MAYOJEN LUKUJA TUTKIMASSA – TAPAUSTUTKIMUS MATEMAATTISESTA AJATTELUSTA

SAMI HIRVONEN

Pro gradu -tutkielma

Tammikuu 2012

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Hirvonen, Sami. 2012. Mayojen lukuja tutkimassa – tapaustutkimus matemaattisesta ajattelusta. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Matematiikan pro gradu –työ. 98 s. Työn ohjaaja: Hähkiöniemi, Markus.

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan oppilaiden matemaattista ajattelua ja erityisesti matematiikan ymmärtämistä mayojen lukujärjestelmä -opetuskokeilussa. Opetuskokeilu koostui yhdestä tutkijan suunnittelemasta matematiikan oppitunnista, jossa opetettiin mayojen lukujärjestelmää ja opetustapana toimi tutkiva matematiikka. Tutkiva matematiikka perustuu oppilaiden omaan tutkimukseen, vuorovaikutukseen ja ryhmätyöhön sekä opettajan oppilaslähtöiseen ohjaavaan rooliin. Suunniteltua oppituntia opetettiin yläkoulun yhden 9. luokan puolikkaille erikseen eli oppitunti toistettiin kahdesti ja opettajana toimi tutkija. Molemmat oppitunnit videoitiin.

Oppilaiden ajattelutapojen analyysi toteutettiin videoanalyysin avulla. Oppilaiden ajattelutapojen analyysissä keskityttiin erityisesti mayojen lukujärjestelmän sekä yleisesti lukujärjestelmien oppimiseen ja ymmärtämiseen. Tämän lisäksi yhden oppilaan, Sinin, matemaattista ajatteluprosessia kuvattiin Pirien ja Kierenin (1994) matemaattisen ymmärtämisen kasvun mallin avulla.

Molemmilla pidetyillä oppitunneilla oli hyvin samankaltaisia elementtejä lukuun ottamatta oppituntien koontivaiheita. Oppilaiden oppimisprosessit olivat hyvin epälineaarisia ja ongelmia tuotti etenkin kantaluvun sekä paikka-arvojärjestelmän ymmärtäminen. Eniten oppilaiden työskentelyyn vaikutti kymmenjärjestelmä, jota pyrittiin soveltamaan mayojen lukujärjestelmään ahkerasti. Ensimmäisellä oppitunnilla oppilaat saivat ratkaistua mayojen merkinnän luvulle 400, kun taas toisella oppitunnilla päästiin luvun 8000 merkintään, jonka lisäksi vertailtiin kymmenjärjestelmää mayojen lukujärjestelmään ja pohdittiin tarkemmin mayojen lukujärjestelmän rakennetta.

Sinin ymmärtämisprosessi keskittyi lähinnä Pirien ja Kierenin (1994) mallin neljään ensimmäiseen vaiheeseen, joissa rakennetaan mielikuvia ja huomataan ominaisuuksia opeteltavista käsitteistä. Sini saavutti oppitunnin päätteeksi Pirien ja Kierenin mallin formalisoinnin tason, jota pidetään tasona, jolloin oppilas on valmis formaaliin matemaattiseen määrittelyyn. Lisäksi Sinin oppimispolussa havaitaan vaiheiden sisällä tapahtuvaa liikehdintää ja kaksi selkeää takaisin kiertymistä. Takaisin kiertymiset aiheutuivat pääasiallisesti opettajan ohjauksen johdosta.

Tutkimuksen perusteella oppilailla on ongelmia paikka-arvojärjestelmän ja kantaluvun ymmärtämisessä. Mayojen lukujärjestelmää opeteltaessa he eivät esimerkiksi pystyneet irtautumaan kymmenjärjestelmästä, vaan pyrkivät soveltamaan sitä mayojen lukujärjestelmään, mikä kielii konseptuaalisen tiedon puutteesta. Toisaalta tutkimuksessa voidaan havaita, että oppilaiden matemaattiset oppimis- ja ymmärtämisprosessit ovat hyvin epälineaarisia, mikä korostuu etenkin Sinin oppimispolussa. Epälineaarisuus johtuu pääosin takaisin kiertymisistä, jotka on tutkimuksessa havaittu tarkoituksenmukaisiksi ja joiden toteutumisella on yhteys opettajan ohjaamistyöskentelyyn.

Tutkimus myös tukee tutkivan matematiikan oppimistapaa. Tutkimuksessa käytetty Pirien ja Kierenin (1994) malli osoitti opetuskokeilussa, että tutkivan työskentelyn avulla oppilailla on mahdollisuus rakentaa riittävä omakohtainen ymmärrys formaaliin matemaattiseen määrittelyyn, minkä puuttuminen usein aiheuttaa ymmärtämisvaikeuksia perinteisillä matematiikan oppitunneilla. Lisäksi tutkimuksessa havaittiin, että opettajan tutkivan matematiikan kaltaisella ohjaavalla käytöksellä on yhteys takaisin kiertymisiin. Toisin sanoen opettajan tutkivan matematiikan mukaisen ohjauksen avulla voidaan syventää ja laajentaa oppilaiden matemaattista ymmärtämistä.

Asiasanat: Lukujärjestelmät, matemaattinen ajattelu, matematiikan opettaminen, matematiikan oppiminen, mayojen lukujärjestelmä, Pirien ja Kierenin malli, tutkiva matematiikka

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 (Opetushallitus 2004, 158–167) määritellään tarkasti peruskoulun matematiikan oppimisen tavoitteet. Alakoulun ensimmäisillä luokilla matematiikan oppimisen tavoitteissa painottuu matemaattisen ajattelun kehittäminen ja kokemuksien hankkiminen matemaattisten käsitteiden omaksumisen pohjaksi. Vuosiluokkien 6-9 tavoitteissa painopiste muuttuu selkeästi ja opetussuunnitelmassa korostetaan erityisesti matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämistä. Ymmärtämisen korostaminen jatkuu myös lukion opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus 2003, 118–128). Matematiikan ymmärtämisen tavoite on hyvin luonnollinen ja oleellinen, koska matematiikka on luonteeltaan deduktiivista ja matematiikan soveltaminen vaatii matemaattisten käsitteiden sekä rakenteiden ymmärtämistä.

Tavoite matematiikan ymmärtämisestä ei kuitenkaan näytä toteutuneen peruskoulussa, lukiossa, eikä muissakaan opinahjoissa yliopistotasolle saakka, jos tarkkaillaan yleistä keskustelua matematiikan osaamisesta Suomessa. Matemaattisten aineiden opettajat ovat ottaneet kantaa matematiikan osaamattomuuteen ja ymmärtämättömyyteen niin yleisissä tiedotusvälineissä kuin alan julkaisuissakin. Eräs viimeisimmistä kannanotoista on Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton (MAOL) julkaisemassa Dimensio – lehdessä (5/2011), jossa päätoimittaja Leena Mannila pohtii mihin matematiikan ymmärrys on kadonnut ja miten matematiikan ymmärtämistä voitaisiin kehittää (Mannila 2011, 5). Opettajien kokemuksien lisäksi myös tutkimukset vahvistavat, että nykyisessä matematiikan ymmärtämisessä on parantamisen varaa. Esimerkiksi Liisa Näverin (2009, 146) tutkimuksen mukaan vain seitsemän prosenttia peruskoululaisista saavuttaa murtolukujen peruslaskutoimituksissa käsitteellisen ymmärtämisen tason. Huomattavaa on, että emme ole ongelman kanssa yksin, sillä matematiikan ymmärtämättömyys ei ole vain kansallinen ongelma, vaan samaan ongelmaan törmätään myös kansainvälisesti (ks. esim. Battista 2002).

Matematiikan opettamisen ja oppimisen tutkijoiden mukaan osasyy matematiikan heikkoon ymmärtämiseen johtuu perinteisestä matematiikan opetuksesta, joka ei tue matematiikan oppimista parhaalla mahdollisella tavalla. Goosin (2004, 259) ja Battistan (2002) mukaan perinteinen opettajajohtoinen matematiikan opettaminen korostaa kopiointia ja ulkoa opettelua, eikä opettaminen tue nykyistä konstruktivistista oppimiskäsitystä. Lisäksi Battistan mukaan matematiikan opetus on oppilaille myös liian abstraktia ja formaalia, mikä vaikeuttaa matematiikan ymmärtämistä. Perinteisen matematiikan opetuksen rinnalle on noussut useita samantyylisiä oppilaskeskeisiä opetustapoja, joiden tarkoitus on vastata perinteisen matematiikan opetuksen ongelmiin sekä vahvistaa matematiikan oppimista ja ymmärtämistä. Eräs näistä on tutkiva matematiikka (Hähkiöniemi 2010, painossa a, painossa b; Hähkiöniemi & Leppäaho 2010), joka perustuu oppilaiden omaan tutkimukseen, vuorovaikutukseen ja ryhmätyöhön sekä opettajan oppilaslähtöiseen ohjaavaan rooliin.

Tämän tutkimuksen tavoitteena on pureutua oppilaiden ajattelutapoihin ja -prosesseihin tutkivan matematiikan oppitunnilla. Oppilaiden ajattelutapoja ja -prosesseja tutkimalla voidaan selvittää oppilaiden ymmärrystä ja oppimisprosesseja tutkivassa matematiikassa, minkä avulla voidaan edelleen kehittää matematiikan opetusta kuten esimerkiksi oppitunnin rakennetta, opettajan toimintaa tai huomata oppilaiden oppimisprosessien ongelmakohtia. Tutkimuksen tavoitteena on kuvata oppilaiden matemaattista ajattelua yleisellä tasolla, esimerkiksi sitä miten matemaattinen oppimisprosessi etenee ja mikä siihen vaikuttaa. Lisäksi oppilaiden ajatteluprosessia tutkitaan Pirien ja Kierenin (1994) matemaattisen ymmärryksen kasvun mallin avulla. Pirien ja Kierenin malli kuvaa oppilaan matemaattisen ymmärryksen kasvua jaksottaisena, epälineaarisena ja henkilökohtaisena prosessina.

Tutkimus on luonteeltaan tapaustutkimus ja se perustuu opetuskokeiluun, jossa yläkoulun 9. luokan oppilaille opetettiin mayojen lukujärjestelmää yhdellä tutkivan matematiikan oppitunnilla. Sama oppitunti opetettiin kaksi kertaa saman 9. luokan puolikkaille, missä opettajana toimi tutkija. Molemmat oppitunnit videoitiin ja videotallenteiden analyysi oli tutkimuksen pääasiallinen analyysimenetelmä.

Mayojen lukujärjestelmä on suomalaisessa koulumatematiikassa harvinaisempi aihe. Mayojen lukujärjestelmä valittiin opetuskokeiluun, koska useissa tutkimuksissa oppilailla on havaittu suuria ymmärryksen puutteita lukujärjestelmiin liittyvissä käsitteissä ja näiden puutteiden korjaamiseksi tutkimuksissa suositellaan monipuolista lukujärjestelmien opettamista (Thanheiser & Rhoads 2009; Nataraj & Thomas 2007, 2009; Schmittau & Vagliardo 2006). Mayojen lukujärjestelmä perustuu kantalukuun 20 ja pystysuoraan kirjoitettavaan paikka-arvojärjestelmään, joten sen avulla on mahdollista tukea kantaluvun ja paikka-arvojärjestelmän ymmärtämistä. Tutkimuksen toisena tavoitteena onkin saada tietoa mayojen lukujärjestelmän sekä yleisesti lukujärjestelmien oppimisesta ja ymmärtämisestä.

2 MATEMAATTINEN AJATTELU

Matemaattisen ajattelun määritteleminen ei ole yksikäsitteistä, sillä erilaisista tutkimuslähtökohdista rakentuu hyvinkin erilaisia määritelmiä matemaattiselle ajattelulle (Joutsenlahti 2005, 50–51). Tämän tutkimuksen mielenkiinnon kohteena on oppilaiden matemaattinen ajattelu, jonka tulkitseminen ja seuraaminen on hyvin haastavaa. Joutsenlahden (2005, 68) mukaan oppilaan matemaattista ajattelua koulumaailmassa voidaan tarkastella pääsääntöisesti vain kahdessa prosessissa: käsitteen muodostumisessa ja ongelmanratkaisussa. Tässä tutkimuksessa oppilaan matemaattista ajattelua tarkastellaan käsitteen muodostumisprosessissa.

Tutkielman matemaattisen ajattelun teoreettisena viitekehyksenä toimii matemaattisen tiedon jako konseptuaaliseen ja proseduraaliseen tietoon sekä Pirien ja Kierenin (1994) matemaattisen ymmärtämisen kasvun malli. Matemaattisen tiedon jako konseptuaaliseen ja proseduraaliseen tietoon auttaa jossain määrin jakamaan matemaattisen ajattelun ymmärtämiseen ja tietämiseen. Pirien ja Kierenin mallin avulla taas voidaan tarkemmin tarkastella oppilaan ymmärtämistä ja sen kasvua.

2.1 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

Matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkimuskentällä matemaattinen tieto jaotellaan usein hyvinkin karkeasti ymmärtämiseen ja tietämiseen. Tälle jaottelulle on annettu erilaisia termejä, joista vakiintunein lienee kuitenkin matemaattisen tiedon jako konseptuaaliseen (*conseptual knowledge*) eli käsitteelliseen tietoon ja proseduraaliseen (*procedual knowledge*) eli menetelmätietoon (Haapasalo 2004, 50–52).

Hiebertin ja Lefevren (1986) mukaan konseptuaalinen tieto on tietoa riippuvuuksista ja proseduraalinen tieto sisältää formaalin kielen ja käsitteet sekä säännöt ja algoritmit. Haapasalo (2004, 52–54) taas määrittelee konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon näin:

> *Konseptuaalinen tieto (käytän usein merkintää **C**) on semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet sekä logiikan. Solmut ja linkit voivat olla esimerkiksi käsitteitä tai niiden attribuutteja, proseduureja, toimintoja, näkökulmia tai jopa ongelmia)*

> *Proseduraalinen tieto (käytän usein merkintää **P**) tarkoittaa dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien (toimintakaavojen)*

> *suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Tämä edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmän syntaksin ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on automatisoitunut.*

Konseptuaalinen tieto voidaan siis nähdä oppilaan tietoverkkona, joka muodostuu pienistä linkittyneistä tiedonjyvistä. Konseptuaalisen tiedon kartuttamiseksi uuden tiedon tulee liittyä oppilaan tietoverkkoon. Konseptuaalista tietoa käyttäessään oppilas tietää mitä tekee ja miksi tekee näin. Tällöin oppilas ei ole rajoittunut tiettyyn ongelmaan, vaan pystyy soveltamaan tietojaan ja taitojaan. Joutsenlahden (2005, 85) mukaan ymmärretty tieto on konseptuaalista tietoa. Murtolukujen yhteenlaskussa oppilailla voi olla hyvin eritasoista konseptuaalista tietoa ja konseptuaalisen tiedon määritteleminen voi usein olla hyvin vaikeaa. Esimerkiksi jos murtolukujen yhteenlaskussa oppilas osaa yhdistää murtoluvut pizzan paloihin ja pystyy niiden avulla laskemaan murtolukuja yhteen, niin oppilaalla on ainakin vähän konseptuaalista tietoa. Murtolukujen yhteenlaskussa konseptuaalisen tiedon voidaan ajatella olevan korkeimmillaan, kun oppilas ymmärtää murtolukujen summaamisen käsitteen: oppilaan konseptuaalisessa tietoverkossa yhdistyy murtoluvun ja yhteenlaskemisen käsitteet. Oppilas tietää, miten laskualgoritmia käytetään, mihin se perustuu ja mitkä ovat sen rajoitteet. Tämän avulla oppilas osaa myös soveltaa oppimaansa. Lisäksi murtolukujen yhteenlaskun käsite voi yhdistyä muihin matemaattisiin käsitteisiin kuten desimaalilukuihin tai prosenttilukuihin.

Proseduraalista tietoa voidaan kuvata taitona soveltaa sääntöjä ja käyttää menetelmiä sekä algoritmeja. Proseduraalinen työskentely ei välttämättä vaadi ymmärrystä ja tällöin oppilas on sidottu tiettyyn ongelmaan tai tehtävään. Koulukokeiden tehtävät vaativat yleensä vain proseduraalista tietoa, koska tehtävät ovat tarkkaan määriteltyjä ja niiden ratkaisemiseen tarvitaan vain ennalta opittujen proseduurijonojen käyttöä (Hiebert & Lefevre 1986, 7). Murtolukujen yhteenlaskemisessa proseduraalista tietoa on esimerkiksi se, kun oppilas laskee murtolukuja yhteen tai vaikkapa laventaa. Nämä toiminnot eivät välttämättä vaadi konseptuaalista tietoa eli oppilaan ei tarvitse ymmärtää tekemäänsä.

Matemaattisen ajattelun ymmärtämisen kannalta on tärkeää miettiä kuinka nämä tiedon lajit suhtautuvat toisiinsa. Hiebertin ja Lefevren (1986, 9-16) mukaan konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon yhteen saattaminen on tärkeää. Heidän mukaansa konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon kytkeminen toisiinsa vahvistaa proseduraalisen tiedon hallintaa antamalla proseduraaliselle tiedolle mielekkään merkityksen ja yhteyden suurempaan tietoverkkoon. Ymmärretyt proseduurit vapauttavat työmuistia ja ovat helpompia palauttaa mieleen kuin ulkoa opetellut proseduurit. Lisäksi Hiebertin ja Lefevren mukaan tietojen kytkentä mahdollistaa myös tehokkaamman konseptuaalisen tiedon käyttämisen ja soveltamisen. Joutsenlahti (2003, 6) kuvaakin, että matemaattinen tieto sisältää aina merkityksellistä ja perustavaa laatua olevia yhteyksiä konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välillä.

2.2 Pirien ja Kierenin matemaattisen ymmärtämisen kasvun mallin vaiheet

Pirie ja Kieren malli pyrkii yhdistämään matemaattisen ymmärtämisen kasvun von Glaserfeldin konstruktivistiseen oppimisnäkemykseen, jonka mukaan ymmärtämisen kasvu perustuu yksilön jatkuvaan tiedon prosessointiin (Pirie & Kieren 1994, 166). Pirien ja Kierenin mukaan matemaattisen ymmärryksen kasvu on kokonaisvaltainen, dynaaminen ja epälineaarinen prosessi, josta voidaan erottaa erilaisia ymmärtämisprosessin vaiheita. Pirien ja Kierenin (1994, 166–171) mukaan nämä ymmärtämisprosessin vaiheet[1] ovat:

1. Alkeistietämisen vaihe (*Primitive knowing*, **PK**)
2. Mielikuvan muodostamisen vaihe (*Image making*, **IM**)
3. Mielikuvan hallinnan vaihe (*Image having*, **IH**)
4. Ominaisuuksien huomioimisen vaihe (*Property noticing*, **PN**)
5. Formalisoinnin vaihe (*Formalising*, **F**)
6. Havaitsemisen vaihe (*Observing*, **O**)
7. Jäsentämisen vaihe (*Structuring*, **S**)
8. Keksimisen vaihe (*Inventising*, **I**)

Seuraavassa esittelen Pirien ja Kierenin (1994) mallin vaiheet Joutsenlahden (2005, 69–71) mukaan.

Alkeistietämisen vaihe (**PK**) on oppilaan matemaattisen ymmärtämisen lähtökohta. Alkeistietäminen sisältää kaiken oppilaan omaaman tiedon, erityisesti esi- ja lähtötiedot uuden käsitteen oppimiseen. Alkeistietämisellä ei tarkoiteta alkeellista matematiikkaa, vaan nimenomaan oppilaan ennakkotietoja ja -ymmärrystä, jotka oppilas tuo mukanaan oppimistilanteeseen eli toisin sanoen ymmärtämisprosessin lähtötilaa. Esimerkiksi murtolukujen yhteenlaskussa oppilaan on ennakkoon osattava murtoluvun ja yhteenlaskun käsitteet, jotta murtolukujen yhteenlaskun opetteleminen on mielekästä.

[1] Suomennokset ovat Silfverbergin ja Joutsenlahden (Joutsenlahti 2005, 69; Silfverberg 1999, 57)

Mielikuvan muodostamisen vaiheessa (**IM**) oppilas käyttää esitietojaan uudella tavalla ja luo uusia yhteyksiä esitietojensa välille. Oppilaalle syntyy opittavasta käsitteestä ideoita tai mielikuvia. Syntyneet mielikuvat ovat mentaalisia ja ne voivat olla esimerkiksi visuaalisia tai algebrallisia. Oppilaan mielikuvat rakentuvat oppilaan oman toiminnan kautta. Erityisesti erilaiset havainnointivälineet auttavat oppilasta mielikuvan luomisessa. Murtolukujen yhteenlaskussa oppilas voi harjoitella murtolukujen summaamista konkreettisilla malleilla kuten geolaattojen avulla.

Mielikuvan hallinnan vaiheessa (**IH**) oppilas on kehittänyt mielikuviaan opeteltavasta käsitteestä ja pystyy hallitsemaan niitä mentaalitasolla. Lisäksi oppilas pystyy toimimaan symbolitasolla ilman edellisessä vaiheessa tarvittuja konkreettisia apuvälineitä. Tässä vaiheessa oppilaan luomat mielikuvat opeteltavasta käsitteestä voivat olla vielä hyvinkin puutteellisia. Esimerkiksi murtolukujen yhteenlaskussa oppilas pystyy irtautumaan konkreettisista murtolukumalleista ja käsittelemään murtolukuja lukuina, jotka kuvaavat määrää.

Ominaisuuksien huomioimisen vaiheessa (**PN**) oppilas pystyy käsittelemään ja yhdistelemään mielikuviaan sekä rakentamaan näiden avulla opeteltavaan käsitteeseen liittyviä ominaisuuksia. Oppilas pystyy myös perustelemaan käsitteen ominaisuuksia. Murtolukujen yhteenlaskussa oppilas laventaa murtoluvut samannimisiksi, jotta hän pystyy laskemaan murtoluvut yhteen.

Formalisoinnin vaiheessa (**F**) oppilas pystyy toimimaan symbolisella tasolla ilman mielikuviaan. Tämä tapahtuu kun oppilas pystyy soveltamaan laskusääntöä tai menetelmää. Tässä vaiheessa oppilas on valmis formaaliin matemaattiseen määrittelyyn käsiteltävästä asiasta. Murtolukujen yhteenlaskussa oppilas käyttää murtolukujen yhteenlaskua matemaattisena operaationa, joka toimii kaikille murtoluvuille riippumatta yhteenlaskettavien määrästä ja murtoluvuista.

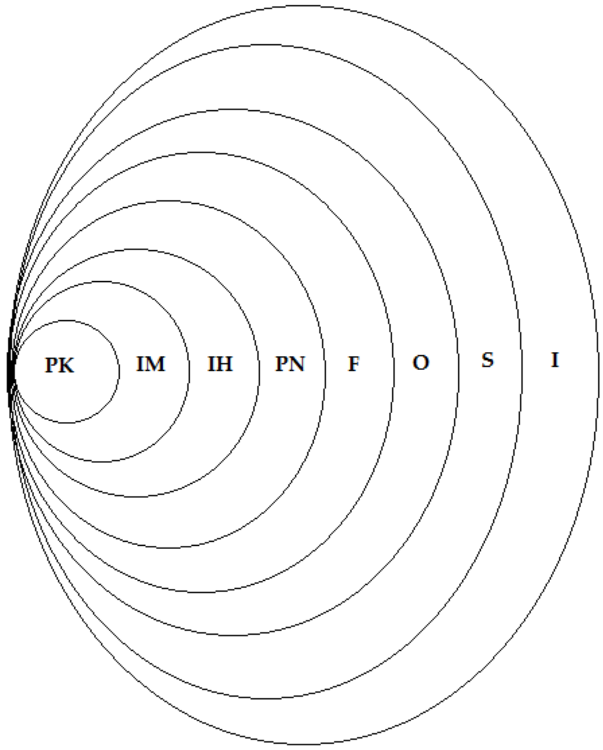
Havaitsemisen vaiheessa (**O**) oppilas reflektoi ja kontrolloi formaalia toimintaansa, minkä avulla oppilas pystyy kehittämään käsitystään opiskeltavasta ilmiöstä. Lisäksi oppilas pystyy ilmaisemaan havaintojaan matemaattisessa muodossa. Murtolukujen yhteenlaskussa oppilas huomaa, että murtoluvut muodostavat ekvivalenssiluokkia, joista voidaan valita yhteenlaskuun sopiva edustaja (sama nimittäjä).

Jäsentämisen vaiheessa (**S**) oppilas alkaa muodostaa formaaleista havainnoistaan matemaattista teoriaa. Oppilas hahmottaa muodostamiensa teorioiden väliset yhteydet ja pystyy perustelemaan väitteitään loogisesti tai matemaattisten argumenttien avulla. Murtolukujen yhteenlasku esimerkissä oppilas näkee murtoluvut järjestettyinä pareina $\frac{a}{b}$ ja murtolukujen yhteenlaskun niiden välisenä operaationa, joka on määritelty laskualgoritmi.

Keksimisen vaihe (**I**) on Pirien ja Kierenin teorian korkein ymmärtämisen taso. Oppilas luopuu kaikista ennakkokäsityksistään ja ymmärrys asiasta on kokonaisvaltainen. Oppilas pystyy luomaan aiheeseen liittyviä kysymyksiä, joista voi muodostua uusia käsitteitä. Murtolukujen yhteenlaskussa oppilas voisi esimerkiksi lähteä pohtimaan järjestettyjä lukunelikoita $a/b/c/d$ ja niiden yhteenlaskua.

Kuten aikaisemmin näimme, niin alkeistietämisen vaihe sisältää oppilaan matemaattisen ymmärtämisen perustan uuden oppimiselle. Tämän takia oppilaan ymmärtämisprosessissa saavutettu ymmärrys, kokonaisuudessaan tai osittain, voidaan havaita alkeistietämisen vaiheessa uudessa ymmärtämisprosessissa. Esimerkiksi oppilaan murtolukujen ymmärrys, riippumatta ymmärryksen tasosta, muodostaa osan oppilaan alkeistietämisen vaiheesta desimaalilukujen ymmärtämisprosessille. (Pirie & Kieren 1994, 172.)

Pirien ja Kierenin mukaan matemaattisen ymmärryksen kasvu rakentuu edellä esiteltyjen vaiheiden kautta. Vaiheiden kehityksessä näkyy siirtyminen erikoistapauksista yleiseen ja konkreettisesta abstraktiin. Vaiheet kuvataan usein sisäkkäisinä kerroksina korostamaan sitä, että jokainen ulompi vaihe sisältää myös kaikki sisemmät vaiheet (kuvio 1). (Pirie & Kieren 1994, 172.)



Kuvio 1. Matemaattisen ymmärtämisen kasvun vaiheet Pirien ja Kierenin (1994) mukaan.

2.3 Matemaattisen ymmärtämisprosessin kehittyminen ja takaisin kiertyminen

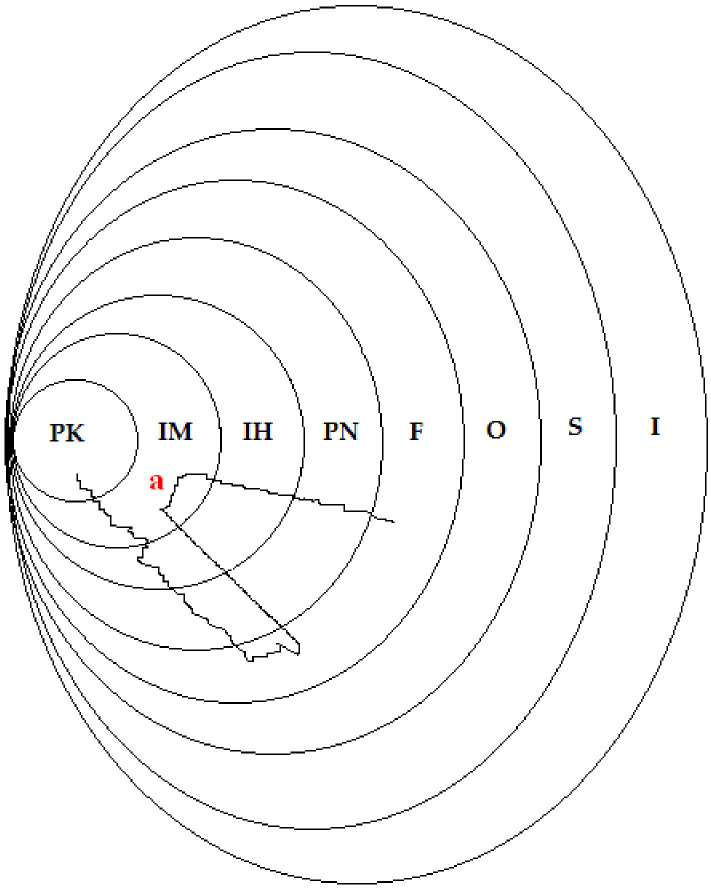
Pirien ja Kierenin mukaan ymmärtämisprosessi ei kuitenkaan ole suoraviivainen matka alkeistietämisen vaiheesta (**PK**) keksimisen vaiheeseen (**I**), vaan prosessin aikana joudutaan usein palaamaan myös aikaisempiin vaiheisiin. Kun oppilas kohtaa jonkin ongelman, jota hän ei pysty ratkaisemaan, hänen täytyy palata jollekin sisemmälle tasolle korjaamaan puutteellista ymmärrystään. Tätä Pirie ja Kieren (1994, 173) kutsuvat takaisin kiertymiseksi (*folding back*).

Seuraava esimerkki takaisin kiertymisestä on Pirien ja Kierenin (1994, 70) tutkimuksesta, jossa 10-vuotias Katia opettelee murtolukuja ja niiden yhteenlaskua. Pitsoja piirtämällä (konkreettinen murtolukumalli) Katia on muodostanut mielikuvan murtoluvuista (**IH**). Katia on myös huomannut, että $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\ldots$ ja että samannimisiä murtolukuja voidaan laskea yhteen (ominaisuuksien huomioimisen vaihe (**PN**)). Lisäksi Katia pystyy pääsemään formalisoinnin tasolle (**F**) määrittelemällä murtoluvut seuraavasti: murtoluvussa on kaksi lukua, josta alempi kertoo jaettujen osien määrän ja ylempi luku kuinka monta niitä hänellä on. Katian ongelmaksi tulee kuitenkin se, että hän ei osaa summata erinimisiä murtolukuja kuten puolikkaita ja kolmasosia. Opettaja kysyy tässä vaiheessa Katialta mitä nämä murtoluvut oikeastaan ovat. Katia vastaa, että murtoluvut tulevat kun jaetaan jotain osiin – yleensä pitsoja. Tämän jälkeen Katia alkoi jälleen piirtää pitsoja paperille eli hän palasi mielikuvan muodostamisen vaiheeseen (**IM**). Piirtämällä pitsoja ja aiemman huomion $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\ldots$ avulla Katia pystyy muodostamaan samannimiset murtoluvut $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ ja $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$. Opettajan kysymyksen aiheuttaman takaisin kiertymisen avulla Katia siis palaa formalisoinnin vaiheesta (**F**) mielikuvan muodostamisen vaiheeseen (**IM**), mikä auttaa Katiaa ratkaisemaan ongelman ja laajentamaan ymmärrystään murtoluvuista.

Pirien ja Kierenin (1994) mukaan siirtyessään tasolta toiselle ensimmäisen kerran, oppilas joutuu käymään kaikki vaiheet läpi järjestyksessä, mutta tämän jälkeen hän voi liikkua vaiheiden välillä molempiin suuntiin, ohittaen ymmärtämisprosessin kannalta turhat vaiheet. Erityisesti tämä tarkoittaa sitä, että takaisin kiertymisen ei tarvitse tapahtua nimenomaan edelliselle tasolle, vaan jollekin edellisistä tasoista. Lisäksi takaisin kiertymisen jälkeen oppilaan ei tarvitse prosessoida jokaista vaihetta uudelleen. Oppilaiden liikkuminen tasojen välillä ja ymmärryksen laatu eri tasoilla ovat hyvin yksilöllisiä, mikä on todettu useissa tutkimuksissa (Nillas 2010; Pirie & Martin 2000; Pirie & Kieren 1994).

Martinin, LaCroixin ja Fownesin (2005, 22) mukaan takaisin kiertyminen on tarkoituksenmukaista toimintaa ja sen avulla oppilaalla on mahdollisuus laajentaa ymmärrystään. Takaisin kiertymistä pidetään tyypillisenä matemaattisen ajattelun piirteenä (Joutsenlahti 2005, 73) ja useassa tutkimuksessa se on todettu hyvin tärkeäksi osaksi matemaattisen ymmärtämisprosessin kasvua (Nillas 2010; Pirie & Martin 2000; Pirie & Kieren 1994).

