin, kun $u(v_k) = s(v_k)$ kaikissa solmuissa. \square

Binääripuun ϵ -harmoniset funktiot toteuttavat myös *vahvan vertailuperiaatteen*

Lause 5.6. *Olkoot u ja s ϵ -harmonisia siten, että*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(v_k) = F_u(x(a_1, a_2, \dots)) \leq F_s(x(a_1, a_2, \dots)) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(v_k).$$

Jos on olemassa sellainen solmu $v_k = (w_1, \dots, w_k)$, että

$$u(w_1, \dots, w_k) = s(w_1, \dots, w_k),$$

niin $u(w_1, \dots, w_k, \dots) = s(w_1, \dots, w_k, \dots)$ ja $F_u(x_0) = F_s(x_0)$ kaikilla $x_0 \in I_{v_k}$.

Todistus. u ja s toteuttavat ϵ -harmonisia yhtälöt

$$u(a_1, a_2, \dots, a_k) = \frac{1}{2}u(a_1, a_2, \dots, a_k, 0) + \frac{1}{2}u(a_1, a_2, \dots, a_k, 1) \quad (6)$$

ja

$$s(a_1, a_2, \dots, a_k) = \frac{1}{2}s(a_1, a_2, \dots, a_k, 0) + \frac{1}{2}s(a_1, a_2, \dots, a_k, 1). \quad (7)$$

Vähennetään yhtälö (6) yhtälöstä (5). Tällöin jos $u(w_1, \dots, w_k) = s(w_1, \dots, w_k)$, niin saadaan

$$\frac{1}{2}(u(w_1, \dots, w_k, 0) + u(w_1, \dots, w_k, 1) - s(w_1, \dots, w_k, 0) - s(w_1, \dots, w_k, 1)) = 0. \quad (8)$$

Koska $F_u \leq F_s$, niin lauseesta 5.3 seuraa, että $u - s \leq 0$ kaikissa solmuissa. Tällöin yhtälöstä (8) seuraa, että $u(w_1, w_2, \dots, w_k, 0) = s(w_1, w_2, \dots, w_k, 0)$ ja $u(w_1, w_2, \dots, w_k, 1) = s(w_1, w_2, \dots, w_k, 1)$. Näille solmuille voidaan taas toistaa samankaltainen tarkastelu, joilloin huomataan, että myös

$$\begin{aligned} u(w_1, w_2, \dots, w_k, 0, 0) &= s(w_1, w_2, \dots, w_k, 0, 0), \\ u(w_1, w_2, \dots, w_k, 0, 1) &= s(w_1, w_2, \dots, w_k, 0, 1), \\ u(w_1, w_2, \dots, w_k, 1, 0) &= s(w_1, w_2, \dots, w_k, 1, 0), \\ u(w_1, w_2, \dots, w_k, 1, 1) &= s(w_1, w_2, \dots, w_k, 1, 1). \end{aligned}$$

Tätä jatkamalla nähdään, että

$$u(w_1, \dots, w_k, \dots) = s(w_1, \dots, w_k, \dots).$$

Nyt tiedetään, että ainakin kaikissa solmuissa johon päädytään lähtemällä solmusta v_k pätee $u = s$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $F_u(x_0) = F_s(x_0)$ kaikilla $x_0 \in I_{v_k}$. \square

Yleisessä ϵ -harmonisessa tapauksessa vahvasta vertailuperiaatteesta saatiin tulos, että reuna-arvojen on oltava kaikkialla samat. Suunnatun binääripuun vastaavassa tapauksessa sama päättely ei siis päde ja reuna-arvot ovatkin samat ainoastaan niissä pisteissä johon päädytään lähtemällä tarkastelusolmusta v_k . Tämän ominaisuuden voidaan ajatella johtuvan siitä, että puussa ei voida liikkua "taaksepäin". Solmusta v_k päästään ainoastaan eteenpäin. Tämän takia ei voida siis sanoa mitään reunan arvoista, jotka eivät ole välillä I_{v_k} .

ϵ -harmonisten funktioiden yhteyttä satunnaiskävelyihin on tutkittu myös tutkielmassa [8]. Siellä tarkastelu on monin paikoin tehty martingaalien avulla.

