RIEMANNIN KUVAUSLAUSE

Sirpa Patteri

Johdanto

Georg Bernhard Riemann (1826-1866) esitti kuvauslauseen väitöskirjassaan vuonna 1851. Hän käytti todistuksessaan Dirichlet'n periaatetta, jossa tutkitaan harmonisten funktioiden reuna-arvo ongelmaa. Dirichlet'n periaate oli tuohon aikaan paljon käytetty lause ja sitä pidettiin yleisesti pätevänä. Kuitenkin vuonna 1870 Karl Weierstrass (1815-1897) kritisoi Dirichlet'n periaatetta näyttämällä sen todistuksen vastaesimerkeillä vääräksi, ja sen vuoksi Riemannin alkuperäinen todistus kuvauslauseelle ei enää pätenyt. Vasta noin 50 vuotta myöhemmin Riemannin alkuperäisestä työstä, David Hilbert (1862-1943) todisti Dirichlet'n periaatteen oikeaksi ja otti Riemannin todistuksen perusominaisuudet käyttöön. Sillä aikaa oli jo kehitetty muita Riemannin kuvauslauseen todistuksia, joista yksi oli Carl Neumannin (1832-1925) ja Hermann Schwarzin (1843-1921) kehittelemä, niin sanottu vaihtoehtoinen menetelmä. Riemannin väitöskirjassa ei ainoastaan väitetty konformikuvausten $f : D \to D'$ olemassaoloa, missä alueet D ja D' ovat yhdesti yhtenäisiä, vaan esitteltiin myös, että konformikuvaus f voidaan valita siten, että se kuvaa näiden alueiden reunat toisilleen, kun alueiden reunat ovat paloittain jatkuvasti differentioituvia.

Tämän Pro gradu-tutkielman tarkoituksena on käsitellä Riemannin kuvauslausetta. Tutkielman päälähteenä on käytetty Bruce P. Palkan teosta [1], jota seurataan lähes samankaltaisena rakenteena. Lisäksi edellisen teoksen täydentävänä tukena ovat olleet Lars V. Ahlforsin teos [2], ja internetissä olevat luentomonisteet [8] ja [9]. Tutkielman viimeisessä kappaleessa esitellään vielä lyhyesti kuinka konformikuvaukset käyttäytyvät alueiden reunoilla. Konformikuvausten reunavastaavaisuuden tutkimiseen käytetään pääasiallisesti teoksen [1] rakennetta, mutta lisäksi sitä on täydennetty Rolf Nevanlinnan, V. Paateron [4] ja Zeev Neharin [3] teoksilla.

Tutkielman ensimmäisessä kappaleessa käsitellään lyhyesti kompleksianalyysin peruskäsitteitä, joita tullaan tarvitsemaan sen jälkeisissä kappaleissa. Alkutietoina oletetaan Kompleksianalyysin 1 -kurssin asiat, jotka määräytyivät luennolla [10], ja näiltä osin olevia lauseita ei ole tässä todistettu. Toisessa osiossa esitellään Cauchyn lause ja integraalikaava. Sen jälkeisessä kappaleessa perehdytään analyyttisten funktioiden jonoihin ja sarjoihin. Kappaleessa käsitellään myös funktioperhettä $\mathfrak{F}$, jota tullaan käyttämään Riemannin kuvauslauseen todistuksessa. Neljännessä osiossa pääasiana ovat funktoiden eristetyt erikoispisteet ja kappaleen loppussa olevat analyyttisten funktioiden ominaisuudet, joita tullaan tarvitsemaan seuraavan kappaleen todistuksissa. Viimeisessä kappaleessa esitellään konformikuvaukset ja niihin liittyviä ominaisuuksia, joiden erikoismuotona esitellään lyhyesti Möbius-kuvaukset. Näiden jälkeen saadaan muotoiltua ja todistettua Riemannin kuvauslause, joka on tämän tutkielman tärkein tulos. Viimeiseksi tutkitaan pintapuolisesti konformikuvausten reunavastaavuutta.

Sisältö

1. Alkutiedot kompleksianalyysistä

Tässä kappaleessa käsitellään perusmääritelmiä ja -lauseita, jotka on muokattu kompleksitasoon sopiviksi. Perusoletuksena on, että käsitteet, jotka on määritelty Euklidisissa avaruuksissa, kuten jonojen suppeneminen ja raja-arvo, funktioiden jatkuvuus ja raja-arvo, avoin ja suljettu joukko, sisus, sulkeuma, kompaktius ja yhtenäisyys määritellään kuten avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Tässä tutkielmassa kaikki tarkastelut tapahtuvat kompleksitasossa $\mathbb{C}$, ellei toisin mainita.

Aloitetaan määrittelemällä muutamia lauseita, jotka liittyvät kosketuspisteisiin ja jonojen suppenemiseen.

Merkintöjä: Olkoon $\Delta(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ avoin kiekko, $\bar{\Delta}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ suljettu kiekko, $\Delta^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} = \Delta(z_0, r)\backslash\{z_0\}$ punkteerattu kiekko ja $K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ ympyrä, kun $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $0 < r < \infty$.

Määritelmä 1.1. *Piste z_0 on joukon A kosketuspiste, jos kaikilla $\epsilon > 0$ pätee, että $\Delta(z_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Lisäksi A:n kosketuspisteitä ovat kaikki sen reunapisteet, riippumatta siitä kuuluvatko ne A:han. Joukon A kosketuspisteiden joukkoa sanotaan A:n sulkeumaksi, eli $\bar{A} = \{z_0 \in \mathbb{C} : z_0$ on A:n kosketuspiste$\}$.*

Lause 1.2. *Jonolla (z_n) on kosketuspiste $z_0 \in \mathbb{C}$, jos ja vain jos (z_n):llä on olemassa osajono (z_{n_k}) siten, että $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0$.*

Lause 1.3. *Oletetaan, että jono (z_n) lähestyy raja-arvoa z_0. Tällöin kaikille (z_n):n osajonoille (z_{n_k}) pätee, että $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0$.*

Lause 1.4. *Joukko A on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki kosketuspisteensä.*

Seuraava lause kertoo kuinka jatkuva funktio säilyttää jokaisen avoimen joukon alkukuvan avoimena.

Lause 1.5. *Funktio $f : U \to \mathbb{C}$ on jatkuva, jos ja vain jos jokaiselle avoimelle joukolle $V \subset \mathbb{C}$ alkukuva $f^{-1}(V) = \{z \in U : f(z) \in V\}$ on avoin U:ssa.*

Yhtenäisiin joukkoihin liittyviä asioita käsitellään seuraavissa lauseissa, lemmassa ja määritelmässä.

Lemma 1.6. *Olkoon A joukko. Oletetaan, että on olemassa avoimet joukot U ja V, joille pätevät seuraavat ehdot:*
(i) $A \cap U \cap V = \emptyset$,
(ii) $A \cap U \neq \emptyset$ ja $A \cap V \neq \emptyset$, ja
(iii) $A \subset U \cup V$.
Tällöin A on epäyhtenäinen.

Merkintä: Epätyhjää joukkoa D, joka on avoin ja yhtenäinen, sanotaan alueeksi.

Lause 1.7. *Jos alue D voidaan ilmaista yhdisteenä $D = U \cup V$, missä joukot U ja V ovat erillisiä ja avoimia, niin joko $U = \emptyset$ tai $V = \emptyset$.*

Lause 1.8. *Kaikki alueen D pisteet z_0 ja z_1, $z_0 \neq z_1$, voidaan yhdistää toisiinsa murtoviivalla D:ssä.*

Lause 1.9. *Olkoon $f : A \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja olkoon $C \subset A$ yhtenäinen joukko. Tällöin joukko $f(C)$ on yhtenäinen.*

Bernard Bolzano (1781-1848) ja Weierstrass on yleensä yhdistetty seuraavaan lauseeseen avaruudessa $\mathbb{R}$: Jokaisella reaalilukujonolla, joka on rajoitettu ja ääretön, on kosketuspiste. Seuraava lause on tämän laajennus kompleksitasoon.

Lause 1.10 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Oletetaan, että jono (z_n) on rajoitettu. Tällöin (z_n):llä on ainakin yksi kosketuspiste.*

Todistus. Olkoon $z_n = x_n + iy_n$. Koska jono (z_n) on rajoitettu, niin myös jonot (x_n) ja (y_n) ovat rajoitettuja reaalilukuja. Valitaan (x_n):n kosketuspisteeksi $x_0 \in \mathbb{R}$. Lauseen 1.2 nojalla (x_n):llä on osajono (x_{n_k}) siten, että $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Samoin on olemassa jonon (y_{n_k}) osajono $(y_{n_{k_l}})$, jolla on raja-arvo y_0. Lauseen 1.3 mukaan $\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = x_0$, joten

$$\lim_{l\to\infty} z_{n_{k_l}} = \lim_{l\to\infty} (x_{n_{k_l}} + iy_{n_{k_l}}) = x_0 + iy_0 = z_0.$$

Tällöin Lauseesta 1.2 saadaan, että z_0 on (z_n):n kosketuspiste. □

Seuraavaksi esitellään Cauchy-jono, joka on nimetty Augustin-Louis Cauchyn (1789-1857) mukaan.

Lause 1.11 (Cauchyn ehto suppenemiselle)**.** *Jono (z_n) suppenee, jos ja vain jos se on Cauchy-jono: kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N = N(\epsilon)$ siten, että $|z_m - z_n| < \epsilon$, kun $m > n \geq N$.*

Tulevissa tutkielman kappaleissa käytetään tietoa siitä, että kompakti joukko, joka on avoimen joukon sisällä, on positiivisen etäisyyden päässä tämän avoimen joukon komplementista:

Lemma 1.12. *Olkoon U avoin ja epätyhjä joukko, ja olkoon $K \subset U$ kompakti. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että jokaiselle pisteelle $z \in K$ pätee $\Delta(z, r) \subset U$.*

Todistus. Jos $U = \mathbb{C}$, niin väite on tosi, koska mikä tahansa $r > 0$ käy. Olkoon siten $U \neq \mathbb{C}$. Tehdään vastaoletus: Oletetaan, että ei ole olemassa sellaista $r > 0$, jolle kaikille $z \in K$ olisi $\Delta(z, r) \subset U$. Olkoon $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, jolle kaikille $z \in K$ ei päde $\Delta(z, r) \subset U$. Tällöin on mahdollista kiinnittää jokaiselle n pisteet $z_n \in K$ ja $w_n \in F = \mathbb{C}\backslash U$ siten, että $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$. Koska joukko K on kompakti, niin jonolla (z_n) on suppeneva osajono K:ssa, jolla on kosketuspiste. Olkoon z_0 sellainen piste.
Olkoon (z_{n_k}) jonon (z_n) osajono, jolle $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0$. Tällöin

$$|w_{n_k} - z_0| \leq |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z_0| \leq \frac{1}{n_k} + |z_{n_k} - z_0| \to 0,$$

kun $k \to \infty$, eli $\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = z_0$. Silloin z_0 on myös jonon (w_n) kosketuspiste.
Koska (w_n) on suljetussa joukossa F, niin Lauseen 1.4 perusteella F sisältää kaikki kosketuspisteensä, eli $z_0 \in F$. Tällöin $z_0 \in K \cap F$, josta saadaan ristiriita, koska $K \subset U = \mathbb{C}\backslash F$. On siis olemassa $r > 0$ siten, että jokaiselle pisteelle $z \in K$ pätee $\Delta(z, r) \subset U$. □

Lause 1.13. *Olkoon $f : A \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja olkoon $K \subset A$ kompakti. Tällöin $f(K)$ on kompakti.*

Korollaari 1.14. *Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja olkoon $K \subset A$ kompakti. Tällöin on olemassa pisteet $z_0, w_0 \in K$ siten, että $f(z_0) \leq f(z) \leq f(w_0)$ kaikille pisteille $z \in K$.*
Toisin sanoen, kun rajoitutaan joukkoon K, niin f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa.

Analyyttiset funktiot ovat keskeinen käsite kompleksianalyysissä, joten seuraavaksi esitellään lyhyesti analyyttisten funktioiden käsite.

Määritelmä 1.15. *(i) Olkoon G avoin joukko ja $z_0 \in G$. Funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on derivoituva pisteessä z_0, jos raja-arvo*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

on olemassa.
(ii) Jos funktiolla $f : G \to \mathbb{C}$ on derivaatta jokaisessa joukon G pisteessä, niin f on analyyttinen G:ssä.

Lause 1.16. *Funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on derivoituva pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$, jos ja vain jos $f(z) = f(z_0) + C(z - z_0) + E(z)$ kaikilla $z \in G$, missä E on virhetermi, jolle $\lim_{z \to z_0} |\frac{E(z)}{z - z_0}| = 0$. Tällöin $C = f'(z_0)$.*

Cauchy-Riemannin yhtälöt, jotka esitellään seuraavassa lauseessa, ovat nimetty Cauchyn ja Riemannin kunniaksi.

Lause 1.17 (Cauchy-Riemannin yhtälöt)**.** *Olkoon G avoin joukko ja olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ derivoituva funktio pisteessä $z_0 \in G$ ja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, missä funktiot $u, v : G \to \mathbb{R}$. Tällöin osittaisderivaatat $\partial_x u = u_x$, $\partial_y u = u_y$, $\partial_x v = v_x$ ja $\partial_y v = v_y$ ovat olemassa pisteessä $(x_0, y_0) = z_0$ ja*

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0). \end{cases}$$

Huomio/Merkintä: Jos lähestytään pistettä z_0 reaaliakselin ($\mathbb{R}$) suuntaisesti, niin

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = f_x(z_0). \end{aligned}$$

Samoin saadaan, jos lähestytään pistettä z_0 imaginaariakselin ($i\mathbb{R}$) suuntaisesti, niin

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) = -if_y(z_0).$$

Lause 1.18. *Oletetaan, että funktio $f = u + iv$ on määritelty avoimessa joukossa U, ja että osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y ovat olemassa U:ssa. Jos kaikki osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä $z_0 \in U$, ja jos Cauchy-Riemannin yhtälöt pätevät z_0:ssa, niin f on differentioituva z_0:ssa ja $f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0)$.*

Määritelmä 1.19. *Olkoon U avoin joukko. Funktio $f = u + iv$ on luokassa $C^k(U)$, jos U sisältyy f:n määrittelyjoukkoon, ja jos kaikki mahdolliset osittaisderivaatat $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, \ldots, f_{k*x}, \ldots$ ovat olemassa lukuun k asti U:ssa ja ovat siellä jatkuvia funktioita.*

Seuraavan lauseen tulos saadaan suoraan Lauseesta 1.18:

Lause 1.20. *Funktio $f = u + iv$, joka kuuluu luokkaan $C^1(U)$, on analyyttinen avoimessa joukossa U, jos ja vain jos funktiot u ja v toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt U:ssa. Tällöin $f'(z) = f_x(z) = -if_y(z)$ joukossa U.*

Lause 1.21. *Olkoon D alue. Oletetaan, että funktio $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, ja että $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in D$. Tällöin f on vakiofunktio D:ssä.*

Jos funktio $f : U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, ja jos $D \subset f(U)$ on alue, niin funktion f käänteisfunktion haaralla alueessa D tarkoitetaan jatkuvaa funktiota $g : D \to U$, jolle pätee ehto $f(g(z)) = z$ kaikilla $z \in D$. Seuraava lause määrittelee tarvittavan ehdon, että g olisi myös analyyttinen D:ssä.

Lause 1.22. *Oletetaan, että joukko U on avoin, ja että funktio $f : U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen. Olkoon g funktion f käänteisfunktion haara alueessa D, $D \subset f(U)$, ja olkoot pisteet $z_0 \in D$ ja $w_0 = g(z_0)$. Jos $f'(w_0) \neq 0$, niin g on differentioituva pisteessä $z_0 = f(w_0)$ ja $g'(z_0) = \frac{1}{f'(w_0)}$.*
Jos $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in g(D)$, niin g on analyyttinen D:ssä, missä sen derivaatta toteuttaa yhtälön $g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$.

Huomio: Olkoon U avoin joukko ja olkoon $f : U \to D$ funktio siten, että $f = u + iv$ ja sen osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y ovat olemassa U:ssa.
(i) Jos jokainen osittaisderivaatta on jatkuva pisteessä $z_0 \in U$, niin f on differentioituva z_0:ssa. Erityisesti,

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z_0}) + E(z)$$

kun $z \in U$, missä funktio $E : U \to \mathbb{C}$ on virhetermi, jolle $\lim_{z \to z_0} |\frac{E(z)}{z - z_0}| = 0$, ja

$$f_z(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0)) = \frac{1}{2}(u_x(z_0) + v_y(z_0)) + \frac{i}{2}(v_x(z_0) - u_y(z_0))$$

ja

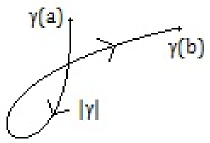
$$f_{\bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0)) = \frac{1}{2}(u_x(z_0) - v_y(z_0)) + \frac{i}{2}(v_x(z_0) + u_y(z_0)).$$

(ii) Funktio f on differentioituva pisteessä $z_0 \in U$, jos ja vain jos $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$.

Monia tärkeitä analyyttisten funktioiden ominaisuuksia on yleensä vaikea todistaa ilman kompleksisten integraalien käyttöä. Todistukset, joissa ei käytetä integraalia, ovat usein vaikeampia, kuin klassiset todistukset.

Seuraavaksi tutustutaan kompleksiseen integrointiin yli paloittain jatkuvasti differentioituvien polkujen, jotka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 1.23. *(i) Jatkuva kuvaus $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ on polku, $\gamma(a)$ on alkupiste ja $\gamma(b)$ on loppupiste. Polun jälki on sen kuvajoukko $\gamma([a, b]) = |\gamma|$.*



(ii) Polku $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, missä $t \in [a, b]$, on jatkuvasti differentioituva, jos derivaatta $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ on olemassa kaikilla $t \in [a, b]$, ja jos γ' on jatkuva välillä $[a, b]$.
(iii) Polku $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ on paloittain jatkuvasti differentioituva, jos on olemassa jako $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ välillä $[a, b]$ siten, että γ on jokaisella välillä $[t_{k-1}, t_k]$, $1 \leq k \leq n$, jatkuvasti differentioituva.

Lemma 1.24. *Olkoon D alue ja olkoot pisteet $z_0, z_1 \in D$. Tällöin on olemassa paloittain jatkuvasti differentioituva polku D:ssä siten, että sen alkupiste on z_0 ja loppupiste on z_1.*

Lemma 1.25. *Oletetaan, että funktiot $f : A \to \mathbb{C}$ ja $g : A \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia, ja että polut γ ja β ovat paloittain jatkuvasti differentioituvia A:ssa.*
(i) $\int_\gamma f(z) + g(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$.
(ii) $\int_\gamma cf(z)dz = c\int_\gamma f(z)dz$, kun $c \in \mathbb{C}$.
(iii) $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.
(iv) Jos polku $\gamma+\beta$ on määritelty, niin $\int_{\gamma+\beta} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\beta f(z)dz$.
(v) Jos poluista $\gamma : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\beta : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ ja $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ saadaan paloittain jatkuvasti diffentioituva polku siten, että $\beta = \gamma \circ \varphi$, niin

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\beta f(z)dz.$$

(vi) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, dz$.

Määritelmä 1.26. *Oletetaan, että joukko U on avoin, ja että funktion f määrittelyjoukkoon kuuluu U. Funktio $F : U \to \mathbb{C}$ on f:n primitiivi U:ssa, jos F on analyyttinen U:ssa ja $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in U$.*

Lause 1.27. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva avoimessa joukossa U, ja että funktio F on f:n primitiivi U:ssa. Jos polku $\gamma : [a, b] \to U$ on paloittain jatkuvasti differentioituva, niin*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Erityisesti, jos γ on suljettu, niin

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Edellinen lause takaa, että jos jatkuvalla funktiolla f on primitiivi avoimessa joukossa U, niin integraalin arvo funktiosta f yli paloittain jatkuvasti differentioituvan polun joukossa U riippuu kokonaan tämän polun alku- ja loppupisteestä.

Seuraavassa kappaleessa esitellään Cauchyn lauseen yleinen muoto, joka on erittäin keskeinen kompleksianalyysin tulos. Cauchyn lauseesta on monia erilaisia muotoja, joissa tutkitaan milloin analyyttisen funktion integraali on nolla yli suljetun polun. Seuraava lemma antaa tämän tuloksen suljetuille poluille, jotka ovat suorakulmioita.

Lemma 1.28. *Jos funktio f on analyyttinen avoimessa joukossa U, niin $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$, kun $R \subset U$ on suljettu suorakulmio.*

Lemma 1.29. *Olkoon Δ avoin kiekko ja olkoon f jatkuva funktio Δ:ssa ja $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ kaikilla suljetuilla suorakulmiolla $R \subset \Delta$, jonka sivut ovat koordinaatistoakseleiden suuntaisia. Tällöin f:llä on primitiivi Δ:ssa. Erityisesti, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ kaikkien suljettujen paloittain jatkuvasti differentioituvien polkujen γ yli kiekossa Δ.*

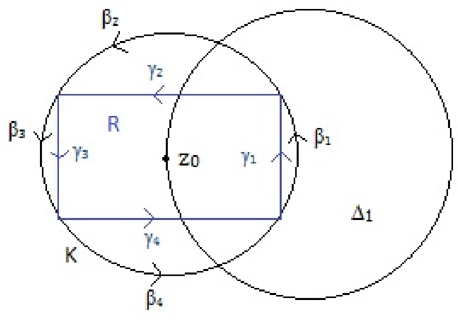
Ennen kuin siirrytään Caychyn lauseeseen kiekossa, niin seuraava lause on Lauseen 1.29 seuraus, jota tullaan käyttämään myöhemmin tässä tutkielmassa. Se on myös Lauseen 1.27 käänteinen tulos.

Lause 1.30. *Olkoon f jatkuva funktio alueessa D ja $\int_\gamma f(z)dz = 0$ kaikille suljetuille paloittain jatkuvasti differentioituville poluille γ alueessa D. Tällöin f:llä on primitiivi D:ssä.*

Lause 1.31 (Cauchyn lause kiekossa)**.** *Olkoon Δ avoin kiekko ja olkoon f analyyttinen funktio Δ:ssa (tai yleisemmin, on jatkuva Δ:ssa ja analyyttinen joukossa $\Delta \backslash \{z_0\}$ jollekin pisteelle $z_0 \in \Delta$). Tällöin $\int_\gamma f(z)dz = 0$ kaikille suljetuille paloittain jatkuvasti differentioituville Δ:n poluille.*

Seuraavassa esimerkissä käytetään edellistä Cauchyn lausetta, jonka avulla haluttu tulos saadaan vaivattomasti.

Esimerkki 1.32. *Näytetään, että $\int_{\partial R}(z - z_0)^{-1}dz = 2\pi i$, missä R on suljettu suorakulmio ja z_0 on sen keskipiste.*
Olkoon $K = K(z_0, r)$ ympyrä, joka rajoittaa R:ää. Kun $1 \leq k \leq 4$, niin olkoon polut γ_k ja β_k siten, että $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_4$ on suorakulmion R reunan parametrisointi ja $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_4$ on ympyrän K parametrisointi kuten kuvassa.



Tällöin voidaan valita kaikille k avoin kiekko Δ_k, joka sisältää suljetun polun $\gamma_k - \beta_k$, ja missä funktio $f(z) = (z - z_0)^{-1}$ on analyyttinen. Lauseesta 1.31 saadaan

$$0 = \int_{\gamma_k - \beta_k} (z - z_0)^{-1}dz = \int_{\gamma_k} (z - z_0)^{-1}dz - \int_{\beta_k} (z - z_0)^{-1}dz,$$

kun $1 \leq k \leq 4$. *Tässä polku* $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *siten, että* $\beta(t) = z_0 + re^{it}$. *Silloin saadaan*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} \frac{1}{z - z_0} dz &= \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z - z_0} dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\beta_k} \frac{1}{z - z_0} dz \\
&= \int_{|z - z_0| = r} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{\beta} f(z) dz \\
&= \int_0^{2\pi} f(\beta(t)) \beta'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z_0} rie^{it} dt \\
&= \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Lemma 1.33. *Olkoon* γ *paloittain jatkuvasti differentioituva polku, ja olkoon* $h : |\gamma| \to \mathbb{C}$ *jatkuva funktio ja* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Olkoon funktio* H *määritelty avoimessa joukossa* $U = \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ *siten, että*

$$H(z) = \int_{\gamma} \frac{h(\varsigma)}{(\varsigma - z)^k} d\varsigma.$$

Tällöin H *on analyyttinen ja*

$$H'(z) = k \int_{\gamma} \frac{h(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{k+1}} d\varsigma.$$

Tärkeä käsite kompleksianalyysissä on myös kierrosluku. Se on kokonaisluku, joka kertoo kuinka monta kertaa polku kiertää tietyn pisteen ympäri ja missä suunnassa. Jos kierrosluku on negatiivinen, niin polku kiertää pisteen ympäri myötäpäivään, ja jos kierrosluku on positiivinen, niin silloin polku kiertää vastapäivään.

Kierrosluku määritellään seuraavaksi ja sen jälkeisessä lemmassa on sen joitain ominaisuuksia, joita käytetään mm. Esimerkissä 1.36.

Määritelmä 1.34. *Olkoon* γ *suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva polku ja* $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. *Tällöin* γ*:n kierrosluku pisteen* z *ympäri on*

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\varsigma - z} d\varsigma.$$

Lemma 1.35. *Olkoon* γ *suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva polku ja olkoon* $U = \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ *joukko. Tällöin*
(i) $n(\gamma, z)$ *on vakio jokaisessa* U*:n komponentissa.*
(ii) $n(\gamma, z) = 0$, *kun piste* z *kuuluu* U*:n rajoittamattomaan komponenttiin.*
(iii) Jos γ *on yksinkertainen, niin joko* $n(\gamma, z) = 1$ *tai* $n(\gamma, z) = -1$, *kun* z *kuuluu* U*:n rajoitettuun komponenttiin.*

Esimerkki 1.36. *Arvioidaan integraalia* $\int_{\partial R} (\varsigma - z)^{-1} d\varsigma$, *missä* R *on suljettu suorakulmio ja* $z \notin \partial R$.
Suoraan Määritelmästä 1.34 saadaan

$$\int_{\partial R} (\varsigma - z)^{-1} d\varsigma = 2\pi i n(\gamma, z),$$

missä polku γ *on standardi parametrisonti* R*:n reunalle. Sijoitetaan* $n(\gamma, z)$*:n paikalle* $n(\partial R, z)$. *Määrätään* $n(\partial R, z)$.