Pirien ja Kierenin (1994) mallin mukaista oppilaan matemaattisen ymmärryksen kasvua voidaan kuvata myös visuaalisesti oppimispolun avulla. Oppimispolusta voidaan lukea oppilaan liikkuminen Pirien ja Kierenin ymmärtämisen vaiheiden välillä. Kuviossa 2 on edellä olleessa esimerkissä murtolukujen yhteenlaskua pohtineen Katian oppimispolku siltä osin, kun se yllä esitettiin.



Kuvio 2. Katian oppimispolku. Takaisin kiertymistä (**F**) → (**IM**) korostettu merkitsemällä oppimispolkuun piste a.

2.4 Pirien ja Kierenin malli opetuskokeiluissa

Pirien ja Kierenin (1994, 165) malli on alun perin kehitetty kuvaamaan oppilaiden matemaattisen ajattelun kasvua kouluympäristössä, missä matemaattisen ajattelun kehittymiseen vaikuttaa useita erilaisia muuttujia kuten opettaja, oppilastoverit ja opetusvälineet. Mallin avulla on tutkittu laajasti yläaste- ja lukioikäisten oppijoiden matemaattisen ymmärtämisen kasvua (Pirie & Kieren 1994; Pirie & Martin 2000; Martin & Pirie 2003), mutta esimerkiksi myös luokanopettajia (Nillas 2010). Lisäksi mallia ei ole kiinnitetty tiettyyn matemaattiseen teemaan, vaan sitä on käytetty erilaisten matemaattisten aiheiden kuten esimerkiksi murtolukujen (Pirie & Kieren 1994) ja raja-arvon ymmärtämisen kasvun kuvaamiseen (Pirie & Martin 2000). Pirien ja Kierenin mallia on sovellettu myös erilaisissa oppimisympäristöissä kuten perinteisessä koululuokassa (Pirie & Kieren 1994) ja tietokoneavusteisessa matematiikan opetuksen ympäristössä (Martin & Pirie 2003). Näiden edellä mainittujen asioiden takia Pirien ja Kierenin malli soveltuu hyvin myös tähän tutkimukseen kuvaamaan oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kasvua.

3 TUTKIVA MATEMATIIKKA

”Matematiikka on oikeastaan vain luovaa ajattelua tiettyjen sääntöjen puitteissa.”
(Aatos Lahtinen 2008)

Matematiikan määritteleminen yhdellä lauseella on hankalaa, ellei jopa mahdotonta. Usein matematiikan perustana pidetään täsmällisiä sääntöjä ja aukotonta päättelemistä. Toisaalta matematiikkaa sanotaan myös tieteiden kuningattareksi, jossa korostuu asioiden ymmärtäminen ja kriittinen sekä luova ajattelu. Matematiikka on myös vaikuttanut vahvasti ihmiskunnan historiaan sekä kulttuuriin ja tulee vaikuttamaan niihin myös tulevaisuudessa. Tämän perusteella kouluaineen nimeltä matematiikka tulisi tarjota monia taitoja ja näkökulmia oppilaalle: 1) Todistamisen, päättelemisen ja perustelemisen taidot, joihin liittyy kriittinen ja luova ajattelutapa. 2) Näkemys matematiikasta tieteenä, joka tarjoaa haasteita ja onnistumisia. 3) Matematiikan vaikutus maailman kehitykseen, tieteeseen, historiaan ja kulttuuriin. Samanlaisia tavoitteita löydetään sekä kansainvälisistä että kotimaisista opetussuunnitelmista (ks. Opetushallitus 2003, 2004; National Council of Teaching Mathematics 2000).

Lähes kaikille perinteinen opettajajohtoinen matematiikan oppituntimalli on tuttu. Tunnin aluksi tarkastetaan läksyt, jonka jälkeen siirrytään uuteen asiaan opettajan luennolla. Kun opettaja on saanut liitutaulun täyteen, niin oppilaat siirtyvät tekemään oppikirjan tehtäviä. Tunnin lopuksi opettaja antaa kotitehtävät ja oppilaat kirmaavat ulos luokasta. Opetus sisältää paljon puhetta, mutta vain vähän ymmärrystä. Goosin (2004, 259) ja Battistan (2002) mukaan perinteinen matematiikan opettaminen korostaa kopiointia ja ulkoa opettelua. Lisäksi Battistan mukaan opetus on oppilaille liian abstraktia ja formaalia, mikä vaikeuttaa matematiikan ymmärtämistä.

Matematiikan oppimisen ja opettamisen tutkijat ovat jo pitkään olleet sitä mieltä, että perinteinen matematiikan opettaminen ei tue matematiikan oppimista parhaalla mahdollisella tavalla. Tavanomainen matematiikan opettaminen ei esimerkiksi kehitä kriittisen ajattelun taitoja (Keranto 1998). Kerannon mukaan oppilailta viedään mahdollisuus perustelemiseen, kyselemiseen ja keskusteluun muiden oppilaiden sekä opettajan kanssa. Lisäksi Kerannon mukaan esityöstetty, virheetön matematiikka ei anna oppilaille realistista kuvaa matematiikasta, jonka kehittely sisältää umpikujia, virhepäätelmiä ja kriittistä ajattelua.

Perinteisen matematiikan opetuksen ongelmiin vastatakseen useat suomalaiset ja kansainväliset tutkijat ovat kehittäneet oppilaskeskeisiä opetustapoja, joissa oppilaat tutkivat itse matematiikan ilmiöitä. Näitä opetustapoja ovat muun muassa tutkiva oppiminen (*inquiry learning*)

(Hassard & Dias 2009; Goos 2004), ongelmanratkaisu (*problem solving*) (Hino 2007; Shimizu 1999), tutkiva matematiikka (Pehkonen & Tuuri 2005; Pehkonen 2003) ja elämyksellinen matematiikan opettaminen (Portaankorva-Koivisto 2010). Tämän tutkielman opetusmenetelmä pohjautuu erityisesti Hähkiöniemen (Hähkiöniemi 2010, painossa a, painossa b; Hähkiöniemi & Leppäaho 2010) tutkimuksissa käytettyyn tutkivaan matematiikkaan ja sillä on paljon samankaltaisuuksia yllä mainittujen opetusmenetelmien ja -tapojen kanssa. Tutkivan matematiikan kulmakiviksi voidaan nimetä oppilaskeskeisyys, tutkiminen, vuorovaikutus ja näkemys matematiikan monipuolisuudesta.

3.1 Mitä tutkiva matematiikka on?

Tutkivan matematiikan keskipisteessä on oppilas. Oppilaat itse tutkivat matemaattisia ilmiötä muiden oppilaiden ja opettajan kanssa. Tutkiessaan matemaattista ilmiötä heidän täytyy hallita jo opittuja asioita ja osata yhdistää niitä uusiin asioihin. He rakentavat ratkaisuehdotuksia, argumentoivat, perustelevat sekä joutuvat haastamaan omia käsityksiään ja ennakkotietojaan (Goos 2004).

Jotta oppilaat oppisivat tutkimisensa avulla, niin on tärkeää muistaa, että oppilaat eivät ole matemaatikoita. Hassardin ja Diasin (2009, 41) mukaan oppilaiden ajatteluprosessia ja käsityksien rakentamista rajoittaa esimerkiksi heidän ennakkokäsityksensä, kokemuksensa, kognitiivinen tasonsa sekä kielen käyttönsä verrattuna matemaatikoihin. Tällöin opetuksen tulee lähteä oppilaiden omista lähtökohdista ja tutkimisen tulee tapahtua oppilaiden omalla kielellä, mikä on luontaista tutkivalle matematiikalle. Tämän kautta oppilaat myös motivoituvat matematiikan opiskeluun ja heille kehittyy matematiikan omistajuus (ks. Francisco & Maher 2005).

Vaikka opettaja ei tutkivassa matematiikassa olekaan luokan keskipiste, niin hän on edelleen tärkeässä osassa oppimisen ohjaajana. Tutkivassa matematiikassa opettajan rooli ei ole autoritäärinen totuuden torvi, vaan hän pyrkii ohjaamaan oppilaita tutkimisessa ja saamaan heidät itse oppimaan sekä käyttämään korkeampia ajattelutaitojaan. Opettajan roolista ja taidoista ohjata oppilasta tutkivan matematiikan oppitunnilla on tehty useita tutkimuksia (Stein, Engle, Smith & Hughes 2008; Goos 2004; Martino & Maher 1999; Shimizu 1999). Tarkastellaan opettajan roolia esimerkiksi tutkivan matematiikan oppitunnilla Japanissa.

Shimizun (1999, 109–111) mukaan tutkivan matematiikan oppitunnilla opettajalla on neljä tärkeää ”roolia”: *Hatsumon*, *Kikan-shido, Neriage* ja *Matome*. *Hatsumon* tarkoittaa avainkysymystä (*asking a key question*), jonka avulla opettaja pyrkii kiinnittämään oppilaiden ajatuksia johonkin tiettyyn asiaan jossain oppitunnin vaiheessa. Esimerkiksi oppitunnin alussa opettaja voi esittää kysymyksiä selvittääkseen oppilaiden ennakkoymmärrystä opiskeltavasta asiasta. *Kikan-shidon* (*instruction at students´ desk*) tarkoittaa opettajan ohjaamistoimintaa oppilaiden ongelmanratkaisussa. Opettaja kiertelee luokassa, tarkkailee oppilaita ja ohjaa heitä kohti oppimistavoitetta. *Neriage* (*kneading up* tai *polishing up*) kuvaa opettajan roolia oppilaiden matemaattisten ideoiden kehittäjänä yhteisen koontikeskustelun aikana. Oppitunnin lopussa opettaja ohjaa koko luokan yhteiskeskustelua, jonka tavoitteena on se, että oppilaat huomaisivat oikeat sekä väärät ratkaisutavat ja ymmärtäisivät opiskeltavan matemaattisen idean. Japanilaiset opettajat pitävät tätä kohtaa tärkeimpänä oppimisen kannalta. Ryhmäkeskustelun ohjaaminen perustuu opettajan havainnointiin oppilaiden työskentelystä ja toiminnasta eli *Kikan-Shidoniin*. *Matomen* (*summing up*) aikana opettaja kokoaa yhteen oppitunnilla tulleet ideat ja pyrkii laajentamaan oppilaiden ymmärrystä.

Matematiikan vahvuutena voidaan pitää sitä, että se kietoutuu monelle elämän osa-alueella ja tällöin sitä voi opettaa monista erilaisista näkökulmista. Tutkivassa matematiikassa matematiikkaa pyritäänkin katsomaan oppilaan näkökulmasta ja matematiikan opettamisessa pyritään käyttämään erilaisia, oppilaiden maailmaa lähellä olevia teemoja. Esimerkiksi Nicol ja Crespo (2005) ovat osoittaneet tutkimuksessaan, että mielikuvituksellinen matemaattinen ongelma innostaa ja sitouttaa oppilaita matematiikkaan, mikä usein perinteisiltä koulumatematiikan oppitunneilta puuttuu. Toisaalta tutkivaan matematiikkaan kuuluvat myös oppimisen apuvälineet, jotka tukevat oppilaiden tutkimista. Erityisesti teknologia-avusteisen opettamisen kehitys on tuonut tutkivaan matematiikkaan uuden, hyväksi havaitun, näkökulman (Hähkiöniemi painossa a, painossa b). Esimerkiksi matematiikan oppimiseen kehitetyt tietokoneohjelmat kuten ilmainen GeoGebra tarjoavat oppilaille tehokkaan ja havainnollistavan työkalun matematiikan tutkimiseen.

Miten tutkiva matematiikka vaikuttaa oppimiseen? Tutkimuksien mukaan tutkiva matematiikka parantaa matematiikan oppimista. Hinon (2007, 512) mukaan tutkiva matematiikka auttaa oppilaita kehittämään heidän matemaattista ajatteluaan ja matematiikan ymmärtämistä. Lisäksi Hinon mukaan tutkiva matematiikka parantaa oppilaiden itsearviointikykyä ja työskentelytapoja. Useissa tutkimuksissa on saatu samansuuntaisia tuloksia (Francisco & Maher 2005; Al Bermanei, Kuusisto, Raivonen & Punelpuro 2011). Goosin (2004, 282–283) mukaan oppilaat pystyvät yhdistämään tieteellisiä käsitteitä ja jokapäiväisen elämän ilmiöitä paremmin sekä kehittävät kriittistä ajatteluaan tutkivan matematiikan avulla. Lisäksi tutkiva matematiikka kehittää oppilaiden motivaatiota ja asenteita matematiikka kohtaan positiiviseen suuntaan (Francisco 2005; Nicol & Crespo 2005).

3.2 Tutkivan matematiikan oppitunti

Shimizu (1999, 108–109) jakaa japanilaisen tutkivan matematiikan oppitunnin neljään vaiheeseen: ongelman esittämiseen, yksilölliseen ongelmanratkaisuun, luokan yhteiseen keskusteluun ongelmanratkaisusta ja opettajan tekemään yhteenvetoon. Yleisesti tutkivan matematiikan tuntia pidetään hyvin samantyyppisenä ja yksinkertaisimmillaan tutkivan matematiikan tunti jakautuukin kolmeen osaan: alustus-, tutkimus- ja koontivaiheeseen (Stein ym. 2008). Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin Steinin ym. mukaista tutkivan matematiikan oppituntia: mitä eri tunnin vaiheessa tapahtuu, mikä on opettajan rooli ja mitä oppilaat tekevät. Opettajan toiminta eri oppitunnin vaiheissa perustuu Hähkiöniemen (2010) tekemiin opettajan ohjeisiin tutkivan matematiikan oppitunneille.

Alustusvaiheen tarkoituksena on esitellä oppilaille oppitunnin ongelma ja antaa heille työkalut ongelman tutkimiseen. Alustusvaiheessa tutkittava ongelma pyritään kytkemään jo opittuun matemaattiseen tietoon. Lisäksi opettajan tehtävä on motivoida oppilaita ja rakentaa avointa sekä kannustavaa ilmapiiriä luokkaan, mikä on erityisen tärkeää oppilaiden onnistuneen työskentelyn kannalta. Opettaja ei tarjoa valmiita ratkaisuehdotuksia ja malliesimerkkejä. Opettajan tehtävänä on myös varmistaa, että oppilaat ymmärtävät ongelman ja tavoitteen sekä työskentelytavat.

Tutkimusvaiheessa oppilaat pyrkivät ratkaisemaan ongelmaa ryhmissä opettajan kierrellessä luokassa (myös yksilökohtaisia aktiviteettejä on mahdollista käyttää). Opettajan tehtävä on johdatella oppilaita tutkimisessa ja auttaa heidän työskentelyään. Opettaja kuuntelee oppilaiden ideoita ja pyrkii ymmärtämään niitä. Opettaja pyrkii ohjaamaan oppilaita omaan ajatteluun. Martinon ja Maherin (1999) mukaan erityisesti opettajan perustelemista ja todistamista aktivoivat kysymykset auttavat oppilaita selittämään, arvioimaan ja tarkentamaan vastauksiaan, mikä auttaa oppimisessa. Opettajan tehtävänä ei kuitenkaan ole ottaa kantaa oppilaiden ratkaisujen oikeellisuuteen, vaan pyrkiä ohjaamaan oppilaat itsenäisesti tarkastelemaan vastauksiensa oikeellisuutta. Opettaja myös motivoi, kannustaa ja kehuu oppilaita. Kannustamisen tavoitteena on saada oppilaat motivoitumaan tutkivaan työskentelyyn, joten kannustamisen tulee liittyä yrittämiseen ja työskentelyyn, ei pelkkiin oikeisiin vastauksiin. Opettaja rytmittää oppituntia ja pyrkii ohjaamaan työskentelyä kohti oppitunnin tavoitetta. Opettaja voi nostaa esille oppilaiden havaintoja tai pitää väliyhteenvetoja oppitunnin onnistumiseksi. Opettaja ei kuitenkaan saa olla koko ajan ohjaamassa oppilaita, vaan on tärkeää antaa heille aikaa omaan keskeytymättömään pohdiskeluun.

Koontivaiheessa oppilaat keskustelevat ja arvioivat vastauksiaan. Koontivaiheessa ei ole tarkoitus käydä kaikkia mahdollisia ratkaisuehdotuksia ja ideoita läpi, vaan opettajan vastuulla on valita olennaisimmat ideat. Opettaja pyrkii edelleen ohjaamaan oppilaita arvioimaan ratkaisujaan ja keskustelemaan niistä. Lisäksi opettajan tehtävänä on standardisoida oppilaiden merkinnät ja varmistaa oikea tieto. Japanilaisella matematiikan tunnilla koontivaiheen tärkeänä tavoitteena pidetään myös sitä, että opettaja pystyy laajentamaan oppilaiden jo saavutettua ymmärrystä oppitunnin aiheesta (Shimizu, 1999).

3.3 Oppitunnin suunnittelu

Oppitunnin suunnittelemiseen vaikuttaa useita asioita kuten fyysiset tilat, ajankohta, ympäristö ja oppilaat. Nämä asiat merkitään yleensä kronologisesti kulkevaan tuntisuunnitelmaan, josta käy ilmi oppitunnin vaiheet, tapahtumat ja tavoitteet. Tätä opetellaan opetusharjoitteluiden aikana runsaasti ja jokainen oppii omanlaisensa tavan suunnitella oppitunteja. Tutkivan matematiikan oppitunnin suunnitteluun kuuluu samoja elementtejä, mutta erityisen tärkeään asemaan nousee oppilaiden toiminnan ennakoiminen. Tutkivan matematiikan oppitunnin onnistumiseksi opettajan täytyy pystyä rakentamaan oikeanlainen johdatus tutkittavaan aiheeseen, keksiä oppilaille heille sopivan tasoisia ongelmia ja ohjata oppilaat kohti oppimistavoitetta. Tämä ei onnistu ilman oppilaiden tietojen ja toiminnan ennakoimista.

Japanissa oppilaiden toiminnan ennakointiin on keskitytty tarkasti ja jo opiskeluvaiheessa opettajaopiskelijoille opetetaan varsin tarkka sekä yksityiskohtainen tapa suunnitella oppitunteja Shimizun taulukon (ks. taulukko 1) avulla (Shimizu 1999). Samaan tapaan kuin Suomessakin Shimizun taulukkoon merkitään oppitunnin vaiheet ja oppimistavat. Tämän lisäksi he analysoivat tarkasti minkälaisia reaktioita oppilailla voi erilaisissa tilanteissa tulla ja kuinka opettaja pystyy vastaamaan oppilaiden reaktioihin. Tämä helpottaa opettajan toimintaa oppitunnilla: opettaja ymmärtää helpommin oppilaiden ideoita ja pystyy tällöin myös ohjaamaan heidän oppimistaan paremmin. Liitteessä 2 on opetuskokeiluun suunniteltu ja käytetty Shimizun taulukko.

Taulukko 1. Shimizun taulukko oppitunnin suunnitteluun (Shimizu 1999, 113).

Oppitunnin vaihe	Oppimistapa ja -aktiviteetti	Oppilaiden reaktiot	Opettajan reaktio / huomioitavaa opettamisessa
Ongelman esittäminen Oppilaiden henkilökohtainen ongelmanratkaiseminen Koko luokan yhteinen keskustelu Yhteenveto/ Laajennus			

3.4 Ongelmia tutkivan matematiikan käytössä

Omien opiskelu- ja opetuskokemuksieni mukaan tutkivaa matematiikka käytetään tutkimustuloksista huolimatta edelleen vähän suomalaisilla matematiikan tunneilla. Pehkonen (2004) pitää opettajien matematiikkakuvaa suurimpana esteenä matematiikan opettamisen kehittämiseksi tutkivaan suuntaan. Matematiikkakuvan voidaan karkeasti ajatellen tarkoittavan yksilön käsitystä siitä mitä matematiikka on ja miten sitä opitaan (ks. esim. Pietilä 2002, 19–62). Pehkosen mukaan opettaja ei toteuta tutkivan matematiikan periaatteita, jos tutkiva matematiikka ei kuulu opettajan oppimiskäsitykseen, vaikka opettaja olisikin koulutettu käyttämään tutkivaa matematiikkaa. Näin voi käydä esimerkiksi silloin, kun opettaja ajattelee matematiikan olevan sääntöjen mukaista laskemista, jolloin oppilaiden omakohtainen matematiikan tutkiminen on turhaa.

Myöskään opettajan rooli tutkivan matematiikan kaltaisilla oppitunneilla ei ole opettajille itsestäänselvyys. Hähkiöniemen ja Leppäahon (2010) mukaan matematiikan opettajaopiskelijoilla oli hypoteettisissa opetustilanteissa vaikeuksia ohjata oppilaita perustelemaan havaintojaan ja aktivoimaan oppilaita syvällisempään tutkimiseen. Samankaltaisia havaintoja on tehty myös muissa tutkimuksissa (Hähkiöniemi painossa a; Stein ym.2008).

Toisaalta uuden opetustavan käyttöönottaminen voi tuntua opettajasta raskaalta. Vaulamo ja Pehkonen (1999, 70) arvelevat, että uuden opetustavan käyttöönotossa opettajat pelkäävät aikapulaa ja työmäärän kasvua. Myös Hähkiöniemen (painossa a) tutkimuksessa on havaittavissa samanlaisia ajatuksia. Hähkiöniemen tutkimuksessa matematiikan opettaja koki, että tutkiva matematiikka vie enemmän aikaa kuin normaali opetus, jolloin jo täyteen ahdetut kurssit ja ylioppilaskirjoitukset eivät anna mahdollisuutta tutkivan matematiikan käytölle opetuksessa. Ongelmana on varmasti myös se, että valmista materiaalia opetussuunnitelman mukaiseen opettamiseen tutkivalla tavalla ei ole riittävästi saatavilla.

Matematiikkakuvan muuttamiseen ja opettajan roolin oppimiseen tarvitaan koulutusta sekä valmiita opetusmateriaaleja. Hähkiöniemen (painossa a) tutkimuksessa opettaja sai valmiiksi suunnitellun opetusjakson avulla mahdollisuuden kokeilla tutkivaa matematiikkaa ja analysoida sitä, mikä on tutkimuksien mukaan tärkeä osa uuden opetusmenetelmän omaksumista (Kaasila, Hannula, Laine & Pehkonen 2008). Jyväskylän yliopistossa tutkivan matematiikan käyttöä on harjoiteltu matematiikan aineenopettajaopinnoista (ks. Hähkiöniemi painossa b), mikä on varmasti oivallinen tapa vaikuttaa tulevien opettajien matematiikkakuvaan ja antaa valmiuksia tutkivan matematiikan toteuttamiseen. Lisäksi opettajaharjoittelijoiden suunnittelemat ja toteuttamat tutkivan matematiikan oppitunnit ja niihin liittyvät materiaalit ovat julkaistu (Hähkiöniemi painossa b; http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/), joten valmista materiaaliakin on jo saatavilla.

Tulevaisuudessa tutkivan matematiikan käyttäminen helpottunee myös opetussuunnitelmien puolelta, sillä Matemaattisten aineenopettajien liiton (MAOL) matematiikan ja tietotekniikan toimikunta 2011 on korostanut, että opetussuunnitelmien laajuuksia tulee tarkastella ja muuttaa siten, että opettajalla on aikaa syventää opetustaan esimerkiksi juuri tutkivan matematiikan avulla (Setälä 2011).

4 MAYOJEN LUKUJÄRJESTELMÄ

Tässä luvussa on lyhyt katsaus laajasta ja monipuolisesta mayakulttuurista sekä sen historiasta. Luvun päätarkoitus on esitellä mayojen lukujärjestelmää ja sen opettamista. Liitteessä 7 on esitelty matemaattisemmin lukujärjestelmiin liittyviä käsitteitä ja ominaisuuksia.

4.1 Mayojen kulttuuri ja historia

Mayakulttuuri on jaettu kolmeen aikakauteen: varhaisklassiseen, klassiseen ja jälkiklassiseen kauteen. Varhaisklassinen kausi sijoittuu vuosille 2000 eaa. – 300 jaa. Mayakulttuurin syntyminen ajoittuu 2000 eaa. – 1500 eaa., jolloin paimentolaiselämästä siirryttiin maanviljelyyn ja kyliä syntyi. Mayojen edeltäjinä pidetään olmeekkeja, vaikka nykytutkimusten valossa mayat elivät osittain samoihin aikoihin olmeekkien kanssa. Klassista kautta, 300 jaa. – 900 jaa., pidetään mayakulttuurin kulta-aikana. Tällöin tiede sekä taide kukoistivat ja mayoja oli miljoonia. Mayojen kulttuuri kohtasi kuitenkin rappion jälkiklassisella kaudella noin 900 jaa. – 1500 jaa. (Didrichsen 2005; Lauhgton 2006.)

Mayakulttuuriin liittyi vahvasti uskonnollisuus, joka vaikutti mayojen elämään. Mayat uskoivat, että jumalat loivat maailman ja tämän jälkeen ihmisen maissintähkästä. Mayakulttuuriin kuului useita jumalia, samaan tapaan kuin antiikin Kreikassa. Myös hallitsijoita pidettiin jumalina. Jumalien lepyttämiseen liittyi erilaisia riittejä ja rituaaleja, joista äärimmäisenä esimerkkinä oli ihmisten uhraaminen. (Laughton 2006, 8, 65–88.)

Mayojen taidetta pidetään hyvin kehittyneenä. He tekivät erilaisia taideteoksia muun muassa puusta, laastista, keramiikasta, jadesta, kivestä ja kotilonkuorista. Taideteokset vaihtelivat pienistä patsaista jopa kymmenen metrisiin kaiverrettuihin kivipylväisin, steeloihin. Taideteoksia luonnollisesti inspiroivat mayojen jumalat, tarut ja myytit. Taiteellisuus ja uskonnollisuus näkyivät myös mayojen pyramideissa, jotka toimivat temppeleinä ja palvontapaikkoina. (Laughton 2006, 6-22.)

Mayojen kirjoitus perustuu hieroglyfeihin, jotka jakaantuvat tavu- tai äännemerkkeihin ja sanamerkkeihin. Tämä aiheuttaa haasteen tulkita hieroglyfejä, joista nykyaikana pystytään tulkitsemaan noin 90 % (Didrichsen 2005). Hieroglyfejä löytyy esimerkiksi taiteesta ja mayakirjoista eli koodekseista. Katolisten munkkien hävityksen jäljiltä koodekseja on säilynyt tähän päivään saakka vain neljä: Dresdenin, Madridin, Pariisin ja Grolierin koodeksit. Koodeksit olivat kirjoitettu paperille, jonka valmistusmenetelmän uskotaan olevan yhtä vanha kuin kiinalaisilla. (Talvitie & Hiltunen 1993, 244.)

Mayojen kuuluisampana saavutuksena usein pidetään heidän kalenteriaan. Mayoilla oli käytössään ainakin kuusi toisiinsa liittyvää kalenteria. Näistä aurinkokalenteri eli *haab* on lähimpänä meidän kalenteriamme. *Haab* rakentui 18 kahdenkymmenen päivän kuukaudesta ja viidestä päivästä eli aurinkokalenterissa oli yhteensä 365 päivää. (Talvitie & Hiltunen 1993, 245–248.) Kalentereiden ylläpitämiseen mayat harrastivat tähtitiedettä ja tarkkailivat erityisesti venusta, kuuta ja aurinkoa. Tarkkojen tähtitieteellisten havaintojen perusteella mayat pystyivät rakentamaan monisyisen ja oikeellisen kalenterin.

Mayojen rikkaaseen kulttuuriin kuului myös monia muita ulottuvuuksia kuten pallopelejä, saunoja ja rikas ruokakulttuuri (ks. esim. Didrichsen 2005). Seuraavaksi kuitenkin tarkastelemme itse pääasiaa eli mayojen lukujärjestelmää.

4.2 Mayojen lukujärjestelmä

Mayojen lukujärjestelmää voidaan lähestyä heidän käyttämiensä lukusanojen avulla. Mayoilla on 10 ensimmäiselle luvulle omat nimensä ja luvut 12–19 lausutaan aiempien lukujen avulla, esimerkiksi luku 12 lausutaan *lahca* (*lahun* + *ca* = 10+2) (ks. taulukko 2). Ensimmäisten 19 lukusanan perusteella voidaan hyvin ajatella, että mayojen käyttämän lukujärjestelmän kantaluku olisi 10. (Ifrah 1998, 303.)

Taulukko 2. Mayojen lukusanat lukuun 19 saakka

1 *hun*	11 *buluc*
2 *ca*	12 *lahca* (*lahun* + *ca* = 10+2)
3 *ox*	13 *ox-lahun* (3+10)
4 *can*	14 *can-lahun* (4+10)
5 *ho*	15 *ho-lahun* (5+10)
6 *uac*	16 *uac-lahun* (6+10)
7 *uuc*	17 *uuc-lahuun* (7+10)
8 *uaxac*	18 *uaxac-lahun* (8+10)
9 *bolon*	19 *bolon lahun* (9+10)
10 *lahun*	

Toisaalta mayoilla oli omat erityiset sanat luvun 20 potensseille (ks. taulukko 3), eikä luvun 10 potensseille. Lisäksi lukua 20 suuremmat luvut lausuttiin pääasiassa luvun 20 avulla, vaikka joitain poikkeuksia onkin (Ifrah 1998, 303–304). Esimerkiksi luku 21 lausutaan *hun tu-kal* (yksi yli luvun 20), luku 33 *ox-lahun tu-kal* (13:sta yli luvun 21) ja luku 80 *can-kal* (neljä lukua 20). Siten lukusanoista voidaan päätellä, että mayat käyttivät kantalukunaan lukua 20, joka oli hyvin yleinen kantaluku esi-kolumbiaanisten kansojen lukujärjestelmissä (Ifrah 1998; Flegg 2002). Luku 20 vertaantuu ihmisen kokonaisuuteen, sillä 20 on yhtä kuin sormien ja varpaiden lukumäärä. Lisäksi mayojen kielessä luku 20 ja ihminen ovat synonyymeja (Talvitie & Hiltunen 1993, 245).

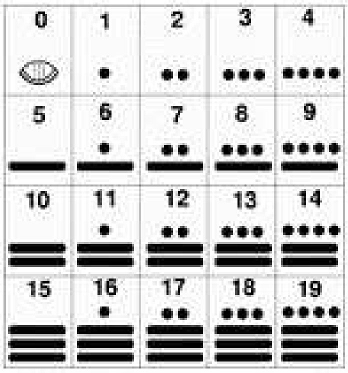
Taulukko 3. Mayojen lukusanat luvun 20 potensseille

1	*hun*
20	*hun-kal*
20^2	*hun-bak*
20^3	*hun-pic*
20^4	*calab*

.

Toisaalta mayojen lukujärjestelmää voidaan lähestyä heidän lukujen merkitsemistavan kautta. Mayojen alkuperäisiin lukumerkintöihin voi tutustua mayojen koodekseissa esimerkiksi Foundation for the advancement Mesoamerican studies kotisivuilla (http://www.famsi.org/mayawriting/codices/index.html). Myös kirjoitetuissa muodossa mayojen lukujärjestelmän kantaluku on 20. Mayat merkitsevät lukujaan hieroglyfein tai yksinkertaisilla merkeillä, joissa piste tarkoittaa yhtä, viiva tarkoittaa viittä ja simpukan kuori nollaa. Pisteiden ja viivojen avulla voidaan merkitä luvut 1-19 seuraavasti. Yksi, kaksi, kolme ja neljä pistettä tarkoittavat lukuja 1,2,3 ja 4. Viivalla merkitään lukua 5. Viivan ja sen yläpuolelle kirjoitetulla yhdellä, kahdella, kolmella ja neljällä pisteellä tarkoitetaan lukuja 6-9. Luku 10 merkitään kahdella viivalla ja näin jatkamalla voidaan merkitä luvut lukuun 19 saakka (taulukko 4). Lisäksi lukua 0 merkitään simpukan kuorella. Mayojen numeromerkit 0-19 muodostavat tarvittavat lukumerkinnät kaikkien lukujen merkitsemiseen kuten numerot 0-9 kymmenkantaisessa lukujärjestelmässä.

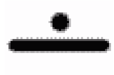
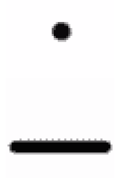
Taulukko 4. Mayojen lukumerkinnät luvuille 0-19



.

Lukujen kirjoittamiseen mayat käyttävät pystysuoraa paikkajärjestelmää, missä suurempi potenssi kirjoitetaan pienemmän yläpuolelle. Mayojen paikkajärjestelmän paikka-arvoja kutsutaan riveiksi tai kerroksiksi (*floors*) (Ifrah 1998, 308–309). Ensimmäisessä kerroksessa on luvun $20^0 = 1$, toisessa kerroksessa luvun $20^1 = 20$, kolmannessa kerroksessa luvun $20^2 = 400$, neljännessä kerroksessa luvun $20^3 = 8000$ kerrannaiset ja niin edelleen. Kerroksien välissä on selkeä väli, jotta luvut voidaan erottaa toisistaan, esimerkiksi luvut 25 ja 6 koostuvat samoista mayojen merkeistä, mutta merkit ovat eri kerroksissa (taulukko 5).