6 ϵ -harmonisten funktioiden kuvaajia

Tässä osiossa tarkastellaan ϵ -harmonisten funktioiden kuvaajia yhdessä ja kahdessa ulottuvuudessa Matlab-ohjelmiston avulla. Tarkasteltavat funktiot ovat diskreettejä, mutta niiden avulla pystytään hyvin approksimoimaan jatkuvia tapauksia.

Matlab ei suoraan ratkaise ϵ -harmonista funktiota tietyillä reunaehdoilla, mutta numeerisesti relaksaatiomenetelmää käyttäen päästään hyvin lähelle oikeaa ratkaisua.

Yksiulotteisessa tapauksessa aloitetaan valitsemalla väli, jossa ϵ -harmoninen funktio halutaan ratkaista. Samalla määritetään vakio ϵ valitulle välille. Määrittelyväli jaetaan siis tasaisesti vakion ϵ etäisyydellä toisistaan oleviin pisteisiin. Seuraavassa esimerkissä määritetään ϵ -harmoninen funktio välillä $[0, 1]$ reuna-arvoilla $u_\epsilon(0) = 0$ ja $u_\epsilon(1) = 1$, kun $\epsilon = 0.1$. Komento jolla tällainen funktio saadaan ratkaistua tarkasti on seuraavanlainen:

```

vali=0.1;
a=0;
b=1;
x=a:vali:b;
A=size(x);
END=A(1,end)-1;
y=0*ones(size(x));
y(end)=1;
apu=y;
for k=1:1000
    for i=END:-1:2
        apu(i)=(y(i+1)+y(i-1))/2;
    end
    y=apu
end
plot(x,y,'*')

```

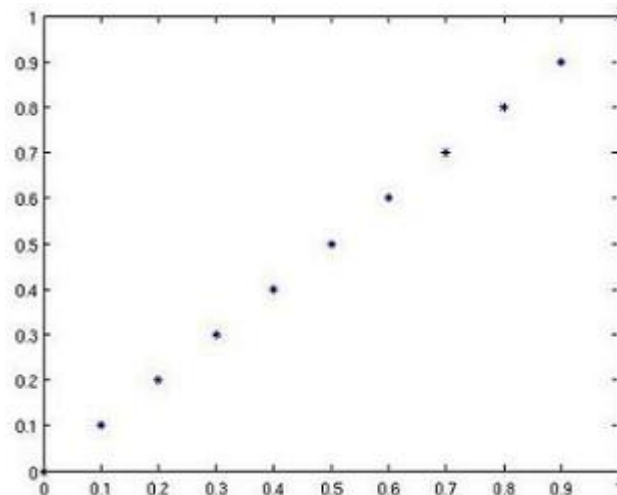
Tämän operaation jälkeen Matlab antaa funktiolle y esityksen

```

Y=
Columns 1 through 8
    0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000
Columns 9 through 11
    0.8000    0.9000    1.0000

```

Lisäksi Matlab antaa graafisen esityksen, joka näkyy kuvassa 8.

