

VISKOSITEETTI JA POIKITTAISVIRTAUS
RASKASIONITÖRMÄYSTEN HYDRODYNAMIIKASSA

Hannu Holopainen



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIIKAN LAITOS

Pro gradu

Ohjaajat:

Kari J. Eskola

Kimmo Tuominen

4. marraskuuta 2008

Alkusanat

Tämän tutkielman teko alkoi alkuvuonna 2008 erikoistyöni ”Viskoottinen hydrodynamiikka suurienergiaisten raskasioneitörmäysten hydrodynamiikassa” pohjalta. Alkuvuosi kului kynän ja paperin ääressä teoriaa johtaen ja kesä meni simulaatiota ohjelmoidessa.

Kiitos ohjaajilleni professori Kari J. Eskolalle ja yliassistentti Kimmo Tuomiselle. Kiitos myös emeritusprofessori Vesa Ruuskaselle hyvistä kommentteista. Kiitos lisäksi työtovereille yliopistolla ja erityisen suuret kiitokset haluan osoittaa FT Harri Niemelle, joka oli suurena apuna simulaation tekemisessä. Lämpimät kiitokset myös puolisololleni Pinjalle, joka on jaksanut tukea minua tämän tutkielman kanssa.

Kiitos Fysiikan tutkimuslaitokselle rahallisesta tuesta.

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tarkastellaan suurienergiaisen raskasionitörmäyksen mallintamista hydrodynamiikan keinoin. Alkutila saadaan EKRT-mallista, aikakehitys hoidetaan ideaalisella relativistisella hydrodynamiikalla ja irtikytketyminen tehdään Cooper-Frye-menetelmällä. Tutkielmaa varten on tehty atsimuuttisymmetrinen ja skaalavirtausta törmäysakselin suunnassa käyttävä simulaatio, jolla saadaan realistisella tavalla laskettua BNL:n RHIC-kiihdyttimen $\sqrt{s} = 200$ A GeV Au+Au-törmäysten poikittaisliikemääräjakaumat pionien ja kaonien tapauksessa keskeisissä törmäyksissä. Samaa menetelmää käyttäen tehdään ennuste CERNin LHC-kiihdyttimen $\sqrt{s} = 5500$ A GeV Pb+Pb-törmäysten poikittaisliikemääräjakaumista pioneille, kaoneille ja protoneille. Lisäksi tutkielmassani johdetaan Navier-Stokes-teorian liikeyhtälöt sylinterisymmetrisessä tapauksessa, mutta niitä ei ratkaista mahdollisten numeeristen epästabiilisuuksien takia. Viskositeetin aiheuttamaa korjausta kuitenkin tarkastellaan systeemin irtikytketyksessä. Tuloksena saadaan, että korjaus mittattaviin hiukkasjakaumiin on pieni arvioidulla hydrodynamiikan pätevyysalueella, joka on RHIC:ssä $p_T \leq 2.6$ GeV ja LHC:ssä $p_T \leq 4.6$ GeV, kun viskositeettikerroin on AdS/CTF-dualiteetin ehdottama alaraja $\eta_0 = 0.08$.

Sisältö

1	Johdanto	1
1.1	Merkintöjä	3
2	Vahvasti vuorovaikuttavan aineen tilanyhtälö	6
2.1	QGP:n tilanyhtälö	9
2.2	Hadronikaasun tilanyhtälö	11
2.3	Faasitransitio	12
3	Relativistinen hydrodynamiikka	15
3.1	Ideaalista hydrodynamiikkaa	15
3.2	Bjorkenin malli	17
3.3	Poikittaisvirtaus	18
4	Viskositeetti	21
4.1	Navier-Stokes-teoria	21
4.2	Viskositeetti ja Bjorkenin malli	22
4.3	Viskositeetti ja poikittaisvirtaus	24
5	Irtikytkeytyminen	27
5.1	Ideaalinen tilanne	28
5.2	Jakaumafunktion korjaus	29
6	Simulaatiosta	33
6.1	Alkutila	33
6.2	SHASTA	37
7	Tulokset	41
7.1	Alkutilat	41
7.2	Hydrodynaaminen aikakehitys	42
7.3	Hiukkasspektrit	45
7.4	Ennuste LHC:lle	47
7.5	Irtikytkeytymisen viskoottinen korjaus	50
8	Johtopäätökset	55

1 Johdanto

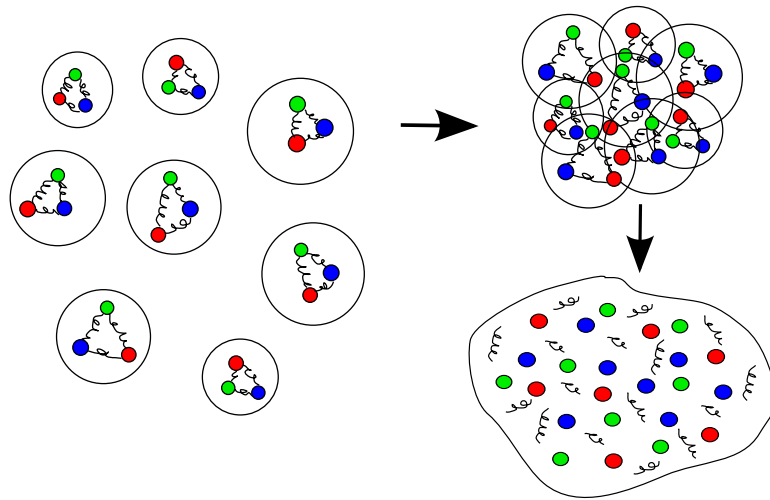
Suurienergiaisten raskasionitörmäysten tutkimuksen päämääränä on ymmärtää vahvasti vuorovaikuttavien alkeishiukkasten muodostaman tiheän aineen ominaisuuksia. Vahvaa vuorovaikutusta kuvaava teoria on kvanttikromodynamiikka (QCD, quantum chromodynamics). Vahvan vuorovaikutuksen kokevat alkeishiukkaset ovat kvarkit ja gluonit. Kvarkit ovat spin- $\frac{1}{2}$ hiukkasia, joilla on 3 mahdollista värivarausta eli väriä. Antikvarkeilla on vastaavat 3 antiväriä. Gluonit ovat spin-1 hiukkasia, joilla on 8 mahdollista väristä ja antiväristä muodostuvaa värivarausta.

Kvarkkeja ei voida havaita vapaina, koska vahvan vuorovaikutuksen voimakkuus kasvaa etäisyyden kasvaessa. Matalilla energioilla kvarkit muodostavat sidottuja tiloja eli hadroneita. Sidottujen tilojen värivaurauksen pitää olla nolla. Se on nolla, jos hadronissa on kolme eri väriä tai väri ja antiväri. Kolmen kvarkin muodostamat hiukkaset ovat baryoneja ja kolmen antikvarkin muodostamat hiukkaset ovat antibaryoneja. Kvarkin ja antikvarkin muodostamat hiukkaset ovat mesoneita.

QCD:n perusteorian ongelmana on kytkinvakion kasvaminen energian pienentyessä. Tämän takia häiriöteoriaa ei voida soveltaa QCD:