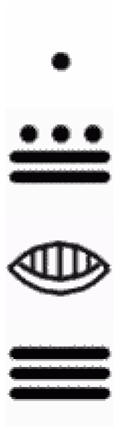
Taulukko 5. Mayojen merkinnät luvuille 6 ja 25.

Mayojen merkintä	Paikka-arvo	Desimaaliarvo
	6×1	$6 \times 1 = \mathbf{6}$
	1×20 5×1	$1 \times 20 + 5 \times 1 = \mathbf{25}$

Selvennetään mayojen merkitsemistapaa vielä esimerkin avulla. Desimaalijärjestelmässä luku 13215 voidaan kirjoittaa viiden paikka-arvon avulla eli viiden numeron avulla. Erityisesti edellisessä merkintätavassa numerot osoittavat tiettyjen kymmenen potenssien määrän:

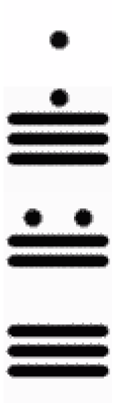
$1\times10000+3\times100+2\times100+1\times10+1\times5=13215$. Mayat taas ajattelevat luvun 20-järjestelmässä nykyaikaisin merkinnöin seuraavasti: $1\times8000+13\times400+0\times20+15\times1=1.13.0.15_{20}$. Näin ollen luvun 13215 merkitsemiseen tarvitaan vain neljä paikka-arvoa eli merkitsemiseen riittää neljä kerrosta (taulukko 6).

Taulukko 6. Luvun 13215 merkintä mayojen lukujärjestelmässä.

Mayojen merkintä	Paikka-arvo	Desimaaliarvo
	1×8000 13×400 0×20 15×1	$1\times8000+13\times400+$ $0\times20+15\times1=$ **13215**

Edellä esitetty mayojen lukujärjestelmä on puhdas 20-järjestelmä ja näin se esitetään useissa lähteissä (Flegg 2002; McLeish 1991). Tätä määritelmää käytetään myös opetuskokeilussa. Ifrahin (1998, 308–311) mukaan mayojen suullisesti käyttämä lukujärjestelmä on ollut 20-järjestelmä, mutta mayojen käyttämä kirjoitettu paikka-arvojärjestelmä ei hänen mukaansa ole puhdas 20-järjestelmä. Hänen mukaansa kolmannessa kerroksessa on luvun 400 sijaan luvun 360 kerrannaiset. Ifrahin mukaan tämä johtui siitä, että mayat käyttivät kirjoitettuja lukuja vain tähtitieteellisiin ja ajanlaskuun liittyviin laskuihin. Neljännestä kerroksesta eteenpäin mayoilla on käytössään edelleen 20-järjestelmä eli seuraavassa kerroksessa on 20 kertaa suurempi numero kuin alla. Kuitenkin kolmannen kerroksen epäsäännöllisyyden takia neljännen kerroksen paikka-arvo on luvun $20^4=8000$ sijasta luku $20\times360=7200$, viidennessä kerroksessa luku $20\times7200=144000$ luvun $20\times8000=160000$ sijaan ja niin edelleen. Esimerkiksi edellä ratkaistu luku 13215 esitys muotoutuisi seuraavasti $1\times7200+16\times360+12\times20+15\times1=1.16.12.15$ ja näin ollen luku kirjoitettaisiin huomattavan erilailla (ks. taulukko 7 ja vertaa taulukkoon 6).

Taulukko 7. Mayojen merkintätapa luvulle 13215, missä kolmannen rivin paikka-arvo on 360.

Mayojen merkintä	Paikka-arvo	Desimaaliarvo
	1×7200 16×360 12×20 15×1	$1 \times 7200 + 12 \times 360 +$ $12 \times 20 + 15 \times 1 = \mathbf{13215}$

Mayoja ohjasi jokaiselle elämänalueella uskonnollisuus, myös matematiikassa. Astronomia ja ajanlasku tarvitsivat hyvän lukujärjestelmän, jonka mayat myös rakensivat. Paikka-arvojärjestelmän ja nollan keksiminen ovat vaatineet kiistattomasti suurta matemaattista älykkyyttä, mutta muuten mayojen matemaattinen kehitys on ollut ilmeisesti vähäistä. (Ifrah 1998, 321–322.)

4.3 Tutkimuksia mayojen lukujärjestelmän opettamisesta

Omalta koulu- ja opiskeluajalta minulla ei ole kokemusta, että mayojen lukujärjestelmää olisi opetettu missään muodossa. Onkin ehkä varsin yleistä, että oppilaat kohtaavat muista lukujärjestelmistä todennäköisesti roomalaisten lukujärjestelmän, binäärijärjestelmän tai heksadesimaalijärjestelmän. Usein järjestelmiin tutustuminen on kuitenkin kokemuksieni mukaan enemmän pintapuolista kuin syvällistä.

Muualla maailmassa mayojen lukujärjestelmän opettamisesta on huomattavan paljon enemmän kokemusta. Matematiikan opettamisen ja oppimisen julkaisuissa on tasaisin väliajoin ollut artikkeleita mayojen lukujärjestelmän opettamisesta (esim. Overbay & Brod 2007; Farmer & Powers 2005; Lara-Alecio, Irby ja Morales-Aldana 1998). Lisäksi varsinkin Yhdysvaltalaiset matematiikan opettajat ja tutkijat ovat kehitelleet useita tuntisuunnitelmia ja jopa jaksosuunnitelmia mayojen matematiikan opettamisesta (ks. esim. Murgel 2000). Tuntisuunnitelmia leimaa yhteisöllisyys ja kulttuurin sekä historian yhdistäminen matematiikkaan.

Lukujärjestelmien opiskelu koulussa yhdistetään usein pelkkään lukujen muuntamiseen lukujärjestelmästä toiseen, mikä voi tuntua tylsältä ja itsestään selvältä. Tämänkaltainen lukujärjestelmien opettaminen ei myöskään vahvista oppilaiden lukujärjestelmien ymmärtämistä. Lisäksi lukujen muuttaminen toisiksi ei vaadi korkeamman ajattelun taitoja kuten luovaa tai kriittistä ajattelua, jos muuntoalgoritmi tiedetään. Löytämissäni opetuskokeiluissa lukujärjestelmästä toiseen muuntamista on jonkin verran ja tehtävien laatijoiden keskittyminen tuntuu enemmän olleen tehtävien elävöittämisessä kuin matemaattisesti hyvien tehtävien tekemisessä. Tehtäviä on elävöitetty muun muassa mayojen historialla ja kulttuurilla. Esimerkiksi Overbayn ja Brodin (2007) kehittelemässä tuntisuunnitelmassa on paljon perinteisiä muuntamisia lukujärjestelmästä toiseen, mutta tehtävät ovat rakennettu mahdollisimman mielenkiintoisiksi mayojen historian avulla. Overbayn ja Brodin suunnittelemat tehtävät ovat varmasti innostavia ja jännittäviä nuoremmille oppilaille, mutta vanhemmille oppijoille niissä ei ole riittävästi haastetta ja matemaattista hyötyä.

Farmer ja Powers (2005) ovat kehittäneet mayojen lukujärjestelmästä oppitunnin, joka on huomattavasti haastavampi. Heidän oppituntinsa perustuu neljään monisteeseen, jotka sisältävät mayojen lukuja ja niiden arvot. Monisteissa olevat mayojen luvut suurenevat monisteesta toiseen ja jokaisen monisteen lopussa on jokin kysymys mayojen lukujärjestelmässä. Oppilaat oppivat vertailemalla, luomalla hypoteeseja, kokeilemalla ja keskustelemalla ryhmänsä kanssa. Tällöin oppitunti ei ole pelkkää kopiointia, vaan vaatii erilaisia syvempiä ajattelutaitoja. Oppitunnissa voidaan nähdä tutkivan matematiikan aineksia. Farmer ja Powers käyttävät kolmannen rivin paikka-arvona lukua 360, mikä on harvinaista kouluun suunnitelluissa mayojen lukujärjestelmän oppitunneissa. Tämän vuoksi kantaluku ja paikka-arvojärjestelmä muuttuvat epäsäännölliseksi, minkä vuoksi se ei tue lukujärjestelmien ymmärtämisen kasvua niin hyvin kuin puhdas 20-järjestelmä.

Miksi mayojen lukujärjestelmää opetetaan? Kysymykseen vastataksemme mietitään ensin lukujärjestelmän merkitystä oppilaille. Käyttämämme desimaalijärjestelmä luo pohjan koulussa opiskeltavalle algebralle ja aritmetiikalle. Esimerkiksi peruslaskutoimituksien kuten allekkain laskemisen tai jakokulman ymmärtäminen vaatii oppilailta paikka-arvon ymmärtämistä. Ilman paikka-arvon ymmärtämistä oppilaat joutuvat opettelemaan nämä algoritmit proseduraalisesti ulkoa, mikä vaikeuttaa uusien käsitteiden mielekästä oppimista ja ymmärtämistä. Toisaalta juuri aritmeettisia laskutoimituksia tarvitaan edelleen jokapäiväisessä elämässä paljon, esimerkkeinä lääkelaskut tai oman talouden hoitaminen. Muun muassa näiden syiden vuoksi oppilaiden tulisi hallita lukujärjestelmän käsite mahdollisimman hyvin. Oppilailla on kuitenkin suuria puutteita lukujärjestelmien, etenkin käyttämämme paikka-arvojärjestelmän ymmärtämisessä (Thanheiser &

Rhoads 2009; Nataraj & Thomas 2007, 2009; Schmittau & Vagliardo 2006; Thomas 2004). Thomasin (2004, 310–311) tutkimuksessa havaittiin, että ala-asteikäisillä lukujärjestelmän oppiminen on hidasta ja oppilailla on suuria puutteita kymmenjärjestelmän ymmärtämisessä. Toisaalta Thanheiserin ja Rhoadsin (2009, 1225–1226) tutkimuksen mukaan myös alakoulun opettajaopiskelijoilla on lukujärjestelmän, etenkin paikka-arvon, ymmärtämisessä selkeitä puutteita. Samansuuntaisia tutkimustuloksia löytyy kansainvälisesti paljon. Lukujärjestelmien puutteellisen ymmärtämisen korjaamiseen useissa tutkimuksissa ehdotetaankin eri kantaisten lukujärjestelmien opettamista, mistä on myös saatu positiivisia tuloksia (Thanheiser & Rhoads 2009; Nataraj & Thomas 2007, 2009; Schmittau & Vagliardo 2006). Esimerkiksi Farmer ja Powers (2005) sekä Overbay ja Brod (2007) mainitsevat, että nimenomaan mayojen lukujärjestelmän opettamiselle voidaan syventää ymmärrystä paikkajärjestelmästä ja nollan merkityksestä. Tätä voidaan pitää tärkeimpänä syynä mayojen lukujärjestelmän opettamiselle.

Matematiikan opettamisen yhteydessä usein mietitään, mikä on mielekäs ympäristö matematiikan oppimiselle. Täytyykö matematiikan olla täysin abstraktia vai pitääkö se liittää arkielämään tai halutaanko esimerkiksi tietotekniikkaa liittää matematiikan opettamiseen. Nicolin ja Crespon (2005) mukaan omaan ympäristöön liittymätön mielikuvituksellinen oppimiskonteksti voi toimia hyvin matematiikan opetuksessa. Heidän tutkimuksessaan opettajaopiskelijat pääsivät tutkimaan mayojen lukujärjestelmää tutkivan matematiikan tyyliin. Tutkijat havaitsivat, että opiskelijat muodostivat historiallisen ja kulttuurisen ympäristön avulla vahvemman ajatus- ja tunnesiteen oppimiseen, mikä usein koulumatematiikasta puuttuu. Nicolin ja Crespon mukaan tämä näkyi opiskelijoiden intona tutkia mayojen lukujärjestelmää, väitellä ja keskustella siitä. Lisäksi yksikään oppilas ei kyseenalaistanut tätä erilaista matematiikan tuntia. Heidän tutkimuksessaan kiteytyy se, että historian ja kulttuurin integraatiolla matematiikkaan voidaan vahvistaa oppilaiden motivaatiota matematiikan opetukseen. Tätä voidaan pitää hyvänä syynä myös mayojen lukujärjestelmän opettamiseen.

Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksessa puhutaan yleistyvässä määrin puhutaan myös monikulttuurisesta luonnontieteiden opetuksesta (*multicultural science teaching*) (ks. esim. Hassard & Dias 2009, 50–91) ja etnomatematiikasta (*ethnomathematics*) (ks. esim. Begg 2001 tai Zhang & Zhang 2010). Edellä mainittujen opetustyylien voidaan katsoa liittyvän karkeasti yhteiskunnan monikulttuuristumiseen ja siihen kuinka voimme motivoida erilaisista kulttuureista tulevia oppilaita. Esimerkiksi Farmer ja Powers (2005) perustelevat kehittämäänsä mayojen lukujärjestelmä -opetusmateriaalia osaksi juuri näillä asioilla: yhdysvaltalaiset koululuokat ovat hyvin monikulttuurisia ja oppilaina on jopa mayojen jälkeläisiä, mikä tekee mayojen lukujärjestelmän opettamisen kulttuurisesti ja historiallisesti tärkeäksi. Tämä voi tuntua suomalaisessa peruskoulussa hyvin kaukaiselta, mutta maahanmuuton lisääntyessä monikulttuurisuudesta ammentava matematiikan opettamisen näkökulma voi nousta Suomessa puheenaiheeksi.

4.4 Mayojen lukujärjestelmän oppimisesta

Mayojen lukujärjestelmän oppimisesta on hyvin vähän tutkimuksia. Useissa tutkimuksissa mayojen lukujärjestelmä on ollut yhtenä opetusaiheena, mutta mayojen lukujärjestelmän oppimisen sijaan pääasiallinen tutkimuskohde on ollut jokin muu (esim. Thanheiser & Rhoads 2009; Nataraj & Thomas 2007; Nicol & Crespo 2005).

Nicolin ja Crespon (2005, 244–245) tutkimuksessa luokanopettajaopiskelijat tutkivat mayojen lukujärjestelmää alkuperäisten lukujen avulla. Opiskelijoilla oli monipuolisia ajatuksia mayojen lukujärjestelmästä, mutta kymmenjärjestelmän vaikutus nousi ylitse muiden. Esimerkiksi tutkimisen alussa osa opiskelijoista ajatteli, että mayojen lukujärjestelmä perustuu kantalukuun 10. Samoin mayojen kolmikerroksisien lukujen muuttamisessa luokanopettajaopiskelijat pyrkivät soveltamaan kymmenjärjestelmää mayojen merkitsemistapaan. Tutkijat kuvaavatkin osuvasti, että opiskelijat kamppailivat kymmen- ja 20-järjestelmien välillä.

Thanheiserin ja Rhoadsin (2009) tutkimuksessa löytyy samanlaisia viitteitä. He tutkivat luokanopettajien ymmärrystä kymmenjärjestelmästä opettamalla heille mayojen lukujärjestelmää. Heidän tutkimuksessaan luokanopettajille (N=24) opetettiin mayojen lukujärjestelmän perusteet: symbolit ja ensimmäisen sekä toisen kerroksen merkitys mayojen luvuissa. Tämän jälkeen opettajat tutustuivat mayojen lukuihin kotona, minkä jälkeen opiskelijoille pidettiin koe. Tutkimuksessa havaittiin, että opiskelijoilla oli suuria ongelmia mayojen 20-järjestelmän ymmärtämisessä, koska he yhdistivät siihen kymmenjärjestelmän ominaisuudet. Esimerkiksi 13 opettajaopiskelijaa arveli mayojen luvun piste, simpukka ja simpukka tarkoittavan lukua 200 (oikea vastaus on 400). Luvun 400 väärissä ratkaisuissa oli kaksi ratkaisumallia: 1) Piste tarkoittaa numeroa kaksi, jonka perään laitetaan kaksi nollaa eli kaksi simpukkaa. Näin saadaan vastaukseksi luku 200. 2) Toisaalta osa opettajaopiskelijoista ajatteli, että piste ja simpukka muodostavat luvun 20, jonka perään laitetaan nolla eli simpukka, jolloin jälleen saadaan luku 200. Perusteluissa näkyy selkeästi kymmen- ja 20-järjestelmien sekaantuminen. Samoilla opiskelijoilla oli myös suuria puutteita paikkajärjestelmän ymmärtämisessä laskettaessa allekkain normaalissa kymmenjärjestelmässä. Toisaalta tutkimuksessa havaittiin myös, että mayojen lukujärjestelmän ymmärtäneet opiskelijat syvensivät ymmärrystään paikka-arvojärjestelmästä sekä kymmen- ja 20-järjestelmän yhteydestä. Thanheiser ja Rhoads korostavat, että tämänkaltaisen opetuksen avulla olisi mahdollista avata oppilaille näkemys kaikkien lukujärjestelmien monimuotoisuudesta ja ominaisuuksista.

5 OPETUSKOKEILU JA TUNTISUUNNITELMA

Luvun tavoitteena on esitellä opetuskokeilua ja tuntisuunnitelmaa. Erityisesti luvussa pohditaan tuntisuunnitelmaan tehtyjä valintoja. Tuntisuunnitelma ja oppituntiin liittyvä muu materiaali löytyy liitteistä 1-6, joihin suosittelen tutustumaan tätä lukua lukiessa.

5.1 Opetuskokeilun lähtökohdat

Matematiikan kehityksen takana on värikkäitä tarinoita ja mitä erityisimpiä matemaatikoita. Matematiikan historia ja sen monimuotoisuus ovat kiehtoneet ja motivoineet minua matematiikan opiskelussa, joten alkuperäisenä ideana halusin pro gradu -työssäni tutkia historian ja kulttuurin yhdistämistä koulumatematiikkaan. Koulumatematiikassa historia ja kulttuuri kytkeytyvät yleensä vahvasti geometriaan. Niin nuorempi kuin vanhempi koululainen muistaa Pythagoraan lauseen ja sen kuinka geometriaa voitiin harrastaa hiekkarannalla kepin sekä narun kanssa. Täten halusin valita opetuskokeiluun jonkin muun matematiikan aihealueen, jonka opetukseen liitetään tavallisesti vähemmän historiaa ja kulttuuria. Opetuskokeiluni aiheeksi valikoitui lopulta lukuteoria ja erityisesti lukujärjestelmät.

Lukujärjestelmistä valitsin mayojen lukujärjestelmän, joka on mielestäni opetuksellisesti hedelmällisin ja kulttuurishistoriallisesti kiehtovin muiden kulttuurien lukujärjestelmiin verrattuna. Valitsemalla mayojen lukujärjestelmän kolmannelle paikka-arvolle luvun 400 saamme käyttöömme täydellisen paikka-arvojärjestelmän, joka perustuu kantalukuun 20 (ks. luku 4). Mayojen lukujärjestelmää tutkimalla oppilailla on mahdollisuus syventää ymmärrystään kantaluvun ja paikka-arvojärjestelmän merkityksestä.

Peruskoulussa lukujärjestelmien opettaminen perustuu hyvin pitkälle kymmenjärjestelmän opettamiseen, eikä muihin lukujärjestelmiin juurikaan syvennytä. Unkarilaisessa matematiikan opetuksessa kymmenjärjestelmän ymmärtämistä tuetaan muiden lukujärjestelmien opettamisella jo ala-asteella (Szalontai 2002). Mayojen lukujärjestelmää opetetaan kansainvälisesti melko paljon, varsinkin Yhdysvalloissa (ks. luku 4.3).

Mayoilla on myös monivivahteinen kulttuuri sekä historia, joiden elementtejä on helppo yhdistää oppitunnille kuten luvussa 4 olemme nähneet. Mielestäni mayojen historian ja kulttuurin opetuksen avulla opetuskokeiluun voidaan tuoda uusia tarkastelunäkökohtia ja luoda motivaatiota matematiikan oppimiseen. Mayojen lukujen merkintätapa poikkeaa tutusta tavastamme merkitä lukuja, mikä tuo todenmukaisuutta ja oikeaa tutkimusmatkailijahenkeä matematiikan oppimiseen.

Opetuskokeilun opetustavaksi muodostui tutkiva matematiikka. Tutkivan matematiikan yhdistäminen mayojen lukujärjestelmän opettamiseen tuntui luonnolliselta, koska halusin oppilaiden tutkivan mayojen lukujärjestelmää itse. Lisäksi tutkivan matematiikan valitseminen pedagogiseksi lähtökohdaksi mahdollisti minulle syvällisen tutustumisen uudenlaiseen matematiikan oppimisen ja opettamisen teoriaan sekä käytäntöön.

Näistä lähtökohdista suunnittelin opetuskokeiluun yhden 45 minuutin tutkivan matematiikan oppitunnin, joka yhdistelee matematiikkaan myös historiaa ja kulttuuria. Yhden oppitunnin suunnitteleminen on kompromissi: mayojen lukujärjestelmästä saisi rakennettua useamman tunnin kokonaisuuden, mutta yksi oppitunti on helpompi saada kokeiluun koulun kiireeseen, varsinkin kun kyseessä on hieman valtavirrasta poikkeava matematiikan oppitunti.

5.2 Oppitunnin tavoitteet ja rakenne

Oppitunnin tavoitteena on, että oppilaat tutustuvat uuteen lukujärjestelmään. He oppivat mayojen lukujärjestelmän perusteet: he osaavat merkitä vähintään kolmikerroksisia mayojen lukuja ja ymmärtävät kolmen ensimmäisen kerroksen paikka-arvot. Näiden tavoitteiden taakse verhoutuu oppitunnin päätavoite, joka on oppilaiden kymmenjärjestelmän ymmärryksen vahvistaminen. Tutkimalla mayojen lukujärjestelmää oppilaat vahvistavat myös käsityksiään kantaluvun ja paikka-arvojärjestelmän merkityksistä. Oppilaat tutustuvat tämän lisäksi myös mayojen kulttuuriin ja historiaan.

Oppitunnin rakenne perustuu alustus-, tutkimus- ja koontivaiheeseen, mikä on yleinen tutkivan matematiikan oppitunnin rakenne (Stein ym. 2008). Se on rakenteeltaan myös hyvin samanlainen kuin japanilainen tutkivan matematiikan tunti (Hino 2007; Shimizu 1999). Japanilaisesta tutkivan matematiikan oppitunnista poiketen, tällä oppitunnilla oppilaat tutkivat pienryhmissä tai pareittain. Tutkivan matematiikan oppituntien rakenteesta lisää luvussa 3.2. Taulukkoon 8 on laadittu lyhyesti oppitunnin kulku.

Taulukko 8. Oppitunnin rakenne.

Oppitunnin vaihe	Oppimisaktiviteetti	Tavoite
Alustusvaihe	– Opettajan PowerPoint-esitys mayojen historiasta ja kulttuurista. PowerPoint-esitys koostuu kuvista mayojen elämään liittyen (liite 3). – Opettaja näyttää kyselemällä mayojen lukumerkit ja ensimmäisten 21 luvun merkinnät.	– Tutustuminen mayojen historiaan ja kulttuuriin. Motivaation ja mielenkiinnon rakentaminen. – Mayojen merkintöjen oppiminen.
Tutkimusvaihe	– Oppilaat tutkivat mayojen lukujen merkintöjä lukuun 40 saakka (moniste 1, liite 5). – Oppilaat tutkivat monisteen 2 (liite 6) mayojen merkkejä ja pyrkivät ratkaisemaan mayalukujen salaisuuden.	– Lukujen 0-40 merkitseminen sekä kahden ensimmäisen kerroksen tarkoituksen huomaaminen. – Kolmikerroksisen luvun ja paikkajärjestelmän ymmärtäminen.
Koontivaihe	– Keskustelu opettajajohtoisesti. – Opettajan koonti, oikeiden merkintöjen vahvistus ja oppilaiden ideoiden kehittäminen	– Oppilaat vertailevat ja keskustelevat tuloksistaan. – Oikeiden vastauksien ja merkintöjen vahvistaminen. Mayojen lukujärjestelmän, erityisesti paikkajärjestelmän ymmärryksen lisääminen. Vertaaminen kymmenjärjestelmään ja kymmenjärjestelmän ymmärtäminen

5.2.1 Alustusvaihe

Oppitunnin alustusvaiheessa korostetaan oppilaiden motivointia ja johdattelua matemaattiseen teemaan (ks. liite 1, tuntisuunnitelman kohdat 1.1 ja 1.2). Suunnitellussa oppitunnissa oppilaille esitellään mayojen historiaa ja kulttuuria kuvien avulla. PowerPoint-esityksen (liite 3) avulla opettaja esittelee kuvia mayojen maantieteellisestä sijainnista, taiteesta, ihmisistä ja kirjoituksesta. PowerPoint-esityksen kuvien lähteenä on Wikipedia Commons. Lisäksi opettaja kyselee aktiivisesti, mitä oppilaat tietävät mayoista. Viimeisellä dialla on osakuva Dresdenin koodeksista jossa näkyy mayojen lukuja (kuvan lähde: FAMSI). Tämän dian kohdalla opettaja kertoo oppilaille oppitunnin tavoitteen: ”Tämän päivän tavoitteena on oppia ymmärtämään mayojen lukuja”.

Opettaja jakaa oppilaille kopion Dresdenin koodeksin sivusta 24 (liite 4), jossa on aitoja mayojen lukumerkintöjä (kuvan lähde FAMSI).

PowerPoint-esityksen tavoitteena on, että oppilaat kiinnostuvat kuvien avulla mayojen historiasta ja kulttuurista, minkä jälkeen he motivoituvat matematiikan opiskeluun. Oppitunnin alussa haetaan ”Indiana Jones- tunnelmaa” tavallisen matematiikan oppitunnin tunnelman sijaan. Aloituksen pohjana on Nicolin ja Crespon (2005) tutkimus, jossa luokanopettajaopiskelijoiden motivaatio matematiikan opiskeluun kasvoi historiallisen ja kulttuurisen ympäristön avulla. PowerPoint-esitys suunniteltiin kuitenkin vain 3-5 minuutin pituiseksi, jotta itse matematiikan opiskelulle jää aikaa. Oppilaille jaettavalla kopiolla aidoista mayojen lukumerkinnöistä (liite 4) pyrittiin saamaan lisää intoa ja motivaatioita oppilaisiin. Aidot luvut tuovat autenttisuutta ja antavat oppilaille oikeaan elämään liittyvän ongelman ja tavoitteen.

Mayojen lukujärjestelmään tutustutaan PowerPoint-esityksen jälkeen, jolloin opettaja esittelee, ensin kysyen ja lopuksi ”paljastaen” mayojen merkit: simpukankuoren, pisteen ja viivan. Tämän jälkeen opettaja piirtää mayojen merkinnät luvuille 0-19 samalla selittäen miten mayat merkitsevät ensimmäiset 20 lukuaan. Luvun 20 ja 21 kohdalla opettaja kyselee oppilaiden vastauksia ja vasta oppilaiden vastauksien jälkeen paljastaa luvut.

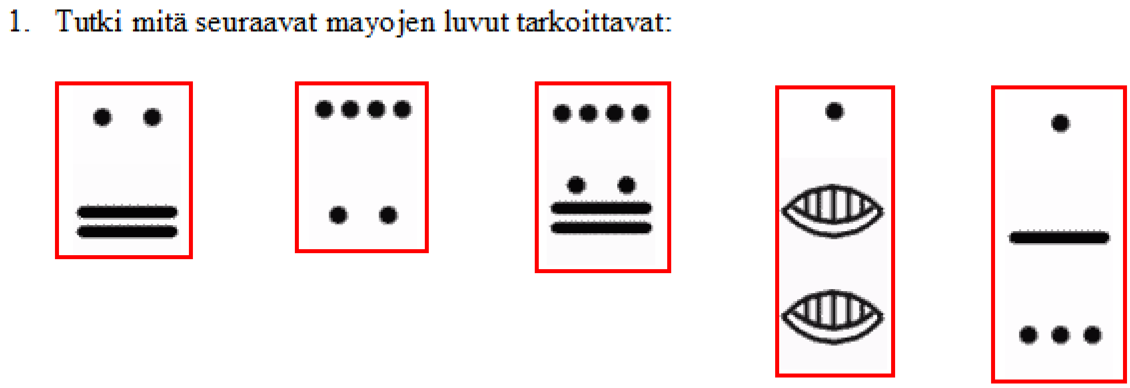
Tämän osan tavoitteena on, että oppilaat osaavat merkitä mayojen luvut 0-21. Tässä vaiheessa oppilaiden ei tarvitse vielä ymmärtää, miten lukuja merkitään. Opettajan tehtävä ei ole paljastaa mayojen lukujärjestelmän ideaa eli hän ei puhu 20-järjestelmästä tai paikka-arvoista. Mayojen numeromerkit ja luvut 0-21 esitetään opettajajohtoisesti, jotta oppilailla on mahdollisuus lähteä pohtimaan mayojen lukujärjestelmää sopivalta tasolta ja he pääsevät nopeammin kiinni itse matematiikkaan. Oletin, että oppilailla ei ole riittäviä perustietoja lähteä suoraan itse tutkimaan esimerkiksi Dresdenin koodeksia. Lähes tyhjästä tutkimaan lähteminen voisi olla mahdollista, jos käytössä olisi useampi oppitunti yhden sijaan.

5.2.2 Tutkimusvaihe

Tutkimusvaihe on ajallisesti ja oppilaiden työskentelyn kannalta tärkein oppitunnin vaihe (ks. liite 1, tuntisuunnitelman kohta 2.1). Tehtävistä on pyritty tekemään mahdollisimman johdonmukaisia siten, että jokaisessa tehtävässä on jokin tavoite ja että edellinen tehtävä tukee seuraavan tehtävän oppimistavoitetta. Oppitunnin onnistumiseksi tutkimusvaihetta on mietitty, korjattu ja muuteltu eniten. Tutkimusvaihetta suunnitellessa on käytetty Shimizun taulukkoa (liite 2), johon on merkitty hypoteettisia oppilaiden reaktioita ja opettajan vastareaktioita. Shimizun taulukon avulla tutkivan opettajan roolin ylläpitäminen helpottuu. Tutkivassa matematiikassa opettajan rooli tutkimusvaiheessa on ohjaava eli opettaja muun muassa kiinnittää oppilaiden huomion oleelliseen, kyseenalaistaa, esittää kysymyksiä ja aktivoi perustelemaan.

Tutkimusvaihe jatkuu siitä mihin alustusvaiheessa jäätiin: Ensiksi oppilaat jatkavat monisteen 1 (liite 5) täyttämistä eli he miettivät mayojen merkintöjä luvuille 22–40. Lukujen 22–40 merkitsemisessä tavoitteena on, että oppilaat osaavat merkitä nämä luvut. On myös tärkeää, että oppilaat huomaavat, että lukujen 0-19 avulla voidaan merkitä luvut 22–40 ja että mayojen lukujärjestelmässä on jonkinlainen logiikka, mutta se ei ole samanlainen kuin kymmenjärjestelmässä. Esimerkiksi luku 30 ei aiheuta muutosta toiselle paikka-arvopaikalla kuten kymmenjärjestelmässä.

Tämän jälkeen oppilaat siirtyvät monisteeseen 2 (liite 6), jossa he pohtivat suurempien mayojen lukujen merkitsemistä. Monisteen 2 tehtävässä 1 on 5 mayojen merkkiä, jotka oppilaiden pitää selvittää (ks. kuvio 3). Tehtävän 1 luvut ovat tarkoituksella asetettu suuruusjärjestykseen, jotta oppilaat huomaisivat toisen kerroksen paikka-arvon ja sen kuinka monta kerrannaista yhteen kerrokseen mahtuu. Ensimmäisenä on luku 52, jonka oppilaat voivat ratkaista jatkamalla oppimaansa algoritmia luvusta 40 eteenpäin tai järkeillä, mitä luku oikeasti tarkoittaa (paikka-arvojen merkitys). Toinen luku on 82, joka on valittu siksi, että sen avulla oppilaat keksisivät sen, että toisen kerroksen paikka-arvo on 20. Luku 82 on valittu myös, siksi että oppilaat eivät jatkaisi oppimaansa algoritmia käyttäen luvusta 52 lukuun 82, vaan että oppilaat joutuisivat pohtimaan kaksikerroksisen mayojen luvun paikka-arvojen merkitystä. Kolmantena lukuna on luku 92, jonka tavoitteena on edelleen korostaa oppilailla kaksikerroksisen mayojen luvun merkityksen, jossa toisessa kerroksessa on luvun 20 kerrannaiset ja ensimmäisessä kerroksessa yhden kerrannaiset, joita voi olla enemmän kuin kymmenen. Tehtävän viimeiset selvitettävät luvut ovat 400 ja 513. Näiden lukujen tarkoituksena on tarjota oppilaille haastetta, joten väliin ei laitettu muita lukuja. Kolmikerroksisien lukujen ymmärtäminen ja potenssin ymmärtäminen on portti koko lukujärjestelmän ymmärtämiseen.