Jos z on R:n ulkopuolella, niin Lemmasta 1.35.(ii) saadaan

$$\int_{\partial R} (\varsigma - z)^{-1} d\varsigma = 2\pi i n(\partial R, z) = 0.$$

Jos z on R:n sisällä, niin Esimerkistä 1.32 ja Lemmasta 1.35.(i) saadaan

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} (\varsigma - z)^{-1} d\varsigma &= 2\pi i n(\partial R, z) = 2\pi i n(\partial R, z_0) \\ &= \int_{\partial R} (\varsigma - z_0)^{-1} d\varsigma = 2\pi i,\end{aligned}$$

missä piste z_0 on suorakulmion R keskipiste.

Lause 1.37 (Cauchyn integraalikaava - lokaali versio)**.** *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen avoimessa kiekossa Δ, ja että polku γ on suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva Δ:ssa. Tällöin*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma,$$

kaikilla $z \in \Delta \backslash |\gamma|$.

Cauchyn integraalikaavan avulla voidaan analyyttiset funktiot esittää kompleksisten integraalien avulla. Tämän tuloksen avulla voidaan mm. todistaa, että analyyttisillä funktioilla on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat.

Lause 1.38. *Jos funktio f on analyyttinen avoimessa joukossa U, niin funktio f' on myös analyyttinen U:ssa. Erityisesti, f kuuluu luokkaan $C^1(U)$.*

Lauseesta 1.38 saadaan Lemman 1.28 käänteinen tulos, joka on nimetty Giacinto Moreran (1856-1909) mukaan.

Lause 1.39 (Moreran lause)**.** *Olkoon f jatkuva funktio avoimessa joukossa U. Oletetaan, että $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ kaikille suljetuille suorakulmioille $R \subset U$, jonka sivut ovat koordinaatistoakselien suuntaisia. Tällöin f on analyyttinen U:ssa.*

Lause 1.40. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva avoimessa joukossa U ja analyyttinen joukossa $U \backslash \{z_0\}$, jollakin $z_0 \in U$. Tällöin f on analyyttinen U:ssa.*

Lokaali Cauchyn integraalikaava antaa myös analyyttisten funktioiden derivaatoille uuden esitystavan, joka esitellään seuraavassa lauseessa. Kyseisen lauseen avulla voidaan arvioida analyyttisten funktioiden derivaattoja Lauseen 1.42 mukaisesti.

Lause 1.41. *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen avoimessa kiekossa Δ, $k \in \mathbb{N}$, ja että polku γ on suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva Δ:ssa. Tällöin*

$$n(\gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{k+1}} d\varsigma$$

kaikilla $z \in \Delta \backslash |\gamma|$.

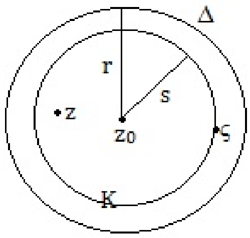
Lause 1.42 (Cauchyn estimaatti)**.** *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen avoimessa kiekossa $\Delta = \Delta(z_0, r)$, ja että $|f(z)| \leq m$ pätee Δ:ssa, missä $m > 0$ on vakio. Tällöin*

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!mr}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ ja kaikilla $z \in \Delta$. Erityisesti, $\left|f^{(k)}(z_0)\right| \leq k!mr^{-k}$.

Todistus. Kiinnitetään piste $z \in \Delta$. Valitaan $s > 0$ siten, että $|z - z_0| < s < r$. Jos ς on ympyrällä $K(z_0, s)$, niin

$$\begin{aligned} |\varsigma - z| &= |\varsigma - z_0 + z_0 - z| \geq ||\varsigma - z_0| - |z - z_0|| \\ &= |\varsigma - z_0| - |z - z_0| = s - |z - z_0|. \end{aligned}$$



Lauseesta 1.41 saadaan

$$\begin{aligned} \left|f^{(k)}(z)\right| &= \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{k+1}} d\varsigma\right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi}\int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{|f(\varsigma)|}{|\varsigma - z)|^{k+1}} d\varsigma \\ &\leq \frac{k!}{2\pi}\int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{m}{(s - |z - z_0|)^{k+1}} d\varsigma \\ &= \frac{k!}{2\pi}\frac{m}{(s - |z - z_0|)^{k+1}} 2\pi s \overset{s \to r}{\to} \frac{k!mr}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}. \end{aligned}$$

□

Lause 1.43 (Maksimiperiaate)**.** *Olkoon f analyyttinen funktio alueessa D. Jos on olemassa piste $z_0 \in D$ siten, että $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in D$, niin f on vakio D:ssä.*

Korollaari 1.44. *Olkoon D rajoitettu alue ja olkoon $f : \bar{D} \to \mathbb{C}$ jatkuva ja analyyttinen funktio D:ssä. Tällöin on olemassa piste $z_0 \in \partial D$, jossa $|f(z)|$ saavuttaa maksiminsa, eli $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in D$.*

Maksimiperiaate on hyvä väline, kun halutaan saavuttaa rajoja analyytisille funktioille. Tämän avulla saadaan muitakin arvioita, joista yksi esitellään seuraavaksi. Se on saanut nimensä Schwarzin mukaan, mutta nykyinen lauseen muoto on Constantin Carathéodoryn (1873-1950) ansiota.

Lause 1.45 (Schwarzin lemma)**.** *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen kiekossa $\Delta = \Delta(0, 1)$, ja että $f(0) = 0$ ja $|f(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in \Delta$. Tällöin $|f'(0)| \leq 1$ ja $|f(z)| \leq |z|$ kaikilla $z \in \Delta$.*
Lisäksi, jos f ei ole muotoa $f(z) = cz$ Δ:ssa, missä vakio $c \in \mathbb{C}$ ja $|c| = 1$, niin $|f'(0)| < 1$ ja $|f(z)| < |z|$, kun $0 < |z| < 1$.

Todistus. Määritellään funktio $g : \Delta \to \mathbb{C}$ siten, että

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} f(z) & \text{kun } z \in \Delta \backslash \{0\} \\ f'(0) & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

Funktio g on jatkuva kiekossa Δ ja analyyttinen kiekossa $\Delta^*(0,1)$. Tällöin Lauseen 1.40 nojalla g on analyyttinen Δ:ssa.
Kiinnitetään piste $z \in \Delta$ ja olkoon r siten, että $|z| < r < 1$. Korollaarin 1.44 mukaan on olemassa piste kiekon $\Delta(0,r)$ reunalla, missä $|g(z)|$ saavuttaa maksiminsa. Oletuksen mukaan tässä joukossa $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ on $|f(z)| \leq 1$, joten saadaan

$$|g(z)| \leq \max_{|\varsigma|=r} |g(\varsigma)| = \max_{|\varsigma|=r} \frac{|f(\varsigma)|}{|\varsigma|} \leq \frac{1}{r}.$$

Kun $r \to 1$, niin $|g(z)| \leq 1$. Tällöin saadaan

$$\left|f'(0)\right| = |g(0)| \leq 1$$

ja

$$|f(z)| = |g(z)|\,|z| \leq |z|$$

kaikilla $z \in \Delta$.
Jos $|f(z)| = |z|$, jollekin $z \neq 0$, tai $|f'(0)| = 1$, niin $|g(z)| = 1$ tai $|g(0)| = 1$. Koska yllä osoitettiin, että $|g(z)| \leq 1$, niin $|g|$ saavuttaa maksimiarvonsa $\Delta(0,1)$:ssa. Tällöin Maksimiperiaatteen 1.43 mukaan g on vakio Δ:ssa, eli $g(z) \equiv c$, missä $|c| = 1$. Silloin $f(z) = zg(z) = cz$ kaikilla $z \in \Delta$. $\square$

Geometrisesti Schwarzin lemma tarkoittaa, että kun oletetaan funktion $f : \Delta(0,1) \to \Delta(0,1)$ olevan analyyttinen ja joka pitää origon kiinteänä, niin f on joko rotaatio, eli kierto, tai se muuttaa jokaista pistettä $z \in \Delta(0,1)\backslash\{0\}$ lähemmäksi origoa, kuin se oli alkuperäisesti.

Tämän kappaleen viimeinen lause käsittelee logaritmin haaraa. Lause on hyödyllinen myöhäisemmässä vaiheessa.

Lause 1.46. *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen alueessa D ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Tällöin on olemassa* $\log f(z)$*:n haara D:ssä, jos ja vain jos*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

jokaiselle suljetulle ja paloittain jatkuvasti differentioituvalle polulle γ alueessa D.
Jos funktio g on $\log f(z)$*:n haara D:ssä, niin kokoelma kaikista tällaisista haaroista muodostuu funktioista $g + 2\pi i k$, missä $k \in \mathbb{Z}$.*

Todistus. Osoitetaan ensin ehdon välttämättömyys. Olkoon funktio g $\log f$:n haara alueessa D, eli $g(z) = \log f(z)$. Tällöin $f(z) = \exp g(z)$ D:ssä. Derivoidaan tämä, jolloin saadaan

$$f'(z) = g'(x) \exp g(z) = g'(z) f(z).$$

Koska f:llä ei ole nollakohtaa D:ssä, niin voidaan jakaa yhtälö sillä, ja saadaan

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Toisin sanoen, g on primitiivi funktiolle $\frac{f'}{f}$ D:ssä, koska $g(z) = \log f(z)$ on analyyttinen D:ssä.
Nyt $\frac{f'}{f}$ on jatkuva D:ssä, joten myös sen primitiivi g on siellä. Lisäksi polku γ on suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva D:ssä. Tällöin Lauseen 1.27 mukaan

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

Osoitetaan sitten ehdon riittävyys. Oletetaan, että

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

annetulla polulla γ alueessa D. Tällöin Lauseen 1.30 nojalla $\frac{f'}{f}$:lle löytyy primitiivi D:ssä. Valitaan yksi ja olkoon se F.
Kiinnitetään piste $z_0 \in D$ ja määritellään funktio $g : D \to \mathbb{C}$ siten, että $g(z) = F(z) - F(z_0) + Log f(z_0)$. Tällöin $g'(z) = F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, eli g on myös $\frac{f'}{f}$:n primitiivi D:ssä.
Olkoon $G = f \exp(-g)$. Funktio G on analyyttinen D:ssä ja sen derivaatta on

$$\begin{aligned} G'(z) &= f'(z) \exp(-g(z)) - f(z) g'(z) \exp(-g(z)) \\ &= f'(z) \exp(-g(z)) - f(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \exp(-g(z)) = 0 \end{aligned}$$

kaikilla $z \in D$. Tästä saadaan, että G on vakio D:ssä ja

$$G(z_0) = f(z_0) \exp(-g(z_0)) = f(z_0) \exp(-Log f(z_0)) = \frac{f(z_0)}{f(z_0)} = 1,$$

eli $G(z) = 1$ tai samoin $f(z) = \exp g(z)$, kaikilla $z \in D$.Tällöin saadaan, että g on $\log f(z)$:n haara D:ssä.
Jos funktiot g ja h ovat molemmat $\log f(z)$:n haaroja D:ssä, niin tämän todistuksen alkuosan nojalla on $g' = h' = \frac{f'}{f}$ D:ssä. Tällöin funktion $l = h - g$ derivaatta on nolla D:ssä, joten l on vakio. Olkoon $l(z) = c$ alueessa D.
Lisäksi, kaikilla $z \in D$ saadaan

$$\exp c = \exp(h(z) - g(z)) = \frac{\exp h(z)}{\exp g(z)} = \frac{f(z)}{f(z)} = 1,$$

joten $c = 2\pi i k$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Silloin $h = g + 2\pi i k$. Koska jokainen $\log f(z)$:n haara on edellistä muotoa, niin lauseen viimeinen väite on tosi. $\square$

2. Cauchyn lause ja integraalikaava

Ennen kuin edetään yleiseen Cauchyn lauseeseen, niin määritellään sykli, joka on äärellisen monen suljetun polun yhdiste.

Määritelmä 2.1. *(i)* $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_p$ *on sykli, jos polut* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ *ovat suljettuja ja paloittain jatkuvasti differentioituvia.*
(ii) Jos σ *on sykli, niin* $|\sigma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \cdots \cup |\gamma_p|$ *on kompakti joukko.*
(iii) Jos σ *on sykli joukossa* A *ja funktio* $f : A \to \mathbb{C}$ *on jatkuva, niin*

$$\int_\sigma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_p} f(z)dz.$$

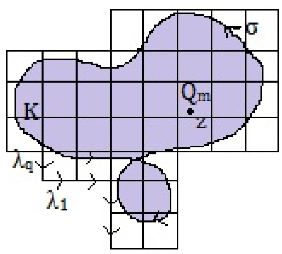
(iv) Olkoon σ *sykli ja* $z \in \mathbb{C} \backslash |\sigma|$*. Tällöin voidaan määritellä kierrosluku*

$$n(\sigma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{1}{\varsigma - z} d\varsigma = n(\gamma_1, z) + n(\gamma_2, z) + \cdots + n(\gamma_p, z).$$

Määritelmä 2.2. *Olkoon* U *avoin joukko. Sykli* σ *on nollahomologinen* U*:ssa, jos* $n(\sigma, z) = 0$ *kaikilla* $z \in \mathbb{C} \backslash U$*.*
Syklit $\sigma_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ *ja* $\sigma_1 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ *ovat homologisia* U*:ssa, jos sykli* $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p, -\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_q)$ *on nollahomologinen* U*:ssa, tai jos* $n(\sigma_0, z) = n(\sigma_1, z)$ *kaikilla* $z \in \mathbb{C} \backslash U$*.*

Lause 2.3 (Cauchyn lause)**.** *Olkoon* σ *sykli avoimessa joukossa* U*. Tällöin* $\int_\sigma f(z)dz = 0$ *kaikille analyyttisille funktioille* $f : U \to \mathbb{C}$*, jos ja vain jos* σ *on nollahomologinen* U*:ssa.*

Todistus. Todistetaan ensin ehdon riittävyys. Olkoon sykli σ nollahomologinen joukossa U. Lemman 1.35 mukaan kierrosluku $n(\sigma, z)$ on vakio jokaisessa joukon $\mathbb{C} \backslash |\sigma|$ komponentissa. Tällöin joukko $V := \{z \in \mathbb{C} \backslash |\sigma| : n(\sigma, z) = 0\}$ on yhdiste $\mathbb{C} \backslash |\sigma|$:n komponenteista. Koska $|\sigma|$ on kompakti, niin V on avoin. Joukon $\mathbb{C} \backslash |\sigma|$ rajoittamaton komponentti on V:ssä, ja koska $|\sigma|$ on nollahomologinen U:ssa, niin $\mathbb{C} \backslash U \subset V$. Tällöin $K = \mathbb{C} \backslash V$ on kompakti, joka sijaitsee U:ssa ja $|\sigma| \subset K$.
Olkoon $\delta > 0$ niin pieni, että kiekko $\Delta(z, \delta) \subset U$ jokaiselle pisteelle $z \in K$ (Lemma 1.12). Jaetaan kompleksitaso pistevieraisiin koordinaatiston suuntaisiin neliöihin, joiden reunat ovat suorilla $x = \frac{1}{2} n\delta$ ja $y = \frac{1}{2} n\delta$, missä $n \in \mathbb{Z}$, eli neliöiden sivun pituus on $\frac{1}{2}\delta$.



Rajoitettu K voi leikata vain äärellisen monen neliön kanssa. Olkoot ne neliöt $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$. Tällöin, jos z_j, $1 \leq j \leq r$, on neliön Q_j keskellä, niin U sisältää avoimen kiekon $\Delta_j(z_j, \frac{1}{2}\delta)$. (Muuten $\Delta(z, \delta)$, jollakin pisteellä $z \in Q_j \cap K$, leikkaisi joukkoa $\mathbb{C} \backslash U$, joka on ristiriidassa valinnan δ kanssa.) Lisäksi, $Q_j \subset \Delta_j$. Merkitään $Q_j^o = intQ_j$.

Oletetaan, että funktio f on analyyttinen U:ssa. Osoitetaan, että $\int_\sigma f(z)dz = 0$. Kiinnitetään ruudukosta Q_m ja piste $z \in Q_m^o$. Sovelletaan Cauchyn integraalikaavan lokaalia versiota 1.37 ja Esimerkkiä 1.36, missä saatiin, että $n(\partial Q_m, z) = 1$, eli saadaan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_m} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = n(\partial Q_m, z) f(z) = f(z).$$

Toisaalta, kun $j \neq m$, niin Lemmasta 1.28 saadaan funktiolle $g(\varsigma) = \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_j} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = 0.$$

Summataan yllä olevat yhtälöt, niin saadaan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{r}\int_{\partial Q_j} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma. \tag{1}$$

Tämä yhtälö pätee kaikilla $z \in Q_m^o$, kun $m = 1, 2, \ldots, r$, eli kaikilla $z \in \bigcup_{j=1}^r Q_j^o$.

Olkoon nyt λ yksi neljästä neliön ∂Q_j suunnatuista sivuista siten, että $|\lambda|$ on Q_j:n sisäpuolella. Jos $|\lambda| \cap K \neq \emptyset$, niin $|\lambda|$ jakaa sivun myös jonkun muun neliön kanssa. Tällöin yhtälön (1) oikean puoleisessa integraalissa on polut λ ja $\lambda^{\leftarrow}$, jotka kumoavat toisensa integroitaessa. Silloin kaikilla $z \in \bigcup_{j=1}^q Q_j^o$ yhtälö (1) saa muodon

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma, \tag{2}$$

missä $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ ovat ne reunan viivat, jotka eivät leikkaa K:ta.

Lemmasta 1.33 saadaan, että integraali $\int_{\lambda_k} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$ on analyyttinen ja jatkuva joukossa $\mathbb{C}\backslash|\lambda_k|$. Tällöin yhtälön (2) oikea puoli määrittelee funktion, joka on jatkuva joukossa $\mathbb{C}\backslash\bigcup_{k=1}^q |\lambda_k|$ ja $K \subset \mathbb{C}\backslash\bigcup_{k=1}^q |\lambda_k|$.

Käytetään edellistä ja näytetään, että yhtälö (2) pätee kaikilla $z \in K$. Kiinnitetään piste z. Jos $z \in \bigcup_{j=1}^r Q_j^o$, niin väite pätee. Jos näin ei ole, niin z on kahden tai useamman neliön Q_j rajalla. Valitaan yksi tällainen neliö, olkoon se Q, ja valitaan jono (z_n) neliön Q sisuksesta siten, että $z_n \to z$, kun $n \to \infty$. Koska yhtälön (2) molemmat puolet ovat jatkuvia z:ssa, niin

$$\begin{aligned} f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z_n} d\varsigma \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma. \end{aligned}$$

Erityisesti, yhtälö (2) pätee kaikilla $z \in |\sigma|$.

Todistuksen loppuun saamiseksi oletetaan, että $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$. Käytetään yhtälöä (2) ja tietoa, että $\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}$ on jatkuva joukossa $|\gamma_l| \times |\lambda_k|$, kun

$1 \le l \le p$ ja $1 \le k \le q$, niin

$$\begin{aligned}\int_\sigma f(z)dz &= \int_\sigma (\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\int_{\gamma_l}(\int_{\lambda_k}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{p}\int_{\lambda_k}(\int_{\gamma_l}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}dz)d\varsigma \\ &= \sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} f(\varsigma)(\sum_{l=1}^{p}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_l}\frac{1}{\varsigma - z}dz)d\varsigma \\ &= -\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} f(\varsigma)(\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{1}{z-\varsigma}dz)d\varsigma \\ &= -\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} f(\varsigma)n(\sigma,\varsigma)d\varsigma = 0,\end{aligned}$$

koska $n(\sigma, \varsigma) = 0$, kun $\varsigma \in |\lambda_k|$. Tämä tulee siitä, että $|\lambda_k| \cap K = 0$, eli $|\lambda_k| \subset V$.
Todistetaan sitten ehdon välttämättömyys. Jos $z \in \mathbb{C}\backslash U$, niin funktio $f : U \to \mathbb{C}$, $f(\varsigma) = \frac{1}{\varsigma - z}$, on analyyttinen. Tällöin oletuksesta saadaan

$$0 = \int_\sigma f(\varsigma)d\varsigma = \int_\sigma \frac{1}{\varsigma - z}d\varsigma = 2\pi i n(\sigma, \varsigma).$$

Eli $n(\sigma, \varsigma) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}\backslash U$, jolloin σ on nollahomologinen U:ssa. □

Seuraava tulos seuraa suoraan Cauchyn lauseesta.

Seuraus 2.4. *Olkoon U avoin joukko. Jos funktio $f : U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, ja jos syklit σ_0 ja σ_1 ovat homologisia U:ssa, niin*

$$\int_{\sigma_0} f(z)dz = \int_{\sigma_1} f(z)dz.$$

Lause 2.5 (Cauchyn integraalikaava)**.** *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen avoimessa joukossa U, ja että sykli σ on nollahomologinen U:ssa. Tällöin*

$$n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$$

kaikilla $z \in U\backslash|\sigma|$.

Todistus. Kiinnitetään piste $z \in U\backslash|\sigma|$, ja määritellään funktio $g : U \to \mathbb{C}$ siten, että

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(\varsigma)-f(z)}{\varsigma - z} & \text{jos } \varsigma \neq z \\ f'(z) & \text{jos } \varsigma = z. \end{cases}$$

Tällöin g on jatkuva joukossa U ja analyyttinen joukossa $U\backslash\{z\}$. Lauseen 1.40 mukaan g on analyyttinen U:ssa. Cauchyn lauseesta 2.3 saadaan

$$\begin{aligned}0 &= \int_\sigma g(\varsigma)d\varsigma = \int_\sigma \frac{f(\varsigma) - f(z)}{\varsigma - z}d\varsigma = \int_\sigma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma - \int_\sigma \frac{f(z)}{\varsigma - z}d\varsigma \\ &= \int_\sigma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma - 2\pi i n(\sigma, z)f(z).\end{aligned}$$

□

Määritelmä 2.6. *Alue D on yhdesti yhtenäinen, jos kaikki syklit D:ssä ovat nollahomologisia.*

Tämän kappaleen viimeinen lause saadaan Cauchyn lauseesta ja Lauseesta 1.46, joka on hyödyllinen myöhemmin.

Lause 2.7. *Olkoon D alue. Oletetaan, että funktio $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Tällöin D on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos on olemassa* $\log f(z)$*:n haara D:ssä.*

Todistus. Oletetaan ensin, että alue D on yhdesti yhtenäinen, ja että funktio f on analyyttinen ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Tällöin Cauchyn lauseesta 2.3 saadaan, että $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ kaikilla suljetuilla ja paloittain jatkuvasti differentioituvilla poluilla γ D:ssä. Tällöin Lause 1.46 osoittaa, että on olemassa $\log f(z)$:n haara D:ssä.
Osoitetaan sitten todistuksen toinen puoli. Olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus D$ mielivaltainen piste ja olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ funktio siten, että $f(\varsigma) = \varsigma - z$. Koska f on analyyttinen ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$, niin oletuksen mukaan on olemassa $\log f(z)$:n haara D:ssä.
Valitaan yksi, ja olkoon se funktio g, eli $g(\varsigma) = \log f(\varsigma) = \log(\varsigma - z)$. Tällöin $g'(\varsigma) = \frac{1}{\varsigma - z}$ D:ssä, joten Lauseesta 1.46 saadaan

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g'(\varsigma) d\varsigma = 0,$$

kun polku γ on suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva D:ssä. Koska tämä on totta kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus D$, niin γ on nollahomologinen D:ssä, eli D on yhdesti yhtenäinen. □

3. Analyyttisten funktioiden jonot ja sarjat

Analyyttisten funktioiden ominaisuuksia saadaan esille erilaisilla tavoilla. Edellisessä kappaleessa tähän käytettiin Cauchyn lausetta ja integraalikaavaa. Tässä kappaleessa analyyttiset funktiot esitetään äärettömien summien avulla ja tutustutaan minkälaisia ominaisuuksia saadaan näiden avulla aikaiseksi.

Kappaleen alussa tutkitaan funktiojonojen suppenemista ja sen jälkeen miten funktiosarjat käyttäytyvät. Tärkeäksi asiaksi muodostuvat myös potenssisarjat, joista käsitellään Taylorin ja Laurentin sarjat. Kappaleen lopussa esitellään vielä funktioiden perhe ja mitä ominaisuuksia niistä saadaan.

Määritelmä 3.1. *Olkoon A joukko ja olkoon $f_n : A \to \mathbb{C}$ funktioita. Jono (f_n) suppenee pisteittäin A:ssa, jos $f_n(z) \to f(z)$ kaikilla $z \in A$, merkitään $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ tai $f_n \to f$ joukossa A.*

Määritelmä 3.2. *Funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa A, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N = N(\epsilon)$ siten, että $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ kaikilla $z \in A$, kun $n \geq N$.*

Määritelmä 3.3. *Funktiojono (f_n) on tasainen Cauchy-jono joukossa A, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N = N(\epsilon)$ siten, että $|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$ kaikilla $z \in A$, kun $m > n \geq N$.*

Lause 3.4 (Cauchyn ehto tasaiselle suppenemiselle)**.** *Oletetaan, että funktiojonon (f_n) jokainen funktio on määritelty joukossa A. Jono (f_n) suppenee tasaisesti A:ssa, jos ja vain jos se on tasainen Cauchy-jono.*

Todistus. Todistetaan ensin ehdon välttämättömyys. Koska jono (f_n) suppenee tasaisesti joukossa A, niin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N = N(\epsilon)$ siten, että $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ kaikilla $z \in A$, kun $n \geq N$. Samoin on $|f_m(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$, kun $m > n \geq N$. Tällöin

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m(z) - f(z)| + |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

kaikilla $z \in A$ ja $m > n \geq N$. Eli (f_n) on tasainen Cauchy-jono A:ssa.
Todistetaan sitten ehdon riittävyys. Oletetaan, että jono (f_n) on tasainen Cauchy-jono joukossa A. Tällöin pistejono $(f_n(z))$ on Cauchy-jono kaikilla $z \in A$, joten Lauseen 1.11 nojalla (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota $f : A \to \mathbb{C}$, eli $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$.
Osoitetaan, että suppeneminen on tasaista. Olkoon $\epsilon > 0$ annettu. Koska (f_n) on tasainen Cauchy-jono, niin voidaan valita N siten, että

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\epsilon}{2}$$

kaikilla $z \in A$, kun $m > n \geq N$. Kiinnitetään $n \geq N$. Tällöin saadaan

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

kaikilla $z \in A$, kun $m \to \infty$. Kun $n \geq N$ on mielivaltainen, niin $f_n \to f$ tasaisesti A:ssa. □

Seuraavaksi määritellään funktiojonon suppeneminen tasaisesti kompakteissa osajoukoissa. Tätä määritelmää tullaan jatkossa käyttämään runsaasti.