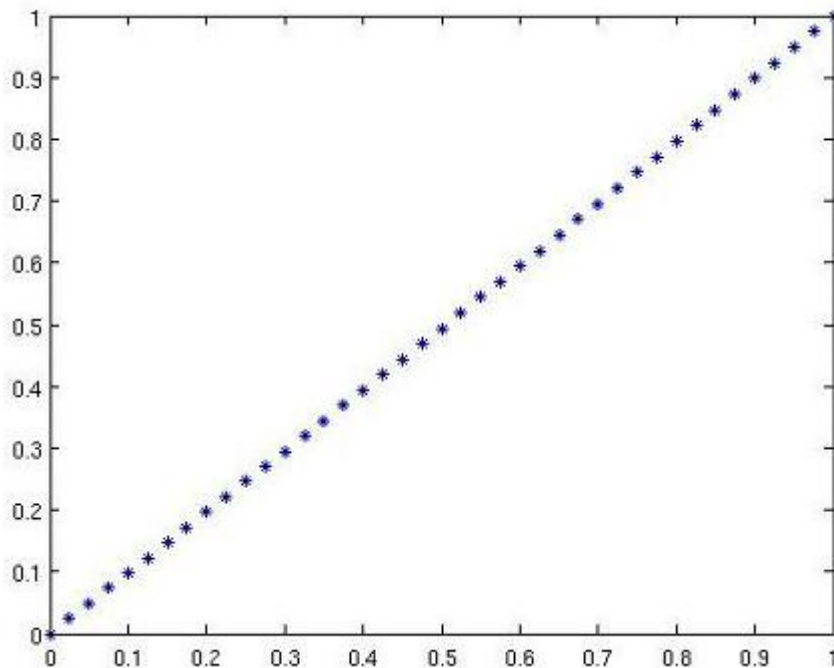


Kuva 8: 1-ulotteisen reuna-arvotetävän ratkaisu, kun $\epsilon = 0,1$

Koodista on syytä huomata seuraavia seikkoja.

- 1) Uloin *for*-silmukka määrää sen, kuinka monta kierrosta relaksaatiomenetelmällä lasketaan. Esimerkin tapauksessa kierroksia käydään läpi 1000.
- 2) Apu-funktioon lasketaan uusia arvoja, jotka jokaisen iteraation jälkeen sijoitetaan takaisin funktioon *y*. Tällä tavalla laskemalla jokainen uusi funktio *y* on määritelty kuten relaksaatiomenetelmässä.
- 3) Kun määritellään sisempi *for*-silmukka kuten se on määritelty, riittää koodista muuttaa pelkästään vakiota *vali*. Tällöin Matlab automaattisesti muuttaa myös kyseisen *for*-silmukan indeksit.

Pientämällä vakion ϵ arvoa, eli tihentämällä välin jakoa, saadaan tarkempi approksimaatio reuna-arvotehtävän *harmonisesta* ratkaisusta. Esimerkiksi kun $\epsilon=0.025$, niin 1500 iteraation jälkeen Matlab piirtää funktiolle alla olevan kuvan 9 kaltaisen kuvaajan. Kuten kuvasta näkyy, jakoa tihentämällä ratkaisu lähestyy suoraa, joka yhdistää pisteitä $(0,0)$ ja $(1,1)$. Tämä suora on reuna-arvotehtävän harmoninen ratkaisu.



Kuva 9: Yksiulotteisen reuna-arvotehtävän ratkaisun approksimaatio, kun $\epsilon = 0,025$

Tarkastellaan seuraavaksi kahta erilaista kaksiulotteista reuna-arvotettavaa. Tavoitteena on ratkaista ϵ -harmoninen funktio kaksiulotteisessa alueessa tietyillä reuna-arvoilla. Asetetaan alueeksi $[0, 1] \times [0, 1]$. Valitaan ensin $\epsilon=0.1$. Asetetaan funktiolle reuna-arvo 0 joukossa

$$U = \{0\} \times [0, 1] \cup \{1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1] \times \{1\}$$

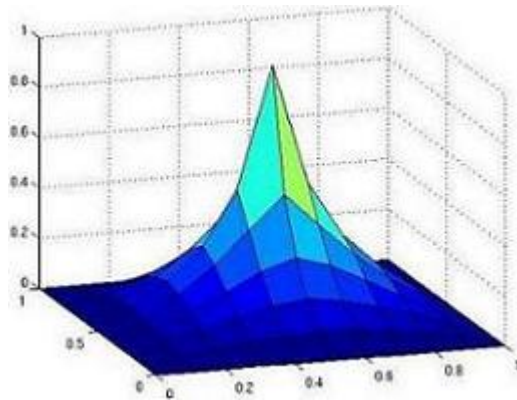
ja reuna-arvo 1 pisteessä $(0, 5; 0, 5)$. Alue ei ole sileä, mutta ratkaisu suppenee tästä huolimatta kohti nollaa, kun jakoa tihennetään. Seuraavalla komennolla Matlab ratkaisee annetun ongelman:

```

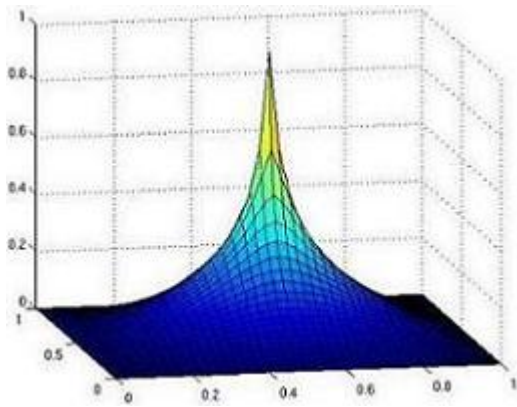
vali=0.1
x=0:vali:1;
y=x;
A=size(x);
END=A(1,end)-1;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=0.*X.*Y;
Z((end+1)/2,(end+1)/2)=1;
I=[Z>0];
apu=Z;
for k=1:1000
    for i=2:END
        for j=2:END
            apu(i,j)=(apu(i,j-1)+apu(i,j+1)+apu(i+1,j)+apu(i-1,j))/4;
        end
    end
    apu(I)=1;
    Z=apu;
end
surfc(X,Y,Z)