Kuvio 3. Monisteen 2 tehtävän 1 selvitettävät mayojen merkit.

Monisteen 2 tehtävässä 2 oppilaita pyydetään miettimään miten mayojen lukujärjestelmä toimii ja kehittämään sääntö, jolla mayojen lukuja voisi muuntaa meidän luvuiksi. Tehtävän tarkoituksena on, että oppilaat pohtisivat vielä tarkemmin mayojen lukujärjestelmää käyttäen apunaan kirjoittamista, piirtämistä ja yhteistoiminnallisuutta.

5.2.3 Koontivaihe

Koontivaihe käsittää ryhmäkeskustelun ja opettajajohtoisen päätöksen oppitunnille. Koontivaiheen tarkoituksena on käydä läpi erityisesti oppilaiden itse huomaamia ongelmia ja ratkaisuja oppituntiin liittyen. Tämän vuoksi koontivaiheen täsmällinen suunnitteleminen on vaikeaa. Lisäksi koontivaiheessa opettaja kertaa oppitunnin tärkeimmät asiat ja pyrkii laajentamaan oppilaiden ratkaisuja. Tutkivan matematiikan koontivaiheessa korostetaan myös merkintöjen standardoimista, mutta tällä oppitunnilla se ei ole niin oleellista, sillä oppilaat oppivat merkintätavat oikein heti oppitunnin alussa.

Ryhmäkeskustelussa on tärkeää, että opettaja aktivoi oppilaita perustelemiseen, todistamiseen ja yleiseen argumentointiin. Tähän apua opettaja saa Shimizun taulukosta, sillä osa oletetuista oppilaiden reaktioista on varmasti toteutunut ja näihin on valmiiksi mietitty tutkivan matematiikan mukaisia toimintatapoja opettajalle. Lisäksi aktiivinen oppilaiden työskentelyn seuraaminen antaa aiheita ja ajatuksia koontivaiheen ryhmäkeskustelun ohjaamisessa.

Ryhmäkeskustelun jälkeisen opettajajohtoisen päätöksen tavoitteena on oppilaiden ratkaisujen kertaaminen ja syventäminen. Ensimmäiseksi opettajan tulee kerrata kahden ensimmäisen kerroksen merkitys ja kuinka monta merkkiä kerrokseen mahtuu. Tämän jälkeen opettaja kertaa oppilaiden ratkaisemien mayojen lukujärjestelmän kerroksien merkityksen. Seuraava tavoite on laajentaa oppilaiden ratkaisua selvittämällä yhtä ylemmän kerroksen merkityksen. Esimerkiksi, jos oppilaat ovat ratkaisseet, että kolmannella rivillä on luvun 400 kerrannaiset, niin opettaja osoittaa neljännen kerroksen merkityksen. Samaan tapaan voidaan loogisesti edetä seuraavaan kerrokseen ja miettiä kuinka mayojen lukujärjestelmä rakentuu. Lopuksi opettaja vertaa kymmenjärjestelmää ja mayojen lukujärjestelmää konkreettisten esimerkkien avulla. Vertaamisessa on tärkeää huomioida kantaluku ja sen potenssit sekä kuinka ne muodostavat lukujärjestelmän. Lisäksi paikka-arvojärjestelmien vertaaminen onnistuu hyvin nimenomaan vertailemalla konkreettisia lukuja (mayaluku vrt. kymmenjärjestelmän luku).

5.3 Shimizun taulukko

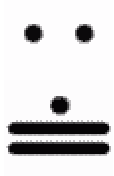
Useammassa kohdassa on jo mainittu Shimizun taulukko, jota on käytetty oppitunnin rakentamisen apuna. Tehtäviä suunnitellessa on koko ajan pyritty miettimään minkälaisia reaktioita, ratkaisuja ja ongelmia oppilaat kohtaavat oppitunnin aikana. Tuntisuunnitelmaa on muokattu vahvasti oppilaiden oletettujen reaktioiden ja niiden vastareaktioiden pohjalta. Shimizun taulukko löytyy kokonaisuudessaan liitteestä 2, mutta tutustutaan Shimizun taulukkoon kahden esimerkin kautta.

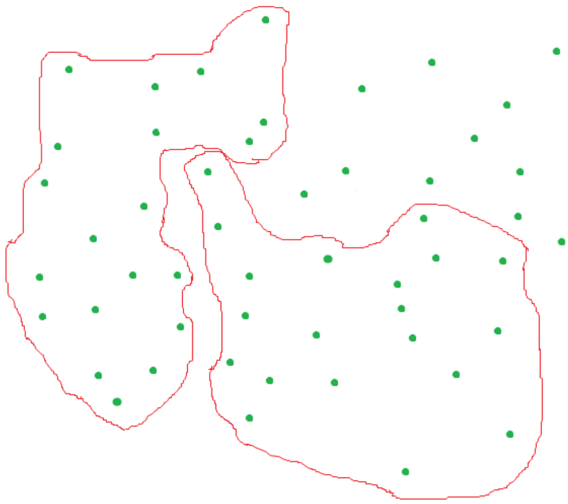
Heti tutkimusvaiheen alussa oppilailla voi olla ongelmana se, että he eivät osaa jatkaa luvusta 21 eteenpäin. Tällöin opettaja voi kertoa luvun 22 merkinnän tai jos joku arvaa luvun 22 merkinnän oikein, niin opettaja voi vahvistaa oikea merkinnän (tämä ei ole suoranaisesti tutkivan matematiikan mukaista, mutta tämä ei ole oppitunnin tärkein osa ja on tärkeää, että oppilaat pääsevät eteenpäin). Tämän jälkeen opettaja voi pyytää vertaamaan lukuja 21 ja 22, jolloin oppilaat huomaisivat merkintätavan luvulle 23. Samalla tapaan, esittämällä kysymyksiä ja pyytämällä vertaamaan, oppilaat pystyvät huomaamaan algoritmin kuinka mayojen lukuja voidaan merkitä lukuun 40 saakka. Poikkeuksena luvut 30 ja 40, joiden kohdalla oppilaat todennäköisesti joutuvat pohtimaan tarkkaan miten luvut merkitään. Tällöin opettajan tehtävä on kysymyksin ja vihjein auttaa oppilaita huomaamaan lukujen merkinnät. Lisäksi molemmissa luvuissa korostuu erityisesti mayojen lukujärjestelmän ja kymmenjärjestelmän ero, ja opettaja voi taas tutkivalla tavalla syventää oppilaiden ajatusta kysymykseen: mitä toisella paikka-arvopaikalla on?

Toinen esimerkki on oppitunnin lopusta. Oppilaat ovat ratkaisseet loppuun monisteet ja osaavat mayojen lukujärjestelmän perusteet, mutta heillä on ongelmia hahmottaa, että kymmenjärjestelmällä ja mayojen lukujärjestelmällä olisi mitään yhteistä. Tällöin opettaja voi ottaa molemmista lukujärjestelmistä esimerkkiluvut ja verrata näitä: Mistä nämä luvut koostuvat? Mikä on kantaluku? Miten potenssi liittyy lukujen merkitsemiseen? Lisäksi opettaja voi käyttää ympyröintimallia, jonka avulla voidaan korostaa kantalukua:

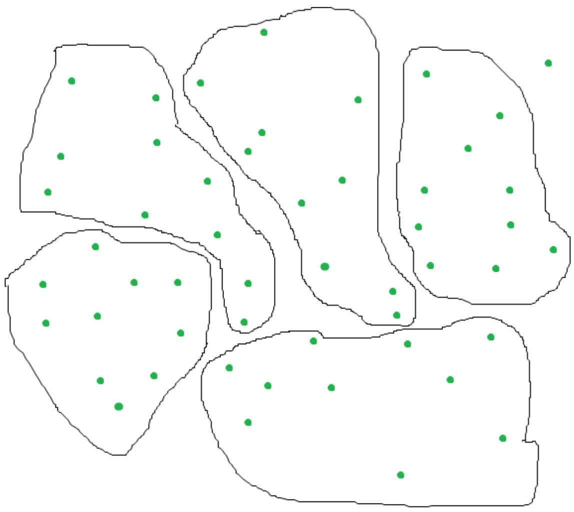
20-järjestelmä: $2 \times 20 + 11 \times 1 = 51$

Kymmenjärjestelmä: $5 \times 10 + 1 \times 1 = 51$

eli mayojen merkinnöillä 



Kuvio 4. Ympyröintimalli 20-järjestelmässä



Kuvio 5. Ympyröintimalli kymmenjärjestelmässä

6 TUTKIMUS

6.1 Tutkimuksen tavoite

Tutkimuksen tavoitteena on tutkia oppilaiden ajattelutapoja ja -prosesseja sekä ymmärtämistä suunnitellussa mayojen lukujärjestelmä -opetuskokeilussa. Tutkimuskysymykset kiteytyvät seuraavasti:

1. Millaisia ajattelutapoja oppilailla on mayojen lukujärjestelmä -opetuskokeilussa?
2. Minkälainen on oppilaan matemaattisen ajattelun prosessi Pirien ja Kierenin (1994) matemaattisen ymmärtämisen kasvun mallin mukaan?

Oppilaiden matemaattista ajattelua tutkimalla pystytään arviomaan oppilaiden oppimisprosessia ja ymmärtämistä, minkä avulla voidaan kehittää matematiikan opetusta. Mayojen lukujärjestelmän oppimisesta ei ole kovinkaan paljon tietoa, joten tutkimuksen tavoitteena on kuvata mahdollisimman tarkasti mayojen lukujärjestelmän, mutta myös yleisesti lukujärjestelmien oppimisprosessia. Lisäksi tutkimuksen tarkoituksena on antaa lisätietoa oppilaan matemaattisesta ajattelusta tutkivan matematiikan tunnilla. Erityisesti Pirien ja Kierenin (1994) matemaattisen ymmärtämisen kasvun mallin avulla pyritään samaan uutta tietoa oppilaan matemaattisesta ymmärtämisprosessista tutkivan matematiikan tunnilla.

Tutkimus on luonteeltaan tapaustutkimus. Hirsjärvi, Remes ja Sajavaara (2004, 125–126) kuvaavat tapaustutkimuksen (*case study*) tulosten olevan yksityiskohtaista tietoa tietystä tapauksesta tai pienistä toisistaan riippuvista tapauksista. Heidän mukaansa tapaustutkimuksessa tyypillistä on muun muassa prosessien tutkiminen ja ilmiöiden kuvailu. Näitä piirteitä voidaan havaita vahvasti tässä tutkimuksessa.

6.2 Tutkimusaineisto

Tutkimusaineisto koostuu kaksi kertaa toteutetusta mayojen lukujärjestelmä oppitunnista. Tutkimusluokkana toimi jyväskyläläisen yläkoulun 9. luokka. Luokka jaettiin kahteen ryhmään satunnaisesti ja molemmille ryhmille pidettiin mayojen lukujärjestelmä -oppitunti. Molemmille oppitunneille osallistui kahdeksan oppilasta: ensimmäiselle oppitunnille osallistui 6 poikaa ja 2 tyttöä ja toiselle oppitunnille osallistui 3 poikaa ja 5 tyttöä. Luokan jakaminen kahtia suoritettiin, jotta videointi olisi helpompaa ja saataisiin paremmin taltioitua oppilaiden työskentelyä. Oppilaat jaettiin oppitunnilla vielä kolmeen ryhmään, jossa he työskentelivät oppitunnin ajan. Jako ryhmiin toteutettiin myös satunnaisesti. Toimin itse opetuskokeilun opettajana. Kyseinen luokka oli minulle tuttu ja olin opettanut luokkaa useamman oppitunnin ennen opetuskokeilua.

Opetustilana toimi yläasteen luokkahuone, joka oli sekä minulle että oppilaille tuttu. Luokan istumapaikat järjestettiin kolmeen ryhmään ja oppilaiden paikat määrättiin arvonnan mukaan. Opetuskokeilu toteutettiin lokakuussa 2010, jolloin oppilaat olivat 9. luokan alkutaipaleella. Kokeilut suoritettiin peräkkäisinä päivinä lähes samaan kellonaikaan ennen lounasta.

Tutkimuksen tärkein aineiston keruumenetelmä on videointi, joka on hyvin paljon käytetty menetelmä matematiikan opettamisen ja oppimisen tutkimuksessa (Powell, Francisco & Maher 2003). Videointi on todettu tehokkaaksi keruumenetelmäksi, koska sen avulla saadaan yksityiskohtaista kuva- ja äänimateriaalia tutkittavasta aineistosta. Lisäksi videota voi katsella lukemattomia kertoja, hidastaa ja pysäyttää. Varsinkin kun toimin itse opetuskokeiluissa myös opettajana, tutkimuksen kannalta oli tärkeää saada varma ja luotettava kuvaus oppitunneista. Videointi suoritettiin seuraavanlaisesti: Avustaja videoi alustus- ja koontivaiheessa luokan takaa siten, että kuvassa näkyy opettajan lisäksi koko luokka. Tutkimusvaiheessa avustaja kuvasi vain yhden ryhmän työskentelyä. Kuvausvälineenä toimi videokamera, jossa oli sisäänrakennettu mikrofoni. Kamera pidettiin jalustalla koko videoinnin ajan. Oppitunti nauhoitettiin kannettavalle sanelimelle varmuuden vuoksi samalla tavalla kuin videointi tapahtui. Myös oppilaiden täyttämät monisteet kerättiin analysoinnin tueksi. Lisäksi täytin tutkimuspäiväkirjaa molemmilta oppitunneilta.

Tutkimukseen osallistuneen 9. luokan matematiikan tunteja on kuvattu useita kertoja aiemmin, joten oppilaat olivat tottuneita videokameraan. Kuitenkin oppituntien alussa korostin oppilaille, että videointi ja nauhoitus ovat tutkimusta varten, eikä niitä käytetä muihin tarkoituksiin. Lisäksi huomautin, että monisteisiin saa tehdä vapaasti merkintöjä ja niitä ei tarvitse pyyhkiä pois. Kerroin oppilaille myös, että kyseessä ei ole koe tai testi, vaan tutkimukseni, jossa tutkitaan matematiikan oppimista ja he ovat tutkimuskohteena, koska he ovat matematiikan oppimisen ammattilaisia. Kuvamateriaalissa ei näy, että oppilaat olisivat millään tavalla häiriintyneet kuvaamisesta tai nauhoittamisesta. Oppilailta, rehtorilta ja oppilaiden vanhemmilta kysyttiin lupa videoimiseen ja videokuvan käyttämiseen tutkimuksessa.

Ensimmäisen tutkimuskysymyksen analysointiin on käytetty koko aineistoa eli kaikkia oppilaita. Toisen tutkimuskysymyksen analysointiin on käytetty pääsääntöisesti vain yhtä oppilasta, Siniä. Tämä tehdään siksi, että saataisiin myös mahdollisimman tarkka yhden oppilaan henkilökohtainen matemaattisen ymmärtämisen kasvun kuvaus ja koska Pirien ja Kierenin (1994) teoria soveltuu yhden oppilaan tarkastelemiseen, ei koko ryhmän. Sini oli mukana jälkimmäiselle oppitunnilla ja hänet valittiin kahdesta syystä: Sinin ryhmää kuvattiin koko oppitunnin ajan ja Sini ilmaisi ajatuksiaan hyvin paljon ääneen. Erityisesti jälkimmäinen seikka mahdollisti tarkan matemaattisen ymmärtämisen kasvun kuvaamisen. Siniä voidaan kuvata aktiivisena luokan ”johtajatyyppinä”. Sini on menestynyt matematiikassa hyvin ja pyrkii ratkaisemaan matemaattisia ongelmia aktiivisesti.

6.3 Analyysimenetelmät

Tutkimuksen olennaisin ja tärkein analyysimenetelmä on videoanalyysi. Tutkimuksessa käytetty videoanalyysimenetelmä pohjautuu Powellin ym. (2003) videoanalysointimenetelmään. Heidän kehittämänsä videoanalysointimenetelmä on kehitetty matemaattisen ajattelun tutkimiseen ja sopii tutkimukseeni hyvin. Powellin ym. analyysimalli perustuu seitsemään askeleeseen:

1. Videotallenteisiin tutustuminen (*Viewing attentively the video data*)
2. Videotallenteiden kuvailu (*Describing the video data*)
3. Oleellisten tapahtuminen löytäminen (*Identifying critical events*)
4. Litterointi (*Transcribing*)
5. Koodaus (*Coding*)
6. Juonen rakentaminen (*Constructing storyline*)
7. Narratiivin muodostaminen (*Composing narrative*)

Tämän pohjalta muokkasin tutkimukseen sopivan videoanalyysimenetelmän:

1. Videotallenteisiin tutustuminen. Videotallenteisiin tutustuminen oli erittäin oleellista, koska tallenteet sisältävät lähes kaiken analysoitavan tiedon. Erityisesti toimiessani oppitunneilla opettajana, videoiden katseleminen korostui, jotta omaa toimintaa pystyi analysoimaan ja arvioimaan objektiivisesti. Tutustumisen avulla videoista alkoi hahmottaa kokonaisuuksia ja mielenkiintoisia yksityiskohtia, joita analysoida.

2. Oleellisten tapahtumien löytäminen. Tässä vaiheessa videoiden katseleminen oli edelleen aktiivista ja vaiheen tavoitteena oli löytää tutkimuksen kannalta mielenkiintoisia tapahtumia.

3. Litterointi. Litteroinnissa kirjoitettiin yksityiskohtaisesti molempien oppituntien tapahtumat ylös. Litteroinnin tarkoituksena ei ollut kirjoittaa koko aineistoa auki, vaan pyrin keskittymään edellä löydettyjen oleellisten tapahtumien litterointiin. Esimerkki litteroinnissa käytettävästä

kaavakkeesta on esitetty taulukossa 9: kaavakkeeseen merkittiin aika, kuvaus (litterointi) ja kommentit tästä tapahtumasta.

Taulukko 9. Esimerkki litteroinnista.

Aika	Litterointi	Kommentit
11.35 – 12.20	Opettaja: Mitä 19 ja 20 välillä tapahtuu? *(Opettaja johdattelee kohti luvun 40 merkintää)* Sini: No sinne siirtyy niinku se piste sinne ylös. Opettaja: Joo, mitä se piste vois erityisesti tarkoittaa? Sini: Kymmeniä, en tiiä. Opettaja: Kyllä se tarkoittaa kymmeniä, mutta erityisesti mitä kymmeniä se tarkoittaa? Sini: Kahtiakymmeniä. Opettaja: Aivan oikein. Jonna: Eli siellä on kaksi pistettä ja simpukan kuori. Sini: Eli siellä on kaksi pistettä ja simpukan kuori. *(yhtäaikaa Jonnan kanssa)*. Opettaja: Onko näin? Sini: On. Jos se on 20, niin 20+20 =40 ja sitten alle tulee nolla. Opettaja: Kuulostaa hyvälle. Helmi: Täällä on semmonen *(näyttää alkuperäisiä lukuja)*. Sini: Niin on eli tuo on nelkyt. *Jonnakin katselee hiukan alkuperäisiä lukuja monisteesta.*	10-järjestelmä / mayojen paikka-arvojärjestelmän ymmärtäminen

4. Oppilaiden ajatustapojen luokitteleminen. Edellä olevien vaiheiden jälkeen pyrin luomaan oppitunnin tapahtumista kokonaisuuksia, johon tunnin tapahtumat voidaan sijoittaa. Tässä tutkimuksessa oppilaiden ajattelutavat luokiteltiin seuraavasti:

1. yhteys kymmenjärjestelmään
2. yhteys muihin lukujärjestelmiin
3. mayojen paikkajärjestelmän ymmärtäminen
4. muut mayojen lukujärjestelmään liittyvät havainnot.

Taulukossa 10 on esitetty esimerkki ajatustapojen luokittelemisesta käytännössä (vrt. taulukko 9):

Taulukko 10. Esimerkki ajattelutapojen luokittelusta.

Aika	Litterointi	Ajattelutapa
11.35 – 12.20	Opettaja: Mitä 19 ja 20 välillä tapahtuu? *(Opettaja johdattelee kohti luvun 40 merkintää)*	
	Sini: No sinne siirtyy niinku se piste sinne ylös.	
	Opettaja: Joo, mitä se piste vois erityisesti tarkoittaa?	
	Sini: Kymmeniä, en tiiä.	**1.**
	Opettaja: Kyllä se tarkoittaa kymmeniä, mutta erityisesti mitä kymmeniä se tarkoittaa?	
	Sini: Kahtiakymmeniä.	**2.**
	Opettaja: Aivan oikein.	
	Jonna: Eli siellä on kaksi pistettä ja simpukan kuori.	
	Sini: Eli siellä on kaksi pistettä ja simpukan kuori. *(yhtäaikaa Jonnan kanssa).*	
	Opettaja: Onko näin?	
	Sini: On. Jos se on 20, niin 20+20 =40 ja sitten alle tulee nolla.	**2.**
	Opettaja: Kuulostaa hyvälle.	
	Helmi: Täällä on semmonen *(näyttää alkuperäisiä lukuja).*	
	Sini: Niin on eli tuo on nelkyt.	
	Jonnakin katselee hiukan alkuperäisiä lukuja monisteesta.	

5. Ajattelutapojen koostaminen kokonaisuuksiin. Molemmilta oppitunneilta kerättiin tuntien tapahtumat edellisessä vaiheessa rakennettuihin asiakokonaisuuksiin. Tällä tavoin saatiin molempien tuntien asiakokonaisuudet yhteen ja niitä voitiin vertailla. Lisäksi pohdin millaisia oppilaiden ajattelutavat ovat, miten ne syntyvät ja miten ne kehittyvät.

6. Juonen rakentaminen kronologisesti. Oppitunnin kulun ja tapahtumien ymmärtäminen on oleellista, jotta voidaan ymmärtää kuinka oppilaiden ajatukset rakentuvat. Tämän takia molemmista tunneista laadin yhteisen kronologinen kertomuksen tunnin oleellisista asioista. Tämä vaihe on valmiissa muodossa tutkielman luvussa 7.

7. Pohdinta kokonaisuuksista**.** Viimeisenä analysointivaiheena oli tuloksien vertaaminen ja johtopäätöksien tekeminen (luku 8).

Tätä videoanalyysimenetelmää käytettiin tarkasti ensimmäisen tutkimuskysymyksen analysointiin. Toiseen tutkimuskysymykseen pureuduttiin vasta ensimmäisen tutkimuskysymyksen analysoinnin jälkeen, jolloin oppitunnin tapahtumat olivat jo tuttuja. Täten toisen tutkimuskysymyksen analysointiin käytettiin hieman yksinkertaisempaa lähestymistapaa: 1. Sinin toiminnan litterointi. 2. Sinin matemaattisen ymmärtämisen kasvun luokittelu Pirien ja Kierenin

(1994) mallin mukaan. 3. Oppimispolun rakentaminen (ks. luku 7.6). Pirien ja Kierenin mallin mukaista vaiheiden luokittelua mayojen lukujärjestelmän ymmärtämiselle ei tehty ennen Sinin oppimispolun analyysia, vaan analyysi toteutettiin yleisten Pirien ja Kierenin mallin vaiheiden määritelmien mukaisesti.

7 OPPILAIDEN AJATETTELUTAVAT

Kappaleet 7.1–7.5 muodostavat kronologisen kuvauksen oppituntien tapahtumista. Näissä kappaleissa keskitytään erityisesti oppilaiden ymmärrykseen mayojen paikka-arvojärjestelmästä ja kymmenjärjestelmän vaikutuksesta oppilaiden ajattelutapoihin mayojen lukujärjestelmää opeteltaessa. Tämän lisäksi analysoidaan oppilaiden muita ajatuksia mayojen lukujärjestelmästä. Analyysi on laadittu käyttäen molempia oppitunteja. Lisäksi kappaleessa 7.6 analysoidaan Sinin matemaattisia ymmärtämisprosesseja Pirien ja Kierenin (1994) matemaattisen ymmärryksen kasvun mallin avulla.

7.1 Oppilaiden ensimmäiset ajatukset mayojen lukujärjestelmästä

Heti molempien tuntien alkuun oppilaat saivat arvuutella mayojen merkkejä: pistettä, viivaa ja simpukan kuorta. Molemmissa ryhmissä piste ja viiva keksittiin heti. Oppilaiden vastauksista on hyvä huomata, että ne perustuivat intuitioon, sillä he eivät tietäneet mayojen lukujärjestelmästä juuri mitään. Pisteen keksiminen on hyvin luonnollista, sillä oppilaat ovat käyttäneet pistettä merkitsemään yhtä niin matematiikassa (esim. koordinaatistossa ja geometriassa) kuin puhekielessä (esim. urheilussa tai tietovisassa ”piste”). Viivan keksiminen tuntuu lähes yhtä luonnolliselta, sillä oppilaille tutuissa lukujen merkitsemistavoissa kuten tukkimiehen kirjanpidossa tai roomalaisten lukujärjestelmässä luvulle viisi on oma merkintänsä.

Simpukan selvittäminen oli huomattavasti haastavampaa, eikä kukaan keksinyt sen tarkoitusta. Oppilaat pääsääntöisesti arvelivat simpukan kuoren tarkoittavan lukua 10 tai lukua 100. Oppilaiden vastaukset ovat luvun 10 potensseja, joten voidaan ajatella, että vastaukset pohjautuvat intuitiivisesti kymmenjärjestelmään. Oppilaat ajattelevat, että ehdotetut luvut ovat ”sopivia tasalukuja” ja tällöin niille pitää olla oma merkkinsä. Toisaalta oppilaat voivat ajatella, että mayojen lukujärjestelmä on alkeellinen ja että heidän tapansa merkitä lukuja on samanlainen kuin muilla historiallisilla kansoilla kuten roomalaisilla tai egyptiläisillä (roomalaisten lukujen yhteydestä mayojen lukujärjestelmään lisää myöhemmin). Kuitenkin mielestäni kymmenjärjestelmän vaikutus oppilaiden vastauksiin on vahvempi. Oppilaiden arvauksista voidaan miettiä heidän ymmärrystään nollan merkityksestä. Jokaiselle matemaatikolle on selvää, että hyvä paikkalukujärjestelmä vaatii nollalle oman symbolin toimiakseen. Kukaan oppilaista ei arvannut simpukan tarkoittavan nollaa, joten voidaan arvella, että oppilailta tämä tärkeä tieto puuttuu.

7.2 Mayojen ja roomalaisten lukujen yhteys

Opettajan näyttäessä ensimmäisiä mayojen lukuja heräsi molemmissa ryhmissä ajatus siitä, että mayojen ja roomalaisten luvuissa olisi jotain samankaltaisuuksia. Ensimmäisellä oppitunnilla opettajan opettaessa mayojen luvun seitsemän merkitsemistä Katja mietti ääneen:

Katja: Vähän niinku roomalaisia numeroita.

Opettaja ei kuitenkaan reagoinut Katjan ajatukseen, joka jäikin käsittelemättä. Katjan ajatus roomalaisten ja mayojen lukujen samankaltaisuudesta pohjautuu ilmeisesti ensimmäisten lukujen merkitsemistapaan. Molemmissa lukujärjestelmissä on samankaltaiset, erityisesti koodatut, merkinnät numeroille 1 = I = • ja 5 = V = —, joiden avulla luvut 1-9 voidaan muodostaa. Erityisesti molemmissa järjestelmissä luvut 1 – 4 merkitään toistamalla ykkösen merkkiä, luku viisi merkitään erillisellä symbolilla ja luvut 6-9 muodostuvat lisäämällä lukuun viisi ykkösen merkkiä. Nämä yhtenevyydet selviävät taulukosta 11.

Taulukko 11. Luvut 1-9 mayojen ja roomalaisten lukujärjestelmissä.

10-järjestelmä	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Mayat	•	• •	• • •	• • • •	—	• —	• • —	• • • —	• • • • —
Roomalaiset	I	II	III	IIII tai IV	V	VI	VII	VIII	VIIII tai IX

Toisella oppitunnilla asiasta syntyikin jo huomattavasti mielenkiintoisempi keskustelu:

Sini: Onks siinä tota. Voiko se olla sillei vähän roomalainen? Eiku ei roomalaisissa voi tehdä sillei. Mut mä mietin sitä, jos laittaa viivan alapuolelle niitä, ni onks se niinku vaikka viis ja siitä yks pois ni se ois neljä?
Opettaja: Hyvä, erittäin hyvä ajatus. Mutta katoppas siitä alkuperäistä monistetta, minkä jaoin.
Sini: Ei siinä missään oo, et ne ois alla ne pisteet.
Opettaja: Aivan oikein, hyvä.

Tämä keskustelu syntyi lähes heti mayojen merkintöjen esittelyn jälkeen ennen kuin ensimmäisiä mayojen lukuja oli käsitelty. Sinin ajatus lukujärjestelmien yhteydestä on hieman erilainen kuin Katjan. Ajatuksessaan Sini soveltaa tietoa roomalaisten tavasta merkitä lukuja vähennyslaskun avulla: voiko mayojen lukuja merkitä näin? Lisäksi Sini soveltaa roomalaisten lukujen merkitsemistapaa mayojen pystysuoraan kirjoitettavaan paikkajärjestelmään.

Sinin ajatus roomalaisten ja mayojen lukujen yhteydestä perustunee osittain samoihin asioihin kuin Katjankin kuten samantyylisiin merkintätapoihin. Toisaalta Sini ei ollut vielä nähnyt, miten mayojen ensimmäiset luvut merkitään, minkä Katja oli jo nähnyt. Lisäksi Sini ottaa kuitenkin esiin täysin uuden asian: mayojen lukujen merkitsemisen vähennyslaskun avulla kuten roomalaisten lukujärjestelmässä tehdään (esim. roomalaiset luvut 4 ja 9, ks. taulukko 11). Onkin hyvin mahdollista, että Sini ajattelee mayojen lukujärjestelmän olevan samankaltainen kuin roomalaisten, koska ne ovat historiallisten kulttuurien ja kansojen lukujärjestelmiä.

Sinin ajatuksessa on myös huomattavaa se, että hän soveltaa mayojen paikkalukujärjestelmää pystysuorassa ilman, että opettaja on kertonut sen. Ilmeisesti Sini on selvittänyt tämä mayojen alkuperäisten lukujen monisteesta (liite 4), joka jaettiin ryhmille. Tätä monistetta Sini ehti tutkailla ryhmänsä kanssa ennen ajatustaan roomalaisista luvuista.

Sinin luopuminen ajatuksesta roomalaisten ja mayojen lukujen yhteydestä perustui myös mayojen alkuperäisiin lukuihin. Opettaja pyysi Siniä tutkimaan mayojen alkuperäisiä lukuja monisteesta. Sini ei kuitenkaan löytänyt vahvistusta ajatukselleen tarkastelemalla alkuperäisiä lukuja, joten hän hylkäsi idean roomalaisten ja mayojen lukujen yhteydestä.

Oppitunnin alustusvaiheessa tulleet oppilaiden ehdotukset kymmenjärjestelmän ja roomalaisten lukujen sopivuudesta mayojen lukujärjestelmään ovat hyviä ja osittain jopa perusteltavissa, mutta kuitenkin ne ovat melko kaukana mayojen lukujärjestelmän ideasta. Ehdotukset vaikuttavat intuitiivisilta ja arvuuttelulta. Tämän vuoksi on syytä olettaa, että oppilailla ei ollut mayojen lukujärjestelmästä ennakkokäsitystä. Ennakkokäsityksen puuttuminen tuntuu luonnolliselta, sillä mayojen lukujärjestelmää ei kovin usein kohtaa arkielämässä eikä koulussa.

7.3 Kaksikerroksisten mayojen lukujen ymmärtäminen

Ensimmäinen ajatus kaksikerroksisen luvun merkitsemisestä tuli toisella oppitunnilla luvun 14 kohdalla, kun Sini pohti kuinka nollaa voisi käyttää lukujen merkitsemiseen:

Sini:	Hei, saaks sitten laittaa silleen, että käyttää nollaa sillei et laittaa neljä pistettä ja tollasen *(tarkoittaa simpukan kuorta)*. Niin onks se 40?
Opettaja:	Se selviää tänään.
Sini:	On vai ei?
Opettaja:	Se selviää tänään. Katsotaan.

Sini miettii, että voiko luvun 40 merkitä piirtämällä neljä pistettä vaakatasoon ja niiden alapuolelle nollan. Tällöin pystysuoraan muodostuu luku 40, kun sovelletaan kymmenjärjestelmää pystysuoraan merkitsemistapaan ja mayojen numerosymboleihin: ensimmäisellä rivillä ovat ”ykköset” ja ylemmällä rivillä ”kympit”, jolloin muodostuu numerot 4 ja 0 eli luku 40 (taulukko 12). Sinin ajatus perustuu hyvin vahvasti kymmenjärjestelmään ja hän myös olettaa mayojen lukujärjestelmän toimivan näin.