Määritelmä 3.5. *Olkoon U avoin joukko. Joukossa U määritelty funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa kohti funktiota f, jos (f_n) suppenee pisteittäin kohti f:ää joukossa U, ja jos suppeneminen on tasaista kaikissa U:n kompakteissa osajoukoissa.*

Kun tarkastellaan funktiojonon tasaista suppenemista joukon U kompakteissa osajoukoissa, niin riittää, että funktiojono suppenee tasaisesti U:n suljetuissa kiekoissa, kuten seuraava lemma osoittaa.

Lemma 3.6. *Olkoon (f_n) funktiojono, jonka funktiot ovat määritelty avoimessa joukossa U. Jono (f_n) suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa, jos ja vain jos se suppenee tasaisesti jokaisessa U:n suljetussa kiekossa.*

Todistus. Ehdon välttämättömyys on Määritelmän 3.5 nojalla selvää.
Oletetaan sitten, että jono (f_n) suppenee tasaisesti jokaisessa joukon U suljetussa kiekossa. Tällöin (f_n) suppenee myös pisteittäin U:ssa.
Olkoon (f_n):n rajafunktio f ja olkoon $K \subset U$ mielivaltainen, epätyhjä ja kompakti joukko. Osoitetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti K:ssa. Kiinnitetään $r > 0$. Tällöin Lemman 1.12 mukaan kaikille $z \in K$ on suljettu kiekko $\bar{\Delta}(z,r) \subset U$. Valitaan piste $z_1 \in K$. Tällöin, joko $\Delta_1 = \bar{\Delta}(z_1,r) \subset K$, tai voidaan valita piste $z_2 \in K \setminus \Delta_1$. Merkitään $\Delta_2 = \bar{\Delta}(z_2,r)$. Nyt, joko $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subset K$, tai voidaan valita piste $z_3 \in K \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$.
Jatketaan näin äärellisen monta kertaa, kunnes saadaan joukko suljettuja kiekkoja $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ siten, että niiden yhdiste peittää K:n. Oletuksen mukaan $f_n \to f$ tasaisesti jokaisessa kiekossa $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$, joten suppeneminen on tasaista myös joukossa $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_p$, eli K:ssa. □

Lause 3.7. *Olkoon U avoin joukko. Oletetaan, että funktiot $f_n : U \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia, ja että jono (f_n) suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa kohti funktiota f. Tällöin f on jatkuva U:ssa.*
Lisäksi, $\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$ kaikille paloittain jatkuvasti differentioituville poluille γ joukossa U.

Todistus. Koska $f_n \to f$ tasaisesti joukon U kompakteissa osajoukoissa, niin Lemman 3.6 mukaan $f_n \to f$ tasaisesti jokaisessa U:n suljetussa kiekossa. Kiinnitetään yksi sellainen kiekko $\bar{\Delta}$ ja piste $z_0 \in \bar{\Delta}$.
Osoitetaan, että funktio $f : \bar{\Delta} \to \mathbb{C}$ on jatkuva z_0:ssa. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $f_n \to f$ tasaisesti $\bar{\Delta}$:ssa, niin kiinnitetään n siten, että

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}$$

kaikilla $z \in \bar{\Delta}$. Koska oletuksen mukaan f_n:t ovat jatkuvia U:ssa, niin voidaan valita $\delta > 0$ siten, että

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

kaikilla $z \in \bar{\Delta}$, kun $|z - z_0| < \delta$. Silloin

$$|f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| < \epsilon$$

kaikilla $z \in \bar{\Delta}$, kun $|z - z_0| < \delta$. Tällöin f on jatkuva pisteessä $z_0 \in \bar{\Delta}$, eli se on jatkuva U:ssa.

Olkoon nyt polku γ paloittain jatkuvasti differentioituva U:ssa ja olkoon $\epsilon > 0$. Koska $f_n \to f$ tasaisesti, niin voidaan valita N siten, että

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{1 + l(\gamma)}$$

kaikilla $z \in U$, kun $n \geq N$. Tällöin

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz \right| &= \left| \int_\gamma f_n(z) - f(z)dz \right| \\ &\leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|dz \\ &\leq \int_\gamma \frac{\epsilon}{1 + l(\gamma)} dz \\ &= \frac{\epsilon l(\gamma)}{1 + l(\gamma)} < \epsilon, \end{aligned}$$

kun $n \geq N$. Silloin

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

□

Siirrytään tarkastelemaan äärettömiä funktiosarjoja. Esitellään seuraavaksi Cauchyn ehdot suppenevalle sarjalle ja tasaisesti suppenevalle funktiosarjalle. Tämän jälkeisessä esimerkissä tutkitaan geometrisen sarjan käyttäytymistä, jota tullaan käyttämään myöhemmin.

Huomautus 3.8. *Muistetaan Cauchyn ehdot suppenemiselle.*
(i) Cauchyn suppenemisehto sarjoille: Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *suppenee, jos ja vain jos kaikilla* $\epsilon > 0$ *on olemassa* $N = N(\epsilon)$ *siten, että* $|\sum_{k=n}^{m} z_k| < \epsilon$, *kun* $m \geq n \geq N$.
(ii) Cauchyn tasainen suppenemisehto funktiosarjoille: Funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee tasaisesti joukossa* A, *jos ja vain jos kaikilla* $\epsilon > 0$ *on olemassa* $N = N(\epsilon)$ *siten, että* $|\sum_{k=n}^{m} f_k| < \epsilon$ *kaikilla* $z \in A$, *kun* $m \geq n \geq N$.

Esimerkki 3.9. *Tarkastellaan geometrisen sarjan* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *suppenemista. Olkoon* $s_n = 1 + z + \cdots + z^n$ *sen osasumma. Jos* $z = 1$, *niin* $s_n = 1 + n$. *Tällöin* (s_n) *on rajoittamaton, eli sillä ei ole raja-arvoa. Geometrinen sarja siis hajaantuu, kun* $z = 1$. *Jos* $z \neq 1$, *niin geometrisen summan kaava antaa, että*

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^{n+1}}{1 - z}.$$

Jos $|z| < 1$, *niin* $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$. *Tällöin Lauseen 1.3 nojalla* $\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{1-z} = 0$, *kun* $|z| < 1$, *ja* $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-z}$. *Jos* $|z| > 1$, *niin sarja hajaantuu. Tällöin geometrinen sarja* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ *suppenee, kun* $|z| < 1$ *ja hajaantuu muuten.*

Lause 3.10 (Weierstrassin M-testi)**.** *Oletetaan, että jokainen funktiosarjan* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *funktio on määritelty joukossa* A. *Jos on olemassa reaalilukujono* (M_n) *siten, että* $|f_n(z)| \leq M_n$ *kaikilla* $z \in A$, *ja jos sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *suppenee, niin* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee itseisesti ja tasaisesti* A:*ssa.*

Todistus. Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ itseinen suppeneminen seuraa suoraan reaalisarjojen vertailutestistä.
Koska sarja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, niin Huomautuksen 3.8.(i) mukaan kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N = N(\epsilon)$ siten, että $\sum_{k=n}^{m} M_k < \epsilon$, kun $m \geq n \geq N$. Tällöin kaikilla $z \in A$

$$|\sum_{k=n}^{m} f_k(z)| \leq \sum_{k=n}^{m} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n}^{m} M_k < \epsilon,$$

kun $m \geq n \geq N$. Silloin Huomautuksen 3.8.(ii) nojalla $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti A:ssa. □

Lause 3.11. *Olkoon U avoin joukko ja olkoon $f_n : U \to \mathbb{C}$ jatkuvia funktioita. Oletetaan, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa. Olkoon f sarjan summa. Tällöin f on jatkuva U:ssa.*
Lisäksi,

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$$

kaikille paloittain jatkuvasti differentioituville poluille γ joukossa U.

Todistus. Jos $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, niin s_n on jatkuva joukossa U. Koska oletuksen mukaan sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa, niin silloin sen osasumma $s_n \to f$ tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa. Tällöin Lauseen 3.7 mukaan funktio f on jatkuva U:ssa ja

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \lim_{N\to\infty} \int_\gamma s_N(z)dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_\gamma f_n(z)dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz\end{aligned}$$

kaikilla paloittain jatkuvasti differentioituville poluille γ joukossa U. □

Lause 3.12. *Olkoon U avoin joukko ja olkoon $f_n : U \to \mathbb{C}$ analyyttisiä funktioita. Jos jono (f_n) suppenee U:n kompakteissa osajoukoissa kohti funktiota f, niin f on analyyttinen U:ssa. Lisäksi, $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Todistus. Lause 3.7 osoittaa, että funktio f on jatkuva joukossa U. Koska funktiot f_n ovat analyyttisiä U:ssa, niin Lauseesta 3.7 ja Lemmasta 1.28 saadaan

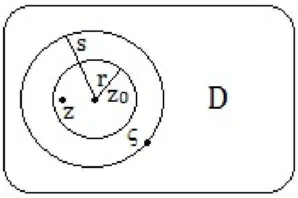
$$\int_{\partial R} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial R} f_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

jokaiselle suljetulle suorakulmiolle $R \subset U$. Tällöin Moreran lauseen 1.39 mukaan f on analyyttinen U:ssa.
Näytetään seuraavaksi, että $f_n' \to f'$ tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa. Lemman 3.6 mukaan riittää näyttää, että $f_n' \to f'$ tasaisesti jokaisessa U:n suljetussa kiekossa. Kiinnitetään sellainen kiekko $\Delta = \bar{\Delta}(z_0, r)$. Olkoon $\epsilon > 0$ ja piste $z \in \Delta$. Kiinnitetään $s > r$ siten, että $\bar{\Delta}(z_0, s) \subset U$. Lauseesta

1.41 saadaan arvio

$$\begin{aligned}
|f_n^{'}(z) - f^{'}(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{f_n(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} d\varsigma \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{f_n(\varsigma) - f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} d\varsigma \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{|f_n(\varsigma) - f(\varsigma)|}{|\varsigma - z|^2} d\varsigma \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{|f_n(\varsigma) - f(\varsigma)|}{(s - r)^2} d\varsigma \\
&\leq \frac{2\pi s}{2\pi (s - r)^2} \max\{|f_n(\varsigma) - f(\varsigma) : \varsigma \in K = K(z_0, s)\} \\
&= \frac{s}{(s - r)^2} \max\{|f_n(\varsigma) - f(\varsigma)| : \varsigma \in K\}.
\end{aligned}$$

(Huomautus, kun $z \in \Delta$ ja $\varsigma \in K$, niin $|\varsigma - z| \geq s - r$.)



Oletuksen mukaan $f_n \to f$ tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa, joten Lemman 3.6 nojalla $f_n \to f$ tasaisesti joukossa K. Tällöin voidaan valita N siten, että

$$|f_n(\varsigma) - f(\varsigma)| < \frac{(s - r)^2}{s} \epsilon$$

kaikilla $\varsigma \in K$, kun $n \geq N$. Erityisesti edellistä voidaan soveltaa mille tahansa pisteelle $\varsigma \in K$, missä suure $|f_n(\varsigma) - f(\varsigma)|$ on suurin mahdollinen. Tällöin saadaan yllä olevalle arviolle

$$|f_n^{'}(z) - f^{'}(z)| < \epsilon$$

kaikilla $z \in \Delta$, kun $n \geq N$. Silloin $f_n^{'} \to f^{'}$ tasaisesti U:n jokaisessa suljetussa kiekossa, eli $f_n^{'} \to f^{'}$ tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa.
Samalla tavalla saadaan, että $f_n^{''} = (f_n^{'})^{'} \to (f^{'})^{'} = f^{''}$ tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa, ja siten myös korkeammille derivaatoille. □

Lause 3.13. *Olkoon U avoin joukko ja olkoon $f_n : U \to \mathbb{C}$ analyyttisiä funktioita. Oletetaan, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa, missä funktio f on sarjan summa. Tällöin f on analyyttinen U:ssa. Lisäksi,*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

kaikilla $z \in U$, $k \in \mathbb{Z}_+$, ja derivaattasarja suppenee myös tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa.

Todistus. Summa $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ on analyyttinen joukossa U ja $s_n \to f$ tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa. Tällöin Lauseen 3.12 perusteella funktio f on analyyttinen U:ssa, ja lisäksi $s_n^{(k)} \to f^{(k)}$ tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa, $k \in \mathbb{Z}_+$. Silloin

$$f^{(k)} = \lim_{N\to\infty} s_N^{(k)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$$

joukossa U ja samalla tavalla kuin yllä derivaattasarjakin suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa. □

Seuraavaksi käsitellään potenssisarjoja. Taylorin sarjoja tutkivat yhdessä Brook Taylor (1685-1731) ja Colen Maclauren (1698-1746).

Määritelmä 3.14. *Potenssisarja pisteessä z_0 on muotoa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$, missä $a_0, a_1, \cdots \in \mathbb{C}$. Tätä kutsutaan Taylorin sarjaksi.*

Huomio: Taylorin sarjan suppenemissäde $\rho \in \bar{\mathbb{R}}$ on

$$\rho = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}.$$

Lause 3.15. *Oletetaan, että Taylorin sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenemissäde on ρ. Sarja hajaantuu kaikilla z, joille $|z-z_0| > \rho$. Jos $\rho > 0$, niin sarja suppenee itseisesti kiekossa $\Delta(z_0, \rho)$ ja tasaisesti $\Delta(z_0, \rho)$:n kompakteissa osajoukoissa, joten funktio $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ on analyyttinen $\Delta(z_0, \rho)$:ssa. Tällöin kertoimet a_n saadaan kaavasta*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että piste z toteuttaa ehdon $|z-z_0| = r > \rho$, eli $\frac{1}{r} < \frac{1}{\rho}$. Luvun ρ huomiosta seuraa, että äärettömän monelle n pätee

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{r},$$

eli $|a_n| > \frac{1}{r^n}$. Tällöin

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n||z-z_0|^n > \frac{1}{r^n} r^n = 1$$

kaikille tällaisille n. Silloin $a_n(z-z_0)^n$ ei suppene kohti nollaa, kun $n \to \infty$, siis sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hajaantuu.
Oletetaan sitten, että $\rho > 0$ ja merkitään $\Delta = \Delta(z_0, \rho)$. Osoittaaksemme, että $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenee itseisesti kiekossa Δ ja tasaisesti Δ:n kompakteissa osajoukoissa, niin riittää osoittaa, että sarja suppenee itseisesti ja tasaisesti suljetussa kiekossa $\Delta_r = \bar{\Delta}(z_0, r)$ kaikilla $r \in (0, \rho)$.
Kiinnitetään luvut r ja s siten, että $0 < r < s < \rho$. Koska $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{s}$, niin ρ:n huomiosta saadaan, että $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{s}$, kun s on tarpeeksi suuri. Oletetaan tämän pätevän kaikille $n > N$, $N \in \mathbb{N}$.
Olkoon $c = \max\{1, |a_0|, |a_1|s, \ldots, |a_N|s^N\}$. Tällöin $|a_n| \leq cs^{-n}$ kaikilla n ja siten saadaan

$$\begin{aligned} |a_n(z-z_0)^n| &= |a_n||z-z_0|^n \leq cs^{-n}r^n \\ &= c\left(\frac{r}{s}\right)^n = M_n \end{aligned}$$

kaikilla $z \in \Delta_r$. Koska $0 < \frac{r}{s} < 1$, niin $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ suppenee geometrisenä sarjana. Tällöin Weirstrassin M-testin 3.10 nojalla $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenee itseisesti ja tasaisesti Δ_r:ssä. Silloin Lauseesta 3.13 saadaan, että $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ on analyyttinen Δ:ssa ja

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(z-z_0) + \dots$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(z-z_0) + \dots$$

$$\dots$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-(k-1))a_n(z-z_0)^{n-k} \\ &= k!a_k + (k+1)!a_{k+1}(z-z_0) + \dots. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $z = z_0$ viimeiseen yhtälöön, niin

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k.$$

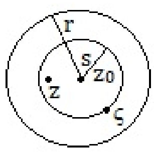
□

Edellinen lause ei kerro mitä tapahtuu Taylorin sarjalle, kun $|z-z_0| = \rho$. Tällöin sarjan suppeneminen ja hajaantuminen riippuu sen kertoimesta a_n, jolloin suppeneminen voi tapahtua kaikkialla, osittain tai ei missään.

Seuraava lause osoittaa, että avoimessa kiekossa olevat analyyttiset funktiot voidaan esittää yksikäsitteisesti Taylorin sarjana.

Lause 3.16. *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen avoimessa joukossa U, $z_0 \in U$, ja että avoin kiekko $\Delta = \Delta(z_0, r) \subset U$. Tällöin f:llä on potenssisarjaesitys Δ:ssa pisteessä z_0 ja f määrittelee potenssisarjan yksikäsitteisesti: Jos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ kiekossa Δ, niin sen kerroin on $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.*

Todistus. Määritellään jono $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, missä $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Osoitetaan, että potenssisarja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ on olemassa kaikilla $z \in \Delta = \Delta(z_0, r)$.



Kiinnitetään tällainen z ja luku s siten, että $|z-z_0| < s < r$. Tällöin kaikille $\varsigma \in K = K(z_0, s)$ pätee, että

$$\left| \frac{z-z_0}{\varsigma - z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{s} < \frac{s}{s} = 1.$$

Esimerkissä 3.9 saatiin geometrinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ suppenevaksi, kun $|z| < 1$. Tätä käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} &= \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z_0} \frac{\varsigma - z_0}{\varsigma - z} = \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\varsigma - z_0}} \\ &= \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\varsigma - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\varsigma)(z - z_0)^n}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Weierstrassin M-testin 3.10 nojalla yllä oleva sarja on tasaisesti suppeneva ympyrällä K. (Olkoon $M_n = ct^n \frac{1}{s}$, missä $t = \frac{|z-z_0|}{s} < 1$ ja $c = \max\{|f(\varsigma)| : \varsigma \in K\}$. Tällöin $|\frac{f(\varsigma)(z-z_0)^n}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}| \leq M_n$ kaikilla $z \in K$ ja sarja $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ suppenee, joten haluttu sarja saadaan suppenemaan tasaisesti K:lla.)
Käytetään Cauchyn integraalikaavaa 2.5, Lauseita 3.11 ja 1.41, niin saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0| = s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\varsigma)(z - z_0)^n}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{f(\varsigma)(z - z_0)^n}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(z - z_0)^n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0| = s} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten väitteen yksikäsitteisyys. Oletetaan, että Taylorin sarjalle on olemassa toinen potenssisarjaesitys $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ kiekossa $\Delta = \Delta(z_0, r)$. Olkoon ρ tämän sarjan suppenemissäde. Tällöin Lauseen 3.15 mukaan täytyy olla $\rho \geq r$, tai muuten sarja varmasti hajaantuu. Silloin Lauseen 3.15 nojalla g on analyyttinen $\Delta(z_0, \rho)$:ssa ja oletuksen mukaan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ on analyyttinen Δ:ssa. Tällöin Lauseen 3.15 viimeisestä väitteestä saadaan

$$b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n,$$

eli Taylorin sarja on yksikäsitteinen. □

Laurentin sarja on Taylorin sarjan laajennus, joka on nimetty Pierre Alphonse Laurentin (1813-1854) mukaan. Tämä sarja esitellään seuraavassa määritelmässä.

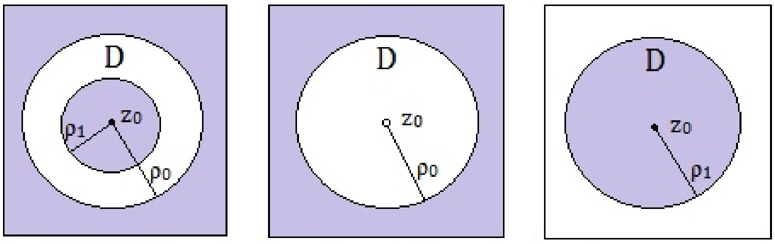
Määritelmä 3.17. *Potenssisarjaa, joka on muotoa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, missä $a_n \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{Z}$, kutsutaan Laurentin sarjaksi. Sen ulkoinen suppenemissäde on potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ suppenemissäde, eli*

$$\rho_0 = (\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$$

ja sen sisäinen suppenemissäde on potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^n$ suppenemissäteen käänteisluku, eli

$$\rho_1 = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

Kun $\rho_1 < \rho_0$, niin sarjan suppenemisrengas on $D = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_0\}$.



0<ρ1<ρ0<∞ 0=ρ1<ρ0<∞ 0<ρ1<ρ0=∞

Lause 3.18. *Oletetaan, että ρ_0 ja ρ_1 ovat Laurentin sarjan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ulkoinen ja sisäinen suppenemissäde.*
(i) Sarja hajaantuu kaikille $z \in \mathbb{C}$, joille $|z - z_0| > \rho_0$ tai $|z - z_0| < \rho_1$.
(ii) Jos $\rho_0 > 0$, niin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ suppenee itseisesti kiekossa $D_0 = \Delta(z_0, \rho_0)$ ja tasaisesti D_0:n kompakteissa osajoukoissa, joten funktio $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ on analyyttinen D_0:ssa.
(iii) Jos $\rho_1 < \infty$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ suppenee itseisesti avoimessa joukossa $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \rho_1\}$ ja tasaisesti D_1:n kompakteissa osajoukoissa, jolloin funktio $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ on analyyttinen D_1:ssä.
(iv) Jos $\rho_1 < \rho_0$, niin Laurentin sarja suppenee itseisesti joukossa $D = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_0\}$ ja tasaisesti D:n kompakteissa osajoukoissa, joten funktio $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f_1(z) + f_0(z)$ on analyyttinen D:ssä. Tällöin kaikille $r \in (\rho_1, \rho_0)$ on

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Todistus. Koska Lauseen 3.15 nojalla ρ_0 on funktion $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ suppenemissäde, niin saadaan suoraan kohta (ii), ja f_0 hajaantuu, kun $|z - z_0| > \rho_0$.
Tarkastellaan sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\varsigma^n$, jonka suppenemissäde on $\frac{1}{\rho_1}$. Tämä sarja hajaantuu, kun $|\varsigma| > \frac{1}{\rho_1}$. Se suppenee itseisesti ja tasaisesti kompakteissa osajoukoissa, jos $\rho_1 < \infty$ ja $|\varsigma| < \frac{1}{\rho_1}$.
Olkoon $\varsigma = (z - z_0)^{-1}$, niin saadaan funktio $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$. Tällöin f_1 hajaantuu, kun $|z - z_0| < \rho_1$, ja suppenee itseisesti, kun $|z - z_0| > \rho_1$. Olkoon $g(z) = (z - z_0)^{-1}$. Se on jatkuva ja $g(D_1) \subset \Delta = \Delta(0, \frac{1}{\rho_1})$. Erityisesti g kuvaa minkä tahansa joukon D_1 kompaktin osajoukon kiekkoon Δ kompaktiksi.
Olkoon $K \subset D_1$ kompakti joukko ja olkoon $\epsilon > 0$. Nyt voidaan käyttää sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\varsigma^n$ tasaista suppenemista kompaktiin joukkoon $g(K)$ valitsemalla N siten, että $|\sum_{k=n}^{m} a_{-k}\varsigma^k| < \epsilon$ kaikilla $\varsigma \in g(K)$, kun $m \geq n \geq N$. Tästä seuraa suoraan, että $|\sum_{k=n}^{m} a_{-k}(z - z_0)^{-k}| < \epsilon$ kaikilla $z \in K$, kun $m \geq n \geq N$. Tällöin Cauchyn tasaisen suppenemisen ehto (Huomautus 3.8.(ii)) sanoo, että f_1 suppenee tasaisesti K:ssa, joten f_1 suppenee tasaisesti D_1:n kompakteissa osajoukoissa. Lauseen 3.13 nojalla f_1 on silloin analyyttinen D_1:ssä, eli kohta (iii) on todistettu.

Yllä olevista saadaan, että sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ hajaantuu, jos $|z-z_0| > \rho_0$ tai $|z-z_0| < \rho_1$, eli kohta (i) on osoitettu.
Olkoon sitten $\rho_1 < \rho_0$, eli $\rho_0 > 0$ ja $\rho_1 < \infty$. Tällöin edellisistä saadaan, että f_1 ja f_0 suppenevat itseisesti joukossa $D = D_0 \cap D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z-z_0| < \rho_0\}$ ja tasaisesti D:n kompakteissa osajoukoissa, joten Laurentin sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f_0(z) + f_1(z) = f(z)$ suppenee itseisesti D:ssä ja tasaisesti D:n kompakteissa osajoukoissa. Tällöin Laurentin sarja on myös analyyttinen D:ssä.
Olkoot $r \in (\rho_1, \rho_0)$, $k \in \mathbb{Z}$ ja

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1}$$

kaikilla $z \in D$. Koska myös $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1}$ suppenee tasaisesti D:n kompakteissa osajoukoissa, niin seuraavaan laskuun voidaan käyttää Lauseen 3.11 summan ja integraalin vaihtoa, joten saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1}dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^{n-k-1}dz = a_k,\end{aligned}$$

koska

$$\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^{n-k-1}dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{jos } n = k \\ 0 & \text{jos } n \neq k. \end{cases}$$

□

Seuraavaa lausetta käytetään eristettyjen erikoispisteiden määrittelemisen apuna seuraavassa kappaleessa.