```

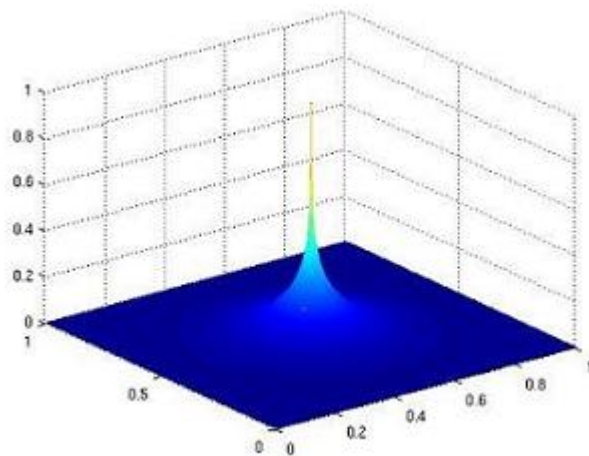
Muuttamalla jakoa tiheämmäksi saadaan tarkempi kuva siitä, millaiselta vastaava harmoninen ratkaisu näyttää. Tiheämpi jako tuottaa tarkemman kuvan, kuten kuvista 10-12 voidaan havaita. Kuvista havaitaan myös, että ratkaisu lähestyy nollaa, kun jakoa tihennetään. Kuvassa 13 piirtämiseen on käytetty komentoa "*mesh*" komennon "*surfc*" sijaan, koska komento "*surfc*" ei tuottanut enää hyvänlaatuista kuvaa pienillä ϵ arvoilla.



Kuva 10: Reuna-arvotettävän ratkaisu, kun $\epsilon = 0.1$



Kuva 11: Reuna-arvotettävän ratkaisu, kun $\epsilon = 0.025$



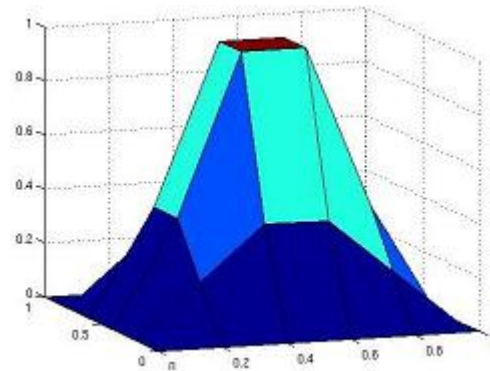
Kuva 12: Reuna-arvotettävän ratkaisu, kun $\epsilon = 0.0025$

Tilanne hankaloituu hieman, kun halutaan ratkaista sellainen reuna-arvot tehtävä, jossa kaksiulotteisen alueen keskellä on alue, joka ei olekaan yksittäinen piste. Seuraavassa tapauksessa on ratkaistu edellisen kaltainen reuna-arvot tehtävä sillä erotuksella, että funktio saa arvon 1 pisteissä, jotka kuuluvat joukkoon