Taulukko 12. Sinin ajatus luvun 40 merkitsemisestä.
Kyseinen mayojen merkintä tarkoittaa oikeasti lukua 80.

Mayojen merkki	Kymmenjärjestelmä pystytasossa
	4 0

Ensimmäisellä oppitunnilla oppilaat innostuivat täydentämään monisteen 1 tehtävää, kun opettaja oli näyttänyt, kuinka mayat merkitsivät lukujaan. Ennen kuin opettaja ehti kertomaan oppilaille kuinka luku 20 merkitään, niin kuusi oppilasta kahdeksasta merkitsi luvun 20 neljällä viivalla ja jatkoivat eteenpäin (luku 21 neljä viivaa ja piste, luku 22 neljä viivaa ja kaksi pistettä ja niin edelleen). Vain kaksi oppilasta jäi miettimään voisiko luvun 20 merkitä muuten. Voidaan vahvasti uskoa, että oppilaat jatkoivat proseduraalisesti oppimaansa algoritmia lukua 20 suurempien lukujen merkitsemiseen. Mayojen lukuja 0-19 opeteltaessa oppilaat huomasivat näitä lukuja koskevan säännön ja jatkoivat säännön mukaisesti eteenpäin miettimättä lukujärjestelmän rakennetta. Toisella oppitunnilla sama ilmiö ei ehtinyt pääsemään niin pitkälle, koska asiaan tutustuttiin opettajajohtoisemmin. Alla oppilaiden ajatuksia luvun 20 merkitsemisestä toisella oppitunnilla:

Anna: Onks kakskyt sitten neljä viivaa?
Opettaja: Erittäin hyvä kysymys.
Opettaja: Löytyykö neljää viivaa siitä alkuperäisestä?
Useat oppilaat vastasivat ”ei”.
Opettaja: No, mitä se vois tarkottaa?
Sini: Siinä on piste, pystyviiva ja tommonen *(Sini heiluttaa käsiään, tommonen tarkoittaa ilmeisesti simpukan kuorta).*
Anna: Onks kakskyt sitten pystyviiva?
Opettaja: Ei, hyvä ajatus.

Yhdessäkään vastausehdotuksessa ei ole suoranaista ajatusta paikkajärjestelmästä, vaan oppilaat ovat jatkaneet edellisestä luvusta opitun algoritmin mukaan (neljä viivaa) tai keksineet uuden symbolin (pystyviiva). Sekä Annan jälkimmäinen vaihtoehto että Sinin ehdotus sisältävät uuden merkin, pystysuoran viivan, vaikka opettaja korostikin oppitunnin alussa mayojen lukujärjestelmän koostuvan kolmesta merkistä. Sinin ajatuksessa pystyviiva voisi olla jonkinlainen jakaja, joka paloittelee luvun esimerkiksi ”kymppeihin” ja ”ykkösiin”. Lopulta opettajan kertoi lukujen 20 ja 21 merkinnät, mikä aiheutti suurta ihmetystä oppilaissa. Tästä ote toiselta oppitunnilta:

Jonna: Mikä logiikka tässä on?
Sini: Nyt mä en ymmärrä, tässei enää oo mitää logiikkaa.

Oppilaiden reaktio tuntuu luonnolliselta, koska lukujärjestelmä oli heille täysin uusi. Kuitenkaan tämä ihmetys ei haitannut tutkimisen jatkamista, vaan oppilaat lähtivät reippaasti tutkimaan seuraavien lukujen merkitsemistä.

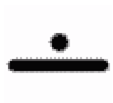
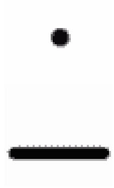
Ensimmäisellä oppitunnilla ainakin kahdessa ryhmässä oppilaat havaitsivat, että tietyt luvut näyttävät hyvin samoilta, vaikka ne ovat eri lukuja:

Sanna: Mites 24 sitten menee?
Paavo: 24 on neljä pistettä ja yksi piste.
Sanna: Mites 25?
Paavo: Yks piste ja viiva.
Sanna: Sehän on sama kuin yksitoista, eiku kuus.
Katja: Sehän on sitten sama kuin kuusi.
Paavo: Ei…
Katja: Siihen pitää pistää niin iso väli, että tajuaa.

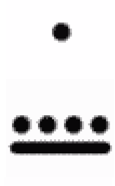
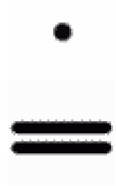
Toisessa ryhmässä taas Markus miettii miten 25 menee ja Jani auttaa:
Jani: Viiva ja piste on kuus, mutta kun siinä on
isompi väli niin se on 25.

Sekä Katja että Jani osaavat kertoa lukujen kuusi ja 25 merkitsemistavan eron, mutta he eivät perustele sitä tarkemmin (taulukko 13). Katjan ja Janin perustelut eivät näytä perustuvan tietoiseen faktaan mayojen paikkajärjestelmästä, vaan ennemminkin intuitiiviseen huomioon. Oppilaiden tekemä havainto on ensimmäinen suoraan mayojen paikkajärjestelmään liittyvä huomio. Huomiota voidaan pitää tärkeänä mayojen paikkajärjestelmän ja yleisesti paikka-arvojärjestelmän ymmärtämisessä.

Taulukko 13. Lukujen 6 ja 25 ero.

6	25
	

Taulukko 14. Luvut 29 ja 30.

29	30
	

Molemmilla oppitunneilla oppilailla oli vaikeuksia lukujen 30 ja 40 kanssa, mikä kertoo, että oppilaiden ymmärrys edellä eri kerrosten merkityksestä ei ole ollut kovinkaan kattava. Luku 30 on 20-järjestelmässä haastava oppilaille, koska nyt uutta paritonta ”kymppiä” ei lisätä ylempään kerrokseen, vaan alempaan kerrokseen (taulukko 14). Tämä on ristiriitainen ajatus kymmenjärjestelmän kanssa ja oppilaat eivät halunneet merkitä uutta kymppiä alempaan kerrokseen, vaan ylempään kerrokseen. Seuraava esimerkki toiselta oppitunnilta, missä varsinkin Sinin kommentista näkee kuinka vahvasti kymmenjärjestelmää pyritään soveltamaan mayojen lukujärjestelmään. Opettaja pyrkii kuitenkin kiinnittämään Sinin ajatuksen omaan työskentelyyn ja jo ratkaistuun lukuun 29 (ks. myös taulukko 14).

Sini: Sit kolkyt on niinku kaks pistettä ja simpukankuori, vai?
Opettaja: Hmmm, jatka tätä *(näyttää lukua 29).* Se voi olla se ratkaisu.
Myös Jonna ja Anna pohtivat lukua 30 ja mielestäni miettivät samaa vaihtoehtoa kuin Sini edellä. Opettaja kehottaa jatkamaan ja korostaa 9:n muuttumista 10:ksi.
Sini: Kaksi viivaa.
Anna: Ai piste ja kaks viivaa?
Opettaja: Kuulostas minun mielestä aika hyvältä. Se ois jotenkin järkevä vaihtoehto.
Sini: Heetkonen, mitenkäs sitten 40, kun ei saa olla neljää viivaa. Sille on sitten jokin oma symboli. Tai sitten sinne ylös tulee viiva ja alas simpukka.
Opettaja: Hyvää pohdintaa, juuri näin.

Samoin luvun 40 merkintä tuotti samanlaisia ongelmia, mutta tässä vaiheessa oppilaiden ymmärrys mayojen lukujärjestelmästä on selkeästi kasvamassa. Seuraavassa ote toiselta oppitunnilta:

Opettaja: Mitä 19 ja 20 välillä tapahtuu? *(Opettaja johdattelee kohti luvun 40 merkintää)*
Sini: No sinne siirtyy niinku se piste sinne ylös.
Opettaja: Joo, mitä se piste vois erityisesti tarkoittaa?
Sini: Kymmeniä, en tiiä.

Opettaja: Kyllä se tarkoittaa kymmeniä, mutta erityisesti mitä kymmeniä se tarkoittaa?
Sini: Kahtiakymmeniä.
Opettaja: Aivan oikein.
Jonna: Eli siellä on kaksi pistettä ja simpukan kuori.
Sini: Eli siellä on kaksi pistettä ja simpukan kuori *(yhtäaikaa Jonnan kanssa)*.
Opettaja: Onko näin?
Sini: On. Jos se on 20, niin 20+20 =40 ja sitten alle tulee nolla.
Opettaja: Kuulostaa hyvälle.
Helmi: Täällä on semmonen *(näyttää alkuperäisiä lukuja).*
Sini: Niin on eli tuo on nelkyt.
Jonnakin katselee hiukan alkuperäisiä lukuja monisteesta.

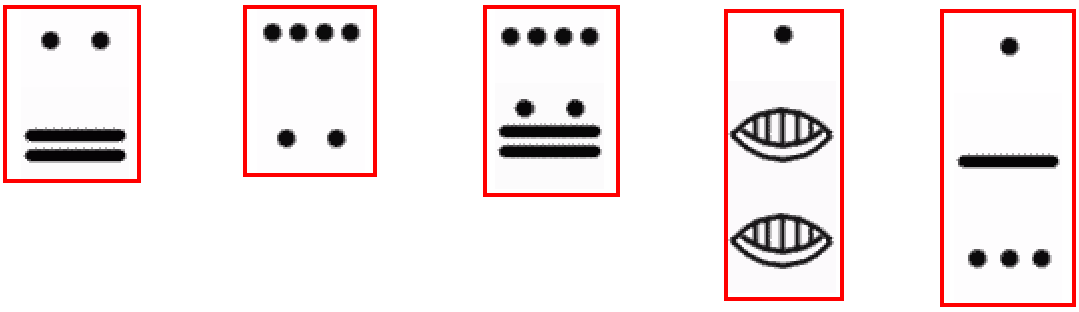
Edelleen Sinin vastauksessa piilee ajatus, että toisessa kerroksessa on kymmeniä. Kuitenkin opettajan huomautuksen perusteella Sini korjaa vastauksen oikeaksi. Tämän jälkeen Sini ja Jonna keksivät merkityksen luvun 40 merkinnälle. Erityisesti Sinin perustelu kertoo siitä, että hän tietää toisella rivillä olevan pisteen tarkoittavan kahtakymmentä. Tähän pisteeseen päästäkseen selkeästi tärkeimmät luvut ovat olleet 20, 30 ja 40, koska näiden lukujen merkitseminen ei mene kuten kymmenjärjestelmässä. Ne vaativat keksimistä ja ymmärtämistä. Näiden väleissä olevat luvut menevät opetetun algoritmin mukaan ja ne eivät tue läheskään niin paljon mayojen paikkajärjestelmän ymmärtämistä kuin luvut 20, 30 ja 40.

Tämän jälkeen oppilaat saivat ratkaistuksi hyvin nopeasti monisteen 2 tehtävän 1 kaksi kerroksiset luvut (liite 6 tai kuvio 6). Oppilaiden perustelutavat voidaan jakaa kahteen eri tapaan: Oppilaat sanoivat suoraan oikean vastauksen ja vastaus hyväksyttiin hiljaisesti ryhmässä. Oppilaat eivät siis perustelleet vastaustaan. Toisaalta oppilaat kävivät läpi jokaisen pisteen, viivan ja simpukan kuoren yksitellen. Esimerkki tästä ensimmäiseltä oppitunnilla luvun 92 ratkaisemiseksi:

Sanna: 20,40,60,80,90, 92.

Sanna siis käy ensin läpi luvun 20 kerrannaiset, jonka jälkeen hän lisää lukuun yhden kerrannaiset. Näin hän saa ratkaistua luvun. Tämä tapa toimii jo huomattavan paljon parempana todisteena kuin pelkkä vastaus. Uskon, että oppilaat, jotka sanoivat suoraan vastauksensa, käyttivät samanlaista logiikkaa lukuja ratkaistessaan. Kukaan oppilaista ei tiettävästi jatkanut luvusta 40 lisäämällä pisteitä. Oppilaiden nopea tehtävien ratkaiseminen tukee näitä väitteitä. Lisäksi vastaukset ja niiden nopea luominen kertoo, että oppilaat olivat huomanneet, että toisessa kerroksessa on luvun 20 kerrannaiset.

1. Tutki mitä seuraavat mayojen luvut tarkoittavat:



Kuvio 6. Monisteen 2 tehtävän 1 selvitettävät mayojen merkit.

7.4 Kolmikerroksisten mayojen lukujen ymmärtäminen

Monisteen 2 tehtävän 1 kahta viimeistä merkkiä (kolmikerroksiset merkit ks. kuvio 6) oppilaat eivät saaneet aluksi ratkaistua, vaan he unohtivat aiemmin ”oppimansa” suurimmalta osalta. Oppilaat pyrkivät rakentamaan vastauksena kymmenjärjestelmää apunaan käyttäen. Ensimmäisellä oppitunnilla monisteen 2 tehtävän 1 ensimmäistä kolmikerroksista lukua ihmeteltiin näin:

Sanna: Mut toi oli kakkonen *(osoittaa ylintä pistettä luvusta 400).* Se on 200 tai 2000. Jos tää on piste on kakskymmentä ja siihen lisää vielä kaksi nollaa, niin sitten se on 200.

Myös toisella tunnilla mietittiin samaan tapaan:

Sini: Tää on sata *(näyttää lukua 400).*
Jukka: Onks toi 200?
Sini: Joo 200, koska toi on kakkonen.

Sanna oli aiemmin oppinut, että mayojen lukujärjestelmässä piste tarkoittaa yhtä, mutta nyt hän ehdottaa, että se tarkoittaisikin kahta. Tämä johtunee luvun 20 merkinnästä, joka merkitään piirtämällä ylös piste ja alas simpukan kuori. Siten onkin hyvin mahdollista Sannan ajattelevan, että luvun 20 piste ei tarkoita ”yksi kertaa 20”, vaan ”kakkosta”. Tällöin luvun 20 merkintä tarkoittaisi Sannalle ”kaksi ja nolla”, mikä viittaa kymmenjärjestelmään soveltamiseen mayojen järjestelmään. Toisaalta seuraavassa lauseessaan Sanna kertookin pisteen merkitsevän lukua 20, mikä kielii epävarmuudesta ja sekaannuksesta paikka-arvojen suhteen.

Hyvin samanlainen ajatustapa on myös Sinillä ja Jukalla. Sini ehdottaa jopa ensiksi, että piste, simpukka ja simpukka tarkoittaisivat lukua 100. Tämä ajatus perustunee siihen, että piste tarkoittaa yhtä ja simpukan kuori nollaa, jolloin pystysuoraan syntyy kymmenjärjestelmässä luku 100.

Kuitenkin Sini muuttaa ajatustaan Jukan avustuksella. Sekä Sannalla että Sinillä ja Jukalla on hyvin samanlainen tapa liittää kymmenjärjestelmä mayojen lukujärjestelmään. Luvun 400 ratkaisemiseen tuli myös toinenkin yleinen ajatusmalli. Ensimmäisellä tunnilla mietittiin näin:

Jani: Tää ois 20 *(peittää luvun 400 alimman simpukan sormella).* Nolla perään ja eiks oo 200? *(Jani kysyy Markukselta.)*

Jani: Onks tää 200 vai 100 *(näyttää lukua 400)*? 20 *(näyttää luvun 400 pistettä ja ylempää simpukkaa)* ja nolla perään *(näyttää luvun 400 alinta simpukkaa). (Jani kysyy opettajalta.)*

Janin ajatus vaikuttaa seuraavanlaiselta: kun luvun 20 merkinnän pisteen ja simpukan kuoren alle laitetaan simpukan kuori eli nolla, niin saadaan luku 200. Jani näkee luvun 20 merkinnän luvussa 400, mutta hän ei ymmärrä, että luvun 20 merkintä on nyt eri kerroksissa ja väittämä ei näin ollen pidä paikkaansa.

Luvun 400 ratkaisemiseksi saatiin siis kaksi pääsääntöistä ratkaisumallia, jotka molemmat olivat vääriä. Oppilaiden käsitys mayojen paikka-arvojärjestelmästä oli selvästi puutteellinen ja kolmikerroksisia lukuja ratkaistessaan he yrittivät soveltaa kymmenjärjestelmää mayojen lukujärjestelmään. Vaikuttaa vahvasti, että monisteen 2 tehtävässä 1 olleiden kolmannen ja neljännen luvun suuruusero oli oppilaille liian suuri, koska he eivät osanneet ratkaista kolmikerroksisia lukuja. Vaikka he aiemmin ratkaisivat useita kaksikerroksisia mayojen lukuja hyvinkin nopeasti ja huomaisivat, että luvun 20 kerrannaiset tulevat toiselle riville, niin he eivät päässeet ollenkaan ratkaisemaan suurempaa lukua kuin 94. Tämän vuoksi oppilailla ei riittänyt osaaminen ratkaista kolmikerroksisia lukuja oikein tässä oppitunnin vaiheessa. Vastauksia kolmikerroksisiin mayojen lukuihin ei kuitenkaan pidetty varmoina, koska oppilaat yrittivät saada varmistusta vastaukselleen opettajalta ja muilta oppilailta, mikä kertoo myös oppilaiden omasta epävarmuudesta.

Molemmilla oppitunneilla opettaja vastasi näihin ongelmiin lyhyellä yhteenvedolla: kertaus ensimmäisen ja toisen kerroksen sisällöstä mayojen lukujärjestelmästä sekä johdatus lukuun 400 ratkaisemalla yhdessä lukuja 100 – 300. Edelleen yhteenvedossa näkyi jälleen kymmenjärjestelmän vaikutus ja mayojen paikkajärjestelmän ymmärtämättömyys, seuraava lainaus ensimmäiseltä oppitunnilta ja jälkimmäinen lainaus toiselta:

Opettaja: Nyt meidän pitäis saada selville, kun se hyppää kolmannelle riville, niin mitä siellä kolmannella rivillä on?
Paavo: Siellä on sataset.
Ilkka: Siellä on satasia.

Jonna: Me ainakin aateltiiin, että, ootas. Ne on niinku just satoja kun ollaan kolmessa rivissä. Ne on kymmeniä kahdessa rivissä. Ja satoja kolmessa rivissä.

Molemmissa katkelmissa oppilaat ajattelevat, että kolmannella rivillä on ”sataset”, mikä oli erittäin yleinen tapa tässä oppitunnin vaiheessa. Seuraavassa nähdään, kuinka tätä ajatusta voitiin haastaa toisella oppitunnilla:

Opettaja: Haluan terästää muutaman asian. (*Opettaja piirtää taululle mayojen luvun, joka on kahdessa rivissä.*)
Opettaja: Mitä täällä alemmalla rivillä on?
Sini: Ykkösiä.
Opettaja: Ykkösiä eli täällä on ykkösiä. Kuinka paljon niitä voi siellä alemmalla sarakkeella olla?
Sini: 15 eiku 19, jos kahtakymmentä ei saanut olla.
Opettaja: Kyllä, siellä 0-19 ykköstä.
Opettaja: Mitä täällä on? (*näyttää toista riviä*) Siellä on kymppejä, mutta mitä kymppejä siellä erityisesti on? Selviskö Matti äsken?
Matti: 20:siä.
Opettaja: Oikein! 20:siä. Kuinka monta 20:stä arvelette, että siellä vois olla?
Sini: No oisko sitten niinku neljä. Vai voiks siellä olla enemmänkin? Ei, neljä, ei koska 100 niinku on semmonen missä on kolme (*näyttää kolmea riviä*).
Opettaja: Mistä sä tiedät, että siinä 100:ssa on kolme numeroa?
Sini: No 1, 0 ja 0. Niin sitten sinne ylös tulee.. Hei mut satanen, mitä.
Sini: Ei voi laittaa silleen.
Opettaja: Selviskö täällä jollekin mitä satanen tarkoittaa?
Opettaja: Kerro mitä satanen tarkoittaa? (*opettaja antaa vastausvuoron Lauralle*)
Laura: Satanen on viiva ja alle yks, eiku simpukka.
Opettaja: Miksi?
Laura: No, koska sinne ylhäälle tulis muuten viisi pistettä, mutta ei saa, niin sinne tulee viiva.
Opettaja: Joo eli täällä on viisi 20:stä, joka on satanen ja täällä on nolla.
Sini: Nii-i.

Sinin ajatuksessa näkyy hyvin, että osa oppilaista ei ollut ratkaissut yli 100 olevaa lukua. Sini jopa arvuuttelee, että toiselle riville mahtuu vain neljä 20:stä. Lisäksi hän ajattelee pisteen, simpukan kuoren ja simpukan kuoren olevan luku 100. Ristiriidan tuo kuitenkin Lauran vastaus luvun 100 oikeasta merkinnästä. Tämä tietyllä tavalla näytti oppilaille, että lukua 100 suurempi luku voidaankin merkitä mayojen lukujärjestelmässä kahdessa kerroksessa. Toisella tunnilla opettaja jatkoi johdattelua kohti kolmikerroksista merkkiä ratkaisemalla isoja lukuja yhdessä:

Opettaja: Ja nyt kun lähdette miettimään sitä mitä se tarkottaa se piste ja kaksi simpukkaa, niin lähtekää tästä näin suurentamaan sitä lukua niin suureksi kuin saatte. Tässä on 100 *(opettaja piirtää luvun 100).*
Mikä tämä luku on *(opettaja piirtää luvun 200)*?

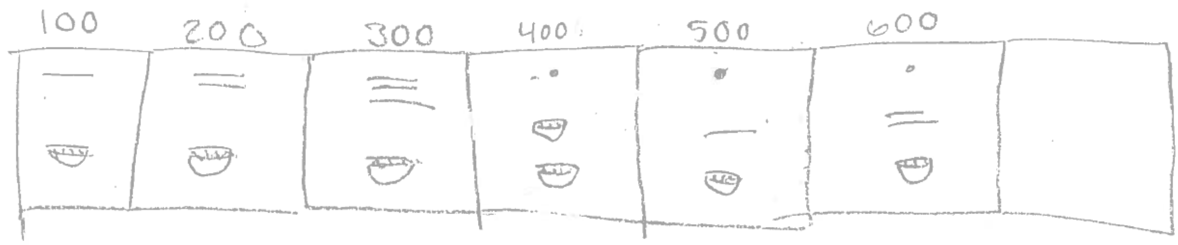
Sini: Siis toi on kahdella rivillä?
Laura: 200.
Opettaja: Oikein. Miksi?
Matti perustelee, puhetta vaikea tulkita.
Opettaja: Juurikin ihan oikein, eli 2*5 joka on 10 ja 10:n 20:stä on 200. Ja lähette suurentamaan tätä lukua *(lukua 200)*, niin lähelle sitä miten tää menee yli. Missä vaiheessa tää menee yli täältä *(opettaja näyttää toista kerrosta)*? Mitä arvelette?
Sini: Ei saanu olla neljää viivaa.
Opettaja: Joo.
Sini: Eli kolme viivaa ja neljä pistettä yläpuolella saa laittaa.
Opettaja: Nyt tavotteena olis selvittää tämmönen luku (*opettaja piirtää mayojen luvun 399*).
Sini: Öö, ei saanu olla neljää viivaa ja viittä pistettä.
Opettaja: Meillä on kahdella rivillä just se, koska nythän siinä tapahtuu jotain, kun tänne tulee
Sini: 100, 200, 300.
Opettaja: Selvittääkäs nyt paperille ryhmässä se.
Sini: 300, 320, 40, 60, 380 plus 5,10,15, 16, 17, 18, 19
eli 380 hmm… 399
Opettaja merkitsee taululle, että merkki tosiaan on 399.
Opettaja: Nyt mietitte mitä se tarkottaa se piste ja kaksi simpukkaa. Plus se viides luku.

Johdattelussa näkee kuinka hyvin Sini hyväksyi tiedon, että toisessa kerroksessa on nimenomaan luvun 20 kerrannaiset ja että niitä voi olla useampia kuin neljä. Hän pystyy hyvin nopeasti ratkaisemaan luvun 399. Sinin ymmärryksen tasoa on vaikea tulkita, mutta ainakin ratkaiseminen sujuu proseduraalisesti hyvin. Kuitenkin luvun 400 ratkaiseminen vaatii vielä ponnistuksia:

Sini ryhmineen on päätynyt, että kolmas rivi tarkoittaa 300.
Opettaja: Sini, sä ratkaisit, että kahdella rivillä on näin iso luku (*399*). Voiko kolmannella rivillä olla isompi luku?
Sini: Voi.
Opettaja: Anteeksi pienempi luku.
Sini: Eiii.
Opettaja: Sä ratkaisit jo, että tämmönen luku missä alarivillä on 19 ykköstä ja 10 20:stä on 399. Nyt sen kolmannella rivillä olevan luvun pitää ehdottomasti olla isompi luku, jotta siinä olis jotain järkee siinä.
Sini: Sit se on 400 se seuraava luku.
Opettaja: Oikein.

Edelleen vastauksessa näkyy, että Sini ei osaa täysin hyödyntää oppimiaan asioita mayojen lukujärjestelmästä, vaan tyytyy jopa selvästi ristiriitaiseen vastaukseen. Kuitenkin opettajan huomautuksesta Sini ilmeisesti arvaa oikean vastauksen. Toisella tunnilla kaikki ryhmät saivat ratkaistua luvun 400 merkinnän ja tieto merkinnän oikeellisuudesta levisi. Tämän lisäksi ainakin Sinin, Helmin ja Jukan ryhmä jatkoi lukujen ratkaisemista omaehtoisesti lukuun 600 (kuvio 7).

Ensimmäisellä oppitunnilla luku 400 saatiin ratkaistua samalla tavalla kuin toisella oppitunnilla lukuja suurentamalla (100, 150, 200, …, 400), mutta opettajan johdolla ja oppitunnin loppuosassa.



Kuvio 7. Sinin, Helmin ja Jukan ratkaisemia mayojen merkintöjä.

7.5 Oppilaiden ajatuksia loppukoonnissa

Loppukoonnissa kerrattiin hyvin pitkälti samoja asioita kuin välikoonnissa. Varsinkin ensimmäisellä tunnilla loppukoonnin aika kului kertaamiseen ja oppilaiden johdattelemiseen kolmikerroksisiin lukuihin. Toisella tunnilla oppilaat olivat ratkaisseet jo kolmikerroksisia lukuja, joten koontivaihekin oli paljon monipuolisempi, jonka vuoksi loppuosa analyysistä keskittyy jälkimmäiseen oppituntiin. Toisen oppitunnin koonti alkoi kuitenkin kertauksella, jossa opettaja piirsi kolmikerroksisen tyhjän mayojen luvun ja kävi oppilaiden kanssa läpi mitä eri kerrokset sisältävät (1,20 ja 400 kerrannaiset):

Opettaja: Mitä ekalla rivillä tarkoitetaan?
Sini: Ykkösiä.
Opettaja: Joo, jos ollaan yhdellä rivillä, niin täällä on ykköset (*opettaja osoittaa piirtämäänsä laatikkoa*). Ja kuinka paljon niitä pysty olemaan?
Sini: 0-19.
Opettaja: Mitä kun hypätään toiselle riville, niin mitä siellä toisella rivillä on? (*opettaja piirtänyt taululle ensimmäisen laatikon päälle toisen ja osoittaa sitä*)
Joonas: 20:set.
Opettaja: Oikein! Paljon niitä voi olla siellä?
Joonas: 15:toista 20:ä… Eiku 19.
Opettaja: Hyvä. Eli siellä on 20:set ja niitä voi olla 0-19 kappaletta. Mitä tarkottaa, kun mennään sinne kolmannelle riville? Jos siellä on piste, niin mitä se yksi piste tarkoittaa?
Sini: 400.
Opettaja: Kyllä! Paljon niitä voi olla siellä?
Anna: 19!
Sini: 19!

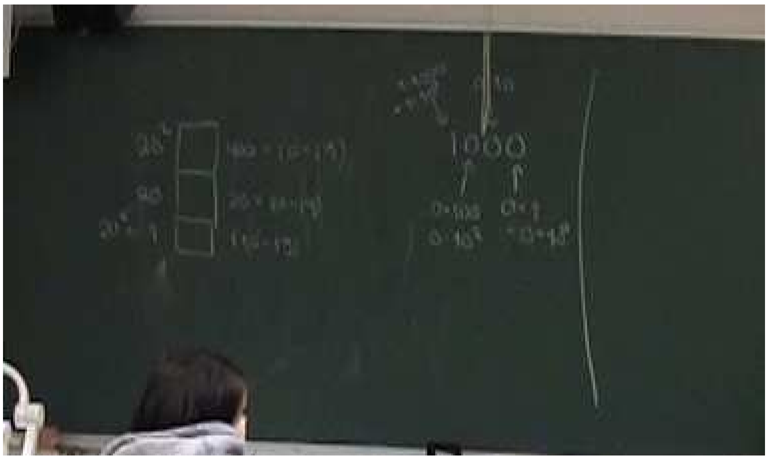
Opettaja: Joo, niitä voi olla 19.

Mayojen kolmen ensimmäisen kerroksen tarkoitus on keskustelun pohjalta selvinnyt oppilaille melko hyvin ja jopa puheentasolla oppilailta puuttuivat kymmenjärjestelmän termit ”kympit” ja ”sataset”. Tämä perusteella voidaan olettaa, että oppilaat pystyisivät ratkaisemaan oppimansa perusteella mayojen kolmikerroksisia lukuja. Kuitenkin oppilaiden ymmärrys siitä, miksi kolmannessa kerroksessa on luvun 400 kerrannaiset ja miksi jokaiselle riville mahtuu vain 19 merkkiä, oli vajavaista. Toisin sanoen oppilaille ei ollut selvää kantaluvun ja paikka-arvojärjestelmän käsitteiden merkitys. Tämä näkyy seuraavassa otteessa, jossa edellä näytetyn kertauksen jälkeen opettaja vertaa kymmenjärjestelmää ja mayojen lukujärjestelmää toisiinsa:

Opettaja: Katsokaas nyt mikä tämän pelin logiikka on.. Mikä on kymmenjärjestelmä? *(Ei vastausta.)* Kymmenjärjestelmä on se lukujärjestelmä, jota me käytetään päivittäin. Eli nyt tulee tuttu luku teille (*opettaja piirtää luvun 1000 kymmenjärjestelmässä).* Tää on tuhat ja tää nyt ei oo mayojen järjestelmässä. Mitä tää viimeinen nolla täällä tarkottaa (*opettaja osoittaa ensimmäistä nollaa luvusta 1000*)? Osaatteko sanoa? Tää voi olla tyhmä kysymys, mutta…
Matti: Ykkösiä.
Sini: Ykkösiä.
Opettaja: Jes! Eli siellä on nolla ykköstä. Mitäs tää tarkottaa täällä (*opettaja osoittaa toista nollaa*)?
Matti: Kymmeniä.
Sini: Nolla kymmentä.
Opettaja: Oikein. Entäs tuo (*opettaja osoittaa kolmatta nollaa*)?
Sini: Nolla sataa.
Opettaja: Oikein, nolla sataa. Voiko sen ilmoittaa, jotenkin kympin avulla?
Sini: Kymmenen kymmentä.
Opettaja: Jep! Eli se on nolla kertaa kymmenen potenssiin kaksi. Entäs mitä tää tarkottaa täällä (*opettaja osoittaa numeroa yksi luvussa 1000*)?
Sini: Yksi kertaa kymmenen potenssiin kolme.
Opettaja: Kyllä. Onko tässä samanlaista logiikkaa verrattuna tohon (*opettaja osoittaa piirtämäänsä ”laatikkomallia” mayojen lukujärjestelmästä*)?
Useita arvauksia molempiin suuntiin.
Opettaja: Siinä on! Täällä on nyt ne ykköset. Täällä kaksikymppiset. Osaatteko sanoa, mitä 400 on kaksikymppisten avulla? (*Opettaja käy samalla läpi kerroksia.*)
Anna: 20*20.
Opettaja: Kyllä!
Sini: Mutta yks kertaa yks ei oo kahtakymmentä, siinä logiikkas pettää.
Opettaja: Mutta katoppas, se logiikka on siinä, että… *(Sini keskeyttää opettajan puheen.)*
Sini: Nii, mut se logiikka on siinä, että ei siitä ykkösestä saa kymmentä millään, vaikka.
Opettaja: Täällä 10 potenssiin nolla on yksi ja täällä 20 potenssin nolla on yksi (*opettaja näyttää taululla kummasta lukujärjestelmä puhuu*)..
Sini: 20 potenssiin nolla on yksi. Miten ni?
Opettaja: Jos korotetaan nollanteen potenssiin, niin saadaan aina yksi.
Suurta hämmennystä oppilaissa, miten nollas potenssi voi olla yksi.

Opettaja: Osaatteko sanoa nyt minkälainen tämä järjestelmä on nyt, kun meillä on kymmenjärjestelmä, niin mikä järjestelmä mayoilla on?
Helmi: 20-järjestelmä.