Lause 3.19. *Olkoon f analyyttinen funktio renkaassa $D = \{z \in \mathbb{C} : a < |z-z_0| < b\}$, missä $0 \leq a < b \leq \infty$. Tällöin f voidaan esittää yksikäsitteisenä Laurentin sarjana D:ssä siten, että*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

kun $z \in D$, missä kerroin a_n, $n \in \mathbb{Z}$, on muotoa

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

kun $r \in (a, b)$.

Todistus. Jokaiselle kokonaisluvulle n voidaan määritellä luku a_n siten, että valitaan $r \in (a, b)$ ja asetetaan

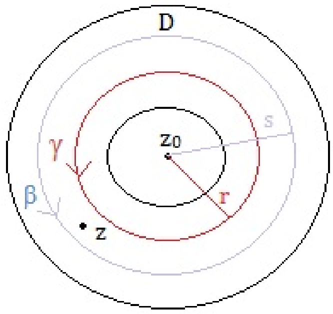
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Määritellään polut γ ja β siten, että

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$$

$$\beta(t) = z_0 + se^{it},$$

kun $t \in [0, 2\pi]$ ja $a < r < |z - z_0| < s < b$. Tällöin γ ja β ovat homologisia joukossa D, eli sykli $\sigma = (\beta, -\gamma)$ on nollahomologinen D:ssä.



Koska funktio $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ on analyyttinen D:ssä, niin Seuraus 2.4 antaa, että

(3) $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=s} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Tämän kertoimen a_n määritelmän nojalla väitetään, että $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ $(z-z_0)^n$ kaikilla $z \in D$. Kiinnitetään piste $z \in D$, ja luvut r ja s siten, että $a < r < |z - z_0| < s < b$. Olkoon γ ja β kuten yllä määriteltiin. Koska $\sigma = (\beta, -\gamma)$ on nollahomologinen ja $n(\sigma, z) = 1$ joukossa D, niin Cauchyn integraali lauseesta 2.5 saadaan

(4) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\beta \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma.$$

Jatketaan todistusta, kuten Lauseen 3.16 todistusta. Kaikilla $\varsigma \in K = K(z_0, s)$ pätee, että

$$\left|\frac{z-z_0}{\varsigma - z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{s} < 1,$$

ja silloin saadaan

$$\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\varsigma)(z-z_0)^n}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}.$$

Kuten Lauseen 3.16 todistuksessa, niin yllä oleva sarja suppenee tasaisesti ympyrällä K, ja käyttämällä Lauseita 2.5 ja 3.11 saadaan

(5)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma-z_0|=s} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(z-z_0)^n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma-z_0|=s}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}d\varsigma\right)\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Samalla tavalla saadaan, että kaikilla $\varsigma \in K^* = K(z_0, r)$ pätee

$$\left|\frac{\varsigma - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r}{|z-z_0|} < \frac{r}{r} = 1,$$

jolloin saadaan seuraava esitys

$$\begin{aligned}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} &= \frac{f(\varsigma)}{z - z_0}\frac{z - z_0}{\varsigma - z} = \frac{f(\varsigma)}{z - z_0}\frac{1}{\frac{\varsigma - z}{z - z_0}} \\ &= \frac{f(\varsigma)}{z - z_0}\frac{1}{\frac{\varsigma - z_0}{z - z_0} - 1} = -\frac{f(\varsigma)}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\varsigma - z_0}{z - z_0}} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\varsigma)(\varsigma - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(\varsigma)(\varsigma - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}.\end{aligned}$$

Kuten aikaisemmin, niin tämä sarja suppenee tasaisesti K^*:llä, joten saadaan (6)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma - z_0| = r}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma &= -\sum_{n=1}^{\infty}\left[(z - z_0)^{-n}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma - z_0| = r}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{-n+1}}d\varsigma\right)\right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z - z_0)^{-n}.\end{aligned}$$

Yhdistämällä yhtälöt (4), (5) ja (6) saadaan

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z - z_0)^n,$$

joka suppenee D:ssä, ja pätee kaikilla $z \in D$.
Osoitetaan sitten yksikäsitteisyys. Oletetaan, että $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ on toinen esitys Laurentin sarjalle D:ssä. Koska f suppenee D:ssä, niin sen suppenemissäteille pätee, että $\rho_1 \leq a$ ja $b \leq \rho_0$. Jos $r \in (a, b)$, niin Lauseesta 3.18 ja yhtälöstä (3) saadaan

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z - z_0| = r}\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz = a_n,$$

eli Laurentin sarja on yksikäsitteinen. □

Ennen kuin siirrytään seuraavaan kappaleeseen, niin tarkastellaan funktioperheiden $\mathfrak{F}$ käyttäytymistä. Näitä tullaan tarvitsemaan Riemannin kuvauslauseen todistuksessa. Tavoitteena on saada sellaiset ehdot aikaiseksi, että perheen $\mathfrak{F}$ jatkuvat funktiot suppenisivat tasaisesti kompakteissa osajoukoissa. Aloitetaan muutamalla määritelmällä.

Määritelmä 3.20. *Olkoon $\mathfrak{F}$ perhe jatkuvia funktioita joukossa U. Perhe $\mathfrak{F}$ on normaali, jos sen jokaisella jonolla (f_n) on osajono (f_{n_k}), joka suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa.*

Määritelmä 3.21. *Perhe $\mathfrak{F}$ on yhtäjatkuva pisteessä $z_0 \in U$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ kaikilla $f \in \mathfrak{F}$, kun $|z - z_0| < \delta$. Perhe $\mathfrak{F}$ on yhtäjatkuva U:ssa, jos se on yhtäjatkuva jokaisessa sen pisteessä.*

Lause 3.22. *Olkoon $\mathfrak{F}$ yhtäjatkuva perhe joukossa U ja olkoon (f_n) sen jono. Oletetaan, että (f_n) suppenee pisteittäin U:ssa. Tällöin (f_n) suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa.*

Todistus. Olkoon f jonon (f_n) rajafunktio joukossa U ja olkoon K mielivaltainen kompakti joukko U:ssa. Nyt riittää osoittaa, että $f_n \to f$ tasaisesti K:ssa.
Lauseen 3.4 perusteella (f_n):n täytyy olla tasainen Cauchy-jono K:ssa. Todistetaan tämä antiteesin kautta: Oletetaan, että (f_n) ei ole tasainen Cauchy-jono K:ssa. Kiinnitetään $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa N siten, että $|f_m(z) - f_n(z)| \geq \epsilon$ kaikilla $z \in K$, kun $m > n \geq N$. Erityisesti voidaan valitaan $N = k$, kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$, siten, että on olemassa luvut n_k ja m_k

$$|f_{m_k}(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \geq \epsilon \tag{7}$$

jossakin pisteessä $z_k \in K$, missä $m_k > n_k \geq k$.
Koska K on kompakti, niin jonolla (z_k) on ainakin yksi kosketuspiste K:ssa. Olkoon se piste z_0. Koska oletuksen mukaan perhe $\mathfrak{F}$ on yhtäjatkuva U:ssa, niin se on myös yhtäjatkuva pisteessä $z_0 \in K \subset U$. Tällöin voidaan valita $\delta > 0$ siten, että

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{8}$$

kaikilla z ja n, kun $|z - z_0| < \delta$. Koska $f_n \to f$, niin

$$|f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| \to |f(z_0) - f(z_0)| = 0,$$

kun $k \to \infty$. Tällöin voidaan kiinnittää k_0 siten, että

$$|f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \tag{9}$$

kun $k \geq k_0$. Koska z_0 on (z_k):n kosketuspiste, niin voidaan valita $k \geq k_0$, jolle $|z_k - z_0| < \delta$. Käyttämällä epäyhtälöitä (7), (8) ja (9) saadaan

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq |f_{m_k}(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \\
&\leq |f_{m_k}(z_k) - f_{m_k}(z_0)| + |f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| + |f_{n_k}(z_0) - f_{n_k}(z_k)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Tämä on ristiriita, joten (f_n) on tasainen Cauchy-jono K:ssa, eli $f_n \to f$ tasaisesti K:ssa. □

Määritelmä 3.23. *Olkoon U avoin joukko, $U \neq \emptyset$. Joukko $S \subset U$ on tiheä U:ssa, jos $S \cap \Delta(z, r) \neq \emptyset$ kaikilla $z \in U$ ja kaikilla $r > 0$.*

Lause 3.24. *Olkoon $\mathfrak{F}$ yhtäjatkuva perhe joukossa U ja olkoon (f_n) sen jono. Oletetaan, että joukko $S \subset U$ on tiheä. Jos pistejono $(f_n(\varsigma))$ suppenee kaikilla $\varsigma \in S$, niin (f_n) suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa.*

Todistus. Lauseen 3.22 nojalla riittää osoittaa, että jono (f_n) suppenee pisteittäin joukossa U, eli tarkastetaan, että pistejono $(f_n(z))$ on Cauchy-jono kaikilla $z \in U$. Kiinnitetään tällainen piste z ja olkoon $\epsilon > 0$ annettu.
Koska perhe $\mathfrak{F}$ on yhtäjatkuva pisteessä $z \in U$, voidaan valitaan $\delta > 0$ siten, että $|f_n(w) - f_n(z)| < \frac{\epsilon}{3}$ kaikilla n, kun $|w - z| < \delta$. Koska joukko $S \subset U$ on tiheä, niin voidaan valita piste $\varsigma \in S$, jolle $|\varsigma - z| < \delta$.
Oletuksen mukaan $(f_n(\varsigma))$ suppenee S:ssä, joten se on myös Cauchy-jono, eli on olemassa N siten, että $|f_m(\varsigma) - f_n(\varsigma)| < \frac{\epsilon}{3}$, kun $m > n \geq N$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
|f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_m(\varsigma)| + |f_m(\varsigma) - f_n(\varsigma)| + |f_n(\varsigma) - f_n(z)| \\
&< 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon,
\end{aligned}$$

kun $m > n \geq N$. Tällöin $(f_n(z))$ on Cauchy-jono. Koska näin pätee kaikilla $z \in U$, niin (f_n) suppenee pisteittäin U:ssa. □

Määritelmä 3.25. *Perhe $\mathfrak{F}$ on pisteittäin rajoitettu joukossa U, jos jokaisen pisteen $z \in U$ kuvien joukko $\{f(z) : f \in \mathfrak{F}\}$ on rajoitettu.*

Määritelmä 3.26. *Perhe $\mathfrak{F}$ on lokaalisti rajoitettu joukossa U, jos jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset U$ on olemassa vakio $m = m(K)$ siten, että $|f(z)| \leq m$ kaikilla $z \in K$ ja jokaiselle funktiolle $f \in \mathfrak{F}$.*

Huomautus 3.27. *(i) Osoittaaksemme, että perhe $\mathfrak{F}$ on lokaalisti rajoitettu joukossa U, riittää näyttää, että sen kaikki funktiot ovat tasaisesti rajoitettuja jokaisessa U:n suljetussa kiekossa. Tämä on mahdollista, koska kompakti joukko voidaan peittää äärellisellä määrällä suljettuja kiekkoja.*
(ii) Jos perhe $\mathfrak{F}$ on lokaalisti rajoitettu joukossa U, niin se on selvästi myös pisteittäin rajoitettu U:ssa.

Nyt saadaan muodostettua tavoitteena olleet ehdot normaaliperheelle $\mathfrak{F}$. Seuraava lause osoittaa Määritelmien 3.20 ja 3.21 yhteyden, ja se on nimetty Cesare Arzelán (1847-1912) ja Giulio Ascolin (1843-1896) mukaan. Tätä lausetta ja sen seurauksia käytetään monissa matematiikan alueissa.

Lause 3.28 (Arzelá-Ascolin lause)**.** *Olkoon U avoin joukko ja olkoon $\mathfrak{F}$ perhe U:ssa jatkuvia funktioita. Perhe $\mathfrak{F}$ on normaali U:ssa, jos ja vain jos se on yhtäjatkuva ja pisteittäin rajoitettu U:ssa.*

Todistus. Osoitetaan ensin ehdon riittävyys. Olkoon perhe $\mathfrak{F}$ yhtäjatkuva ja pisteittäin rajoitettu joukossa U, ja olkoon (f_n) sen jono. Näytetään, että (f_n):llä on olemassa osajono (f_{n_k}), joka suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa.
Oletetaan, että joukko $S_0 = \{z \in U\colon \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Q}\}$ on tiheä U:ssa, ja että jono (z_n) sisältää S_0:n alkiot.Tarkastellaan pistejonoa $(f_n(z_1))$. Koska $\mathfrak{F}$ on pisteittäin rajoitettu U:ssa, niin $(f_n(z_1))$ on rajoitettu. Tällöin Bolzano-Weierstrassin lauseen 1.10 nojalla $(f_n(z_1))$:llä on ainakin yksi kosketuspiste. Olkoon se piste w_1. Tällöin $(f_n(z_1))$:llä on osajono, joka suppenee pisteeseen w_1. Toisin sanoen, on mahdollista valita jono indeksejä $m_1^{(1)} < m_2^{(1)} < m_3^{(1)} < \dots$ siten, että

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k^{(1)}}(z_1) = w_1.$$

Merkintä $m_k^{(1)}$ tarkoittaa, että kyseinen pistejono liittyy pisteeseen $z_1 \in S_0$. Merkitään $f_{m_k^{(1)}} = f_{1,k}$.
Olkoon $(f_{2,k}(z_2))$ toinen rajoitettu pistejono. Samoin kuin edellä, niin voidaan valita tälle jonolle yksi kosketuspiste. Olkoon se piste w_2, ja muodostetaan jonon $(m_k^{(1)})$ osajonot $m_1^{(2)} < m_2^{(2)} < m_3^{(2)} < \dots$, joille

$$\lim_{k\to\infty} f_{2,k}(z_2) = w_2.$$

Jatkamalla tätä prosessia, niin saadaan jokaiselle $l \in \mathbb{Z}_+$ luku w_l ja osajono $(m_k^{(l)})$ siten, että

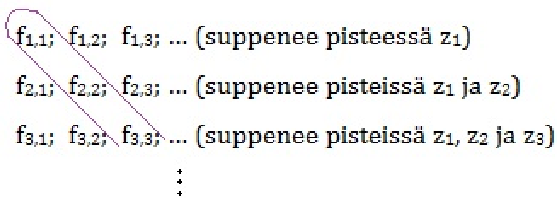
$$\lim_{k\to\infty} f_{l,k}(z_l) = w_l.$$

Kun $k \geq 1$, niin asetetaan $n_k = m_k^{(k)}$, jolloin $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Tällöin (f_{n_k}) on jonon (f_n) osajono. Lisäksi, kiinnitetylle $l \geq 1$, (f_{n_k}) on jonon $(f_{l,k})$

osajono (ensimmäisille $l-1$ termeille voi olla mahdollista ettei näin ole). Tällöin saadaan

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_l) = \lim_{k\to\infty} f_{l,k}(z_l) = w_l$$

kaikilla $l \geq 1$, eli $(f_{n_k}(\varsigma))$ saavuttaa raja-arvon jokaisessa pisteessä $\varsigma \in S_0$. Lemman 3.24 mukaan (f_n):n osajono (f_{n_k}) suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa, joten $\mathfrak{F}$ on normaaliperhe.



Osoitetaan sitten ehdon välttämättömyys. Oletetaan, että perhe $\mathfrak{F}$ on normaali. Olkoon piste $z_0 \in U$. Näytetään ensin, että $\mathfrak{F}$:n täytyy olla yhtäjatkuva.
Oletetaan, että $\mathfrak{F}$ ei ole yhtäjatkuva pisteessä z_0. Tällöin on olemassa $\epsilon > 0$ jolle ei ole olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ kaikille funktioille $f \in \mathfrak{F}$ ja jokaiselle $z \in U$, kun $|z - z_0| < \delta$. Voidaan siis valita $\delta = \frac{1}{n}$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jokaiselle n voidaan valita funktio $f_n \in \mathfrak{F}$ ja piste $z_n \in U$ siten, että $|f_n(z_n) - f_n(z_0)| \geq \epsilon$, kun $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$.
Koska $\mathfrak{F}$ on normaali U:ssa, niin sen jonolla (f_n) on osajono (f_{n_k}), joka suppenee tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa. Merkitään rajafunktiota f:llä. Lisäksi, koska (f_n) on $\mathfrak{F}$:ssä, eli f_n:t ovat jatkuvia, niin Lauseen 3.7 mukaan $f \in C(U)$.
Koska f on nyt jatkuva pisteessä $z_0 \in U$, niin voidaan valita $\delta > 0$ siten, että suljettu kiekko $\Delta = \bar{\Delta}(z_0, \delta) \subset U$, ja että $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$, kun $z \in \Delta$. Tässä $f_{n_k} \to f$ tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa, joten Lemman 3.6 nojalla $f_{n_k} \to f$ tasaisesti Δ:ssa. Edellisen lisäksi $z_{n_k} \to z_0$, joten voidaan valita k siten, että $|f_{n_k}(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}$ kaikilla $z \in \Delta$, ja että $z_{n_k} \in \Delta$. Silloin

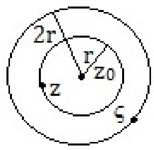
$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z_0)| \\
&\leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})| + |f(z_{n_k}) - f(z_0)| + |f(z_0) - f_{n_k}(z_0)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Tämä on ristiriita, joten $\mathfrak{F}$ on yhtäjatkuva z_0:ssa, ja siten yhtäjatkuva U:ssa.
Osoitetaan lopuksi vielä antiteesin kautta, että perheen $\mathfrak{F}$ täytyy olla pisteittäin rajoitettu U:ssa. Oletetaan, että $\mathfrak{F}$ ei ole pisteittäin rajoitettu U:ssa. Tällöin on olemassa piste $z_0 \in U$ ja $\mathfrak{F}$:n jono (f_n) siten, että $|f_n(z_0)| \to \infty$, kun $k \to \infty$. Tällaisella jonolla ei ole osajonoa, joka suppenisi tasaisesti U:n kompakteissa osajoukoissa, jolloin saadaan ristiriita oletuksen kanssa, että $\mathfrak{F}$ on normaaliperhe. □

Kappaleen viimeinen lause on nimetty Paul Montelin (1876-1975) mukaan, joka saadaan todistettua edellisen lauseen avulla. Tässä lauseessa palataan takaisin analyyttisten funktioiden pariin.

Lause 3.29 (Montelin lause)**.** *Olkoon $\mathfrak{F}$ perhe analyyttisiä funktioita avoimessa joukossa U. Oletetaan, että $\mathfrak{F}$ on lokaalisti rajoitettu U:ssa. Tällöin $\mathfrak{F}$ on normaaliperhe.*

Todistus. Koska perhe $\mathfrak{F}$ on lokaalisti rajoitettu joukossa U, niin se on siellä myös pisteittäin rajoitettu. Tällöin Arzelá-Ascolin lauseen 3.28 perusteella riittää osoittaa, että $\mathfrak{F}$ on yhtäjatkuva U:ssa.
Kiinnitetään piste $z_0 \in U$. Valitaan $r > 0$ siten, että ympyrä $K = K(z_0, 2r)$ kuuluu joukkoon U. Oletuksen mukaan $\mathfrak{F}$ on lokaalisti rajoitettu U:ssa, joten on olemassa vakio $m = m(K) > 0$ siten, että $|f(\varsigma)| \leq m$ kaikilla $\varsigma \in K$ ja kaikilla $f \in \mathfrak{F}$.



Kun $z \in \Delta = \bar{\Delta}(z_0, r)$, niin Cauchyn integraalikaavasta 2.5 saadaan seuraava arvio jokaiselle $f \in \mathfrak{F}$

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0| = 2r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0| = 2r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z_0} d\varsigma \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\varsigma - z_0| = 2r} \frac{(\varsigma - z_0) f(\varsigma) - (\varsigma - z) f(\varsigma)}{(\varsigma - z)(\varsigma - z_0)} d\varsigma \right| \\
&= \frac{|z - z_0|}{2\pi} \left| \int_{|\varsigma - z_0| = 2r} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)(\varsigma - z_0)} d\varsigma \right| \\
&\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_{|\varsigma - z_0| = 2r} \frac{|f(\varsigma)|}{|\varsigma - z||\varsigma - z_0|} d\varsigma \\
&= \frac{|z - z_0|}{2\pi 2r} \int_{|\varsigma - z_0| = 2r} \frac{|f(\varsigma)|}{|\varsigma - z|} d\varsigma \leq \frac{|z - z_0|}{2\pi 2r} \frac{m 2\pi 2r}{2r - |z - z_0|} \\
&= \frac{m|z - z_0|}{2r - |z - z_0|} \leq \frac{m|z - z_0|}{2r - r} = \frac{1}{r} m |z - z_0|,
\end{aligned}$$

missä käytettiin myös Cauchyn estimaattia 1.42.
Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\delta = \min\{r, \frac{r\epsilon}{m}\}$. (Jos $r < \frac{r\epsilon}{m}$, eli $m < \epsilon$, niin $|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{1}{r} m|z - z_0| < \frac{1}{r} mr = m < \epsilon$. Jos taas $\frac{r\epsilon}{m} < r$, niin $|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{1}{r} m|z - z_0| < \frac{1}{r} m \frac{r\epsilon}{m} = \epsilon$.) Tällöin saadaan yllä olevasta arviosta epäyhtälö $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ kaikille $f \in \mathfrak{F}$, kun $|z - z_0| < \delta$. Perhe $\mathfrak{F}$ on siis yhtäjatkuva z_0:ssa, joka on mielivaltainen piste U:sta. Näin ollen $\mathfrak{F}$ on normaaliperhe U:ssa. □

4. Eristetyt erikoispisteet

Tämän kappaleen alussa keskitytään funktioiden eristettyihin erikoispisteisiin. Näiden pisteiden avulla voidaan mm. tutkia integraaleja, jotka ovat muotoa $\int_\gamma f(z)dz$, missä polku γ on suljettu siinä joukossa, jossa funktio f on analyyttinen. Edellisistä kappaleista poiketen, polku γ voi nyt kiertää myös f:n eristettyjen erikoispisteiden ympäri. Näissä erikoispisteissä f on joko määrittelemätön tai differentioitumaton.

Tutustutaan ensin lisää analyyttisten funktioiden ominaisuuksiin. Määritellään seuraavaksi positiivisesti ja negatiivisesti suunnatut polut, joita käytetään tässä kappaleessa.

Määritelmä 4.1. *Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ yksinkertainen, suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva polku. Polku γ on positiivisesti suunnattu alueessa D, jos $n(\gamma, z) = 1$ kaikilla $z \in D$ käyrällä $|\gamma|$. Jos taas $n(\gamma, z) = -1$ kaikilla $z \in D$ käyrällä $|\gamma|$, niin γ on negatiivisesti suunnattu.*

Lause 4.2. *Olkoon f analyyttinen funktio alueessa D. Jos on olemassa piste $\varsigma_0 \in D$ siten, että $f^{(n)}(\varsigma_0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, niin f on vakio D:ssä.*

Todistus. Määritellään joukot $U = \{z \in D : f^{(n)}(z) = 0 \text{ kaikilla } n \geq 1\}$ ja $V = D \backslash U$. Selvästi $D = U \cup V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Oletuksesta saadaan, että $\varsigma_0 \in U$, kun $U \neq \emptyset$. Osoitetaan, että $U = D$.
Lauseen 1.7 nojalla riittää näyttää, että U ja V ovat avoimia. Olkoon piste $z_0 \in U$ ja olkoon $r > 0$ siten, että avoin kiekko $\Delta = \Delta(z_0, r) \subset D$. Lauseesta 3.16 ja U:n määritelmästä saadaan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n = f(z_0)$$

kaikilla $z \in \Delta$, joten funktio f on vakio Δ:ssa. Tällöin $f^{(n)}(z) = 0$ kaikilla $n \geq 1$ ja kaikilla $z \in \Delta$, eli $\Delta \subset U$, jolloin U on avoin.
Olkoon sitten piste $w_0 \in V$. Joukon V määritelmän vuoksi voidaan kiinnittää $n \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $f^{(n)}(w_0) \neq 0$. Koska funktio $f^{(n)}$ on jatkuva alueessa D, niin on olemassa avoin kiekko $\Delta = \Delta(w_0, r) \subset D$ siten, että $f^{(n)}(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Delta$. Tällöin $\Delta \subset V$, ja siten V on avoin.
Nyt saadaan Lauseesta 1.7, että $V = \emptyset$, koska oletettiin, että $U \neq \emptyset$, eli $U = D$. Tällöin Lause 1.21 sanoo, että kun $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in D$, niin f on vakio D:ssä. □

Lause 4.3. *Olkoon D alue. Oletetaan, että funktio $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja ei-vakio, ja että on olemassa piste $z_0 \in D$ siten, että $f(z_0) = 0$. Tällöin f voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

missä $m \in \mathbb{Z}_+$, funktio $g : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $g(z_0) \neq 0$.

Todistus. Koska funktio f ei ole vakio alueessa D, niin Lauseesta 4.2 seuraa, että on ainakin yksi $n \in \mathbb{Z}_+$, jolle $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Olkoon luku m pienin sellainen. Kiinnitetään avoin kiekko $\Delta = \Delta(z_0, r) \subset D$. Tällöin Lauseen 3.16

mukaan f:llä on Taylorin sarja Δ:ssa siten, että

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

missä $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Kokonaisluvun m määritelmästä ja oletuksesta $a_n = f(z_0) = 0$ saadaan, että $a_n = 0$, kun $0 \leq n \leq m-1$, ja $a_m \neq 0$ muulloin. Tällöin saadaan

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m},$$

kun $z \in \Delta$. Määritellään funktio $g : D \to \mathbb{C}$ siten, että

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} & \text{jos } z \neq z_0 \\ a_m & \text{jos } z = z_0, \end{cases}$$

joka on analyyttinen joukossa $D \backslash \{z_0\}$. Lisäksi g:llä on Taylorin sarja siten, että

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots$$

Δ:ssa, joka on Lauseen 3.15 mukaan siellä analyyttinen. Erityisesti g on differentioituva pisteessä $z_0 \in \Delta$. Tällöin g on analyyttinen, $g(z_0) = a_m \neq 0$ ja $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ alueessa D.
Osoitetaan sitten yksikäsitteisyys. Oletetaan, että $f(z) = (z - z_0)^l h(z)$, missä $l \in \mathbb{Z}_+$, funktio $h : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $h(z_0) \neq 0$. Kaikilla $z \in D$ on

$$(z - z_0)^m g(z) = (z - z_0)^l h(z).$$

Jos $m > l$, niin

$$0 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{m-l} g(z) = \lim_{z \to z_0} h(z) = h(z_0) \neq 0,$$

eli saatiin ristiriita. Samoin, jos $l < m$.
Tällöin täytyy olla $l = m$, ja silloin $g(z) = h(z)$ kaikilla $z \in D \backslash \{z_0\}$. Jatkuvuudesta saadaan, että $g(z_0) = a_m = h(z_0)$, eli $l = m$ ja $g = h$. □

Korollaari 4.4. *Olkoon funktio f analyyttinen ja ei-vakio alueessa D, ja olkoon piste $z_0 \in D$. Tällöin f voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z),$$

missä $m \in \mathbb{Z}_+$, funktio $g : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $g(z_0) \neq 0$.