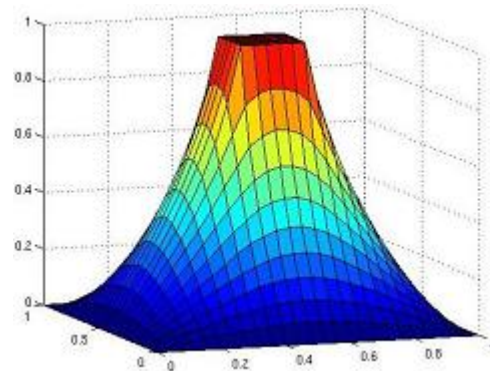
$$U = \{0, 4\} \times [0, 4; 0, 6] \cup \{0, 6\} \times [0, 4; 0, 6] \cup [0, 4; 0, 6] \times \{0, 4\} \cup [0, 4; 0, 6] \times \{0, 6\}.$$

Reuna-arvot tehtävä on ratkaistu, kun $\epsilon = 0, 2$, $\epsilon = 0, 04$ ja $\epsilon = 0, 008$. Ratkaisujen graafiset esitykset näkyvät kuvista 13-15. Matlabilla koodiksi asetetaan tässä tapauksessa:

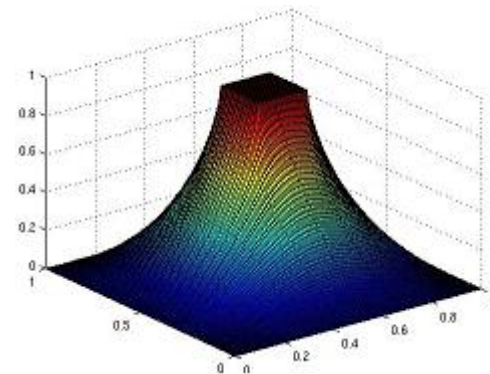
```
n=0;
vali=0.2*(1/5)^n;
x=0:vali:1;
y=x;
A=size(x);
END=A(1,end)-1;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=0.*X.*Y;
for p=(2*5^n+1):(2*5^n+1+5^n)
    for s=(2*5^n+1):(2*5^n+1+5^n)
        Z(p,s)=1;
    end
end
I=[Z>0];
apu=Z;
for k=1:1000
    for i=2:END
        for j=2:END
            apu(i,j)=(apu(i,j-1)+apu(i,j+1)+apu(i+1,j)+apu(i-1,j))/4;
        end
    end
end
apu(I)=1;
Z=apu;
end
surf(X,Y,Z)
```



Kuva 13: Reuna-arvotettävän ratkaisu, kun $\epsilon = 0,2$



Kuva 14: Reuna-arvotettävän ratkaisu, kun $\epsilon = 0,04$



Kuva 15: Reuna-arvotettävän ratkaisu, kun $\epsilon = 0,008$

Koodista on syytä huomata seuraavia seikkoja.

- 1) Jako saadaan muutettua tiheämmäksi muuttamalla vakiota $n \in \mathbb{N}$. Kuvissa on käytetty vakion n arvoja 0, 1 ja 2.
- 2) Myös reunan indeksit muuttuvat vakion n muuttuessa. Tästä johtuen indeksit p ja s on määritetty siten, että ne muuttuvat luvun n mukana.
- 3) Kun n kasvaa, niin iteraatioiden määrää tulee myös kasvattaa.

Relaksaatiomenetelmä on siis erittäin käyttökelpoinen menetelmä tarkasteltaessa ϵ -harmonisten funktioiden reuna-arvotehtäviä. Jakoa tihentämällä saadaan myös hyvä käsitys vastaavasta harmonisesta ratkaisusta.

Viitteet

- [1] S.J. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic function theory*, volume 137. Springer Verlag, 2001.
- [2] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100(1):32–74, 1928.
- [3] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2):215–234, 1967.
- [4] J.L. Doob. *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, volume 262. Springer, 1984.
- [5] P.G. Doyle and J.L. Snell. Random walks and electric networks. *Carus mathematical monographs*, 22, 2000.
- [6] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2nd ed. edition, 2010.
- [7] S. Kakutani. Markov processes and the dirichlet problem. *Proc. Jap. Acad*, 21:227–233, 1945.
- [8] C. Lindfors. *Satunnäiskävelyn yhteys harmonisiin funktioihin*. Kandidaatintyö, Aalto-yliopisto, 2010.

- [9] A.P. Sviridov. *Elliptic equations in graphs via stochastic games*. PhD thesis, University of Pittsburgh, 2011.
- [10] W.P. Ziemer. Modern real analysis. *Online lecture notes*, 2004.