Oppilaat osaavat kertoa kymmenjärjestelmän luvun 1000 paikka-arvot sujuvasti, johon osaltaan vaikuttaa varmasti oppitunnin aikana useaan kertaan toistettu mayojen paikka-arvojärjestelmän pohtiminen. Opettajan avustuksella Anna pystyy esittämään luvun 400 lukuna 20^2 ja lukujärjestelmien välille syntyy ainakin osittainen side. Suurimmaksi ongelmaksi syntyy kuitenkin molempien lukujärjestelmien ensimmäisen paikka-arvon edustaja eli luku yksi, joka ei sovi oppilaiden logiikkaan. Lisäksi tämän ymmärtäminen vaikeutuu vielä, kun oppilaat eivät ymmärrä nollannen potenssin merkitystä. Siten opettajan esittämä esimerkki ei toiminut parhaalla mahdollisella tavalla. Helmi pystyy kuitenkin esimerkin jälkeen nimeämään mayojen lukujärjestelmän 20-järjestelmäksi, minkä hän luultavasti keksii kymmenjärjestelmän nimestä. Kuviossa 8 on valokuva opettajan taulutyöskentelystä esimerkissä.



Kuvio 8. Kymmenjärjestelmän ja mayojen lukujärjestelmän vertaaminen taululla opettajan piirtämänä.

Opettajan esimerkin avulla oppilaat kuitenkin ymmärsivät, mitä mayojen eri kerroksissa on, kuten näemme koontivaiheen jatkumisesta, jossa opettaja kysyy neljäkerroksista mayojen lukua:

Opettaja: Aivan oikein! Ja viimenen kysymys vielä. Jos meillä on tämmönen luku: piste, simpukka, simpukka, simpukka (*opettaja piirtää sanomansa luvun*).
Sini: 4000 eiku 8000. *(Opettaja ei reagoi Sinin vastaukseen, vaikka hän vastaa oikein.)*
Opettaja: Jukka, mitä täällä on (*alin simpukka*)?
Jukka: Ykköset.

Opettaja: Kyllä, mitä täällä on (*toisen rivin simpukka*)?
Joonas: Kymmenet.
Sini: 20:set.
Opettaja: Kyllä: Mitä täällä on (*kolmannen rivin simpukka*)?
Anna : 20 potenssiin kaksi.
Opettaja: Eli…
Joonas: 400.
Opettaja: Kyllä ja mitä ylhäällä on (*neljäs rivi*)?
Joonas: Eikös siellä ole 20 potenssiin kolme eli 600.
Opettaja: Just! Kaksikymmentä potenssiin kolme eli?
Sini: 8000.
Opettaja: Hyvä! Ja mikä tää luku sillon on?
Sini: 8000.
Opettaja: Ihan oikein.
Sini: Tässä on kuitenkin joku logiikka.

Opettajan esimerkin vaikutus näkyy edellä selkeästi, koska oppilaat osaavat laskea neljännen kerroksen paikka-arvon potenssin avulla ja näin he pystyvät laskemaan neljäkerroksisen mayojen luvun. Osa oppilaista kuten Sini, pystyisi tässä vaiheessa luultavasti laskemaan kuinka suuren mayojen luvun tahansa, koska nyt he pystyvät laskemaan uuden kerroksen paikka-arvon.

7.6 Sinin oppimispolku

Tunnin alkuosan tapahtumien perusteella vaikuttaa siltä, että Sinillä ei ollut ennalta muodostettua mielikuvaa mayojen lukujärjestelmästä. Arvauksissa simpukan kuoren merkityksestä oli kymmenjärjestelmään viittaavia elementtejä ja hetkeä myöhemmin Sini yritti löytää yhteyden mayojen ja roomalaisten lukujen välille (piste a kuviossa 9). Nämä ehdotukset vaikuttavat hyvin intuitiivisilta ja arvuuttelemiselta. Tämän vuoksi oppitunnin alkuvaiheessa Sinin ymmärtämisen vaihetta voidaan pitää alkeistietämisen vaiheena (**PK**).

Mielikuvan muodostamisen vaiheeseen (**IM**) Sinin voidaan ajatella siirtyneen, kun hän alkoi täyttää opettajan johdolla monistetta 1 (b). Lukuja 0-21 merkintää opeteltaessa Sini luo mielikuvaansa mayojen lukujärjestelmästä. Luvun 14 kohdalla Sini yritti jälleen yhdistää kymmenjärjestelmää mielikuvaansa mayojen lukujärjestelmästä, joka vahvistaa ajatusta, että Sini on edelleen mielikuvan muodostamisen vaiheessa:

Sini: Hei, saaks sitten laittaa silleen, että käyttää nollaa sillei et laittaa neljä pistettä ja tollasen *(tarkoittaa simpukan kuorta)*. Niin onks se 40?

Luvun 22 ratkaisemisesta eteenpäin on selkeitä merkkejä mielikuvan hallinnan vaiheesta (**IH**), sillä Sini pystyy merkitsemään luvut 22–39 itsenäisesti lukuun ottamatta lukua 30 (c). Luvun 30 ratkaiseminen onnistuu sekin kuitenkin melko hyvin, vaikka se vaatii opettajan avustusta. Kuitenkin kokonaisuudessaan Sinin ymmärrys mayojen lukujärjestelmästä on kasvanut.

Luvun 40 ratkaisemisessa Sini pystyy perustelemaan vastauksensa, mikä on ominaisuuksien huomioimisen vaiheen (**PN**) tunnusmerkkejä (d):

Opettaja: Mitä 19 ja 20 välillä tapahtuu? *(Opettaja johdattelee kohti luvun 40 merkintää)*
Sini: No sinne siirtyy niinku se piste sinne ylös.
Opettaja: Joo, mitä se piste vois erityisesti tarkoittaa?
Sini: Kymmeniä, en tiiä.
Opettaja: Kyllä se tarkoittaa kymmeniä, mutta erityisesti mitä kymmeniä se tarkoittaa?
Sini: Kahtiakymmeniä.
Opettaja: Aivan oikein.
Jonna: Eli siellä on kaksi pistettä ja simpukan kuori.
Sini: Eli siellä on kaksi pistettä ja simpukan kuori *(yhtäaikaa Jonnan kanssa)*.
Opettaja: Onko näin?
Sini: On. Jos se on 20, niin 20+20 =40 ja sitten alle tulee nolla.

Luvun 40 ratkaisemisen jälkeen Sini jatkaa monisteeseen 2 ja kykenee ratkaisemaan kaikki kolme kaksikerroksista merkkiä helposti. Ratkaistut luvut olivat 52, 82 ja 94, jotka vaativat jo kohtalaisen hyvää tietoutta kaksikerroksisten mayojen lukujen merkitsemisestä. Tämä vahvistaa Sinin olevan ominaisuuksien huomioimisen vaiheessa.

Seuraavaksi Sini siirtyy monisteen 2 kolmikerroksisiin lukuihin, joiden ratkaiseminen tuottaa ongelmia. Ensiksi Sini ehdottaa luvun 400 tarkoittavan lukua 100, mutta hän vaihtaa vastauksen lukuun 200 Jukan huomautuksesta. Sinin ja muiden olemuksessa on huomattavissa, että he eivät ole varmoja vastauksen oikeellisuudesta. Opettajan pitämässä väliyhteenvedossa Sini pystyy edelleen kertomaan ensimmäisen kerroksen paikka-arvon ja kuinka paljon yksiköitä sinne mahtuu. Seuraavassa otteessa väliyhteenvedosta nähdään Sinin puutteellinen ymmärrys toisen kerroksen merkityksestä:

Opettaja: Mitä täällä on? (*näyttää toista riviä*) Siellä on kymppejä, mutta mitä kymppejä siellä erityisesti on? Selviskö Matti äsken?
Matti: 20:siä.
Opettaja: Oikein! 20:siä. Kuinka monta 20:stä arvelette, että siellä vois olla?
Sini: No oisko sitten niinku neljä. Vai voiks siellä olla enemmänkin? Ei, neljä, ei koska 100 niinku on semmonen missä on kolme (*näyttää kolmea riviä*).
Opettaja: Mistä sä tiedät, että siinä 100:ssa on kolme numeroa?
Sini: No 1, 0 ja 0. Niin sitten sinne ylös tulee.. Hei mut satanen, mitä.
Sini: Ei voi laittaa silleen.

Opettaja: Selviskö täällä jollekin mitä satanen tarkoittaa?
Opettaja: Kerro mitä satanen tarkoittaa? (*opettaja antaa vastausvuoron Lauralle*)
Laura: Satanen on viiva ja alle yks, eiku simpukka.
Opettaja: Miksi?
Laura: No, koska sinne ylhäälle tulis muuten viisi pistettä, mutta ei saa, niin sinne tulee viiva.
Opettaja: Joo eli täällä on viisi 20:stä, joka on satanen ja täällä on nolla.
Sini: Nii-i.

Sini siis uskoo, että toisella rivillä ei voi olla kuin neljä 20:stä ja ensimmäisen kolmikerroksisen luvun tarkoittavan lukua 100. Opettajan kysymykset ja Lauran perusteltu vastaus luvun 100 merkinnästä aiheuttaa ristiriidan Sinin ajatuksen kanssa (e). Sini palaa takaisin mielikuvan muodostamisen vaiheeseen eli Sinin ymmärtämisprosessissa tapahtuu takaisin kiertyminen.

Hyvin pian Sini pystyy muuttamaan mielikuviaan mayojen lukujärjestelmästä ja käyttää hyödyksi aiempaa tietoa siitä, että tietyssä kerroksessa voi olla korkeintaan vain kolme viivaa ja neljä pistettä. Tämän tiedon avulla Sini kykenee laajentamaan mielikuviaan useammassa kerroksessa olevista mayojen luvuista ja hän pystyy ratkaisemaan luvun 399. Luvun 399 ratkaiseminen sujuu nopeasti ja hän pystyy samalla perustelemaan vastauksensa, mikä kertoo että Sini on palannut ominaisuuksien huomioimisen tasolle (f).

Opettaja: Ja nyt kun lähdette miettimään sitä mitä se tarkottaa se piste ja kaksi simpukkaa, niin lähtekää tästä näin suurentamaan sitä lukua niin suureksi kuin saatte. Tässä on 100 *(opettaja piirtää luvun 100).*
Mikä tämä luku on *(opettaja piirtää luvun 200)*?
Sini: Siis toi on kahdella rivillä?
Laura: 200.
Opettaja: Oikein. Miksi?
Matti perustelee, puhetta vaikea tulkita.
Opettaja: Juurikin ihan oikein, eli 2*5 joka on 10 ja 10:n 20:stä on 200. Ja lähette suurentamaan tätä lukua *(lukua 200)*, niin lähelle sitä miten tää menee yli. Missä vaiheessa tää menee yli täältä *(opettaja näyttää toista kerrosta)*? Mitä arvelette?
Sini: Ei saanu olla neljää viivaa.
Opettaja: Joo.
Sini: Eli kolme viivaa ja neljä pistettä yläpuolella saa laittaa.
Opettaja: Nyt tavotteena olis selvittää tämmönen luku (*opettaja piirtää mayojen luvun 399*).
Sini: Öö, ei saanu olla neljää viivaa ja viittä pistettä.
Opettaja: Meillä on kahdella rivillä just se, koska nythän siinä tapahtuu jotain, kun tänne tulee
Sini: 100, 200, 300.
Opettaja: Selvittääkäs nyt paperille ryhmässä se.
Sini: 300, 320, 40, 60, 380 plus 5,10,15, 16, 17, 18, 19
eli 380 hmm… 399
Opettaja merkitsee taululle, että merkki tosiaan on 399.
Opettaja: Nyt mietitte mitä se tarkottaa se piste ja kaksi simpukkaa. Plus se viides luku.

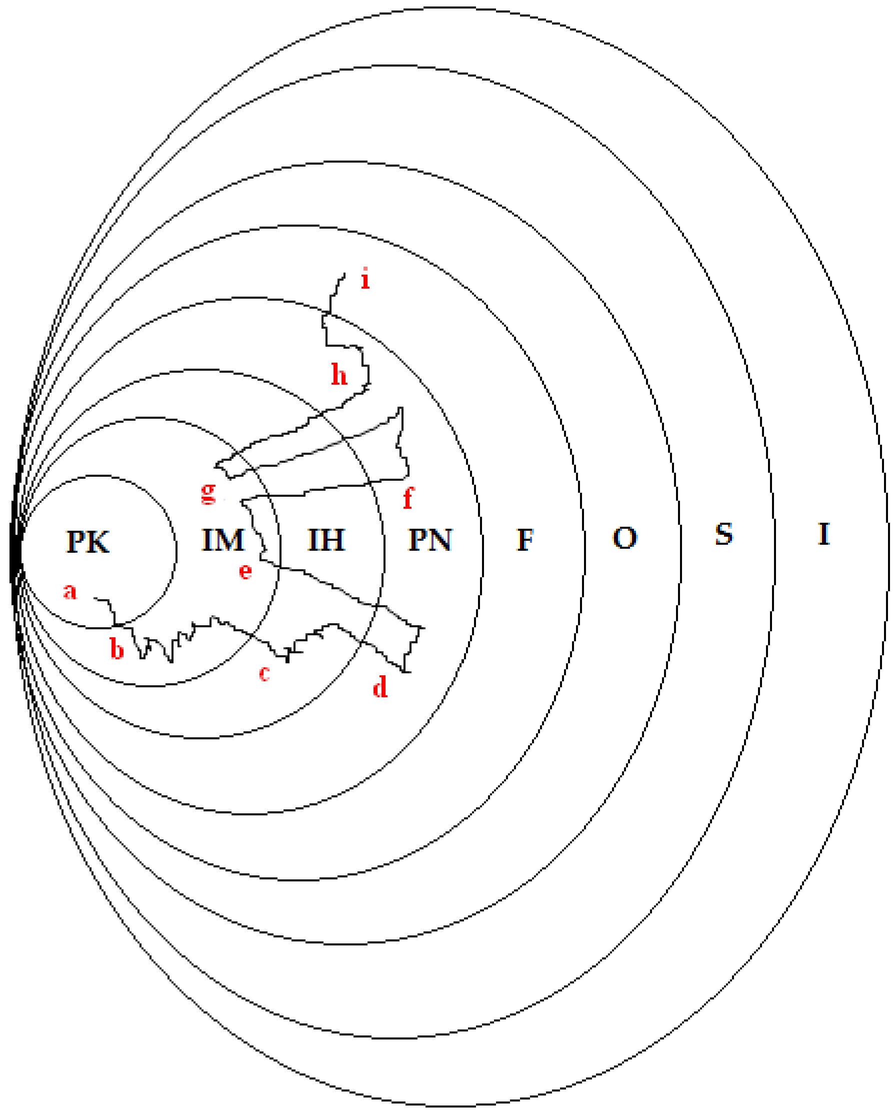
Luvun 399 ratkaisun jälkeen Sini kuitenkin ratkaisee mayojen merkinnän pisteen, simpukan ja simpukan väärin. He arvelevat tämän merkinnän olevan luku 300. Opettajan huomautus aiheuttaa takaisin kiertymisen mielikuvan muodostamisen vaiheeseen (g):

Opettaja: Sini, sä ratkaisit, että kahdella rivillä on näin iso luku (*399*). Voiko kolmannella rivillä olla isompi luku?
Sini: Voi.
Opettaja: Anteeksi pienempi luku.
Sini: Eiii.
Opettaja: Sä ratkaisit jo, että tämmönen luku missä alarivillä on 19 ykköstä ja 10 20:stä on 399. Nyt sen kolmannella rivillä olevan luvun pitää ehodottomasti olla isompi luku, jotta siinä olis jotain järkee siinä.
Sini: Sit se on 400 se seuraava luku.
Opettaja: Oikein.

Tämän jälkeen Sini pystyy sujuvasta ratkaisemaan monisteen 2 viimeisen merkin (luku 503) ja ratkaisee omatoimisesti merkinnät luvuille 500 ja 600 (h). Edellisen perusteella Sinin voidaan ajatella palanneen ominaisuuksien huomioimisen tasolle. Sini on jopa hyvin lähellä formalisoinnin vaihetta (**F**), mutta tätä ei pystytä varmistamaan, sillä ei varmaksi tiedetä pystyisikö Sini soveltamaan oppimaansa myös useampi kerroksisiin mayojen lukuihin.

Opettajan ohjaamassa loppukoonnissa näkyy, että Sini ymmärrys mayojen lukujärjestelmästä on melko vakiintunut. Hän pystyy kertomaan kolmen ensimmäisen paikka-arvon merkityksen ja mitä kerroksiin mahtuu. Lisäksi hän pystyy ratkaisemaan mayojen kolmikerroksisia lukuja sujuvasti. Tämä vahvistaa edelleen, että Sini on vähintäänkin ominaisuuksien huomioimisen vaiheessa.

Opettajan esittämä vertaus kymmenjärjestelmän ja mayojen lukujärjestelmien yhteydestä Sini huomaa, että mayojen paikkajärjestelmän paikka-arvot voidaan laskea luvun 20 potenssin avulla (i). Tämän avulla Sini pystyy antamaan heti oikein vastauksen neljä kerroksisen luvun (8000) merkityksestä. Sini siis pystyy toimimaan symbolitasolla ja kykenee tulkitsemaan mayojen lukuja nopeasti. Nämä havainnot viittaavat siihen, että Sini on siirtynyt formalisoinnin vaiheeseen (**F**). Tämä tarkoittaa myös sitä, että Sini olisi valmis formaaliin matemaattiseen määritelmään mayojen lukujärjestelmästä ja lukujärjestelmistä yleensä.



Kuvio 9. Sinin oppimispolku.

8 POHDINTA

8.1 Oppilaiden matemaattinen ajattelu opetuskokeilussa

Tutkimuksen tavoitteena oli tutkia oppilaiden matemaattista ajattelua mayojen lukujärjestelmä -opetuskokeilussa, jossa opetustapana toimi tutkiva matematiikka. Yleisesti oppilaiden matemaattisesta ajattelusta on hyvin paljon erilaisia tutkimuksia, mutta yksityiskohtaista tietoa mayojen lukujärjestelmän oppimisesta on hyvin vähän. Tämän vuoksi esittelen ensiksi oppilaiden ajattelutapoja ja oppimisprosessia mayojen lukujärjestelmästä. Tämän jälkeen pohdin oppilaiden ymmärrystä lukujärjestelmistä opetuskokeilun perusteella. Lopuksi tarkastelen Sinin matemaattisen ajattelun kasvun prosessia Pirien ja Kierenin (1994) mallin avulla ja pohdin mitä se kertoo tutkivasta matematiikasta.

Alustusvaiheessa oppilaat tutustuivat mayojen lukujärjestelmään ja oppilaiden ajattelutavoissa näkyi intuitiivisuus. Oppilaiden toiminnasta voidaan päätellä, että ennen oppituntia oppilailla ei luultavasti ollut mielikuvaa mayojen lukujärjestelmästä. Oppilaat pyrkivät luomaan mielikuvia mayojen lukujärjestelmästä kymmenjärjestelmän ja historian avulla. Esimerkiksi mayojen merkkien arvaamisessa oli kymmenjärjestelmään viittaavia arvauksia. Kymmenjärjestelmää ikänsä käyttäneestä oppilaasta varmasti tuntuu luonnolliselta arvata mayojen merkeiksi kymmenen potensseja kuten lukuja 10 ja 100. Toisin varmasti olisi, jos käyttäisimme esimerkiksi yleisesti 20-järjestelmää jokapäiväisessä elämässämme. Oppilaiden arvauksista kuitenkin kumpuaa ajatus siitä, kuinka hyvin he ymmärtävät mistä lukujärjestelmä koostuu ja mikä sen tarkoitus on. Ymmärtävätkö he esimerkiksi nollan merkityksen lukujärjestelmälle ja aritmeettisille laskutoimituksille? Oppilaiden vastaukset eivät ainakaan sitä vahvista, mutta toisaalta tätä asiaa ei riittävästi mietitty oppilaiden kanssa, jotta asiasta voisi rakentaa laajempia johtopäätöksiä. Olisikin mielenkiintoista palata oppitunnille ja pysäyttää oppitunti kysymyksiin: ”Hei, simpukka tarkoittaa nollaa, mutta osaatteko sanoa miksi? Mikä on nollan tarkoitus? Mitä nollasta hyödytään?”

Molempien oppituntien alustusvaiheessa oppilaat yhdistivät myös roomalaiset luvut mayojen lukujärjestelmään. Oppilaat luultavasti yhdistivät nämä lukujärjestelmät toisiinsa, koska molemmissa lukujärjestelmässä on omat erityiset merkkinsä, jotka poikkeavat arabialaisista numeromerkeistä. Oppilaat yrittivät rakentaa mielikuviaan mayojen lukujärjestelmästä historian tuntemuksensa avulla, tässä tapauksessa roomalaisten lukujen kautta. Huomioita roomalaisista luvuista olisi tuskin tullut, jos mayojen lukujärjestelmän sijaan olisi opetettu pelkistettyä 20-järjestelmää arabialaisin numeroin. Tällöin oppitunnilta olisi kuitenkin hävinnyt mayojen historian ja kulttuurin kautta saavutettu oppilaiden motivaatio ja innostus, mikä näkyi positiivisesti oppilaiden työskentelyssä. Samanlainen oppilaiden motivaatio on havaittu myös Nicolin ja Crespon (2005) tutkimuksessa, joka toimi yhtenä opetuskokeilun teoreettisena lähtökohtana.

Tutkimisvaiheessa korostui mayojen paikka-arvojärjestelmän opetteleminen sekä kamppailu 20-järjestelmän ja kymmenjärjestelmän välillä. Tutkimusvaihe alkoi kaksikerroksisista mayojen lukujen tutkimisesta, joista ensimmäiset olivat luvut 20 ja 21. Näitä lukuja oppilaat eivät itse pystyneet ratkaisemaan, vaan opettaja kertoi näiden lukujen ratkaisut. Vaikka lukujen 20 ja 21 oikeat merkinnät aiheuttivat ihmetystä oppilaissa, niin he kuitenkin jatkoivat tutkimusta sujuvasti. Tietynlaisiksi vedenjakajiksi kaksikerroksisten lukujen ymmärtämisessä voidaan pitää lukujen 30 ja 40 ratkaisemista. Mayojen lukujärjestelmässä uusi ”pariton kymppi” merkitään alemmalle paikka-arvolle kuten luvussa 30, mikä on ristiriitaista oppilaiden kymmenjärjestelmävaikutteisen ajatusmaailman kanssa. Esimerkiksi oppilaiden eräs ratkaisuehdotus luvulle 30 oli kaksi pistettä ja simpukan kuori, mikä on kymmenjärjestelmään viittaava vastaus. Lukujen 30 ja 40 ratkaisemisen jälkeen oppilaat pystyivät ratkaisemaan nopeasti monisteen 2 kaksikerroksiset luvut. Osa oppilaista perusteli vastauksensa myös ääneen, mikä ratkaisunopeuden lisäksi tukee ajatusta, että oppilaat olivat huomanneet osittain toisen kerroksen tarkoituksen.

Siirtyminen kolmikerroksisiin lukuihin ei kuitenkaan onnistunut samalla tavalla, vaan oppilailla oli suuria ongelmia ratkaista mayojen kolmikerroksisia lukuja. Luvun 400 (piste, simpukka, simpukka) ratkaisemiseen oli pääsääntöisesti kaksi ratkaisumallia: 1) Piste tarkoittaa numeroa kaksi, jonka perään laitetaan kaksi nollaa eli kaksi simpukkaa. Näin saadaan vastaukseksi luku 200. 2) Toisaalta osa oppilaista ajatteli, että piste ja simpukka muodostavat luvun 20, jonka perään laitetaan nolla eli simpukka, jolloin jälleen saadaan luku 200. Samanlainen tilanne on havaittu myös Thanheiserin ja Rhoadsin (2009) tutkimuksessa, jossa 13 (N=24) luokanopettajaopiskelijaa päätteli pisteen, simpukan ja simpukan tarkoittavan lukua 200, vaikka heille oli opetettu mayojen kaksikerroksisten lukujen merkitseminen. Näiden 13 opettajaopiskelijan ratkaisumallit olivat täysin identtiset tämän tutkimuksen kanssa.

Oppilaiden väärät ajattelutavat kolmikerroksisista lukujen merkinnöistä pystyttiin kumoamaan oppitunneilla vastaesimerkin ja opettajan johdattelun avulla. Tämä tapahtui opettajan ohjaamassa välikoonnissa, jossa oppilaat pystyivät lopulta itse merkitsemään oikein merkinnöin luvun 200. Samaan lopputulokseen olisi mahdollisesti päästy ilman opettajan väliyhteenvetoa, jos tehtävämonisteessa olisi ollut ratkaistavana useampia mayojen lukuja, jotka ylittävät luvut 100 ja 200.

Koontivaihe muodostui oppituntien välillä hyvin erilaisiksi. Ensimmäisen oppitunnin koontivaiheen tarkoitukseksi jäi vahvistaa oppilaiden käsitystä kolmesta ensimmäisestä kerroksesta, kun toisella oppitunnilla mayojen lukujärjestelmää verrattiin 10-järjestelmään, tutkittiin paikka-arvojärjestelmän rakennetta ja ratkaistiin nelikerroksinen mayojen luku. Erityisesti jälkimmäisen oppitunnin koontivaiheessa näkyy se, kuinka oppilaat alkoivat hahmottaa mayojen lukujärjestelmän ydintä. Kymmenjärjestelmäesimerkin avulla pystyttiin selventämään mayojen lukujärjestelmän rakennetta, erityisesti paikka-arvojärjestelmän ja kantaluvun käsitteitä. Tässä täyttyy ehkäpä vahvimmin oppitunnin matemaattinen tavoite eli paikka-arvojärjestelmän ja kantaluvun käsitteiden ymmärtämisen vahvistaminen. Oppilaat pystyivät omalla tutkimuksellaan selvittämään uuden ja erilaisen lukujärjestelmän. Tietyllä tavalla opetuskokeilun voidaan kuitenkin ajatella jääneen kesken, sillä seuraavalla oppitunnilla olisi varmasti potentiaalia vahvistaa lisää oppilaiden ymmärrystä paikka-arvojärjestelmästä ja kantaluvusta, ehkäpä jopa matemaattisten määritelmien avulla.

Opetuskokeilun perusteella oppilailla oli ongelmia lukujärjestelmien ymmärtämisessä. Oppilaiden työskentelyssä näkyi koko oppitunnin ajan kymmenjärjestelmän vaikutus: esimerkiksi puhuttiin ”ykkösistä, kympeistä, satasista” ja kymmenjärjestelmää pyrittiin soveltamaan lähes koko ajan (erityisesti mayojen lukujärjestelmän uusissa paikka-arvokerroksissa). Opetuskokeilusta jää vahvasti kuva, että oppilaat eivät pysty irtautumaan kymmenjärjestelmästä tutkiessaan mayojen lukujärjestelmää, mikä kielii konseptuaaliseen tiedon puutteesta. Oppilaat käyttävät kymmenjärjestelmää proseduraalisesti erilaisissa algoritmeissa ja laskennallisissa prosesseissa päivittäin, mutta heiltä puuttuu konseptuaalinen ymmärrys lukujärjestelmästä. Samanlaiseen ajatukseen ovat päätyneet myös Thanheiserin ja Rhoads (2009). Heidän mukaan oppilaat tottuvat käyttämään kymmenjärjestelmää ilman, että he miettivät mistä se rakentuu. Puutteet kantaluvun sekä paikka-arvojärjestelmän ymmärtämisessä ei ole uusi ilmiö ja useissa tutkimuksissa eri-ikäisillä ja -tasoisilla oppijoilla on todettu merkittäviä puutteita paikka-arvojärjestelmän ja kantaluvun ymmärtämisessä (Thanheiser & Rhoads 2009; Nataraj & Thomas 2007, 2009; Schmittau & Vagliardo 2006). Samoissa tutkimuksissa näiden käsitteiden ymmärtämisen lisäämiseksi korostetaan nimenomaan monipuolista lukujärjestelmien opettamista.

Kokonaisuudessaan oppilaiden oppimisprosessit olivat hyvin epälineaarisia, mikä näkyi erityisen hyvin Sinin ymmärtämisprosessin analyysissä. Sinin ajatteluprosessissa tapahtui kaksi selkeää takaisin kiertymistä, joiden lisäksi Pirien ja Kierenin (1994) vaiheiden sisällä on myös havaittavissa edestakaisin liikehdintää. Yleisesti matematiikan oppimista pidetäänkin epälineaarisena prosessina ja se on havaittu lukuisissa tutkimuksissa (Nillas 2010; Martin ym. 2005; Pirie & Martin 2000; Pirie & Kieren 1994). Martin ym. (2005, 22) korostavat, että takaisin kiertyminen on tarkoituksen mukaista toimintaa ja se on edellytys uuden oppimiselle. Tämä voidaan myös havaita Sinin oppimispolussa, sillä Sinin eteneminen oli selkeästi pysähtynyt väärään vastaukseen ennen takaisin kiertymistä ja takaisin kiertyminen mahdollisti väärän vastauksen tai ajatuksen korjaamisen. Myös vaiheiden sisällä tapahtuva epälineaarinen liikehdintä auttoi Sinin oppimisprosessia eteenpäin. Lisäksi Sinin oppimispolussa nähdään kuinka opettajan toiminta aiheuttaa molemmat takaisin kiertymiset. Toisin sanoen Sini lähtee vahvistamaan tietojaan alemmalle tasolle opettajan johdattelun, huomautuksen tai kysymyksen perusteella. Martinon ja Maherin (1999, 73–74) mukaan opettajan suorittama oppilaiden työskentelyn tarkkaileminen ja nimenomaan opettajan oikea-aikaiset kysymykset auttavat oppilaita tutkimaan ajatteluaan ja auttavat heitä näkemään asiat uusista näkökulmista, mikä laajentaa ja vahvistaa oppilaiden ymmärrystä.

Sinin oppimispolku keskittyy Pirien ja Kierenin (1994) neljään ensimmäiseen vaiheeseen, erityisesti mielikuvan muodostamisen **(IM)** ja mielikuvan hallinnan vaiheisiin **(IH)**. Tämä vahvistaa ajatusta siitä, että Sinillä ei ollut selkeää ennakkokäsitystä mayojen lukujärjestelmästä ja hän joutui tekemään paljon töitä rakentaakseen mielikuviaan. Oppitunnin lopuksi Sini kuitenkin saavuttaa viidennen eli formalisoinnin tason **(F)**, jolloin Pirien ja Kierenin (1994, 171) mukaan oppilas on valmis formaaliin matemaattiseen määritelmään. Tämän perusteella oppitunnin jälkeen Sinin lähtökohdat paikka-arvojärjestelmän ja kantaluvun määrittelylle sekä näiden käsitteiden oppimiselle olisivat erittäin hyvät. Kuinka oppilaiden ymmärtämisprosessi olisi muuttunut, jos oppitunnin alussa olisikin esitelty matemaattiset määritelmät kantaluvulle ja paikka-arvolle, jonka jälkeen olisi siirrytty harjoitustehtäviin? Tämänkaltainen oppitunti voisi hyvin olla tavallinen peruskoulun tai lukion matematiikan oppitunti. Pirien ja Kierenin mallin perusteella voidaan arvioida, että esimerkiksi Sinillä, joka oli oppitunnin etevimpiä oppilaita, ei olisi ollut valmiuksia suoraan matemaattisen määrittelyyn, sillä Sini pystyi kehittämään nämä valmiudet vasta yhden tutkivan matematiikan oppitunnin kautta. Battistan (2002) mukaan tämä on juuri eräs koulumatematiikan akilleen kantapäistä eli oppilaille pyritään opettamaan liian abstraktia ja formaalia matematiikkaa. Tämä johtaa edelleen asioiden proseduraaliseen ulkoa opetteluun ja kopiointiin sekä ymmärtämisen vähenemiseen.

Sinin oppimispolun avulla voidaan myös miettiä mitä Pirien ja Kierenin (1994) matemaattisen ymmärryksen kasvun malli kertoo tutkivasta matematiikasta. Opetuskokeilussa näkyi, kuinka oppilaat rakensivat mielikuviaan opeteltavasta käsitteestä itse tarkoituksenmukaisen toimintansa kautta, mikä on Pirien ja Kierenin mallin mukaan edellytys ymmärtämisen rakentamiselle. Erityisesti Pirien ja Kierenin mallissa korostuu, kuten Sinin kohdalla havaitsimme, että oppilaan täytyy rakentaa riittävä omakohtainen ymmärrys opeteltavasta käsitteestä, jotta hän on valmis formaaliin matemaattiseen määrittelyyn. Tähän tutkivassa matematiikassa pyritään, sillä oppilaiden vastauksien formalisointi ja standardisoiminen tapahtuu nimenomaan tutkimusvaiheen jälkeen koontivaiheessa. Lisäksi Pirien ja Kierenin mallissa korostuu takaisin kiertyminen, joka on todettu erittäin tärkeäksi osaksi matemaattisen ymmärtämisprosessin kasvua (Nillas 2010; Martin ym. 2005; Pirie & Martin 2000; Pirie & Kieren 1994). Opetuskokeilussa takaisin kiertymisillä on selvä yhteys opettajan tutkivan matematiikan kaltaisiin toimintatapoihin kuten perustelemisen aktivointiin. Takaisin kiertymiset olisivat jääneet todennäköisesti tapahtumatta, jos opettaja olisi paljastanut vastauksen tai ohjannut oppilasta oman matemaattisen näkemyksensä kautta. Tällöin myös oppilaan ymmärtäminen olisi jäänyt heikommaksi, sillä oppilas ei olisi joutunut rakentamaan ymmärrystään itse. Pirien ja Kierenin matemaattisen ymmärtämisen kasvun mallin mukaan tutkivalla matematiikalla näyttäisi siis olevan useita ominaisuuksia, jotka vaikuttavat positiivisesti matematiikan oppimiseen ja ymmärtämiseen.