Todistus. Soveltamalla Lausetta 4.3 funktioon f_1, $f_1(z) = f(z) - f(z_0)$, alueessa D, niin saadaan mitä halutaan. □

Merkintä: Olkoon funktio f analyyttinen ja ei-vakio jossain avoimessa kiekossa Δ, jonka keskipiste on z_0. Korollaarista 4.4 saadaan f:lle yksikäsitteinen esitys Δ:ssa siten, että

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^m g(z),$$

missä $w_0 = f(z_0)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, funktio $g : \Delta \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $g(z_0) \neq 0$. Tällöin kokonaisluku m on f:n kertaluku pisteessä z_0.
Jos $w_0 = 0$, niin luku m on f:n nollakohdan z_0 kertaluku. Luku m on pienin,

jolle $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ (kuten Lause 4.3 osoittaa).

Seuraavaksi määritellään diskreetit joukot, joiden avulla saadaan formuloitua Diskreetin kuvauksen lause.

Määritelmä 4.5. *(i) Piste z_0 on joukon E rajapiste, jos $E \backslash \{z_0\}$:ssa on olemassa jono (z_n) siten, että $z \to z_0$, tai jos $E \cap \Delta^*(z_0, r) \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$.*
(ii) Olkoon U avoin joukko. Joukko $E \subset U$ on diskreetti, jos sillä ei ole rajapistettä U:ssa.

Huomautus 4.6. *Diskreetin joukon E ominaisuuksia:*
(i) Joukon E täytyy koostua yksittäisistä pisteistä, eli jos $z_0 \in E$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $E \cap \Delta(z_0, r) = \{z_0\}$.
(ii) Jos joukko $U \backslash E$ on avoin, ja jos joukko U on avoin, niin $U \backslash E$ on alue.

Määritelmä 4.7. *Olkoon U avoin joukko. Kuvaus $f : U \to \mathbb{C}$ on diskreetti, jos joukko $E_w = \{z \in U : f(z) = w\} \subset U$ on diskreetti jokaiselle $w \in \mathbb{C}$.*

Lause 4.8 (Diskreetin kuvauksen lause)**.** *Alueen D analyyttinen ei-vakio kuvaus f on diskreetti.*

Todistus. Kiinnitetään piste $w \in \mathbb{C}$. Olkoon $E = E_w = \{z \in D : f(z) = w\}$ joukko. Osoitetaan, että E on diskreetti. Olkoon z_0 E:n rajapiste. Osoitetaan, että $z_0 \in \mathbb{C} \backslash D$. Näytetään tämä antiteesin kautta. Oletetaan, että $z_0 \in D$. Olkoon (z_n) jono joukossa $E \backslash \{z_0\}$ siten, että $z_n \to z_0$. Funktion jatkuvuudesta z_0:ssa seuraa, että

$$f(z_0) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = \lim_{n \to \infty} w = w,$$

joten $z_0 \in E$. Korollaarista 4.4 saadaan f:lle seuraava muoto, kun $z \in D$,

$$f(z) = w + (z - z_0)^m g(z),$$

missä $m \in \mathbb{Z}_+$, funktio $g : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $g(z_0) \neq 0$. Koska g on myös jatkuva z_0:ssa, niin voidaan valita avoin kiekko $\Delta = \Delta(z_0, r) \subset D$ siten, että $g(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Delta$. Tällöin $f(z) \neq w$ aina, kun $z \in \Delta^*(z_0, r)$. Silloin $E \cap \Delta^*(z_0, r) = \{z \in D : f(z) = w\} \cap \Delta^*(z_0, r) = \emptyset$, joka on ristiriidassa määritelmän kanssa, että z_0 on E:n rajapiste. Tällöin $z_0 \in \mathbb{C} \backslash D$ kuten haluttiin. □

Seuraava lause on edellisen lauseen sovellus. Se osoittaa, että analyyttisten funktioiden käänteisfunktion haara on analyyttinen, jota ei vielä saatu aikaisemmin osoitettua Lauseessa 1.22.

Lause 4.9. *Olkoon U avoin joukko ja olkoon $f : U \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Oletetaan, että funktio $g : D \to U$ on f:n käänteisfunktion haara, missä $D \subset f(U)$ on alue. Tällöin g on analyyttinen.*

Todistus. Koska funktio $g : D \to U$ on funktion f käänteisfunktion haara, niin g on jatkuva ja $f(g(z)) = z$ kaikilla $z \in D$. Osoitetaan, että g on differentioituva jokaisessa alueen D pisteessä.
Olkoon G joukon U komponentti siten, että $g(D) \subset G$ on yhtenäinen. Jos $w_1 = g(z_1)$ ja $w_2 = g(z_2)$, missä pisteet $z_1 \neq z_2$ ovat D:ssä, niin

$$f(w_1) = f(g(z_1)) = z_1 \neq z_2 = f(g(z_2)) = f(w_2),$$

eli f ei ole vakio G:ssä, joten ei voi olla $f' \equiv 0$ G:ssä. Sovelletaan Diskreetin kuvauksen lausetta 4.8 funktioon f', jolloin joukko $E = \{w \in G : f'(w) = 0\} \subset G$ on diskreetti.
Olkoon $z_0 \in D$ mielivaltainen piste siten, että $w_0 = g(z_0)$. Jos $w_0 \notin E$, niin Lauseen 1.22 mukaan g on differentioituva z_0:ssa. Oletetaan nyt, että $w_0 \in E$, ja osoitetaan, että näin ei voi olla. Nyt voidaan valita $r > 0$ siten, että $E \cap \Delta(w_0, r) = \{w_0\}$, koska E on diskreetti. Koska g on jatkuva pisteessä $z_0 \in D$, niin voidaan valita avoin kiekko $\Delta = \Delta(z_0, s) \subset D$ siten, että $g(\Delta) \subset \Delta(w_0, r)$. Koska g on myös injektio ja $g(z_0) = w_0$, niin $g(z) \in \Delta^*(w_0, r)$ kaikilla $z \in \Delta^* = \Delta^*(z_0, s)$. Tämä on ristiriita, joten $w_0 \notin E$.
Tällöin Lauseen 1.22 mukaan g on differentioituva Δ^*:ssä, eli se on analyyttinen siellä. Koska g on jatkuva Δ:ssa, niin Lauseesta 1.40 saadaan, että g on analyyttinen siellä, ja siten koko alueessa D. □

Siirrytään funktioiden eristettyjen erikoispisteiden määritelmiin.

Määritelmä 4.10. *Funktiolla f on eristetty erikoispiste $z_0 \in \mathbb{C}$, jos on olemassa $r > 0$ siten, että f on analyyttinen kiekossa $\Delta^*(z_0, r)$, mutta ei ole analyyttinen kiekossa $\Delta(z_0, r)$.*

Määritelmä 4.11. *Olkoon U avoin joukko ja olkoon $E \subset U$ diskreetti joukko siten, että se sisältää kaikki funktion f eristetyt erikoispisteet. Nyt $f : U \backslash E \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja kiekossa $\Delta^*(z_0, r)$, $r > 0$, sillä on Laurentin sarja $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Lisäksi eristetty erikoispiste $z_0 \in E$ voidaan luokitella kolmella eri tavalla:*
(i) z_0 on poistuva, jos $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$,
(ii) z_0 on napa, jos se ei ole poistuva ja $a_n \neq 0$ pätee ainakin yhdelle, mutta enintään äärellisen monelle $n < 0$, ja
(iii) z_0 on muulloin oleellinen.
Funktion f singulaariosa erikoispisteessä z_0 on potenssisarja $S : \mathbb{C} \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ siten, että $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$, missä $a_{-1} = Res(z_0, f)$.

Eristetyt erikoispisteet voidaan määritellä myös ilman Laurentin sarjaa. Seuraavassa on yksi näistä poistuville erikoispisteille.

Lause 4.12 (Riemannin laajennuslause)**.** *Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0. Erikoispiste z_0 on poistuva, jos ja vain jos f on rajoitettu kiekossa $\Delta^*(z_0, r)$, jollakin $r > 0$.*

Todistus. Osoitetaan ensin ehdon riittävyys. Oletetaan, että funktio f on rajoitettu kiekossa $\Delta^* = \Delta^*(z_0, r)$, eli $|f(z)| \leq m$ kaikilla $z \in \Delta^*$. Olkoon $r > 0$ riittävän pieni siten, että f on analyyttinen Δ^*:ssä. Tällöin Lauseen 3.19 nojalla f:llä on Laurentin sarja $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ kiekossa Δ^*, jonka kerroin on

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0=s} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kun $s \in (0, r)$. Arviomalla saadaan

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=s} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} dz \leq \frac{m}{2\pi s^{n+1}} \int_{|z-z_0|=s} 1 dz = \frac{m}{s^n}.$$

Kun $n < 0$, niin s voi lähestyä kohti nollaa, jolloin saadaan, että $|a_n| \leq 0$. Tällöin $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$, joten erikoispiste z_0 on poistuva.
Todistetaan sitten ehdon välttämättömyys. Oletetaan, että erikoispiste z_0 on poistuva. Voidaan olettaa, että $f(z_0)$ on määritelty siten, että funktio f on differentioituva pisteessä z_0. Tällöin $|f(z_0)| = \lim_{z \to z_0} |f(z)|$. Nyt voidaan valita $r > 0$ siten, että $|f(z)| < |f(z_0)| + 1$ kaikilla $z \in \Delta^* = \Delta^*(z_0, r)$, eli f on rajoitettu Δ^*:ssä. □

Seuraus 4.13. *Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0. Erikoispiste z_0 on poistuva, jos ja vain jos on olemassa $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$.*

Huomautus 4.14. *Olkoon $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ analyyttinen funktio kiekossa $\Delta^*(z_0, r)$ ja olkoon erikoispiste z_0 funktion f napa. Tällöin f on muotoa*

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

navan määritelmän mukaisesti, missä luku m on siten, että $a_{-m} \neq 0$, kun $a_{-n} = 0$ aina kun $n > m$. Tällöin sanotaan, että f:llä on napa pisteessä z_0 kertalukuna m.

Lause 4.15. *Olkoon $m \in \mathbb{Z}_+$ ja olkoon f analyyttinen funktio kiekossa $\Delta^* = \Delta^*(z_0, r)$. Tällöin f:llä on napa pisteessä z_0 kertalukuna m, jos ja vain jos f voidaan esittää muodossa*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

kaikilla $z \in \Delta^*$, missä g on analyyttinen funktio kiekossa $\Delta(z_0, r)$ ja $g(z_0) \neq 0$.

Todistus. Osoitetaan ensin ehdon välttämättömyys. Koska funktiolla f on napa pisteessä z_0 kertalukuna m, niin se voidaan esittää muodossa

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

kaikilla $z \in \Delta^*$, missä $a_{-m} \neq 0$. Määritellään funktio g siten, että

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n.$$

Tällöin g on analyyttinen kiekossa $\Delta(z_0, r)$ Lauseen 3.15 mukaan, koska sarja suppenee $\Delta(z_0, r)$:ssä. Lisäksi $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$, joten

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^{-m} g(z) \end{aligned}$$

kaikilla $z \in \Delta^*$.
Näytetään sitten ehdon riittävyys. Olkoon $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ ja $b_0 \neq 0$.

Tällöin g on analyyttinen $\Delta(z_0, r)$:ssä ja $g(z_0) = b_0 \neq 0$. Olkoon $f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$. Silloin saadaan

$$\begin{aligned} f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) &= (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=-m}^{\infty} b_{n+m} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

joka on Laurentin sarja, jonka ensimmäinen kerroin $b_0 \neq 0$, eli f.llä on napa pisteessä z_0 kertalukuna m. □

Lause 4.16. *Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0. Erikoispiste z_0 on napa, jos ja vain jos $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.*

Todistus. Osoitetaan ehdon välttämättömyys. Oletetaan, että funktiolla f on napa erikoispisteessä z_0, ja että sen kertaluku on m. Tällöin Lauseen 4.15 nojalla $f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$ kiekossa $\Delta^* = \Delta^*(z_0, r)$, missä funktio g on analyyttinen kiekossa $\Delta = \Delta(z_0, r)$ siten, että $g(z_0) \neq 0$. Silloin saadaan

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} = \infty,$$

koska $g(z_0) \neq 0$.
Osoitetaan sitten ehdon riittävyys. Oletetaan, että $|f(z)| \to \infty$, kun $z \to z_0$. Tällöin voidaan kiinnittää kiekko $\Delta^* = \Delta^*(z_0, r)$ siten, että funktio f on analyyttinen siellä, ja että $|f(z)| \geq 1$ kiekossa Δ^*.
Olkoon $h = \frac{1}{f}$. Nyt funktio h on rajoitettu Δ^*:ssä, koska $|h(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leq 1$, joten Riemannin laajennuslauseen 4.12 mukaan piste z_0 on h:n poistuva erikoispiste, ja määritellään

$$h(z_0) = \lim_{z \to z_0} h(z) = 0.$$

Koska $h(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Delta^*$, ja jos $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, niin $h(z_0) = b_0 = 0$, mutta on olemassa $n > 0$ siten, että $b_n \neq 0$. Olkoon m pienin tällainen. Tällöin funktio g,

$$g(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m} (z - z_0)^n} = \frac{1}{(z - z_0)^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z - z_0)^n},$$

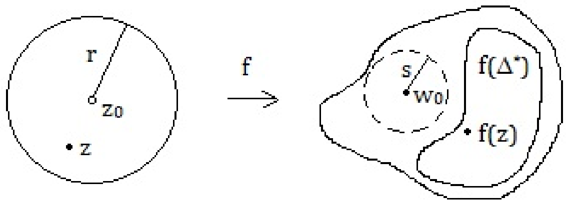
on analyyttinen Δ^*:ssä, ja $g(z_0) = \frac{1}{b_m} \neq 0$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{h(z)} &= \frac{1}{\sum_{n=m}^{\infty} b_n (z - z_0)^n} = \frac{1}{(z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m} (z - z_0)^n} \\ &= \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}. \end{aligned}$$

Tällöin Lauseen 4.15 nojalla f:llä on napa pisteessä z_0 kertalukuna m. □

Lause 4.17 (Casorati-Weierstrassin lause)**.** *Jos funktio f on analyyttinen kiekossa $\Delta^* = \Delta^*(z_0, r)$, ja jos kiekon keskipisteessä sillä on oleellinen erikoispiste, niin joukko $f(\Delta^*)$ on tiheä, eli joukolla $\mathbb{C} \setminus f(\Delta^*)$ ei ole sisäpisteitä.*

Todistus. Tehdään antiteesi. Olkoon w_0 joukon $\mathbb{C} \setminus f(\Delta^*)$ sisäpiste. Tällöin on olemassa $s > 0$ siten, että kiekko $\Delta(w_0, s) \subset \mathbb{C} \setminus f(\Delta^*)$.



Silloin $|f(z) - w_0| \geq s$ kaikilla $z \in \Delta^*$, ja saadaan, että funktio $g : \Delta^* \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{f(z)-w_0}$, on analyyttinen ja

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_0|} \leq \frac{1}{s}$$

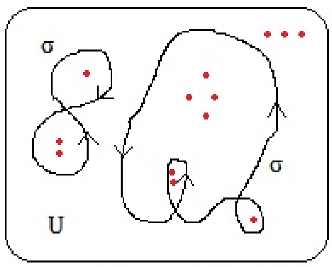
kaikilla $z \in \Delta^*$. Riemannin laajennuslauseen 4.12 mukaan g:llä on poistuva erikoispiste z_0. Tällöin Seuraksen 4.13 nojalla g:llä on olemassa raja-arvo pisteessä z_0, eli on olemassa $\lim_{z\to z_0} |g(z)|$. Silloin sen käänteisfunktiolla $\frac{1}{g}$ on eristetty erikoispiste z_0, joka on joko napa tai poistuva. (Jos $\lim_{z\to z_0} |g(z)| = 0$, niin z_0 on napa, ja jos $\lim_{z\to z_0} |g(z)| \neq 0$, niin z_0 on poistuva.)
Tällöin funktiolla $f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$ on eristetty erikoispiste z_0, joka on joko napa tai poistuva. Tämä on ristiriita, koska oletuksen mukaan piste z_0 on oleellinen, joten $\mathbb{C}\backslash f(\Delta^*)$:llä ei ole sisäpisteitä. □

Nyt voidaan todistaa Residylause, jonka jälkeistä seurausta tullaan tarvitsemaan jatkossa.

Lause 4.18 (Residylause)**.** *Olkoon U avoin joukko ja olkoon f analyyttinen funktio U:ssa, paitsi eristettyjen erikoispisteiden joukossa $E \neq \emptyset$. Jos sykli σ on nollahomologinen U:ssa siten, että $|\sigma| \cap E = \emptyset$, niin*

$$\int_\sigma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z\in E} n(\sigma, z) Res(z, f).$$

Todistus. Osoitetaan aluksi, että vaikka joukossa E voi olla erikoispisteitä ääretön määrä, niin vain äärelliselle määrälle pätee ehto $n(\sigma, z) \neq 0$. Oletetaan tätä varten, että $n(\sigma, z) \neq 0$ pätisi äärettömän monelle pisteelle $z \in E$ ja johdetaan ristiriita.



Joukon E pisteitä ovat •

Tällöin voidaan valita erillisten pisteiden jono (z_k) joukosta E siten, että $n(\sigma, z_k) \neq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Lemmasta 1.35 saadaan, että mikään piste z_k ei voi kuulua joukon $\mathbb{C}\backslash|\sigma|$ rajoittamattomaan komponenttiin, joten (z_k):n täytyy olla rajoitettu. Silloin Bolzano-Weierstrassin 1.10 nojalla (z_k):lla on ainakin yksi kosketuspiste. Olkoon se z_0. Koska $E \subset U$ on diskreetti, niin

Määritelmän 4.5 nojalla $z_0 \notin U$, eli $z_0 \in \mathbb{C}\backslash U$.
Oletuksen mukaan sykli σ on nollahomologinen joukossa U, eli $n(\sigma, z_0) = 0$. Kiinnitetään kiekko $\Delta = \Delta(z_0, r)$, joka ei leikkaa jälkeä $|\sigma|$. Kun piste $z \in \Delta$, niin $n(\sigma, z) = 0$. Toisaalta, koska z_0 on (z_k):n kosketuspiste, niin voidaan valita N siten, että $z_N \in \Delta$, jolle määritelmän mukaan pätee, että $n(\sigma, z_N) \neq 0$. Nyt saatiin ristiriita, joten ehto $n(\sigma, z) \neq 0$ pätee vain äärellisen monelle E:n pisteelle.
Olkoon joukon E pisteet $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_p$, joille pätee $n(\sigma, \varsigma_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, ja olkoon V avoin joukko siten, että $V = \{\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_p\} \cup (U\backslash E)$. Koska σ on joukossa $V\backslash\{\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_p\} = U\backslash E$, ja koska $\mathbb{C}\backslash V = (\mathbb{C}\backslash U) \cup \{z \neq \varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_p\}$, niin $n(\sigma, z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}\backslash V$. Toisin sanoen, σ on nollahomologinen V:ssä.
(Jos kaikille E:n pisteille olisi $n(\sigma, z) = 0$, niin $\int_\sigma f(z)dz = 0$ ja joukko $V = U\backslash E$. Silloin Residylause olisi kuin Cauchyn lause 2.3, missä sykli σ ja funktio f olisi määritelty V:ssä, eli oletetaan, että on olemassa pisteet $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_p$.)
Olkoon S_k funktion f singulaariosa pisteessä ς_k, eli $S_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - \varsigma_k)^{-n}$. Funktio S_k on analyyttinen joukossa $\mathbb{C}\backslash\{\varsigma_k\}$, ja funktiolla $f(z) - S_k(z)$ on poistuva erikoispiste ς_k. Tällöin funktio $g(z) = f(z) - S_1(z) - S_2(z) - \cdots - S_p(z)$ on analyyttinen joukossa $V\backslash\{\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_p\}$, missä erikoispisteet $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_p$ ovat poistuvia. Koska pisteet ovat poistuvia, niin voidaan olettaa, että g on analyyttinen V:ssä. Cauchyn lauseesta 2.3 saadaan

$$0 = \int_\sigma g(z)dz = \int_\sigma f(z)dz - \sum_{k=1}^{p} \int_\sigma S_k(z)dz,$$

eli

$$\int_\sigma f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} \int_\sigma S_k(z)dz. \tag{10}$$

Jos $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - \varsigma_0)^{-n}$ on f:n singulaariosa mielivaltaisessa pisteessä $\varsigma_0 \in E$, niin sarja S suppenee tasaisesti joukon $\mathbb{C}\backslash\{\varsigma_0\}$ kompakteissa osajoukoissa. Erityisesti se suppenee tasaisesti jäljessä $|\sigma|$, jolloin voidaan vaihtaa integraalin ja summan järjestystä, eli saadaan

$$\int_\sigma S(z)dz = \int_\sigma \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - \varsigma_0)^{-n} \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_\sigma \frac{1}{(z - \varsigma_0)^n} dz.$$

Funktiolla $(z - \varsigma_0)^{-n}$ on primitiivi, kun $n > 1$, jolloin Lauseesta 1.27 saadaan, että kaikilla $n > 1$ on

$$\int_\sigma (z - \varsigma_0)^{-n} dz = 0.$$

Silloin saadaan

$$\begin{aligned} \int_\sigma S(z)dz &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_\sigma (z - \varsigma_0)^{-n} dz = a_{-1} \int_\sigma (z - \varsigma_0)^{-1} dz \\ &= Res(\varsigma_0, f) 2\pi i n(\sigma, \varsigma_0). \end{aligned}$$

Nyt edellisestä yhtälöstä ja yhtälöstä (10) seuraa, että

$$\begin{aligned}\int_\sigma f(z)dz &= \sum_{k=1}^{p}\int_\sigma S_k(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{p} n(\sigma,\varsigma_k)Res(\varsigma_k,f)\\ &= 2\pi i\sum_{z\in E} n(\sigma,z)Res(z,f).\end{aligned}$$

□

Seuraus 4.19. *Olkoon U avoin joukko ja olkoon funktion f eristettyjen erikoispisteiden joukko $E\subset U$. Oletetaan, että f on analyyttinen joukossa $U\backslash E$, ja että polku γ on positiivisesti suunnattu, yksinkertainen, suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva $U\backslash E$:ssä siten, että polun $|\gamma|$ sisus $D\subset U$. Jos $D\cap E\neq\emptyset$, niin*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{p} Res(z_k,f),$$

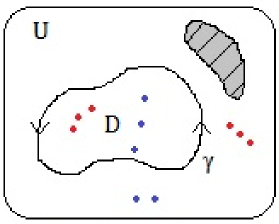
missä $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ovat E:n pisteitä siten, että ne kuuluvat joukkoon D.

Lause 4.20 (Argumentin periaate)**.** *Olkoon U avoin joukko. Oletetaan, että funktio f on analyyttinen U:ssa, paitsi erikoispisteissä z_0, jotka ovat napoja. Olkoon γ positiivisesti suunnattu, yksinkertainen, suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva polku U:ssa siten, että polku $|\gamma|$ ei leikkaa yhdenkään f:n nollakohdan tai navan kanssa ja siten, että polun $|\gamma|$ sisus $D\subset U$. Tällöin*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma,a_j) - \sum_{j01}^{q} n(\gamma,b_j),$$

missä pisteet a_j ovat f:n nollakohtia ja pisteet b_j ovat sen napoja D:ssä, kertaluvut huomioon ottaen.

Todistus. Oletuksesta saadaan, että funktiolle f ei voi olla $f\equiv 0$ joukossa G, missä $\bar{D}\subset G\subset U$. Tällöin funktio $\frac{f'}{f}$ on analyyttinen G:ssä, paitsi erikoispisteissä, jotka ovat napoja. Lisäksi sen erikoispisteet ovat f:n nollakohdat ja navat.