8.2 Tutkimuksen luotettavuus

Tämä tutkimus on luonteeltaan tapaustutkimus, jonka tavoitteena oli selvittää oppilaiden matemaattista ajatteluprosessia. Tapaustutkimuksesta ei voida tehdä yleistettäviä johtopäätöksiä oppilaiden matemaattisesta ajattelusta ja tutkimuksen laajentaminen yleistettäväksi ei onnistu mitenkään yhden pro gradu -tutkielman puitteissa. Oppilaiden ajattelun tutkiminen tapaustutkimuksen avulla on kuitenkin merkityksellistä, koska tutkimuksessa selvinneitä matemaattisen ajattelun piirteitä voidaan löytää muidenkin oppilaiden matemaattisesta ajattelusta ja hyödyntää opetukseen sekä tutkimukseen. Esimerkiksi tässä tutkimuksessa ilmi tulleita oppilaiden ajattelutapoja ja -prosesseja on havaittu myös muissa tutkimuksissa.

Tutkimuksen aineiston muodosti yläkoulun 9.luokka, joka jaettiin arpomalla kahteen ryhmään, joille pidettiin oppitunnit mayojen lukujärjestelmästä. Lisäksi molemmat ryhmät jaettiin vielä kolmeen alaryhmään satunnaisesti. Oppilaiden jakaminen tiettyihin ryhmiin luonnollisesti vaikuttaa osaltaan oppilaiden työskentelyyn ja ajatteluun, mutta tämä on arkipäivää koulumaailmassa, joten se ei heikennä tutkimuksen merkityksellisyyttä. Tutkimuksen olisi voinut toteuttaa myös yhdelle tai parille oppilaalle, jolloin oppilaiden matemaattista ajattelua olisi voitu seurata yksityiskohtaisemmin ja tarkemmin. Tämä tilanne ei kuitenkaan kuvaa oppilaan ajattelua moniärsykkeisessä koululuokassa, jossa tulevaisuudessa opetan. Tämän vuoksi halusin realistisemman testialustan tutkimukselle kuin yhden tai kaksi oppilasta. Matemaattisen ajattelun kuvaamiseen valittiin Pirien ja Kierenin (1994) malli matemaattisen ymmärtämisen kasvusta, koska se on kehitetty alun perin oppilaan matemaattisen ajattelun kasvun kuvaamiseen koulumaailmassa. Pirien ja Kierenin malli sopi opetuskokeiluun myös siksi, että sitä ei ole sidottu tiettyyn matemaattiseen teemaan tai prosessiin.

Aineistonkeruumenetelmänä toimineet videointi ja nauhoitus olivat mielestäni toimivia. Ilman videointia en olisi millään saanut luotettavaa tietoa oppitunneista. Videoita on voinut katsella rajattomasti ja niihin on voinut aina tarpeen tullen palata. Lisäksi analyysin apuna on ollut oppilaiden täyttämät tehtävämonisteet. Niiden merkitys analyysille ei ole suuri, sillä oppilaat eivät tehneet riittävästi merkintöjä, jotta niistä olisi voinut tehtyä päätelmiä.

Oppilaiden ajattelutapojen analyysimenetelmä perustui Powellin ym. (2003) videoanalysointimenetelmään, mikä on kehitetty oppilaan matemaattisen ajattelun seuraamiseen. Täten analyysimenetelmä sopi tutkimukseen hyvin. Analyysiä tehtäessä on litterointien lisäksi käytetty myös videoita, jotta analyysi olisi mahdollisimman tarkka. Opetuskokeilun suunnittelijana ja opettajana minulla vahva tietämys oppituntien kulusta, jotka auttoivat minua ymmärtämään oppituntien tapahtumia. Videointi mahdollisti objektiivisen tutkimuksen. Oppilaiden ajattelutapojen analyysissä täytyy kuitenkin muistaa se, että analyysi perustuu oppilaiden ulkoiseen toimintaan, erityisesti puheeseen. Näin ollen löydettyjen ajattelutapojen lisäksi oppilailla voi olla myös muita ajattelutapoja, jotka eivät näy ulospäin.

Opetuskokeilu materiaaleineen, aineistonkeruu- ja analysointimenetelmät on kuvattu mahdollisimman tarkasti ja yksityiskohtaisesti, jotta tutkimus voitaisiin tarvittaessa toistaa.

8.3 Jatkotutkimusehdotuksia

Tutkimuksen opetuskokeilu koostui vain yhdestä oppitunnista, joka pidettiin kaksi kertaa. Opetuskokeilun jatkaminen olisi luonnollinen jatkumo tälle tutkimukselle. Opetuskokeilua voisi jatkaa esimerkiksi seuraavilla teemoilla: 1. Mayojen lukujärjestelmän käyttäminen aritmeettisissa operaatioissa tai muissa matematiikan osa-alueissa kuten yhtälön ratkaisemisessa. Tässä olisi erinomaiset mahdollisuudet muodostaa eritasoisia tehtäviä ja eriyttää opetusta. 2. Muiden lukujärjestelmien tutkiminen. 3. Matemaattinen lähestyminen lukujärjestelmiin edellyttäen, että oppilaat hallitsevat jo mayojen lukujärjestelmän. Kaikkien edellä mainittujen teemojen ideana olisi syventää oppilaiden lukujärjestelmiin liittyvien käsitteiden ymmärtämistä sekä lisätä ymmärrystä oppilaiden käyttämissä aritmeettisissa ja algebrallisissa prosesseissa. Lisäksi jatkotutkimuksissa voisi käyttää jonkinlaista mittaria, miten oppilaiden lukujärjestelmien ymmärtäminen kasvaa (ks. esim. Thanheiser & Rhoads 2009). Teemat ovat vain ideoita, joita voidaan myös yhdistellä.

Tutkivan matematiikan kohdalla koen tulevana opettajana, että opettajia kiinnostaisivat tutkimukset oppimistuloksista, opettajan toiminnasta, oppituntien suunnittelusta ja opetusmateriaaleista. Lisäksi opetuskokeilussa vaikutti siltä, että oppilaat eivät olleet täysin valmiita tutkivaan matematiikkaan, joten olisi luontevaa tutkia tutkivan matematiikan kulttuurin luomista suomalaisessa koulussa. Kansainvälisiä tutkimuksia tästä on jo olemassa (ks. esim. Goos 2004).

Historian sekä kulttuurin yhdistäminen matematiikkaan lähti omista positiivisista kokemuksista ja tulevaisuudessa voisi tutkia kuinka historian (tai jonkin muun oppiaineen) integrointi matematiikkaan vaikuttaa oppilaiden motivaatioon, matematiikkakuvaan ja oppimiseen.

LÄHTEET

Painetut:

Al-Bermanei, H., Kuusisto, H., Raivonen, V. & Punelpuro, N. 2011. Ongelmakeskeistä yhteisöllisyyttä. *Dimensio, 75* (1), 41-46.

Begg, A. 2001. Ethnomathematics: Why, and what else? *ZMD – The International Journal on Mathematics Education, 33* (3), 71-74.

Didrichsen, M. 2005. *Aikamatka mayojen maailmaan*. Helsinki: Art-Print.

Farmer, J. & Powers, R. 2005. Exploring Mayan numerals. *Teaching Children Mathematics, 12* (2), 69-79.

Flegg, G. 2002. *Lukujen historia: Sormilla laskemisesta tietokoneisiin*. Suomentanut Karttunen H. Helsinki: WS Bookwell.

Francisco, J. 2005. Students' reflections on their learning experiences: lessons from a longitudinal study on the development of mathematical ideas and reasoning. *Journal of Mathematical Behaviour, 24*, 51–71.

Francisco, J. & Maher, C. 2005. Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behaviour, 24* (3–4), 361–372.

Goos, M. 2004. Learning mathematics in a classroom of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35* (4), 258-291.

Haapasalo, L. 2004. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. (2. uudistettu painos) Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 50-83.

Hassard, J. & Dias, M. 2009. *The art of teaching science: Inquiry and innovation in middle school and high school*. (2. painos) New York and London: Routledge.

Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conseptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa Hiebert, J. (toim.), *Conseptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1-27.

Hino, K. 2007. Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. *ZMD – The International Journal on Mathematics Education, 39*, 503-513.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2004. *Tutki ja kirjoita*. (10. osin uudistettu painos) Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

Hähkiöniemi, M. 2010. Opettajan toiminta tunnin eri vaiheissa & vuorovaikutus. Julkaisematon.

Hähkiöniemi, M. Painossa a. Miten opettaja kokee valmiiksi suunnitellun opetusjakson tukevan GeoGebra-avusteisen tutkivan matematiikan toteuttamista? Ilmestyy teoksessa Silfverberg, H. & Joutsenlahti, J. (toim.), *Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimisen päivät Tampereella 14.-15.10.2010*. Tampereen yliopisto, 150-169.

Hähkiöniemi, M. (toim.). Painossa b. *GeoGebra avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa: tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta*. Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos.

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. 2010. Matematiikan aineenopettajaksi opiskelevien valmiudet ohjata opiskelijoita GeoGebra- avusteisissa tutkimustehtävissä. Teoksessa Asikainen, M., Hirvonen, P. & Sormunen K. (toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa: Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009*. University of Eastern Finland. Joensuu: Kopijyvä, 59–75.

Ifrah, G. 1998. *The universal history of numbers: From prehistory to the invention of the computer*. London: The Harvill Press.

Joutsenlahti, J. 2003. Matemaattinen ajattelu ja kieli, eräs mielenkiintoinen ulottuvuus uudessa opetussuunnitelmassa. Teoksessa Aalto, A.-L. & Tuomi, T. (toim.), *Projekteja ja prosesseja - opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä*. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 8, 3-12.

Joutsenlahti, J. 2005. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä*. Väitöskirja, Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis 1061. Tampere: Tampereen Yliopistopaino.

Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A., & Pehkonen, E. 2008. Socio-emotional orientations and teacher change. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 111-123.

Keranto, T. 1998. Kriittinen ajattelu ja tieteen tuntemus matematiikan opetuksesssa. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. (2. painos) Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 18–38.

Lara-Alecio, R., Irby, B., Morales-Aldana, L. 1998. A mathematics lesson from the Mayan civilisation. *Teaching Children Mathematics, 5* (3), 154-158.

Laughton, T. 2006. *Mayat, muinainen kulttuuri*. Suomentaja Lempinen U. Singapore: Gummerus Kustannus Oy.

Mannila, L. 2011. Onko matematiikan ymmärtäminen kadonnut? *Dimensio, 75* (3), 5.

Martin, L., LaCroix, L. & Fownes, L. 2005. Folding back and the growth of mathematical understanding in workplace training. *ALM International Journal, 1* (1), 19-35.

Martino, A. & Maher, C. 1999. Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behaviour, 18* (1), 53-78.

Martin, L. & Pirie, S. 2003. Making images and noticing properties: The role of graphing software in mathematical generalisation. *Mathematics Education Research Journal, 15* (2), 171-186.

McLeish, J. 1991. *Number: The history of numbers and how they shape our lives*. New York: Favcett Columbine.

Nataraj, M. & Thomas, M. 2007. Developing the concept of place value. Teoksessa Watson, J. & Beswick, K. (toim.) *Proceedings of the 30th annual conference of Mathematics Research Group of Australasia* (vol 2), 523–532. Adalaine: MERGA.

Nataraj, M. & Thomas, M. 2009. Developing understanding of number system structure from the history of mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 21* (2), 96-115.

National Council of Teaching Mathematics. 2000. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teaching Mathematics.

Nicol, C. & Crespo, S. 2005. Exploring mathematics in imaginative places: Rethinking what counts as meaningful contexts for learning mathematics. *School Science and Mathematics, 105* (5), 240-251.

Nillas, L. 2010. Characterizing preservice teachers' mathematical understanding of algebraic relationships. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* (2010), 1-24.

Näveri, L. 2009. *Aritmetiikasta algebraan – Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana*. Väitöskirja. Helsingin yliopisto.

Opetushallitus. 2003. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Vammala: Vammalan kirjapaino Oy.

Opetushallitus. 2004. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Vammala: Vammalan kirjapaino Oy.

Overbay, S. & Brod, M. 2007. Magic with Mayan math. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12* (6), 340-347.

Pehkonen, E. 2003. Tutkivan matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu*, 2003:6. Helsinki : Tieteellisten seurain valtuuskunta.

Pehkonen, E. & Tuuri, T. 2005. Teoksessa Hakkarainen, K., Bollström-Huttunen, M., Pyysalo, R. & Lonka, K. *Tutkiva oppiminen käytännössä*. Helsinki: WSOY, 186–195.

Pietilä, A. 2002. *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva: Matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina*. Väitökirja, Helsingin Yliopisto. Helsinki: Yliopistopaino.

Pirie, S. & Kieren, T. 1994. Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational studies in mathematics, 26* (2-3), 165-190.

Pirie, S. & Martin, L. 2000. The role of collecting in the growth of mathematical understanding. *Mathematics Education Research Journal, 12* (2), 127-146.

Portaankorva-Koivisto, P. 2010. *Elämyksellisyyttä tavoittelemassa: Narratiivinen tutkimus matematiikan opettajaksi kasvusta*. Väitöskirja, Tampereen Yliopisto. Tampere: Tampereen Yliopistopaino.

Powell, A., Francisco, J. & Maher, C. 2003. An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22* (2003), 405–435.

Schmittau, J. & Vagliardo, J. 2006. Using concept mapping in the development of the concept of positional system. Teoksessa Canas, A. & Novak (toim.) *Concept maps: Theory, methodology, technology. Proceedings of the 2nd international conference on concept mapping*. San Jose, Costa Rica. 590-597.

Setälä, M. 2011. Matematiikan ja tietotekniikan toimikunta 2011. *Dimensio, 75* (2), 10.

Shimizu, Y. 1999. Aspects of mathematics teacher education in Japan: Focusing teacher´s roles. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*, 107-116.

Silfverberg, H. 1999. *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto*. Väitöskirja, Tampereen Yliopisto.

Stein, M., Engle, R., Smith, M. & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313–340.

Talvitie, J. & Hiltunen, J. 1993. *Mayamaa*. Espoo: Tietoteos.

Thanheiser, E. & Rhoads, K. 2009. Exploring preservice teachers´ conceptions of numbers via the Mayan number system. Teoksessa Swars, S., Stinson, D. & Lemons-Smith, S. (toim.) *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol 5). Atlanta, GA: Georgia State University. 1220-1227

Thomas, N. 2004. The development of structure in the number system. Teoksessa Hoines, M. & Fuglestad, A. (toim.) *Proceedings on the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol 4). Bergen: Bergen University College. 305-312

Vaulamo, J. & Pehkonen, E. 1999. *Avoimista ongelmatehtävistä peruskoulun yläasteen matematiikassa*. Helsingin yliopiston opettajakoulutuslaitos. Helsinki: Yliopistopaino.

Zhang, W. & Zhang, Q. 2010. Ethnomathematics and its integration within the mathematics curriculum. *Journal of Mathematics Education, 3* (1), 151-157.

Painamattomat:

Battista, M. 2002. Teoksessa Nathan, M., Schoenfeld, A., Kemeny, V., Lajoie, S., Lavigne, N., Battista, M., Lowber, C., Lamberg, T., Okamoto, Y., Brenner, M., Curtis, R., Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. Mathematics learning. Encyclopedia of Education. http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-3403200392.html

Foundation for the advancement Mesoamerican studies (FAMSI). Dresden Codex, Kingsborough, 24. http://www.famsi.org/mayawriting/codices/pdf/kings2.pdf

Lahtinen, A. 2008. Radiohaastattelu. Matematiikan aika: mitä on matematiikka? Professori Aatos Lahtinen kertoo mitä matematiikka on. Toimittajana Typpi M. Yle Radio 1/ Matematiikan aika. http://oppiminen.yle.fi/artikkeli?id=13391

Murgel, J. 2000. Mayan mathematics and architecture. http://www.outreachworld.org/Files/florida_internatl_u/MayanMathematicsandArchitecture.pdf

Szalontai, T. 2002. Lukujärjestelmät. Matematiikkalehti Solmun verkkolehti. http://solmu.math.helsinki.fi/2002/unkari/luento5a.html

Tutkivan matematiikan tuntisuunnitelmat 2010-2011. Opettajankoulutuslaitos. Jyväskylän yliopisto. http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011

Wikipedia Commons. http://commons.wikimedia.org/wiki/Maya

Kaikki linkit tarkistettu 28.01.2012.

LIITE 1: Tuntisuunnitelma

Tuntisuunnitelma **Syksy 2010**
Mayojen lukujärjestelmä

Tunnin tavoite:

- Oppilaat pohtivat mayojen lukujärjestelmää. Tunnin jälkeen he ymmärtävät mayalukujen merkintätavat ja osaavat muuttaa mayojen luvut omiimme. Lisäksi he vertaavat mayojen lukujärjestelmää omaamme ja tekevät havaintoja paikka-arvojärjestelmän sekä kantaluvun merkityksestä.
- Oppilaat tutustuvat mayakulttuurin perusteisiin.
- Tarjota oppilaille erilainen, jopa jännittävä, matematiikan tunti.

Yleistä oppitunnista:

- Oppitunnin pedagogisena lähtökohtana on tutkiva matematiikka, jota noudatetaan oppitunnilla. Opettajan roolista, oppitunnin jaksotuksesta ja muusta tutkivan matematiikan oppitunnin piirteistä voi lukea pro gradu -tutkielman luvusta 3

- Shimizun taulukossa (liite 2) oppilaiden oletettuja reaktioita ja opettajan vastareaktioita oppitunnille.

Tarvittavat materiaalit:

- Moniste 1, A4 jaetaan kaikille oppilaille.
- Moniste 2, A3, jaetaan jokaiselle ryhmälle.
- Dresden Codex, A4, jaetaan jokaiselle ryhmälle.
- Mayat PowerPoint -esitys

Ennen oppituntia:

- Materiaalien tulostus.
- Luokan järjestäminen pulpettiryhmiin.
- Videokamera varusteineen sekä nauhuri.

Oppitunnin kulku:

1. Alustuvaihe

1.1 Tunnin aloitus ja mayojen historiaa sekä kulttuuria, 7 min

- Kerron oppilaille tunnin kulun pääpiirteet. Kerron lyhyesti mitä tänään tehdään ja miksi. Huomautan oppilaita olla häiriintymättä kamerasta ja sanelimesta.

- Esittelen lyhyesti mayojen historiaa ja kulttuuri PowerPoint -esityksen avulla:
    - PowerPoint -esityksen aikana voi kysellä mitä tietävät mayoista ja heidän elämästään.
    - PowerPoint -esityksen aikana käydään läpi lyhyesti seuraavia asioita: mayojen aikakaudet ja asuinpaikat, kieli, kirjoitus, taide, rakennukset, urheilu ja matematiikka.
    - Pääpaino PowerPoint -esityksen kuvissa. Mitä kuvat kertovat meille heistä ja heidän kulttuuristaan.

- Tunnin aloitus toimii tärkeänä motivaation lähteenä. Viimeisen dian kohdalla opettaja kertoo päivän tavoitteen: ” Päivän tavoitteena on, että jokainen osaa tulkita mayojen lukuja tämän tunnin päätteeksi.”
- Opettaja jakaa Dresden Codexin kopion.

1.2 Laskeminen 1 – 21, 7 min

- Opettaja jakaa kaikille oppilaille monisteen 1.

- Opettaja kertoo, että mayojen numerojärjestelmässä on vain kolme merkkiä: piste edustaa yhtä yksikköä, viiva viittä yksikköä sekä simpukan muotoinen glyyfi edustaa nollaa. Nämä merkit taululle. Näillä symboleilla mayat muodostivat 20 symbolia vrt. meillä 10 symbolia.

- Käydään läpi luvut 0-19 opettajajohtoisesti. Samalla oppilaat täydentävät monisteen 1 tehtävää 1. Tässä oppilaiden tulee ensin huomata mayojen lukujen merkintätapa: pisteiden ja viivojen avulla voidaan merkitä luvut 0-19.

- Seuraavaksi oppilailta kysytään oppilailta kuinka luku 20 merkitään ja opettaja kertoo uuden merkintätavan. Luvulle kaksikymmentä ei ole uutta numeromerkintää, vaan se merkitään edellisten merkintöjen yhdisteenä.

- Opettaja näyttää vielä merkinnän luvulle 21, jonka jälkeen oppilaat aloittavat pohtimaan itse lukujen merkintää tekemällä loppuun monisteen 1 tehtävän 1.

2. Tutkimusvaihe

2.1 Laskeminen 21 – ja mayojen lukujärjestelmä, 20 min

- Oppilaat täydentävät monisteen 1 tehtävän 1 loppuun.

- Oppilaiden valmistuttua monisteen 1 tehtävästä 1, opettaja jakaa jokaiselle oppilasryhmälle monisteen 2.

- Oppilaat tekevät monistetta 2, jonka aikana seuraavat havainnot ovat tavoiteltavia:
    - Mayoilla oli paikkajärjestelmä, jota luetaan ylhäältä alaspäin. Alimpana on numerot 1-19, seuraavalla ylemmällä luvun 20 kerrannaiset, seuraavalla ylemmällä tasolla luvun 400 kerrannaiset ja niin edelleen.
    - Edellisen ymmärtämällä voidaan muuttaa mayojen luvut meidän luvuiksi.
    - Yhteys meidän kymmenjärjestelmän paikkajärjestelmään, jota luetaan vaakatasossa.
    - Mayojen numerojärjestelmä on 20-järjestelmä ja meidän järjestelmämme on 10-järjestelmä.

3. Koontivaihe

3.1 Koonti, 5 min

- Käydään yhdessä läpi ryhmien ajatukset, miten mayat merkitsevät lukujaan. Erityisesti kiinnitetään huomiota samoihin ajatuksiin kuin yllä luetellussa tutkimusvaiheen tavoiteltavissa havainnoissa.

- Opettaja koostaa vastauksen oppilaille:
    - Kantaluku on 20 eli 20 symbolilla voidaan merkitä kaikki luvut
    - Paikkajärjestelmä on pystysuora: Alhaalla 0-19, seuraavalla rivillä 20 kerrannaiset 0-19, seuraavalla 400 (20*20) kerrannaiset. Mayojen luvun muuttaminen meidän luvuiksi. Esimerkki.
    - Koonnissa tavoitteena vahvistaa oikea tieto ja edetä asiassa pidemmälle. Eli jos oppilaat ovat päässeet kahdelle riville mayojen merkinnöissä, niin tavoitteena on päästä kolmannelle riville ja niin edelleen.
    - Jos mahdollista, niin vertaaminen kymmenjärjestelmään esimerkkilukujen avulla.

3.2 Tunnin päättäminen

- Oppilaiden monisteiden keräys.
- Palaute oppilaille oppitunnista.

LIITE 2: Shimizun taulukko

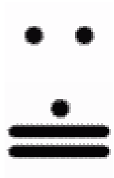
Askeleet	Oppimistapa ja -aktiviteetti	Oppilaiden reaktioita	Opettajan reaktio / huomioitavaa opettamisessa
ALUSTUSVAIHE			
▪ Mayojen historian ja kulttuurin esittely (motivointi)	Opettajajohtoinen kyselevä opetustapa. PowerPoint-esitys.	Oppilailla hyvin erilaisia ideoita mayoista.	Opettaja esittää kysymyksiä (selvittää mitä oppilaat tietää). Napakoiden faktojen kertominen suullisesti ja kuvien avulla. Kuvien tulkitseminen. Oppilaiden maailmaa lähellä olevien asioiden läpikäynti: mayojen urheilu, koulu ja nuoruus.
▪ Laskeminen 1 – 19 (johdattelua ongelmaan, ja sen esittäminen) Moniste 1.	Opettajajohtoinen opetustapa.	Oppilaat kysyvät, miksi mayoilla oli vain kolme merkkiä tai miksi he merkitsevät lukujaan pystysuoraan.	Hyviä kysymyksiä. Merkit liittyvät mayojen kulttuuriin, mutta miksi niitä on kolme? Sitä ei voi varmasti tietää.
		Oppilaat ihmettelevät, miksi viisi pistettä muuttuu viivaksi.	Opettaja näyttää oikeaa mayojen tekstiä, josta asian voi havaita (Oppilailta voi kysyä löytyykö Dresdenin koodeksista vaakatasossa viittä pistettä. Ei löydy). Jos oppilaat eivät huomaa tätä, niin opettaja vielä korostaa asiaa sanomalla sen.
	Opettaja esittelee luvun 20 ensin kyselemällä oppilailta. Tämän jälkeen opettaja kertoo oikean tavan.	Oppilaat vastaavat neljä viivaa/ piste ja nolla vierekkäin tai jotain muuta vastaavaa.	Tämä ei ole mahdollista. Miksi? Opettaja näyttää oikeaa mayojen tekstiä, josta asian voi havaita: esim. neljää viivaa ei ole tiivisti yhdessä. Huom. oppilaiden vastaukset

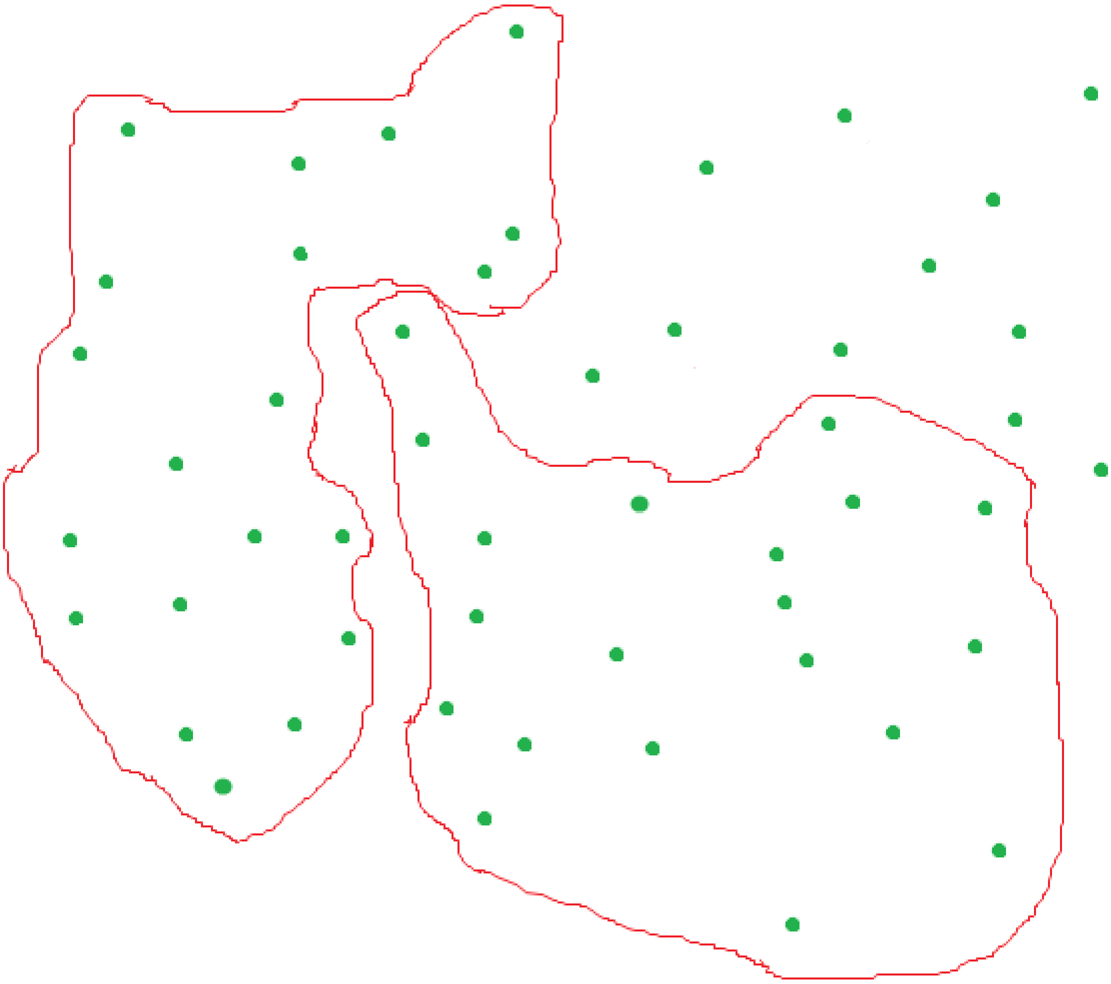
			eivät ole vääriä, sillä logiikkaa ei voi vain tietää. Tämä on mayojen tapa merkitä lukujaan. Kannustava ote: ”Nyt selvitetään miten mayat merkitsevät lukujaan”.
TUTKIMUSVAIHE			
▪ Laskeminen 21 – 40 (ongelman ratkaiseminen ryhmässä) Moniste 1.	Oppilaat pohtivat ryhmässä mayojen lukuja 22-40. Opettaja ohjaava.	Oppilaat eivät pääse alkuun.	Opettaja korostaa, että ensimmäisten 20:nen luvun avulla voi kirjoittaa kaikki luvut. Vertaaminen lukuihin 0-19. ”Kuinka voidaan jatkaa”. Opettaja näyttää konkreettisesti luvun 22 merkinnän.
		Oppilaat miettivät kuinka luku 30 tai luku 40 merkitään.	Opettaja neuvoo katsomaan lukuja 0 ja 20. Onko luvuissa yhteistä? Mitä piste voisi tarkoittaa luvussa 20?
		Oppilaat tekevät yksittäisiä virheitä lukujen merkinnöissä.	Asiasta huomauttaminen: ”Hmm… hyvältä näyttää, miksi päädyit tähän ratkaisuun?”. Opettaja voi pyytää vertaamaan tai esittää ristiriitaisen esimerkin. Yhdessä pohtiminen.
▪ Tuntemattomien mayalukujen selvittäminen ja mayojen lukujärjestelmän selvittäminen (ongelman ratkaiseminen ryhmässä) Moniste 2.	Oppilaat pohtivat tuntemattomia mayojen lukuja: Luku 50	Oppilas ei hahmota, mitä luku tarkoittaa.	Opettaja kehottaa jatkamaan numerointia edellisestä monisteesta ja saavuttamaan luvun 50/ Opettaja ehdottaa tutkimaan lukuja 0, 10,

			20, 30, 40 ja 50, joiden avulla luku selviää.
	Luku 82	Luvun kirjoittaminen ei onnistu. Oppilas ei ymmärrä miksi luku kirjoitetaan kahdelle riville ja mitä rivit tarkoittavat.	Yritetään saada oppilaat ymmärtämään kuinka mayat kirjoittavat luvun 20 kerrannaiset toiselle riville. Tämä onnistuu vertaamalla muita lukuja, esim. 0, 20 ja 40.” Lukuja 2, 12, 22, 32, 42 vertaamalla.
	Luku 92	Oppilas ymmärtää, että ylemmällä rivillä on 4*20, mutta ei osaa yhdistää alempaa riviä, jotta muodostuisi luku.	Opettaja pyytää oppilaita tarkastelemaan edellisiä lukuja, erityisesti lukuja 20-40. ”Hyvä, toisella rivillä on kaksikymppisiä, mutta mitä ensimmäisellä rivillä on? Kuinka paljon niitä voi olla?”.
	Luku 400	Oppilas ei ymmärrä, mitä kolmas rivi tarkoittaa.	Opettaja neuvoo miettimään, kuinka monta merkkiä mahtuu toiselle riville. Mitä tapahtuu, kun toinen rivi täyttyy? Mitä tulee ylemmälle riville? Vertaaminen lukuihin 0-21, erityisesti lukuihin 19-20. Toisaalta voidaan lähteä rakentamaan järjestyksessä: kirjoita luvut 60, 100, 300, 390, 399. Mitä seuraavaksi tapahtuu? Miten luku 400 kirjoitetaan?
	Luku 503	Oppilas ei pysty hahmottamaan mayojen luvun merkitystä, koska se on merkitty kolmelle riville.	Opettaja johdattelee: Piirrä luku 401, 402. Entäs luku 410? Entäs luku 420? Jatka eteenpäin

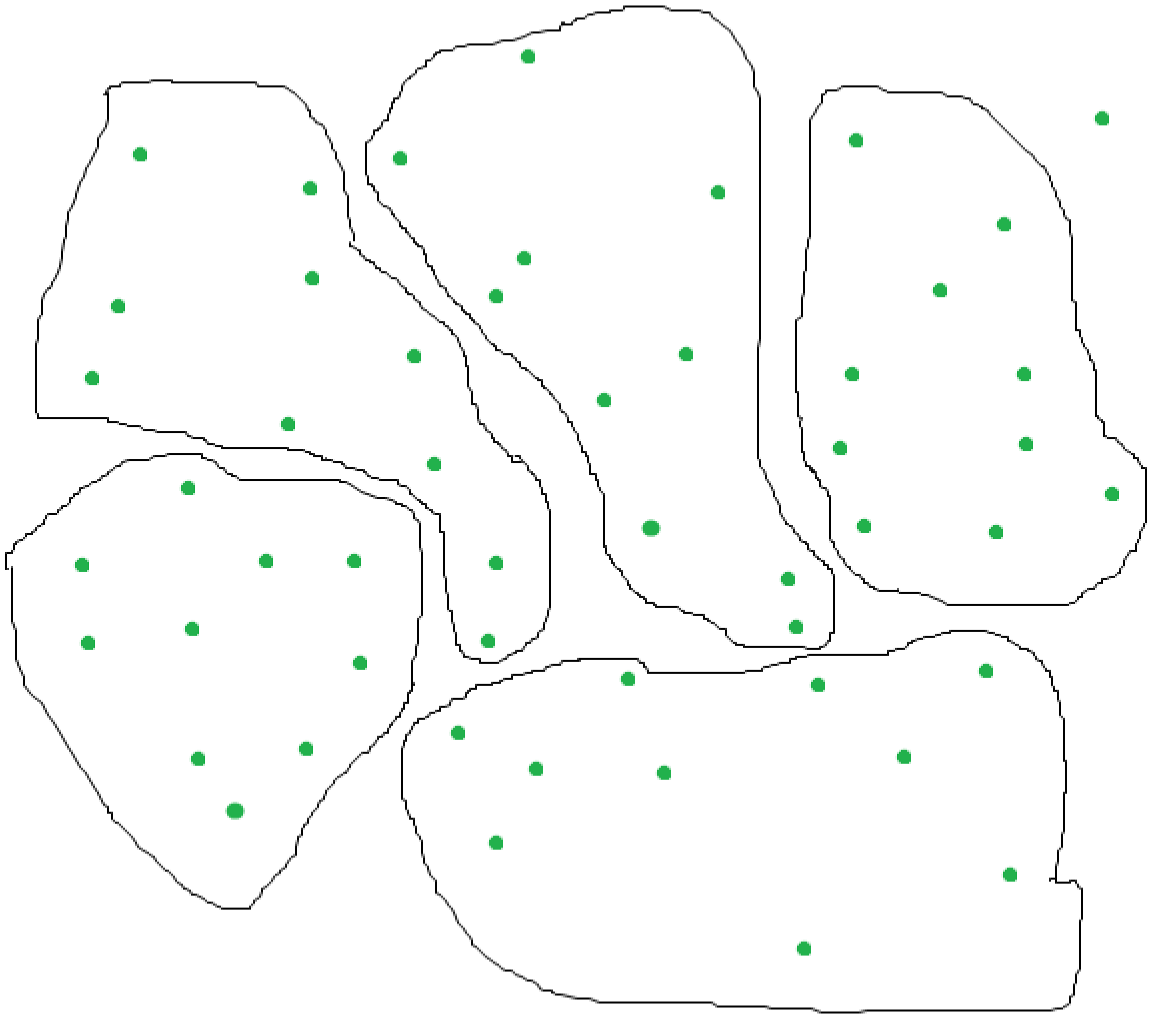
KOONTIVAIHE			
▪ Ryhmäkeskustelu aiheesta	Käydään keskustelua yhdessä ja puretaan ryhmien ratkaisut.		Opettaja ei tuomitse vastauksia, vaan antaa positiivista palautetta työnteosta. Tutkiva ja johdatteleva ote. Kerrataan oppilaiden ratkaisuja ja johdatellaan yllä olevien kysymyksien ja johdattelujen avulla oppilaita hahmottamaan, mikä mayalukujen logiikka on.
▪ Opettajajohtoinen lopetus, koonti	Opettajajohtoinen, myös kyselevä opetustapa.		Mayojen merkintätapa esimerkin avulla. Mitä eri rivit tarkoittavat. Pyritään saamaan ymmärrys seuraavalle tasolle: kuinka merkitään isoja lukuja kuten luvut yli 400 tai 8000? Yhteys 10-järjestelmään esimerkin avulla. Mitä eri paikoilla on? Potenssi! Ympyröintimalli (ks. seuraava sivu). Mayojen ajatus: 10 sormea + 10 varvasta =20.