Funktion f nollakohtia ovat •
ja napoja ovat •

Olkoon $z_0\in G$ piste siten, että se on f:n nollakohta kertalukuna m. Tällöin f voidaan esittää avoimessa kiekossa $\Delta=\Delta(z_0,r)$ muodossa

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z),$$

missä $m \in \mathbb{Z}_+$ ja funktio $g : \Delta \to \mathbb{C}$ on analyyttinen siten, että $g(z_0) \neq 0$. Derivoidaan tämä saadaan

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$$

kiekossa Δ, jolloin

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

kun $z \in \Delta^*(z_0, r)$. Koska funktio $\frac{g'}{g}$ on analyyttinen Δ:ssa, niin $\frac{f'}{f}$:llä on pisteessä z_0 napa kertalukuna yksi ja $a_{-1} = Res(z_0, \frac{f'}{f}) = m$.
Olkoon nyt piste $z_0 \in G$ funktion f napa kertalukuna m. Tällöin f:llä on Laurentin sarja $\sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ kiekossa $\Delta^*(z_0, r)$. Voidaan valita $r > 0$ riittävän pieneksi siten, että Δ:ssa ei ole f:n nollakohtia.
Olkoon $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z - z_0)^n$ funktio, joka suppenee Δ:ssa (Lause 3.15). Silloin g on analyyttinen Δ:ssa ja $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^{-m} g(z) \end{aligned}$$

kiekossa $\Delta^*(z_0, r)$. Kun derivoidaan tämä saadaan

$$f'(z) = -m(z - z_0)^{-m-1} g(z) + (z - z_0)^{-m} g'(z)$$

ja siten

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Samoin kuin aikaisemmin todetaan, että $\frac{f'}{f}$:llä on pisteessä z_0 napa kertalukuna yksi ja $a_{-1} = Res(z_0, \frac{f'}{f}) = -m$.
Seurauksen 4.19 nojalla saadaan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{p} Res(z_k, \frac{f'}{f}),$$

missä pisteet $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ovat $\frac{f'}{f}$:n erillisiä napoja D:ssä. Tämän vuoksi summa residyistä funktiolle $\frac{f'}{f}$ antaa funktion f nollakohtia enemmän kuin napoja D:ssä, kun otetaan kertaluvut huomioon. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{p} Res(z_k, \frac{f'}{f}) = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^{q} n(\gamma, b_j),$$

missä pisteet a_j ovat f:n nollakohtia ja pisteet b_j ovat sen napoja D:ssä. □

Huomautus 4.21. *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen alueessa D, ja että $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Olkoon $\gamma : [a, b] \to D$ suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva polku. Kun $t \in [a, b]$, niin suljetulle polulle $\beta(t) = f(\gamma(t))$ on $\beta'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Koska funktio f' on jatkuva D:ssä, niin β on* *paloittain jatkuvasti differentioituva. Nyt β:lla on seuraava yhteys Lauseen 1.46 yhtälön kanssa*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}dt = \int_a^b \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}dt$$
$$= \int_\beta \frac{1}{z}dz = 2\pi i n(\beta, 0).$$

Argumentin periaatteella on monia sovelluksia, tunnetuimpia niistä on Eugéne Rouchén (1832-1910) kehittelemä lause. Tässä esitellään klassisen Rouchén lauseen sijasta hieman uudempi muoto. Ennen tätä lausetta määritellään Jordan alue.

Määritelmä 4.22. *Alue D on Jordan alue, jos sen reuna on homeomorfinen ympyrän kehän kanssa.*

Lause 4.23 (Rouchén lause)**.** *Olkoon D Jordan alue, $J = \partial D$. Jos funktiot f ja g ovat analyyttisiä avoimessa joukossa U, jolle pätee $\bar{D} \subset U$, ja jos epäyhtälö*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \tag{11}$$

kaikilla $z \in \partial D$, niin funktioilla f ja g on yhtä monta nollakohtaa D:ssä, kun nollakohtien kertaluvut otetaan huomioon.

Todistus. Epäyhtälön (11) vuoksi, joko $f(z) \neq 0$ tai $g(z) \neq 0$ polulla $J = \partial D$, joka on yksinkertainen ja suljettu. Olkoon $h = \frac{f}{g}$, joka on analyyttinen avoimessa joukossa V, $\bar{D} \subset V$, paitsi sen erikoispisteissä, jotka ovat napoja. Nyt J ei leikkaa yhdenkään h:n nollakohdan tai navan kanssa. Jaetaan epäyhtälö (11) puolittain $|g(z)|$:lla, jolloin saadaan

$$|h(z) - 1| < 1 + |h(z)|$$

kaikilla $z \in J$.
Koska yhtälö $|h(z) - 1| = 1 + |h(z)|$ on totta kaikilla z, joille $h(z) \in \mathbb{R} \cap (-\infty, 0]$, niin $h(J)$ ei kuulu joukkoon $R \cap (-\infty, 0]$. Tällöin origo on rajoittamattomassa komponentissa $\mathbb{C} \backslash h(J)$, joten Lemmasta 1.35.(ii) saadaan, että $n(\beta, 0) = 0$, missä polku $\beta = h \circ \gamma$ ja $|\gamma| = J$.
Huomataan, että $h' = (f'g - fg')/g^2$, jolloin $\frac{h'}{h} = \frac{g}{f}\frac{f'g - gf'}{g^2} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$. Tällöin Argumentin periaatteen 4.20 todistuksen ja Huomautuksen 4.21 merkintöjä käyttäen saadaan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz \tag{12}$$
$$= n(\beta, 0) = 0.$$

Oletuksen nojalla funktioilla f ja g ei ole napoja Jordan alueessa D. Tällöin Argumentin periaatteen 4.20 nojalla yhtälön (12) vasemmasta termistä saadaan

$$\sum_{j=1}^{m} n(\gamma, a_j) - \sum_{k=1}^{p} n(\gamma, b_k) = 0,$$

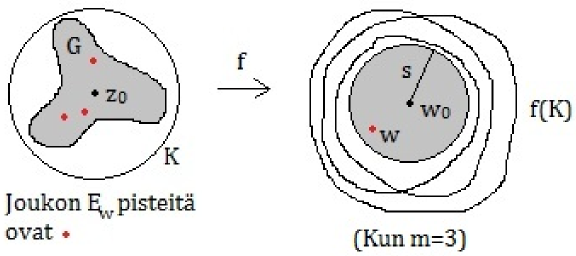
missä pisteet a_j ovat f:n nollakohtia ja pisteet b_k ovat g:n nollakohtia. Silloin funktioilla f ja g on yhtä monta nollakohtaa D:ssä. □

Lause 4.24. *Olkoon U avoin joukko ja $z_0 \in U$. Oletetaan, että funktio f on analyyttinen U:ssa, ja että kertalukuna m funktio f saa arvon w_0 pisteessä z_0, eli $f(z_0) = w_0$. Olkoon $r > 0$ tarpeeksi pieni siten, että suljettu kiekko $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(z_0, r) \subset U$, ja kaikille $z \in \bar{\Delta} \backslash \{z_0\}$ pätee, että $f(z) \neq w_0$ ja $f'(z) \neq 0$. Määritellään $s = s(r) > 0$ siten, että $s = \min\{|f(z) - w_0| : z \in K(z_0, r)\}$. Tällöin joukko $G = \{z \in \Delta(z_0, r) : f(z) \in \Delta(w_0, s)\}$ on alue. Lisäksi joukolla $E_w = \{z \in \Delta(z_0, r : f(z) = w\}$ on täsmälleen m ratkaisua G:ssä kaikilla $w \in \Delta^*(w_0, s)$, missä $f(z) = w$ kertalukuna yksi.*

Todistus. Olkoon $D \subset U$ alue ja olkoon $z_0 \in D$. Koska funktiolla f on kertaluku pisteessä z_0, niin f ei ole vakio D:ssä, eli funktiolle f' ei voi olla $f' \equiv 0$ tässä alueessa. Diskreetin kuvauksen lauseen 4.8 mukaan joukot $\{z \in D : f(z) = w_0\}$ ja $\{z \in D : f'(z) = 0\}$ ovat D:n diskreettejä osajoukkoja. Erityisesti on olemassa $r > 0$ siten, että suljettu kiekko $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(z_0, r) \subset D$, ja kaikille $z \in \bar{\Delta} \backslash \{z_0\}$ on $f(z) \neq w_0$ ja $f'(z) \neq 0$.
Koska funktio $z \mapsto |f(z) - w_0|$ on jatkuva ja positiivinen ympyrällä $K = K(z_0, r)$, niin se saavuttaa siellä pienimmän arvonsa. Olkoon $s = \min\{|f(z) - w_0| : z \in K\}$. Koska f on jatkuva kiekossa $\Delta(z_0, r)$, niin Lauseen 1.5 nojalla joukko $G = \{z \in \Delta(z_0, r) : f(z) \in \Delta(w_0, s)\}$ on avoin. Kiinnitetään piste $w \in \Delta^*(w_0, s)$. Olkoon $g(z) = f(z) - w_0$ ja $h(z) = f(z) - w$ kiekossa $\Delta = \Delta(z_0, r)$. Koska

$$\begin{aligned} |g(z) - h(z)| &= |f(z) - w_0 - (f(z) - w)| = |w - w_0| < s \\ &< 2s \leq |g(z)| + |h(z)| \end{aligned}$$

kaikilla $z \in \partial\Delta = K$, niin Rouchén lauseen 4.23 mukaan funktioilla g ja h on yhtä monta nollakohtaa Δ:ssa, kun nollakohtien kertaluvut otetaan huomioon.



Koska oletuksen mukaan f saa arvon w_0 kertalukuna m pisteessä z_0, niin g:llä on täsmälleen m nollakohtaa Δ:ssa. Silloin h:lla on myös täsmälleen m nollakohtaa Δ:ssa, eli kiekossa $\Delta^*(z_0, r)$, kun $w \neq w_0$. Koska $h'(z) = f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Delta^*(z_0, r)$, niin h:lla on m nollakohtaa $\Delta(z_0, r)$:ssä kertalukuna yksi. Toisin sanoen, joukossa $E_w = \{z \in \Delta : f(z) = w\}$ on täsmälleen m ratkaisua, missä $f(z) = w$ kertalukuna yksi. Joukon G määritelmästä saadaan, että $E_w \subset G$.
Todistetaan vielä, että avoin joukko G on yhtenäinen. Olkoon V jokin G:n komponentti. Osoitetaan, että piste $z_0 \in V$. Oletetaan, että $z_0 \notin V$ ja johdetaan ristiriita.
Määritellään funktio $k : \bar{V} \to \mathbb{C}$ asettamalla $k(z) = \frac{1}{s}(f(z) - w_0)$. Tällöin k on jatkuva ja analyyttinen V:ssä. Koska $z_0 \notin V$ ja $V \subset \bar{\Delta}$, niin k:lla ei ole nollakohtia V:ssä. Joukon G määritelmän vuoksi $|k(z)| = \frac{1}{s}|f(z) - w_0| < \frac{s}{s} = 1$

kaikilla $z \in V$. Funktion k jatkuvuudesta seuraa, että $|k(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in \bar{V}$.
Koska V on G:n komponentti, niin $|k(z)| = 1$, kun $z \in \partial V$. Tällöin voidaan päätellä, että $\frac{1}{k}$ on jatkuva $\bar{V}$:ssa ja analyyttinen V:ssä. Korollaarista 1.44 saadaan, että $\frac{1}{|k(z)|} \leq 1$ kaikilla $z \in V$, eli $|k(z)| \geq 1$. Tämän ristiriidan vuoksi $z_0 \in V$ ja tällöin G:llä on vain yksi komponentti, eli se on yhtenäinen ja siten alue. □

Lause 4.25 (Avoimen kuvauksen lause)**.** *Olkoon D alue. Jos funktio $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja ei-vakio, niin joukko $f(D)$ on avoin. Erityisesti $f(D)$ on alue.*

Todistus. Olkoon $U \subset D$ avoin joukko ja olkoon $w_0 \in f(U)$. Valitaan $z_0 \in U$ siten, että $f(z_0) = w_0$. Olkoon $r > 0$ siten, että $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(z_0, r) \subset U$ ja ehdot $f(z) \neq w_0$ ja $f'(z) \neq 0$ pätevät kaikilla $z \in \bar{\Delta} \backslash \{z_0\}$, kuten Lauseessa 4.24.
Ehto $f'(z) \neq 0$ on mahdollista, koska funktio f on analyyttinen ja ei-vakio alueessa D, kun taas ehdosta $f(z) \neq w_0$ ja määritelmästä $s = \min\{|f(z) - w_0| : z \in K(z_0, r)\}$ saadaan, että avoin kiekko $\Delta(w_0, s) \subset f(\Delta(z_0, r))$, eli $\Delta(w_0, s) \subset f(U)$. Siksi joukko $f(U)$ on avoin, ja siten erityisesti $f(D)$ on avoin joukko.
Lauseen 1.9 perusteella $f(D)$ on myös yhtenäinen, joten se on alue. □

Lause 4.26. *Olkoon f analyyttinen funktio alueessa D. Jos f on injektio, niin $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$.*

Todistus. Oletetaan, että $f'(z_0) = 0$ jossakin pisteessä $z_0 \in D$. Koska f on injektio alueessa D, niin se ei ole vakio tässä alueessa. Tällöin voidaan olettaa, että jollakin kertalukuna m f saa arvon w_0 pisteessä z_0, $f(z_0) = w_0$. Koska $f'(z) = 0$, niin $m \geq 2$.
Lauseen 4.24 todistuksesta saadaan, että funktiolla $z \mapsto f(z) - w_0$ on m nollakohtaa z_0:ssa kiekossa $\Delta(z_0, r)$. Tällöin pisteellä w, joka on tarpeeksi lähellä pistettä w_0 ja $w \neq w_0$, on ainakin kaksi alkukuvaa D:ssä, jolloin f ei ole injektio. Siten $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. □

Lause 4.27. *Oletetaan, että D on alue, ja että funktio $f : D \to \mathbb{C}$ on injektio ja analyyttinen. Tällöin sen käänteisfunktio $f^{-1} : f(D) \to D$ on analyyttinen.*

Todistus. Avoimen kuvauksen lauseesta 4.25 saadaan, että joukko $f(D)$ on alue. Osoitetaan, että funktio f^{-1} on jatkuva. Olkoon $z_0 \in f(D)$ ja $w_0 \in f^{-1}(z_0)$, ja olkoon $\epsilon > 0$ annettu. Nyt joukko $U = D \cap \Delta(w_0, \epsilon)$ on avoin alueessa D ja $w_0 \in U$, joten Avoimen kuvauksen lauseen 4.25 mukaan joukko $f(U) \subset f(D)$ on avoin ja $z_0 \in f(U)$. Selvästi $f^{-1}(f(U)) = U$.
Valitaan $\delta > 0$ siten, että $\Delta = \Delta(z_0, \delta) \subset f(U)$. Silloin $f^{-1}(\Delta) \subset U$, eli $f^{-1}(\Delta) \subset \Delta(w_0, \epsilon)$. Tällöin f^{-1} on jatkuva jokaisessa $f(D)$:n pisteessä. Lauseesta 4.9 saadaan, että $f^{-1} = g$ on analyyttinen $f(D)$:ssä. □

Seuraava lause on nimetty Adolf Hurwitzin (1859-1919) mukaan.

Lause 4.28 (Hurwitzin lause)**.** *Oletetaan, että jokainen jonon (f_n) funktio on analyyttinen ja $f_n \neq 0$ alueessa D, ja että $f_n \to f$ tasaisesti D:n kompakteissa osajoukoissa. Tällöin joko $f \neq 0$ tai $f \equiv 0$ alueessa D.*

Todistus. Lauseen 3.12 nojalla funktio f on analyyttinen alueessa D. Oletetaan, että $f(z_0) = 0$ jossakin pisteessä $z_0 \in D$. Tehdään antiteesi. Oletetaan, että $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D \backslash \{z_0\}$. Tällöin z_0 on f:n eristetty piste, missä $f(z_0) = 0$.
Valitaan $r > 0$ siten, että suljettu kiekko $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(z_0, r) \subset D$ ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in K = K(z_0, r)$. Tällöin Korollaarin 1.14 nojalla $|f(z)|$ saavuttaa positiivisen pienimmän arvonsa ympyrällä K. Olkoon tämä arvo $\epsilon > 0$. Koska $f_n \to f$ tasaisesti K:lla, niin on olemassa n siten, että

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \leq |f(z)|$$

kaikilla $z \in K$. Rouchén lauseesta 4.23 seuraa, että funktioilla f_n ja f on sama määrä nollakohtia kiekossa $\Delta(z_0, r)$. Tällöin f_n:llä on ainakin yksi nollakohta, joka on ristiriita. Siten $f \equiv 0$ alueessa D. □

Lause 4.29. *Oletetaan, että jokainen jonon (f_n) funktio on analyyttinen ja injektio alueessa D, ja että $f_n \to f$ tasaisesti D:n kompakteissa osajoukoissa. Tällöin f on joko injektio tai vakio D:ssä.*

Todistus. Funktio $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen Lauseen 3.12 nojalla. Oletetaan, että f ei ole vakio alueessa D. Kiinnitetään piste $z_0 \in D$. Osoitetaan, että $f(z) \neq f(z_0)$, kun $z \neq z_0$.
Olkoon jono (g_n) määritelty alueessa $D_0 = D \backslash \{z_0\}$ siten, että $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$. Koska funktio f_n on injektio D:ssä, niin g_n:llä ei ole nollakohtia D_0:ssa. Selvästi $g_n \to g$ tasaisesti D_0:n kompakteissa osajoukoissa, missä $g(z) = f(z) - f(z_0)$.
Koska oletettiin, että f ei ole vakio D:ssä, niin funktiolla g ei ole nollakohtaa D_0:ssa. Hurwitzin lause 4.28 osoittaa tällöin, että $g(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D_0$, eli $f(z) \neq f(z_0)$, kun $z \neq z_0$. Koska piste $z_0 \in D$ on mielivaltainen, niin f on injektio D:ssä. □

5. Konformikuvaukset

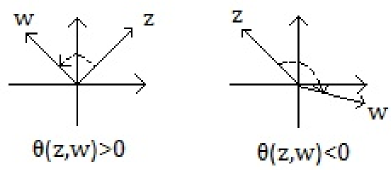
Kompleksianalyysin tutkituimpiin alueisiin kuuluvat funktiot, jotka ovat analyyttisiä ja injektioita. Tätä muotoa olevat funktiot tunnetaan myös konformikuvauksina. Historiassa merkittävä käänne oli vuonna 1851, kun Riemann esitteli huomion arvoisen tiedon: minkä tahansa yhdesti yhtenäisen alueen voi kuvata konformisesti johonkin muuhun yhdesti yhtenäiseen alueeseen. Riemannin kuvauslauseessa kuvataan yhdesti yhtenäinen alue yksikkökiekoksi.

Ennen kuin päästään Riemannin kuvauslauseeseen, niin tutkitaan ensin konformikuvauksia ja niiden suhdetta analyyttisiin funktioihin. Tämän jälkeen esitellään lyhyesti laajennettu kompleksitaso ja Möbius-kuvaukset. Riemannin kuvauslauseen jälkeen tutkitaan miten konformikuvaukset käyttäytyvät alueen reunalla.

On monia erilaisia tapoja esitellä konformikuvauksia, mutta tässä rajoitutaan tutkimaan yhdesti yhtenäisten alueiden kuvausten konformisuutta. Tällöin vältytään analyyttisiltä ja topologisilta ongelmilta, joita ilmenee ei-yhdesti yhtenäisillä alueilla. Aloitetaan esittelemällä suunnatun kulman määritelmä ja siihen liittyviä ominaisuuksia.

Määritelmä 5.1. *Olkoot pisteet $z, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Tällöin $\theta(z,w) = Arg\left(\frac{w}{z}\right)$ on suunnattu kulma pisteestä z pisteeseen w, eli $\theta(z,w)$ on kulma välillä $(-\pi, \pi]$ siten, että valitaan vektoreiden z ja w väliltä pienempi kulma.*

Huomautus 5.2. *Kulmalle $\theta(z,w)$ pätee seuraavat ominaisuudet:*
(i) Jos siirrytään vektorista z vektoriin w vastapäivään, niin $\theta(z,w) > 0$. Vastaavasti, jos siirrytään myötäpäivään, niin $\theta(z,w) < 0$. Kun kulma $\theta(z,w) = \pi$, niin vektorit z ja w muodostavat suoran janan.

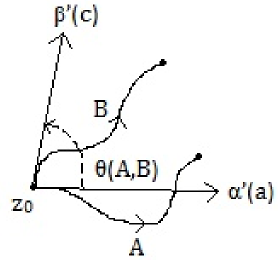


(ii) $\theta(z,w) = -\theta(w,z)$ ja $\theta(\bar{z},\bar{w}) = -\theta(z,w)$, paitsi kun $\theta(z,w) = \pi$, jolloin $\theta(w,z) = \pi = \theta(\bar{z},\bar{w})$.
(iii) $\theta(cz,cw) = \theta(z,w)$ kaikilla $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, ja $\theta(rz,sw) = \theta(z,w)$ kaikilla $r, s \in \mathbb{R}_+$.

Koska yleisesti kompleksifunktiot eivät kuvaa suoria janoja suoriksi janoiksi, niin seuraavaksi määritellään tapa mitata kulma, joka on kahden derivoituvan kaaren leikkauspisteessä.

Määritelmä 5.3. *Olkoon $A = |\alpha|$ siten, että $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ on yksinkertainen, ei-suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva polku, jolle $\alpha'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a,b]$, ja olkoon $B = |\beta|$ siten, että $\beta : [c,d] \to \mathbb{C}$ on yksinkertainen, ei-suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva polku, jolle $\beta'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [c,d]$. Oletetaan, että polkujen kuvilla A ja B on yksi yhteinen päätepiste z_0, mutta muuten ovat erillisiä. Tällöin*

$$\theta(A,B) = \theta[\alpha'(a), \beta'(c)].$$



Seuraavaksi määritellään Jacobin determinantti. Tätä käytetään tämän jälkeisessä diffeomorfismin määritelmässä, ja myöhemmin tässä kappaleessa se on osa konformikuvausten tarkastelua.

Määritelmä 5.4. *Olkoon U avoin joukko ja olkoon $f : U \to \mathbb{C}$ funktio siten, että $f = u + iv$, ja että f kuuluu luokkaan $C^1(U)$. Tällöin f:n Jacobin determinantti J_f on*

$$\begin{aligned} J_f(z) &= \begin{vmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{vmatrix} = u_x(z)v_y(z) - u_y(z)v_x(z) \\ &= |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2. \end{aligned}$$

Määritelmä 5.5. *Olkoon D alue. Funktio $f : D \to \mathbb{C}$ on diffeomorfismi, jos se on injektio ja kuuluu luokkaan $C^1(D)$, ja jos $J_f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$.*

Huomautus 5.6. *(i) Huomataan, että Jacobin determinantti J_f on jatkuva reaaliarvoinen funktio määrittelyjoukossa. Erityisesti, jos funktio f on differentioituva pisteessä $z_0 \in U$, niin $f_z(z_0) = f'(z_0)$ ja $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$, joten*

$$J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2.$$

(ii) Jos funktio $f : D \to \mathbb{C}$ on diffeomorfismi, niin joko $J_f > 0$ tai $J_f < 0$ kaikkialla alueessa D.

Nyt voidaan määritellä kulman säilyttävät kuvaukset, ja sen kautta konformikuvaukset. Kompleksifunktio on kulman säilyttävä kuvaus, jos sen määrittelyjoukon kaikki kaaret, jotka ovat derivoituvia ja leikkaavat toisiaan jossakin pisteessä, kuvautuvat derivoituviksi ja leikkaaviksi kaariksi siten, että niiden kulmat leikkauspisteissä pysyvät saman suuruisina. Konformikuvausille halutaan lisäksi, että niiden kulmat ovat suunnan säilyttäviä.

Seuraavassa määritellään edellä mainitut asiat.

Määritelmä 5.7. *Olkoon D alue. Diffeomorfismi $f : D \to \mathbb{C}$ on kulman säilyttävä kuvaus pisteessä $z_0 \in D$, jos*

$$|\theta(A, B)| = |\theta[f(A), f(B)]|$$

aina kun A ja B ovat polkujen kuvia kuten Määritelmässä 5.3.
Jos $\theta(A, B) = \theta[f(A), f(B)]$, niin f on konforminen z_0:ssa. Jos taas $\theta(A, B) = \theta[f(B), f(A)]$, niin f on anti-konforminen z_0:ssa.

Diffeomorfismi f ei voi olla määrittelyalueen yhdessä pisteessä konforminen ja toisessa anti-konforminen, koska Huomautuksen 5.6.(ii) mukaan Jacobin determinantti J_f ei vaihda merkkiään määrittelyalueessaan.

Lause 5.8. *Olkoon D alue ja olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ diffeomorfismi. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja pisteessä $z_0 \in D$:*
(i) Funktio f on differentioituva z_0:ssa.
(ii) Funktio f on kulman säilyttävä kuvaus z_0:ssa ja $J_f(z_0) > 0$.
(iii) Funktio f on konforminen z_0:ssa.