Ympyröintimalli unkarilaisessa matematiikan opetuksessa (Szalontai, 2002):

20-järjestelmä: $2 \times 20 + 11 \times 1 = 51$ eli mayojen merkinnöillä 

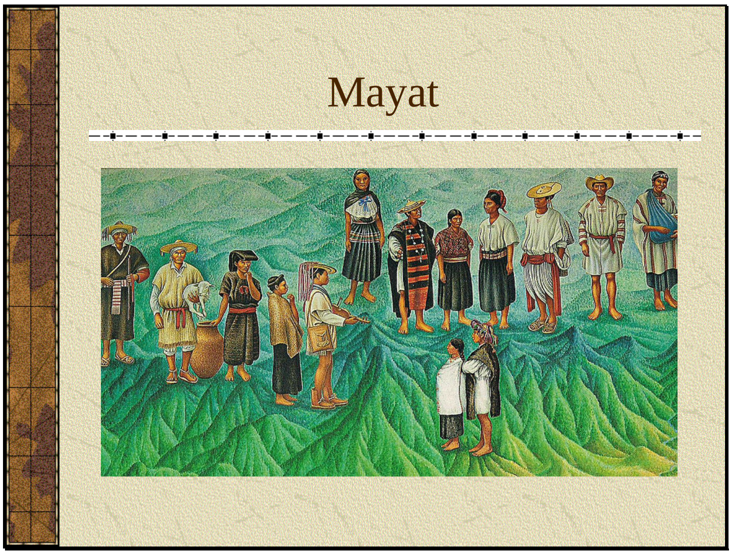


Kymmenjärjestelmä: $5 \times 10 + 1 \times 1 = 51$



LIITE 3: PowerPoint –esitys oppitunnille

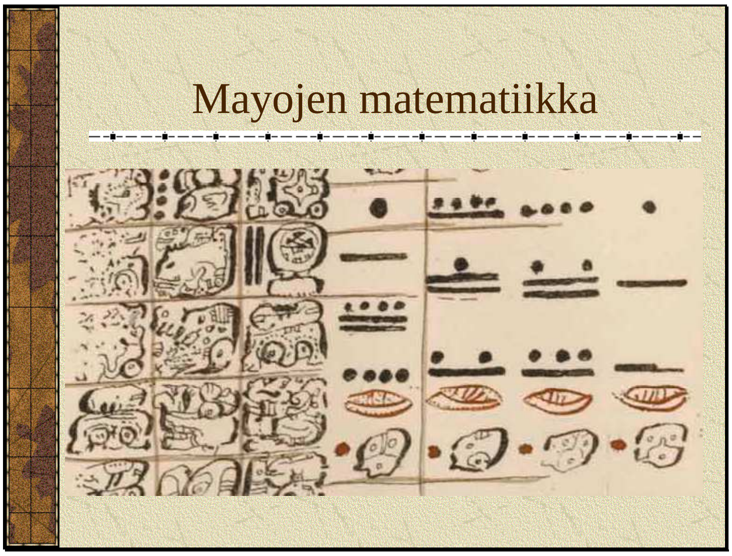
Dia 1



Dia 2

Dia 3

Dia 4



Diojen kuvat: Wikipedia Commons poislukien dia 4 (linkit tarkistettu 28.01.2012).

Dia 1: FernandoFrancilles, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Etniaschiapanecas.jpg

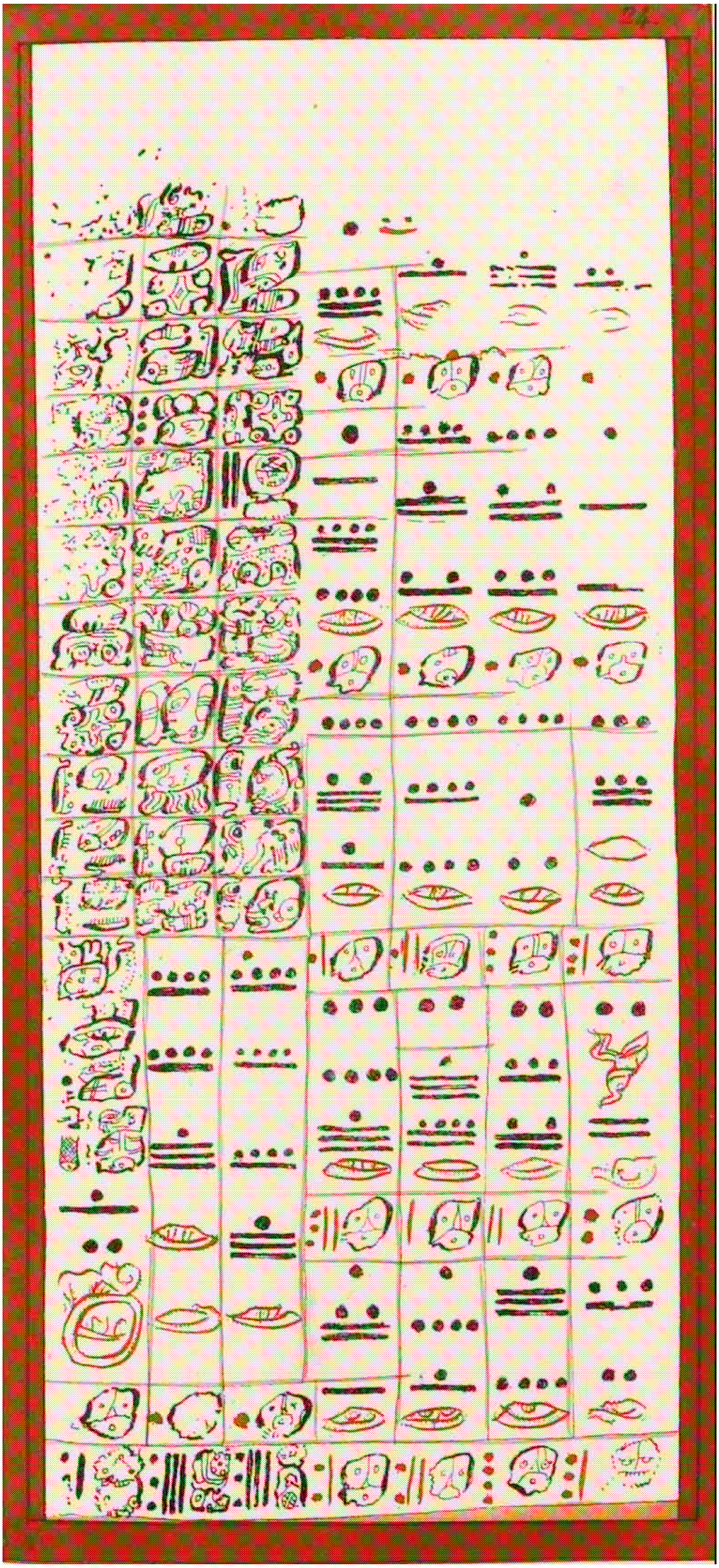
Dia 2: Nepenthes, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Maya_region_w_german_names.png

Dia 3: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:CPN_CHORCHA_FIG_01.jpg
madpai.flickr, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:5pisos.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Codex_Grolier,_page_2.jpg

Dia 4: http://www.famsi.org/mayawriting/codices/pdf/kings2.pdf

LIITE 4: Alkuperäisten lukujen moniste

Dresden Codex, Kinsborough s.24 (FAMSI,
http://www.famsi.org/mayawriting/codices/pdf/kings2.pdf)



LIITE 5: Moniste 1

Mayat **Nimi:**____________________________

Moniste 1

1. Laske neljäänkymmeneen käyttämällä mayojen numeroita:

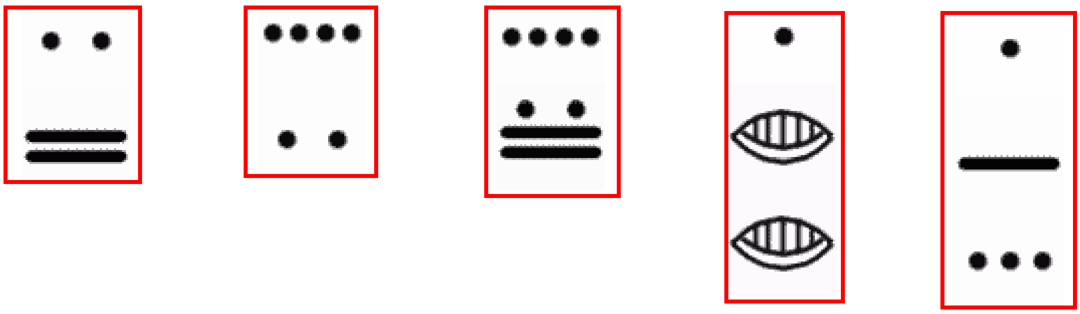
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40									

LIITE 6: Moniste 2

Mayat
Moniste 2

Nimet:

1. Tutki mitä seuraavat mayojen luvut tarkoittavat:



2. Tutki yllä olevia lukuja ja pohdi miten mayat merkitsivät lukujaan. Kehitä sääntö, jolla mayojen luvut muunnetaan nykypäivän luvuiksi.

LIITE 7: Lukujärjestelmät

LUKUJÄRJESTELMÄT

Tämän liitteen tarkoituksena on esitellä lyhyesti lukujärjestelmiä ja niiden ominaisuuksia. Ensimmäisessä luvussa tarkastellaan kahta lukujärjestelmiin liittyvää käsitettä: kantalukua ja paikkajärjestelmää. Toisessa luvussa tutkitaan lukujärjestelmiä matemaattisemmin ja todistetaan, että jokaisella luonnollisella luvulla on yksikäsitteinen esitys kaikissa lukujärjestelmissä. Kolmannessa luvussa tarkastellaan lukujärjestelmästä toiseen siirtymistä.

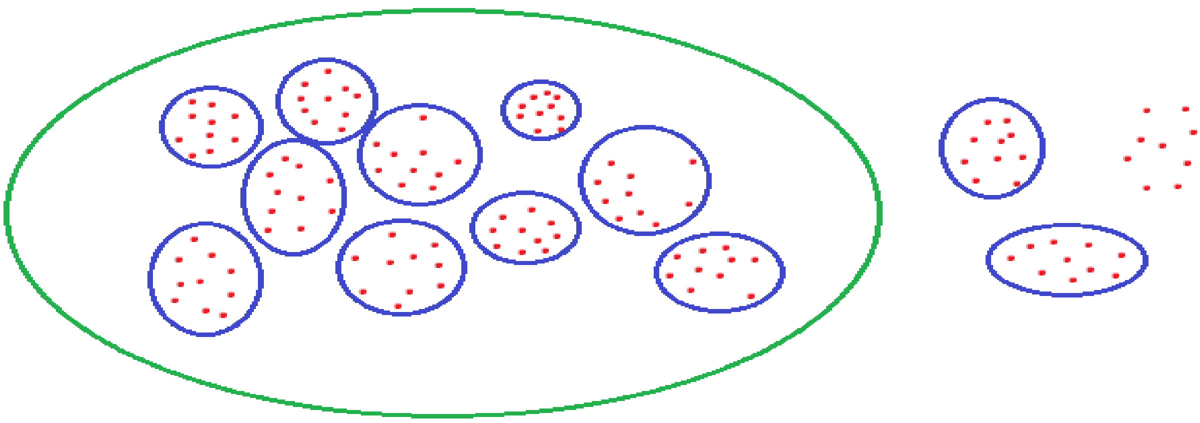
1 Johdatus lukujärjestelmiin

Lukujärjestelmä tarkoittaa tapaa ilmaista ja merkitä lukuja numeroiden avulla. Lukujärjestelmiä on olemassa lukemattomia, mutta arkielämässämme käytämme pääasiallisesti kymmenjärjestelmää. Lukujärjestelmät luokitellaan yleensä kantaluvun perusteella. Kantaluvun lisäksi lukujärjestelmät voidaan jaotella myös sen mukaan ovatko ne paikkajärjestelmiä vai eivät. Seuraavaksi tutustumme tarkemmin kantaluvun ja paikkajärjestelmän käsitteisiin.

1.1 Kantaluku

Lukujärjestelmät perustuvat ryhmittelyyn, jossa lukujoukot jaetaan *kantaluvun* suuruisiin joukkoihin *lukuyksiköiksi*. Lisäksi kantaluku kertoo kuinka monta numeromerkkiä tarvitaan lukujen kirjoittamiseen, sillä jokaisessa lukuyksikössä on kantaluvun verran alkiota. Toisaalta nykyisten lukumerkintöjen mukaan kantaluku määrittelee, minkä luvun potensseina luvut esitetään.

Esim. 1.1.1 *Kymmenjärjestelmän* kantaluku on 10. Kymmenjärjestelmässä ryhmittely tapahtuu seuraaviin lukuyksiköihin: kymmeniin, kymmenen kymmeniin eli satoihin, kymmenen kymmenen kymmeniin eli tuhansiin ja niin edelleen. Esimerkiksi luvun 129 ryhmittelyä voidaan kuvata seuraavan piirroksen avulla (kuvio 10):



Kuvio 10. Luvun 129 ryhmittely.

Kymmenjärjestelmässä tarvitaan numeromerkit kantalukua 10 pienemmille luvuille (1,2,3,4,5,6,7,8,9) ja luvulle 0. Kymmenjärjestelmän luku 129 voidaan kirjoittaa kantaluvun 10 *potenssisummana* $129 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 9$.

1.2 Paikkajärjestelmä

Paikkajärjestelmää hyödynsimme jo edellisessä esimerkissä, kun kirjoitimme kymmenjärjestelmän luvun 129 tässä muodossa. Tiedämme, että ensimmäinen numero oikealla kuvaa ykkösiä, toinen oikealta kymmeniä, kolmas oikealta satoja ja niin edelleen. Paikkajärjestelmän tai paikka-arvojärjestelmän ideana on, että potenssisummaesityksestä jätetään pois kantaluvun potenssit eli numeron sijainti luvussa kertoo mitä lukuyksikköä se edustaa. Paikkajärjestelmän käytössä pitää muistaa nollan merkitys, esim. luvussa 1089 ei ole satoja, mutta sitä ei voi kirjoittaa muodossa 189. Paikkajärjestelmä helpottaa lukujen kertomista ja merkitsemistä sekä auttaa suoriutumaan erilaisista aritmeettisista ja algebrallisista operaatioista.

Sekä kantaluvun että paikkajärjestelmän tarkempi matemaattinen määrittely ja merkintöjen standardisointi tapahtuu yksikäsitteisyyslauseen (lause 2.3) ja huomautuksen 2.4 yhteydessä.

2 Jakoyhtälö ja yksikäsitteisyyslause

Tämän osion tavoitteena on todistaa jakoyhtälö ja yksikäsitteisyyslause, jonka mukaan jokaiselle luonnolliselle luvulle on olemassa yksikäsitteinen esitys kaikissa lukujärjestelmissä. Myöhemmin jakoyhtälön ja yksikäsitteisyyslauseen todistuksen avulla voidaan pureutua lukujen muuntamiseen lukujärjestelmästä toiseen.

Sovitaan aluksi merkinnöistä:

$\mathbf{N} = \{ 1, 2, ... \}$ luonnolliset luvut,

$\mathbf{Z} = \{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$ kokonaisluvut,

$\mathbf{Z}_+ = \{ 0, 1, 2, ... \}$ positiiviset kokonaisluvut.

Lause 2.1 (Jakoyhtälö).

Olkoot $a,b \in \mathbf{Z}$ ja olkoon $b \neq 0$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset luvut $q,r \in \mathbf{Z}$, joille

$$a = qb + r \quad ja \quad 0 \leq r < |b|.$$

Huom. 2.2

- Jakoyhtälön luku a on *jaettava*, b *jakaja*, q *osamäärä* ja luku r on *jakojäännös*.

Todistus.

Olemassaolo: Joukko $\{ qb \mid q \in \mathbf{Z} \}$ sisältää selvästi luvun 0 ja kaikki kokonaisluvut siitä lukien $|b|$:n välein molempiin suuntiin. Jos kuhunkin näistä luvuista lisätään luvut $0, 1, 2, ..., b-1$, niin saadaan kokonaislukujen joukko **Z**.

Yksikäsitteisyys: Oletetaan, että on olemassa $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbf{Z}$ ja $0 \leq r_1, r_2 < |b|$, joille

$$a = q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2 .$$

Tällöin $(q_1 - q_2)b = (r_2 - r_1)$. Oletetaan vastoin väitettä, että $q_1 \neq q_2$, jolloin $|q_1 - q_2| \geq 1$ ja siten $|r_2 - r_1| \geq |b|$. Tämä on ristiriita, sillä $0 \leq r_1, r_2 \leq |b| - 1$, jolloin $|r_2 - r_1| \leq |b| - 1$. Siis $q_1 = q_2$ ja myös $r_1 = r_2$ eli jakoyhtälön esitys on myös yksikäsitteinen. □

Lause 2.3 (Yksikäsitteisyyslause).

Olkoon $b > 1$ kokonaisluku ja olkoon $n \in \mathbf{N}$. Tällöin olemassa yksikäsitteiset luvut $m \in \mathbf{Z}_+$ ja $a_i \in \mathbf{Z}$ siten, että $a_m \neq 0$,

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + ... + a_1 b + a_0$$

ja $0 \leq a_i < b$ kaikilla $i = 0, 1, ..., m$.

Huom. 2.4

- Lukua b sanotaan *kantaluvuksi*.
- Yleensä merkitään $n=(a_m a_{m-1}...a_1 a_0)_b = a_m a_{m-1}...a_1 a_{0b}$. Jos $b=10$ eli käytämme kymmenjärjestelmää, niin merkinnästä jätetään pois kantaluku eli $n = a_m a_{m-1}...a_1 a_0$. Edellinen lukujen merkitsemismuoto vaatii jokaiselle luvulle $0, ..., b-1$ oman symbolinsa. Jos $b \le 10$, niin tarvittavat merkinnät saadaan seuraavista arabialaisista lukumerkinnöistä 0,1,2,…,9. Jos $b > 10$, niin tarvitaan merkinnät myös muille kantalukua pienemmille luvuille, esim. heksadesimaalijärjestelmässä ($b=16$) 10=A, 11=B,…,15=F. Toisaalta jos $b > 10$, niin lukujen merkitsemiseen voidaan käyttää myös kymmenjärjestelmän merkintöjä, mutta eri lukuyksikköjen edustajat pitää selvyyden vuoksi erottaa esimerkiksi pisteillä, esim. $12\times 18^3 + 0\times 18^2 + 11\times 18 + 2 = 12.0.11.2_{18}$. Näin merkitsemällä meidän ei tarvitse keksiä ja muistaa uusia merkintöjä, vaan voimme käyttää tuttuja arabialaisia lukumerkintöjä.

Todistus.

Olemassaolo: Jakoyhtälön nojalla saadaan

$$n = q_0 b + a_0 \quad \text{ja} \quad 0 \le a_0 \le b-1.$$

Jos $q_0 < 0$, niin $n < 0$, mikä on ristiriita oletuksen kanssa.

Jos $q_0 = 0$, niin etsitty esitys on $n = a_0$.

Täten oletetaan, että $q_0 > 0$. Sovelletaan seuraavaksi jakoyhtälöä uudelleen siten, että jaetaan q_0 kantaluvulla b, josta saadaan

$$q_0 = q_1 b + a_1 \quad \text{ja} \quad 0 \le a_1 \le b-1.$$

Nyt $0 \le q_1 < q_0$. Edelleen samaan tapaan jatkamalla löydetään aidosti laskevasti ei-negatiiviset luvut $q_0, q_1, ..., q_m = 0$ siten, että

$$q_{i-1} = q_i b + a_i \quad \text{ja} \quad 0 \le a_i \le b-1 \quad \text{kaikilla } i = 1, ..., m.$$

Sijoittamalla edellisen mukaan saadaan

$$\begin{aligned} n &= q_0 b + a_0 = (q_1 b + a_1)b + a_0 = q_1 b^2 + a_1 b + a_o = (q_2 b + a_2)b^2 + a_1 b + a_o \\ &= q_2 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_o = ... = q_{m-1} b^m + a_{m-1} b^{m-1} + ... + a_1 b + a_0 \\ &= a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + ... + a_1 b + a_0, \end{aligned}$$

koska $q_{m-1} = q_m b + a_m = a_m$.

Yksikäsitteisyys: Muodostetaan antiteesi ja oletetaan, että on olemassa kaksi erilaista esitystä. Oletetaan, että on olemassa kokonaisluvut $m,k \geq 0$, $a_0, a_1, ..., a_m, c_0, c_1, ..., c_k$, joille $0 \leq a_i \leq b-1$ kaikilla $i = 0, 1, ..., m$ ja $0 \leq c_j \leq b-1$ kaikilla $j = 0, 1, ..., k$ ja

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + ... + a_1 b + a_0 = c_k b^k + c_{k-1} b^{k-1} + ... + c_1 b + c_0 .$$

Edelleen vähentämällä esitykset toisistaan saadaan

$$0 = d_s b^s + d_{s-1} b^{s-1} + ... + d_1 b + d_0 \quad (1),$$

missä $d_i = a_i - c_i$ ja s on suurin kokonaisluku, jolle $a_i \neq c_i$. Tällöin $d_s \neq 0$.

Jos $s = 0$, niin olisi $0 \neq d_s = d_0 = 0$, mikä on ristiriita. Siis on oltava $s > 0$. Koska $0 \leq a_i \leq b-1$ ja $0 \leq c_i \leq b-1$ kaikilla i, niin

$$|d_i| = |a_i - c_i| \leq b-1 \quad (2)$$

kaikilla $i = 0, 1, ..., s$.

Käyttämällä tietoa $d_s \in \{\mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$, yhtälöä (1), kolmioepäyhtälöä ja epäyhtälöä (2) saadaan

$$\begin{aligned}
b^s &\leq |d_s b^s| = |d_{s-1} b^{s-1} + ... + d_1 b + d_0| \\
&\leq |d_{s-1}| b^{s-1} + ... + |d_1| b + |d_0| \\
&\leq (b-1)(b^{s-1} + ... + b + 1), \\
&= b^s + b^{s-1} + ... + b^2 + b - (b^{s-1} + b^{s-2} + ... + b + 1) \\
&= b^s - 1
\end{aligned}$$

mikä on ristiriita.

Haluttu esitys on siis yksikäsitteinen, joten väite pätee. □

3 Siirtyminen lukujärjestelmästä toiseen

3.1 Yleisimpiä lukujärjestelmiä

Historian aikana ihmiset ovat käyttäneet useita erilaisia lukujärjestelmiä kuten kaksi-, viisi-, kymmen-, 12-, 20-, ja 60-järjestelmiä. Nykyään kymmenjärjestelmän lisäksi yleisesti käytettyjä ovat luvun 2 potensseihin perustuvat lukujärjestelmät, joita käytetään erityisesti tietotekniikassa.

Yksinkertaisin näistä on *binäärijärjestelmä*, jonka kantaluku on kaksi ja numeromerkkeinä toimivat 0 ja 1, joita kutsutaan usein myös biteiksi. *Oktaalijärjestelmän* kantaluku on 8 ja numeromerkkeinä käytetään numeroita 0,1,…,7. *Heksadesimaalijärjestelmä* perustuu kantalukuun 16 ja näin ollen arabialaisten numeroiden 0,1,…,9 lisäksi tarvitaan lisää numeromerkkejä. Heksadesimaalijärjestelmässä käytetäänkin aakkosia merkintöjen apuna: 10=A, 11=B, 12=C, 13=D, 14=E ja 15=F eli toisin sanoen heksadesimaalijärjestelmän numeromerkit ovat 0,1,…,9,A,B,..,F.

Esim. 3.1.1 Luvun 29 merkinnät eri järjestelmissä:

$$11101_2 = 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2 + 1 = 29$$

$$35_8 = 3\times 8 + 5 = 29$$

$$1D_{16} = 1\times 16 + D = 1\times 16 + 13 = 29$$

3.2 Siirtyminen k-järjestelmästä kymmenjärjestelmään

Muunnos k-järjestelmästä kymmenjärjestelmään onnistuu yhteen- ja kertolaskun avulla ja on näin ollen helpoin lukujärjestelmämuunnos. Ensin k-järjestelmän luku kirjoitetaan potenssisummana ja suoritetaan lasku kymmenjärjestelmässä, jolloin summan arvo on haluttu luku kymmenjärjestelmässä.

Esim. 3.2.1 $111011_2 = 1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2 + 1 = 59$

Esim. 3.2.2 $234_7 = 2\times 7^2 + 3\times 7 + 4 = 123$

3.3 Siirtyminen kymmenjärjestelmästä k-järjestelmään

Muunnos kymmenjärjestelmästä k-järjestelmään tapahtuu käyttäen jakoyhtälöä samaan tapaan kuin yksikäsitteisyyslauseen olemassaolo-osion todistuksessa (ks. lauseen 2.3 todistus). Olkoon n kymmenjärjestelmän luku, jonka muuntaminen k-järjestelmään toimii seuraavasti:

1. Jaetaan luku n halutun lukujärjestelmän kantaluvulla k eli jakoyhtälön mukaan saadaan
$$n = kq_0 + a_0 .$$
2. Saatu osamäärä q_0 jaetaan edelleen kantaluvulla k eli kirjoitetaan jakoyhtälön nojalla
$$q_0 = kq_1 + a_1 .$$
3. Jatketaan samalla tavalla kunnes osamääräksi saadaan $q_m = 0$.
4. Tällöin luvun n esitys k-järjestelmässä löydetään poimimalla jakojäännökset:
$$n = a_m a_{m-1} ... a_1 a_{0k} .$$

Esim. 3.3.1 Muunnetaan kymmenjärjestelmän luku 98 binäärijärjestelmään:

$$98 = 2 \times 49 + \mathbf{0}$$
$$49 = 2 \times 24 + \mathbf{1}$$
$$24 = 2 \times 12 + \mathbf{0}$$
$$12 = 2 \times 6 + \mathbf{0}$$
$$6 = 2 \times 3 + \mathbf{0}$$
$$3 = 2 \times 1 + \mathbf{1}$$
$$1 = 2 \times 0 + \mathbf{1}$$

Tällöin luvun 98 esitys binäärijärjestelmästä löydetään poimimalla jakojäännökset a_i eli $98 = 1100010_2$.

3.4 Siirtyminen p-järjestelmästä k-järjestelmään

Siirtyminen p-järjestelmästä k-järjestelmään tapahtuu käyttämällä edellisiä algoritmeja eli muunnetaan ensin p-järjestelmän luku kymmenjärjestelmään ja edelleen kymmenjärjestelmän luku k-järjestelmään.

Esim. 3.4.1 Luvun 1234_5 muuntaminen heksadesimaalijärjestelmään. Aloitetaan muuntamalla luku 1234_5 kymmenjärjestelmään:

$$1234_5 = 1 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 194 .$$

Nyt kymmenjärjestelmän luku 194 voidaan muuntaa heksadesimaalijärjestelmään jakoyhtälön avulla:

$$194 = 16 \times 12 + \mathbf{2}$$
$$12 = 16 \times 0 + \mathbf{12}$$

Tällöin luvun 194 esitys heksadesimaalijärjestelmässä on $C2_{16}$ eli $1234_5 = 194 = C2_{16}$.

Liitteen 7 lähteet

Flegg, G. 2002. *Lukujen historia: Sormilla laskemisesta tietokoneisiin*. Suomentanut Karttunen H. Helsinki: WS Bookwell.

Ifrah, G. 1998. *The universal history of numbers: From prehistory to the invention of the computer*. London: The Harvill Press.

Jutila, M. & Honkala, I. 2011. *Lukuteoria*. Turun yliopisto http://www.math.utu.fi/opiskelu/opetusohjelma/kurssit/aineopinnot/mate5123/moni.pdf

Tuominen, H. 2007. *Lukuteorian alkeet*. Jyväskylän yliopisto. http://users.jyu.fi/~tuheli/lukuteoria2011/luennot.pdf

Virrankoski, M. 2002. *Matematiikan perusopinnot luokanopettajan koulutuksessa*. Turun opettajankoulutuslaitos, 4-11. http://users.utu.fi/pivirran/matem_osa1.pdf

Kaikki linkit tarkistettu 28.01.2012.