Todistus. Osoitetaan ensin, että väitteestä (i) seuraa kohdat (ii) ja (iii). Oletetaan, että funktio f on differentioituva pisteessä z_0. Tällöin Huomautuksesta 5.6.(i) saadaan, että $J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2 \geq 0$, ja silloin Määritelmän 5.5 ja Huomautuksen 5.6.(ii) mukaan on $J_f(z_0) \neq 0$ ja $J_f(z_0) > 0$, jolloin $f'(z_0) \neq 0$.
Olkoon $A = |\alpha|$ ja $B = |\beta|$, missä $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ja $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$ ovat yksinkertaisia, ei-suljettuja ja paloittain jatkuvasti differentioituvia polkuja, joille $\alpha'(t) \neq 0$, kun $t \in [a, b]$, ja $\beta'(l) \neq 0$, kun $l \in [c, d]$. Oletetaan, että polkujen kuvilla A ja B on yksi yhteinen päätepiste z_0 siten, että $\alpha(a) = \beta(c) = z_0$. Tällöin joukkojen $f(A)$ ja $f(B)$ normaalit parametrisoinnit ovat polut $\alpha_1(t) = f[\alpha(t)]$ ja $\beta_1(t) = f[\beta(t)]$. Koska f on differentioituva z_0:ssa, niin

$$\alpha_1'(a) = f'[\alpha(a)]\alpha'(a) = f'(z_0)\alpha'(a)$$

ja

$$\beta_1'(c) = f'[\beta(c)]\beta'(c) = f'(z_0)\beta'(c).$$

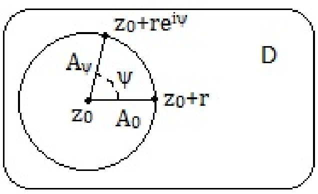
Silloin saadaan

$$\begin{aligned}\theta[f(A), f(B)] &= \theta[\alpha_1'(a), \beta_1'(c)] = \theta[f'(z_0)\alpha'(a), f'(z_0)\beta'(c)] \\ &= \theta[\alpha'(a), \beta'(c)] = \theta(A, B),\end{aligned}$$

koska $f'(z_0) \neq 0$, eli f on konformikuvaus z_0:ssa. Tällöin f on Määritelmän 5.7 nojalla myös kulman säilyttävä kuvaus z_0:ssa.
Seuraavaksi osoitetaan, että väitteestä (ii) seuraa (i). Oletetaan, että f on kulman säilyttävä kuvaus pisteessä z_0 ja $J_f(z_0) > 0$. Koska oletuksen mukaan f on diffeomorfismi, niin se kuuluu luokkaan $C^1(D)$, jolloin Lauseen 1.22 jälkeisen Huomion(i) nojalla f on derivoituva jokaisessa alueen D pisteessä. Erityisesti f voidaan esittää muodossa

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + d(\bar{z} - \bar{z}_0) + E(z) \tag{13}$$

kun $z \in D$, missä $c = f_z(z_0)$, $d = f_{\bar{z}}(z_0)$ ja funktio E on virhetermi, jolle $\lim_{z \to z_0} \frac{|E(z)|}{|z - z_0|} = 0$.
Osoitetaan, että $d = 0$ ja $f'(z_0) = c$. Silloin f on Lauseen 1.16 nojalla differentioituva z_0:ssa. Kiinnitetään $r > 0$ siten, että suljettu kiekko $\bar{\Delta}(z_0, r) \subset D$. Kun $0 \leq \psi \leq \pi$, niin olkoon joukolla A_ψ normaali parametri-



sointi polulla $\alpha_\psi(t) = z_0 + te^{i\psi}$, kun $t \in [0, r]$. Jos $0 < \psi \leq \pi$, niin pisteeseen z_0 saadaan joukot $A_\psi = |\alpha_\psi|$ ja $A_0 = |\alpha_0|$ siten, että saadaan kulma

$$\theta(A_0, A_\psi) = \theta[\alpha_0'(0), \alpha_\psi'(0)] = \theta[1, e^{i\psi}] = \psi.$$

Nyt joukolla $f(A_\psi)$ on normaali parametrisointi siten, että $\beta_\psi(t) = f[\alpha_\psi(t)] = f(z_0 + te^{i\psi})$, kun $t \in [0, r]$. Käyttämällä yhtälöä (13) saadaan

$$\begin{aligned}\beta_\psi'(0) &= \lim_{t\to 0+} \frac{\beta(0+t) - \beta(0)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(z_0 + te^{i\psi}) - f(z_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0+} \frac{c(z_0 + te^{i\psi} - z_0) + d(z_0 + te^{-i\psi} - z_0) + E(z_0 + te^{i\psi})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0+} \left[ce^{i\psi} + de^{-i\psi} + e^{i\psi}\frac{E(z_0 + te^{i\psi})}{te^{i\psi}}\right] \\ &= ce^{i\psi} + de^{-i\psi}.\end{aligned}$$

Koska $f(A_\psi)$:n normaali parametrisointi on $\beta_\psi(t)$, niin $\beta_\psi'(0) \neq 0$, eli $ce^{i\psi} + de^{-i\psi} \neq 0$, kun $0 \leq \psi \leq \pi$. Tällöin

$$\begin{aligned}\theta[f(A_0), f(A_\psi)] &= \theta[\beta_0'(0), \beta_\psi'(0)] \\ &= Arg\left(\frac{ce^{i\psi} + de^{-i\psi}}{c+d}\right)\end{aligned}$$

kun $0 < \psi \leq \pi$. Koska oletuksen mukaan f on kulman säilyttävä kuvaus z_0:ssa, niin Määritelmän 5.7 nojalla

$$|\theta[f(A_0), f(A_\psi]| = |\theta(A_0, A_\psi)| = \psi$$

kun $0 \leq \psi \leq \pi$. Jos f on muotoa $f = u + iv$, niin saadaan

$$\begin{aligned}c\bar{d}e^{i\psi} + \bar{c}de^{-i\psi} &= f_z(z_0)\overline{f_{\bar{z}}(z_0)}e^{i\psi} + \overline{f_z(z_0)}f_{\bar{z}}(z_0)e^{-i\psi} \\ &= \left[\frac{1}{2}(u_x(z_0) + v_y(z_0)) + \frac{i}{2}(v_x(z_0) - u_y(z_0))\right] * \\ &\quad \left[\frac{1}{2}(u_x(z_0) - v_y(z_0)) - \frac{i}{2}(v_x(z_0) + u_y(z_0))\right] e^{i\psi} \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}(u_x(z_0) + v_y(z_0)) - \frac{i}{2}(v_x(z_0) - u_y(z_0))\right] * \\ &\quad \left[\frac{1}{2}(u_x(z_0) - v_y(z_0)) + \frac{i}{2}(v_x(z_0) + u_y(z_0))\right] e^{-i\psi} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}(e^{i\psi} + e^{-i\psi})(u_x^2(z_0) - u_y^2(z_0) + v_x^2(z_0) - v_y^2(z_0)) \\ &\quad + \frac{1}{2i}(e^{i\psi} - e^{-i\psi})(u_x(z_0)u_y(z_0) + v_x(z_0)v_y(z_0)) \\ &= \frac{1}{2}\cos\psi(u_x^2(z_0) - u_y^2(z_0) + v_x^2(z_0) - v_y^2(z_0)) \\ &\quad + \sin\psi(u_x(z_0)u_y(z_0) + v_x(z_0)v_y(z_0))\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
2Re(c\bar{d}e^{i\psi}) = 2Re\Big[\Big(&\frac{1}{4}(u_x^2(z_0) - v_y^2(z_0)) - \frac{i}{2}(u_x(z_0)u_y(z_0) \\
&+ v_x(z_0)v_y(z_0)) + \frac{1}{4}(v_x^2(z_0) - u_y^2(z_0))\Big)e^{i\psi}\Big] \\
&= 2\Big[\frac{1}{4}\cos\psi(u_x^2(z_0) - v_y^2(z_0) - u_y^2(z_0) + v_x^2(z_0)) \\
&+ \frac{1}{2}\sin\psi(u_x(z_0)u_y(z_0) + v_x(z_0)v_y(z_0))\Big] \\
&= \frac{1}{2}\cos\psi(u_x^2(z_0) - v_y^2(z_0) + v_x^2(z_0) - u_y^2(z_0)) \\
&+ \sin\psi(u_x(z_0)u_y(z_0) + v_x(z_0)v_y(z_0)),
\end{aligned}
$$

kun käytetään laskusääntöjä $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ ja $e^{iz} = \cos z + i\sin z$.
Koska edellä saatiin, että $c\bar{d}e^{i\psi} + \bar{c}de^{-i\psi} = 2Re(c\bar{d}e^{i\psi})$, ja koska Määritelmästä 5.4 ja oletuksesta saadaan, että $|c|^2 - |d|^2 = J_f(z_0) > 0$, niin

$$
\begin{aligned}
Im\left(\frac{ce^{i\psi} + de^{-i\psi}}{c+d}\right) &= Im\left(\frac{(ce^{i\psi} + de^{-i\psi})(\bar{c} + \bar{d})}{|c+d|^2}\right) \\
&= \frac{Im(|c|^2e^{i\psi} + c\bar{d}e^{i\psi} + \bar{c}de^{-i\psi} + |d|^2e^{-i\psi})}{|c+d|^2} \\
&= \frac{Im(|c|^2e^{i\psi} + |d|^2e^{-i\psi})}{|c+d|^2} \\
&= \frac{Im(|c|^2(\cos\psi + i\sin\psi) + |d|^2(\cos\psi - i\sin\psi))}{|c+d|^2} \\
&= \frac{\sin\psi(|c|^2 - |d|^2)}{|c+d|^2} \geq 0,
\end{aligned}
$$

kun $0 \leq \psi \leq \pi$. Tällöin $Arg\left(\frac{ce^{i\psi}+de^{-i\psi}}{c+d}\right) \in [0, \pi]$ ja

$$
\begin{aligned}
|\theta[f(A_0), f(A_\psi)]| &= \left|Arg\left(\frac{ce^{i\psi} + de^{-i\psi}}{c+d}\right)\right| \\
&= Arg\left(\frac{ce^{i\psi} + de^{-i\psi}}{c+d}\right) \\
&= \psi = Arg(e^{i\psi}).
\end{aligned}
$$

Tällöin, kaikilla $\psi \in [0, \pi]$, $\frac{ce^{i\psi}+de^{-i\psi}}{c+d}$ on luvun $e^{i\psi}$ positiivinen ja reaalinen kerroin, eli myös $\frac{c+de^{-2i\psi}}{c+d}$ on positiivinen ja reaalinen. Jos $d \neq 0$, niin joukko $\{0 \leq \psi \leq \pi : \frac{c+de^{-2i\psi}}{c+d}\}$ olisi ympyrä, jonka keskipiste olisi $\frac{c}{c+d}$ ja säde $\frac{|d|}{|c+d|}$, eli joukko ei sisällä positiivista reaaliakselia. Tällöin $\psi \neq 0$, eli saadaan ristiriita, joten $d = 0$. Silloin $f_z(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0)) = f'(z_0)$ on olemassa, ja siten f on differentioituva z_0:ssa.
Lopuksi osoitetaan, että väitteestä (iii) seuraa (i). Todistus on samanlainen

kuin yllä oleva, ainoastaan lyhyempi. Konformisuudesta saadaan suoraan

$$Arg\left(\frac{ce^{i\psi}+de^{-i\psi}}{c+d}\right)=\psi=Arg(e^{i\psi}),$$

ja siten saadaan kuten yllä, että f on differentioituva z_0:ssa. □

Seuraava lause on yleinen versio edellisestä Lauseesta 5.8, joka yhdistää konformikuvaukset analyyttisiin funktioihin.

Lause 5.9. *Olkoon D alue. Funktio $f : D \to \mathbb{C}$ on konforminen, jos ja vain jos se on analyyttinen ja injektio.*

Todistus. Oletetaan ensin, että f on konformikuvaus alueessa D. Tällöin Määritelmän 5.7 nojalla f on diffeomorfismi, ja siten Lauseesta 5.8 saadaan, että f on differentioituva jokaisessa D:n pisteessä. Siten f on analyyttinen ja injektio D:ssä.
Oletetaan sitten, että f on analyyttinen ja injektio D:ssä. Tällöin f kuuluu luokkaan $C^1(D)$ ja Lauseen 4.26 mukaan $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Silloin Huomautuksesta 5.6.(i) saadaan, että Jacobin determinantti $J_f(z) = |f'(z)|^2 > 0$ kaikilla $z \in D$, joten f on diffeomorfismi Määritelmän 5.5 mukaisesti. Nyt Lauseen 5.8 mukaan f on konformikuvaus. □

Huomautus 5.10. *Edellisestä lauseesta seuraa suoraan, että jos f ja g ovat konformikuvauksia, niin $f \circ g$ on myös konformikuvaus. Lauseista 5.9 ja 4.27 taas saadaan, että jos f on konformikuvaus alueessa D, niin $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$ ja $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(z)} \neq 0$, joten myös käänteisfunktio on konforminen.*

Seuraava lause osoittaa minkä muotoisia ovat konformikuvaukset, jotka kuvaavat yksikkökiekon yksikkökiekoksi.

Lause 5.11. *Funktio $f : \Delta \to \mathbb{C}$, joka kuvaa yksikkökiekon $\Delta = \Delta(0,1)$ itselleen konformisesti, on muotoa*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{c+z}{1+\bar{c}z}, \tag{14}$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja $c \in \mathbb{C}$, jolle $|c| < 1$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että jokainen funktio, joka on muotoa (14), kuvaa kiekon Δ itselleen konformisesti. Olkoon $g(z) = e^{i\theta}z$ ja $h(z) = \frac{c+z}{1+\bar{c}z}$, jolloin $f = g \circ h$ kiekossa Δ. Funktio g kiertää kiekkoa ympäri vastapäivään ja $g(0) = 0$, niin silloin g on konformikuvaus Δ:sta itselleen.
Tarkastellaan sitten funktiota h. Se on analyyttinen Δ:ssa, koska sen nimittäjä on nolla ainoastaan pisteessä $-\frac{1}{\bar{c}} \notin \Delta$. Osoitetaan, että $|h(z)| < 1$, jos ja vain jos $|z| < 1$. Tämä saadaan seuraavasta

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{c+z}{1+\bar{c}z}\right|^2 = \frac{|c+z|^2}{|1+\bar{c}z|^2} = \frac{|c|^2+|z|^2+2Re(\bar{c}z)}{|1|^2+|\bar{c}z|^2+2Re(\bar{c}z)} < 1 \\
\Leftrightarrow\quad & |c|^2+|z|^2 < 1+|c|^2|z|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & |z|^2(1-|c|^2) < 1-|c|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & |z|^2 < \frac{1-|c|^2}{1-|c|^2} = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & |z| < 1.
\end{aligned}$$

Toisin sanoen $h(\Delta) \subset \Delta$.
Olkoon $k(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$. Tällöin $|k(z)| < 1$, jos ja vain jos $|z| < 1$, koska

$$\begin{aligned} \left|\frac{z-c}{1-\bar{c}z}\right|^2 &= \frac{|z|^2+|c|^2+2Re(z(-\bar{c}))}{|1|^2+|\bar{c}z|^2+2Re(-\bar{c}z)} < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & |z|^2+|c|^2 < 1+|c|^2|z|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & |z|^2(1-|c|^2) < 1-|c|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & |z| < 1. \end{aligned}$$

Siten myös $k(\Delta) \subset \Delta$. Tämän lisäksi kaikilla $z \in \Delta$ on

$$\begin{aligned} k(h(z)) &= \frac{\frac{c+z}{1+\bar{c}z} - c}{1-\bar{c}\frac{c+z}{1+\bar{c}z}} = \frac{\frac{c+z-c(1+\bar{c}z)}{1+\bar{c}z}}{\frac{1+\bar{c}z-\bar{c}(c+z)}{1+\bar{c}z}} \\ &= \frac{z-c\bar{c}z}{1-c\bar{c}} = \frac{z(1-c\bar{c})}{1-c\bar{c}} = z \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} h(k(z)) &= \frac{c+\frac{z-c}{1-\bar{c}z}}{1+\bar{c}\frac{z-c}{1-\bar{c}z}} = \frac{\frac{c(1-\bar{c}z)+z-c}{1-\bar{c}z}}{\frac{1-\bar{c}z+\bar{c}(z-c)}{1-\bar{c}z}} \\ &= \frac{z-c\bar{c}z}{1-c\bar{c}} = \frac{z(1-c\bar{c})}{1-c\bar{c}} = z. \end{aligned}$$

Täten h on injektio Δ:ssa ja

$$\Delta = [h \circ k](\Delta) = h(k(\Delta)) \subset h(\Delta) \subset \Delta,$$

eli $\Delta = h(\Delta)$.
Nyt funktiot g ja h kuvaavat Δ:n konformisesti itseensä, joten

$$f(\Delta) = [g \circ h](\Delta) = g(h(\Delta)) = g(\Delta) = \Delta.$$

Näytetään sitten, että mielivaltainen funktio f, joka kuvaa kiekon Δ konformisesti itseensä, on muotoa (14). Olkoon $c = -f^{-1}(0)$ ja olkoon konformikuvaus $k : \Delta \to \Delta$ kuten yllä. Tarkastellaan funktiota $g : \Delta \to \Delta$, $g = f \circ k$, joka kuvaa Δ:n konformisesti itseensä, ja jolle on

$$g(0) = f(k(0)) = f(-c) = f(f^{-1}(0)) = 0.$$

Koska $|g(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in \Delta$, niin Schwarzin lemman 1.45 nojalla $|g'(0)| \leq 1$. Koska g on konforminen, niin Lauseista 4.27 ja 5.9 saadaan, että $g^{-1} : \Delta \to \Delta$ on konformikuvaus ja

$$g^{-1}(0) = [f \circ k]^{-1}(0) = k^{-1}(f^{-1}(0)) = k^{-1}(-c) = 0.$$

Tällöin Schwarzin lemmasta seuraa, että $\frac{1}{|g'(0)|} = |(g^{-1})'(0)| \leq 1$, jolloin saadaan, että $|g'(0)| = 1$. Tämä pätee ainoastaan, kun g on muotoa $g(z) = e^{i\theta}z$ jollekin $\theta \in \mathbb{R}$, Schwarzin lemman mukaisesti.
Todistuksen aikaisemmassa osassa huomattiin, että funktion $h : \Delta \to \Delta$, $h(z) = \frac{c+z}{1+\bar{c}z}$, käänteisfunktio on $k(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$, jolloin saadaan, että $f = g \circ k^{-1} = g \circ h$, eli

$$f(z) = g(h(z)) = e^{i\theta}\frac{c+z}{1+\bar{c}z}.$$

$\square$

Ennen kuin jatketaan eteenpäin, kohti Riemannin kuvauslausetta, niin esitellään lyhyesti laajennettu kompleksitaso ja Möbius-kuvaus, joka on nimetty August F. Möbiuksen (1790-1868) kunniaksi.

Laajennettu kompleksitaso: Kun lisätään kompleksitasoon äärettömyyspiste ∞, joka ei ole kompleksiluku, niin saadaan laajennettu kompleksitaso, jota merkitään symbolilla $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Laajennetussa kompleksitasossa kompleksiluvuille pätevät samat laskusäännöt kuin aikaisemminkin, ja lisäksi sovitaan seuraavat laskusäännöt:

$$\begin{cases} \infty \pm z = z \pm \infty = \infty & , \text{kun } z \in \mathbb{C} \\ \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty & , \text{kun } z \in \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\} \\ \frac{z}{\infty} = 0 & , \text{kun } z \in \mathbb{C} \\ \frac{z}{0} = \infty & , \text{kun } z \in \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\} \end{cases}$$

Muita laskusääntöjä ei määritellä, kuten $\infty + \infty$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ tai $0 \cdot \infty$.

Määritelmä 5.12. *Olkoon D alue $\hat{\mathbb{C}}$:ssa. Funktio $f : D \to \hat{\mathbb{C}}$ on konforminen, jos se on injektio ja analyyttinen, paitsi erikoispisteissä, jotka ovat napoja.*

Edellisen määritelmän injektiivisyys takaa sen, että voi olla korkeintaan yksi piste $z_0 \in D$ siten, että $f(z_0) = \infty$, jolloin funktiolla f voi olla korkeintaan yksi napa alueessa D.

Kaikilla ensimmäisen asteen analyyttisillä rationaalifunktioilla on yksinkertaisia kuvausominaisuuksia. Möbius-kuvauksilla on myös hämmästyttäviä geometrisiä ominaisuuksia, ja tästä syystä ne antavat yksinkertaisia esimerkkejä konformikuvauksista.

Määritelmä 5.13 (Möbius-kuvaus)**.** *Rationaalifunktiota $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, joka on muotoa*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$, kutsutaan Möbius-kuvaukseksi.

Huomautus 5.14. *Möbius-kuvaukset ovat konformisia, koska:*
(i) Möbius-kuvaukset ovat analyyttisiä koko kompleksitasossa, paitsi erikoispisteissä, jotka ovat napoja. Tämä pätee, koska jos funktio f on muotoa $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, missä polynomeilla $P(z)$ ja $Q(z)$ ei ole yhteisiä nollakohtia, niin f:n navat ovat $Q(z)$:n nollakohdissa, ja lisäksi f on differentioituva jokaisessa pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

(ii) Möbius-kuvaukset ovat myös injektioita, koska pisteille $z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ pätee, että

$$\begin{aligned}
& f(z_1) = f(z_2) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \\
\Leftrightarrow \quad & (az_1 + b)(cz_2 + d) = (cz_1 + d)(az_2 + b) \\
\Leftrightarrow \quad & acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd = acz_1z_2 + bcz_1 + adz_2 + bd \\
\Leftrightarrow \quad & z_1(ad - bc) - z_2(ad - bc) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (z_1 - z_2)(ad - bc) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & z_1 = z_2.
\end{aligned}$$

Esitellään seuraavaksi kolme lemmaa, jotka valmistelevat kohti Riemannin kuvauslausetta. Ensimmäinen näistä kertoo, että yhdesti yhtenäinen alue säilyy konformikuvauksessa. Toinen lemma taas sanoo, että yhdesti yhtenäinen alue, joka ei ole koko kompleksitaso, voidaan kuvata konformisesti alueeksi, joka kuuluu yksikkökiekon sisälle.

Lemma 5.15. *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ konformikuvaus, missä D on yhdesti yhtenäinen alue. Tällöin joukko $D' = f(D)$ on myös yhdesti yhtenäinen alue.*

Todistus. Jos $D' = \mathbb{C}$, niin väite on tosi. Oletetaan siten, että $D' \neq \mathbb{C}$. Koska funktio f on analyyttinen ja ei-vakio, niin Avoimen kuvauksen lauseen 4.25 mukaan D' on alue.
Osoitetaan, että $n(\beta, w) = 0$ aina kun piste $w \in \mathbb{C} \backslash D'$ ja polku β on suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva D':ssa. Kiinnitetään tällaiset w ja β, ja olkoon $\beta : [a, b] \to \mathbb{C}$. Määritellään polku $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ siten, että $\gamma = f^{-1} \circ \beta$, eli $\beta(t) = f(\gamma(t))$, kun $t \in [a, b]$. Tällöin γ on suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva alueessa D.
Määritelmän 2.6 nojalla γ on nollahomologinen D:ssä. Koska $w \notin D'$, niin funktio $\frac{f'}{f-w}$ on analyyttinen D:ssä. Silloin Cauchyn lauseesta 2.3 saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t)) - w} dt = \int_a^b \frac{\beta'(t)}{\beta(t) - w} dt \\
&= \int_\beta \frac{1}{\varsigma - w} d\varsigma = 2\pi i n(\beta, w),
\end{aligned}$$

eli $n(\beta, w) = 0$. Toisin sanoen, alue $D' = f(D)$ on yhdesti yhtenäinen. □

Lemma 5.16. *Olkoon D yhdesti yhtenäinen alue, $D \neq \mathbb{C}$, ja $z_0 \in D$. Tällöin on olemassa konformikuvaus $f : D \to \mathbb{C}$ siten, että $f(D) \subset \Delta = \Delta(0, 1)$, $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.*

Todistus. Osoitetaan, että voidaan muodostaa funktio f siten, että $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, jolle pätevät halutut ominaisuudet. Valitaan piste $b \in \mathbb{C} \backslash D$ ja määritellään funktio $f_1 : D \to \mathbb{C}$ asettamalla $f_1(z) = z - b$. Tällöin $f_1(D) = D_1$ on yhdesti yhtenäinen alue, joka ei sisällä origoa.
Lauseen 2.7 nojalla voidaan määritellä funktio f_2 siten, että se on jokin $\log z$:n haara D_1:ssä. Lisäksi tiedetään, että f_2 on injektio ja analyyttinen D_1:ssä. Kiinnitetään piste $w_0 \in D_2 = f_2(D_1)$ ja $r > 0$ siten, että suljettu

kiekko $\bar{\Delta}(w_0, r) \subset D_2$.
Merkitään $\tilde{w}_0 = w_0 + 2\pi i$, ja osoitetaan, että $\bar{\Delta}(\tilde{w}_0, r) \cap D_2 = \emptyset$. Tehdään vastaoletus: oletetaan, että $\tilde{w} \in \bar{\Delta}(\tilde{w}_0, r) \cap D_2$. Tällöin $\tilde{w} = f_2(\tilde{z}) = \log \tilde{z}$ jollakin $\tilde{z} \in D_1$, ja toisaalta $\tilde{w} = w + 2\pi i$ jollekin $w \in \bar{\Delta}(w_0, r)$. Silloin on totta myös, että $w = f_2(z) = \log z$, jolloin saadaan

$$\tilde{z} = e^{f_2(\tilde{z})} = e^{\tilde{w}} = e^{w+2\pi i} = e^w = e^{f_2(z)} = z.$$

Tästä saadaan, että $w = f_2(z) = f_2(\tilde{z}) = \tilde{w} = w + 2\pi i$, joka on ristiriita, eli $\bar{\Delta}(\tilde{w}_0, r) \cap D_2 = \emptyset$. Tällöin $|z - \tilde{w}_0| > r$ kaikilla $z \in D_2$.
Määritellään sitten funktio f_3 asettamalla $f_3(z) = \frac{r}{z - \tilde{w}_0}$, jolloin $|f_3(z)| < 1$ kaikilla $z \in D_2$, ja siten $D_3 = f_3(D_2) \subset \Delta = \Delta(0, 1)$. Koska $0 \cdot (-\tilde{w}_0) - r \cdot 1 = -r \neq 0$, niin Määritelmästä 5.13 seuraa, että f_3 on Möbius-kuvaus, ja siten konforminen. Silloin $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ on alueen D konformikuvaus ja $f_3(f_2(f_1(D))) \subset \Delta$. Olkoon $c = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z_0)$.
Lauseen 5.11 nojalla funktio $f_4 : \Delta \to \Delta$, $f_4(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$, kuvaa Δ:n itseensä konformisesti ja $f_4(c) = 0$. Tällöin $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ kuvaa D:n konformisesti kiekkoon Δ ja $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z_0) = 0$. Nyt Lauseesta 4.26 seuraa, että $d = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(z_0) \neq 0$.
Olkoon $u = \exp(-iArg\ d)$. Määritellään funktio $f_5 : \Delta \to \mathbb{C}$ asettamalla $f_5(z) = uz$. Tällöin $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ on D:n konformikuvaus kiekkoon Δ ja saadaan, että $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) = f_5'(0)(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(z_0) = ud = |d| > 0$. (Edellinen saadaan kaavoista $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ ja $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{Argz}{n}) + i \sin(\frac{Argz}{n}))$, jolloin $\exp(iArg\ d) = \cos(Arg\ d) + i \sin(Arg\ d) = \frac{d}{|d|}$, eli $ud = \exp(-iArg\ d)d = |d|$.) □

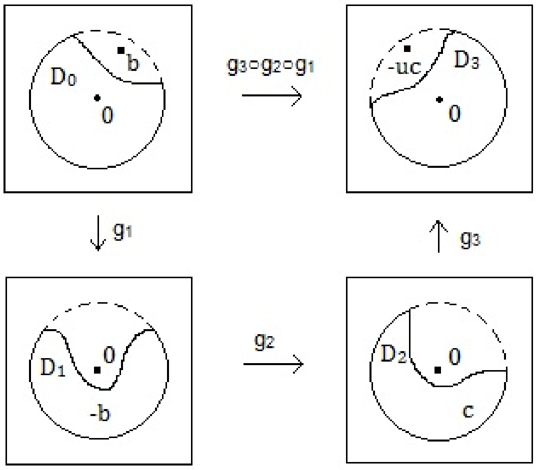
Kolmas lemma tuo Paul Koeben (1882-1945) näkemyksen esille, jota tullaan käyttämään Riemannin kuvauslauseen todistuksessa.

Lemma 5.17. *Oletetaan, että alue D on yhdesti yhtenäinen, $D \neq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, ja että $f : D \to \mathbb{C}$ on konformikuvaus siten, että $f(D) \subset \Delta = \Delta(0, 1)$, $f(D) \neq \Delta$, $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$. Tällöin on olemassa konformikuvaus $g : D \to \mathbb{C}$ siten, että $g(D) \subset \Delta$, $g(z_0) = 0$ ja $g'(z_0) > 0$, mutta $g'(z_0) > f'(z_0)$.*

Todistus. Merkitään $D_0 = f(D)$. Määritellään funktio $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$ seuraavasti. Valitaan piste $b \in \Delta \backslash D_0$. Koska $f(z_0) = 0$, niin origo kuuluu alueeseen D_0, $b \neq 0$. Olkoon $g_1(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$, jolloin Lauseesta 5.11 saadaan, että se kuvaa kiekon Δ konformisesti itselleen, eli kuvaa yhdesti yhtenäisen alueen $D_0 \subset \Delta$ toiseksi yhdesti yhtenäiseksi alueeksi $D_1 = g_1(D_0) \subset \Delta$. Origo ei kuulu alueeseen D_1, koska $b \notin D_0$, mutta $-b \in D_1$, kun $g_1(0) = -b$. Derivoidaan g_1

$$g_1'(z) = \frac{1 - \bar{b}z - (-\bar{b})(z - b)}{(1 - \bar{b}z)^2} = \frac{1 - |b|^2}{(1 - \bar{b}z)^2},$$

jolloin $g_1'(0) = 1 - |b|^2$.



Lauseen 2.7 nojalla on olemassa $\log z$:n haara D_1:ssä. Valitaan näistä yksi ja olkoon se funktio L. Määritellään $g_2 : D_1 \to \mathbb{C}$ asettamalla $g_2(z) = \exp(\frac{L(z)}{2}) = z^{1/2}$. Tällöin $|g_2(z)| = \sqrt{|z|} < 1$, kun $z \in D_1$. Jos $g_2(z) = g_2(\tilde{z})$, niin $z = (g_2(z))^2 = (g_2(\tilde{z}))^2 = \tilde{z}$, joten g_2 on injektio D_1:ssä. Toisin sanoen, g_2 on konformikuvaus D_1:stä alueeseen $D_2 = g_2(D_1) \subset \Delta$, joka on yhdesti yhtenäinen.
Olkoon $c = g_2(-b)$, $c \in D_2$, ja huomioidaan, että $g_2'(z) = \frac{1}{2z^{1/2}} = \frac{1}{2g_2(z)}$, eli $g_2'(-b) = \frac{1}{2g_2(-b)} = \frac{1}{2c}$. Lopuksi määritellään funktio $g_3 : \Delta \to \Delta$ asettamalla $g_3(z) = u\frac{z-c}{1-\bar{c}z}$, missä $u = e^{iArgc}$. Tällöin g_3 kuvaa Δ:n konformisesti itselleen, joten alue $D_3 = g_3(D_2) \subset \Delta$ ja origo kuuluu alueeseen D_3, $g_3(c) = 0$. Funktion g_3 derivaatta on

$$g_3'(z) = \frac{u(1-\bar{c}z) - (-\bar{c})(uz - uc)}{(1-\bar{c}z)^2} = \frac{u - u|c|^2}{(1-\bar{c}z)^2},$$

eli

$$g_3'(c) = \frac{u(1-|c|^2)}{(1-|c|^2)^2} = \frac{u}{1-|c|^2}.$$

Nyt $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$ kuvaa D:n konformisesti alueeseen D_3. Lisäksi

$$\begin{aligned} g(z_0) &= g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f(z_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(0) \\ &= g_3 \circ g_2(-b) = g_3(c) = 0 \end{aligned}$$

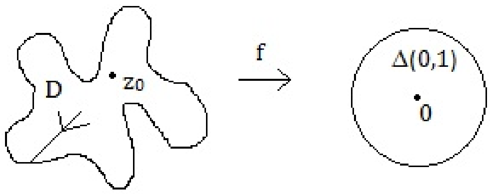
ja

$$\begin{aligned} g'(z_0) = g_3'(c)g_2'(-b)g_1'(0)f'(z_0) &= \frac{u}{1-|c|^2}\frac{1}{2c}(1-|b|^2)f'(z_0) \\ &= \frac{u(1-|c|^4)}{2c(1-|c|^2)}f'(z_0) = \frac{u}{2c}(1+|c|^2)f'(z_0) \\ &= \frac{1+|c|^2}{2|c|}f'(z_0) > f'(z_0), \end{aligned}$$

koska $\frac{u}{c} = \frac{1}{|c|}$ $(u|c| = c)$, $|c| = |g_2(-b)| = |b|^{1/2}$ ja $1 + |c|^2 > 2|c|$. $\square$

Nyt on saatu tarvittavat välineet koottua, jotta voidaan siirtyä Riemannin kuvauslauseeseen. Tässä esitetty todistus perustuu Montelin lauseeseen ja Koeben ideaan, joka esiteltiin edellisessä lemmassa.

Lause 5.18 (Riemannin kuvauslause)**.** *Oletetaan, että alue D on yhdesti yhtenäinen, $D \neq \mathbb{C}$, ja $z_0 \in D$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen konformikuvaus $f : D \to \Delta(0,1)$ siten, että $f(D) = \Delta(0,1)$, $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.*



Todistus. Osoitetaan ensin kuvauksen olemassaolo. Määritellään perhe $\mathfrak{F}$ siten, että

$$\mathfrak{F} = \{f : D \to \Delta(0,1) : f \text{ on konformikuvaus, } f(z_0) = 0 \text{ ja } f'(z_0) > 0\}.$$

Näytetään, että $\mathfrak{F}$ ei ole tyhjä. Valitaan piste $a \notin D$. Silloin funktio $g(z) = z - a$ on analyyttinen ja injektio alueessa D, ja $g(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Koska D on yhdesti yhtenäinen, niin Lauseen 2.7 nojalla on olemassa funktio $h : D \to \mathbb{C}$ siten, että $h(z) = \log g(z)$, eli $g(z) = e^{h(z)}$, missä h on analyyttinen. Määritellään funktio $\varphi : D \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ asettamalla $\varphi(z) = e^{\frac{1}{2}h(z)}$. Koska g ei ole vakio D:ssä, niin silloin funktiot h ja φ eivät myöskään ole vakioita. Tällöin Avoimen kuvauksen lauseen 4.25 nojalla joukko $\varphi(D) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ on avoin.

Jos $w \in \varphi(D)$, niin $-w \notin \varphi(D)$. Todistetaan tämä antiteesin kautta. Oletetaan, että $w, -w \in \varphi(D)$. Tällöin on olemassa pisteet $z_1, z_2 \in D$ siten, että $\exp(\frac{1}{2}h(z_1)) = w$ ja $\exp(\frac{1}{2}h(z_2)) = -w = w\exp(\pi i)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} & e^{\frac{1}{2}h(z_1)} = e^{\frac{1}{2}h(z_2)-\pi i} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}h(z_1) = \frac{1}{2}h(z_2) - \pi i + 2\pi i k \\ \Leftrightarrow \quad & h(z_1) = h(z_2) + (2k-1)2\pi i, \end{aligned}$$

jollekin $k \in \mathbb{Z}$. Tästä saadaan

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1 - a + a = g(z_1) + a = e^{h(z_1)} + a \\ &= e^{h(z_2)+(2k-1)2\pi i} + a = e^{h(z_2)} + a \\ &= g(z_2) + a = z_2 - a + a = z_2, \end{aligned}$$

eli $z_1 = z_2$, joten $w = \varphi(z_1) = \varphi(z_2) = -w$. Tämä pätee ainoastaan, kun $w = 0$, josta saadaan ristiriita, koska $0 \notin \varphi(D)$. Täten saatiin, että jos $w \in \varphi(D)$, niin $-w \notin \varphi(D)$.

Valitaan piste $b \in \varphi(D)$. Koska $\varphi(D)$ on avoin, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $\bar{\Delta}(b,r) \subset \varphi(D)$. Tällöin yllä olevan ehdon nojalla on $\bar{\Delta}(-b,r) \cap \varphi(D) = \emptyset$. Olkoon $\psi : \mathbb{C}\backslash\{-b\} \to \mathbb{C}$ kuvaus $\psi(z) = \frac{r}{z+b}$. Tällöin kaikille $w \in \varphi(D)$ pätee $|w+b| = |w-(-b)| > r$, joten $|\psi(z)| < 1$ kaikilla $z \in D$, eli

$\psi \circ \varphi(D) \subset \Delta(0,1)$.
Funktio φ on injektio, koska

$$\begin{aligned} &\varphi(z_1) = \varphi(z_2) \\ \Leftrightarrow \quad & e^{\frac{1}{2}h(z_1)} = e^{\frac{1}{2}h(z_2)} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}h(z_1) = \frac{1}{2}h(z_2) + k2\pi i \\ \Leftrightarrow \quad & h(z_1) = h(z_2) + k4\pi i, \end{aligned}$$

jollekin $k \in \mathbb{Z}$, eli

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1 - a + a = g(z_1) + a = e^{h(z_1)} + a = e^{h(z_2)+k4\pi i} + a \\ &= a^{h(z_2)} + a = g(z_2) + a = z_2 - a + a = z_2. \end{aligned}$$

Koska ψ ja φ ovat analyyttisiä, niin $\psi \circ \varphi : D \to \Delta$ on analyyttinen injektio, eli konformikuvaus. Tällöin $\psi \circ \varphi \in \mathfrak{F}$, eli perhe $\mathfrak{F}$ ei ole tyhjä.
Oletetaan sitten, että on olemassa $r > 0$, jolle $\Delta(z_0, r) \subset D$. Koska $|f(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in D$, niin Cauchyn estimaatista 1.42 saadaan

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| \leq \frac{1}{r}.$$

Tällöin joukko $\{f'(z_0) : f \in \mathfrak{F}\}$ on rajoitettu. Olkoon l tämän joukon yläraja. Voidaan valita jokaiselle $n \in \mathbb{Z}_+$ funktio $f_n \in \mathfrak{F}$ siten, että

$$l - \frac{1}{n} \leq f_n'(z_0) \leq l.$$

Koska $\mathfrak{F}$ on lokaalisti rajoitettu D:ssä, niin Montelin lauseen 3.29 nojalla $\mathfrak{F}$ on normaaliperhe, eli jonolla (f_n) on osajono (f_{n_k}), joka suppenee tasaisesti D:n kompakteissa osajoukoissa kohti rajafunktiota f. Tällöin on $f(z_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}'(z_0) = l$, eli f ei ole vakio. Koska f on analyyttinen ja ei-vakio D:ssä, niin Lauseen 4.29 nojalla f on injektio D:ssä. Koska $f_n \in \mathfrak{F}$, kaikilla n, niin $f(D) \subset \bar{\Delta}$. Avoimen kuvauksen lauseen 4.25 mukaan joukko $f(D)$ on avoin, eli $f(D) \subset \Delta$, joten $f \in \mathfrak{F}$.
Näytetään vielä, että $f(D) = \Delta$. Jos $f(D) \neq \Delta$, niin Lemman 5.17 nojalla olisi olemassa konformikuvaus $g : D \to \mathbb{C}$ siten, että $g'(z_0) > f'(z_0) = l$. Tämä ei ole mahdollista, koska l on joukon $\{f'(z_0) : f \in \mathfrak{F}\}$ yläraja. Tällöin $f(D) = \Delta$, ja saadaan haluttu konformikuvaus $f : D \to \Delta$, jolloin kuvauksen olemassaolo on todistettu.
Lopuksi osoitetaan kuvauksen yksikäsitteisyys. Olkoon $g : D \to \Delta$ toinen konformikuvaus, jolle $g(z_0) = 0$ ja $g'(z_0) > 0$. Merkitään $\varphi = g \circ f^{-1}$. Silloin φ kuvaa yksikkökiekon Δ konformisesti itselleen ja

$$\varphi(0) = g \circ f^{-1}(0) = g(z_0) = 0$$

sekä

$$\varphi'(z) = \frac{d}{dz}g(f^{-1}(z)) = g'(f^{-1}(z))(f^{-1})'(z) = \frac{g'(f^{-1}(z))}{f'(z)},$$

eli $\varphi'(0) = \frac{g'(z_0)}{f'(0)} > 0$. Lauseesta 5.11 seuraa, että φ on muotoa $\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{c+z}{1+\bar{c}z}$, missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja $c \in \mathbb{C}$ toteuttaa $|c| < 1$. Koska $\varphi(0) = 0$, niin täytyy olla $c = 0$, jolloin φ saa muodon $\varphi(z) = e^{i\theta}z$. Lisäksi $\varphi'(0) > 0$, eli $e^{i\theta} = 1$, joten $\varphi(z) = z$. Tällöin $g(z) = \varphi(f(z)) = f(z)$ kaikilla $z \in D$. $\square$

Riemannin kuvauslause osoittaa, että minkä tahansa yhdesti yhtenäisen alueen D voi konformisesti kuvata toiselle yhdesti yhtenäiselle alueelle D'. Kuvauslause ei kuitenkaan kerro mitä tapahtuu, kun piste $z \in D$ lähestyy sen raunaa ∂D, ja kuinka reunat ∂D ja $\partial D'$ vastaavat toisiaan. Erityisesti Riemannin kuvauslause ei osoita, että konformikuvaus olisi jatkuva alueen D sulkeumassa $D \cup \partial D$, ja että kuvaus saavuttaisi injektiomaisen vastaavuuden sulkeumien $D \cup \partial D$ ja $D' \cup \partial D'$ välille. Tämä johtuu siitä, että yhdesti yhtenäisien alueiden käsite on hyvin laaja, ja se sallii myös tapauksia, joissa alueiden reunavastaavuus ei ole mahdollista.

Seuraavaksi tutustutaan pintapuolisesti mitä tapahtuu konformikuvausten reunoilla, jättäen todistukset pois. Todistetaan ainoastaan kappaleen viimeinen lause, joka on enemmän alkuperäisen kuvauslauseen mukainen, jonka Riemann muotoili.

Aloitetaan muutamalla merkinnällä, ja sitten esitellään lemma, missä muotoillaan funktion laajennus.

Merkintä: Kun ollaan laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$, ja joukko $A \subset \hat{\mathbb{C}}$, niin merkitään sen sulkeumaa $\hat{A}$ ja reunaa $\hat{\partial} A$. Erityisesti, jos alue $D \subset \mathbb{C}$, ja jos se on rajoitettu, niin $\hat{D} = \bar{D}$ ja $\hat{\partial} D = \partial D$. Jos taas alue D ei ole rajoitettu, niin $\hat{D} = \bar{D} \cup \{\infty\}$ ja $\hat{\partial} D = \partial D \cup \{\infty\}$.

Määritelmä 5.19. *Funktio f on homeomorfismi, jos se on bijektio ja jatkuva, ja jos funktio f^{-1} on jatkuva.*

Lemma 5.20. *Olkoon $f : \Delta \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja olkoon $D = f(\Delta)$ alue, missä $\Delta = \Delta(0,1)$. Oletetaan, että $\lim_{\varsigma \to z} f(\varsigma)$ on olemassa laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$ kaikilla $z \in \partial\Delta$. Tällöin funktio $\tilde{f} : \bar{\Delta} \to \hat{\mathbb{C}}$,*

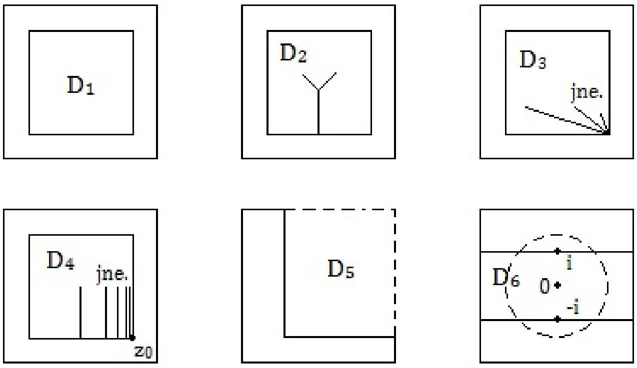
$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & , \text{jos } z \in \Delta \\ \lim_{\varsigma \to z} f(\varsigma) & , \text{jos } z \in \partial\Delta, \end{cases}$$

on f:n yksikäsitteinen ja jatkuva laajennus, ja $\tilde{f}(\bar{\Delta}) = \hat{D}$.
Jos $\tilde{f}$ on injektio, niin $\tilde{f} : \bar{\Delta} \to \hat{D}$ on homeomorfismi.

Esitellään seuraavaksi määritelmä, jonka avulla saadaan edellinen laajennus muodostettua, ja sitä kautta saadaan alueille reunavastaavuus.

Määritelmä 5.21. *(i) Alue D on äärellisesti yhtenäinen sen reunaa pitkin, jos kaikille pisteille $z \in \hat{\partial} D$ ja kaikille $r > 0$ on olemassa $s \in (0, r)$ siten, että joukko $D \cap \Delta(z, s)$ leikkaa korkeintaan äärellisen monen joukon $D \cap \Delta(z, r)$ komponentin kanssa.*
(ii) Kun edellisessä tapauksessa $D \cap \Delta(z, s)$ leikkaa täsmälleen yhden joukon $D \cap \Delta(z, r)$ komponentin kanssa, niin D on lokaalisti yhtenäinen sen reunaa pitkin.

Tutkitaan edellistä määritelmää alla olevien alueiden avulla.



Alue D_1 on lokaalisti yhtenäinen sen reunaa pitkin, ja alueet D_2 ja D_3 ovat äärellisesti yhtenäisiä niiden reunoja pitkin, mutta alue D_4 ei ole kumpaakaan. Esimerkiksi Määritelmän 5.21.(i) ehto ei toteudu D_4:ssa pienellä r pisteessä z_0.
Huomioidaan, että jos rajoittumaton alue D on äärellisesti yhtenäinen sen reunaa pitkin, niin vaaditun ehdon täytyy pitää paikkansa, kun $z = \infty$, samoin kuin kaikissa reunan ∂D pisteissä. Yllä olevasta kuvasta saadaan tällöin, että alue $D_5 = \{z \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0\}$ on lokaalisti yhtenäinen sen reunaa pitkin, kun taas kaistale $D_6 = \{z \in \mathbb{C} : |y| < 1\}$ on äärellisesti yhtenäinen sen reunaa pitkin, koska joukolla $D_6 \cap \Delta(\infty, r) = \{z \in D_6 : |z| > \frac{1}{r}\}$ on kaksi komponenttia aina kun $0 < r < 1$. Tällöin D_6 ei ole lokaalisti yhtenäinen sen reunaa pitkin, koska vaadittu ominaisuus rikkoutuu, kun $z = \infty$.

Yllä olevasta saadaan, että mielivaltainen konformikuvaus $f : \Delta \to \mathbb{C}$, missä $\Delta = \Delta(0, 1)$, ei aina laajene jatkuvaksi kuvaukseksi $\tilde{f} : \bar{\Delta} \to \hat{\mathbb{C}}$. Tämä tapahtuu ainoastaan, kun alue $D = f(\Delta)$ on riittävän säännöllinen. Kun halutaan saavuttaa konformikuvauksen jatkuvuus alueen sulkeumalla, niin on tarpeellista tehdä tarkempia ehtoja, jotka sulkevat pois sellaiset ilmiöt, kuin edellisen kuvan alueessa D_4 havaittiin.

Lause 5.22. *Olkoon D alue, $\Delta = \Delta(0, 1)$, ja olkoon $f : \Delta \to D$ konformikuvaus. Tällöin f voidaan laajentaa jatkuvaksi kuvaukseksi $\tilde{f} : \bar{\Delta} \to \hat{D}$, jos ja vain jos D on äärellisesti yhtenäinen sen reunaa pitkin.*

Lause 5.23. *Olkoon D alue, $\Delta = \Delta(0, 1)$, ja olkoon $f : \Delta \to D$ konformikuvaus. Tällöin f voidaan laajentaa homeomorfismiksi $\tilde{f} : \bar{\Delta} \to \hat{D}$, jos ja vain jos D on lokaalisti yhtenäinen sen reunaa pitkin.*

Määritelmän 4.22 voidaan nyt ilmaista myös toisin. Jos alue D on yhdesti yhtenäinen, $D \neq \mathbb{C}$, ja jos se on lokaalisti yhtenäinen sen reunaa pitkin, niin D on Jordan alue. Tämä pätee myös toisinpäin.

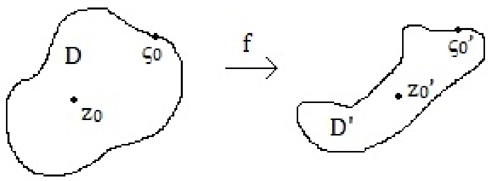
Seuraavan laajennuslauseen kehittivät toisistaan tietämättään Constantin Carathéodory (1873-1950) ja William F. Osgood (1884-1943).

Lause 5.24 (Carathéodory-Osgoodin lause). *Olkoon D alue ja olkoon $f : \Delta(0, 1) \to D$ konformikuvaus. Silloin f voidaan laajentaa homeomorfismiksi $\tilde{f} : \bar{\Delta}(0, 1) \to \hat{D}$, jos ja vain jos D on Jordan alue.*

Seuraus 5.25. *Olkoon $f : D \to D'$ konformikuvaus, missä D ja D' ovat Jordan alueita. Tällöin f voidaan laajentaa homeomorfismiksi $\tilde{f} : \hat{D} \to \hat{D}'$.*

Tutkielman viimeinen lause osoittaa, että jos on kaksi Jordan aluetta, niin saadaan muodostettua yksikäsitteinen konformikuvaus, joka kuvaa annetun pisteparin annetuksi pisteepariksi.

Lause 5.26. *Olkoot D ja D' Jordan alueita, ja olkoot pisteet $z_0 \in D$, $\varsigma_0 \in \hat{\partial} D$, $z_0' \in D'$ ja $\varsigma_0' \in \hat{\partial} D'$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen homeomorfismi $f : \hat{D} \to \hat{D}'$, joka kuvaa konformisesti D:n alueelle D' siten, että $f(z_0) = z_0'$ ja $f(\varsigma_0) = \varsigma_0'$.*



Todistus. Olkoon φ jokin konformikuvaus siten, että $\varphi : \Delta = \Delta(0,1) \to D$ ja $\varphi(0) = z_0$, ja olkoon $\tilde{\varphi}$ sen homeomorfinen laajennus kiekkoon $\bar{\Delta}$. Jos $\tilde{\varphi}^{-1}(\varsigma_0) = e^{i\theta_0}$, niin $g(z) = \tilde{\varphi}(e^{i\theta_0} z)$ määrittelee homeomorfismin $g : \bar{\Delta} \to \hat{D}$, joka kuvaa konformisesti Δ:n alueelle D, ja sille pätee, että $g(0) = \tilde{\varphi}(0) = \varphi(0) = z_0$ ja $g(1) = \tilde{\varphi}(e^{i\theta_0}) = \varsigma_0$. Samalla tavalla saadaan toinen homeomorfismi $h : \bar{\Delta} \to \hat{D}'$, joka on konformikuvaus Δ:sta alueelle D', ja $h(0) = z_0'$ ja $h(1) = \varsigma_0'$. Tällöin $f = h \circ g^{-1}$ on homeomorfismi siten, että $f : \hat{D} \to \hat{D}'$, ja jolla on halutut ominaisuudet.
Lisäksi f on yksikäsitteinen. Jos $f_0 : \hat{D} \to \hat{D}'$ on joku muu homeomorfismi, joka kuvaa konformisesti D:n alueelle D', ja jolle on $f_0(z_0) = z_0'$ ja $f_0(\varsigma_0) = \varsigma_0'$, niin $h^{-1} \circ f_0 \circ g$ on homeomorfismi siten, että se kuvaa $\bar{\Delta}$:n itselleen, ja $h^{-1} \circ f_0 \circ g(0) = h^{-1} \circ f_0(z_0) = h^{-1}(z_0') = 0$ ja $h^{-1} \circ f_0 \circ g(1) = h^{-1} \circ f_0(\varsigma_0) = h^{-1}(\varsigma_0') = 1$. Tällöin Lauseen 5.11 mukaan funktio on muotoa

$$h^{-1} \circ f_0 \circ g(z) = e^{i\theta} \frac{c+z}{1+\bar{c}z},$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja $c \in \mathbb{C}$, jolle $|c| < 1$. Ehdoista $h^{-1} \circ f_0 \circ g(0) = 0$ ja $h^{-1} \circ f_0 \circ g(1) = 1$ saadaan

$$h^{-1} \circ f_0 \circ g(z) = z$$

kaikilla $z \in \bar{\Delta}$. Näin ollen $f_0(z) = h \circ g^{-1}(z) = f(z)$ kaikilla $z \in \hat{D}$, joten f on yksikäsitteinen. $\square$

Viitteet

[1] Bruce P. Palka: *An Introduction to Complex Function Theory*, s. 33-213, 243-447
[2] Lars V. Ahlfors: *Complex Analysis*, s. 21-159, 173-184, 210-224
[3] Zeev Nehari: *Conformal Mapping*, s. 173-179
[4] Rolf Nevanlinna, V. Paatero: *Funktioteoria*, s.346-355
[5] Reinhold Remmert: *Classical Topics in Complex Function Theory*, s. 181, 183, 186
[6] Joseph Bak, Donald J. Newman: *Complex Analysis*, s. 153
[7] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis*, s. 221, 271
[8] Tero Kilpeläinen: *http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATS120.pdf*
[9] Lassi Kurittu: *http://users.jyu.fi/~lkurittu/kompleksianalyysi.pdf*
[10] Luento muistiinpanot kursseilta Kompleksianalyysi (luennoitsija Jouni Parkkonen) ja Topologia (luennoitsija Raimo Näkki)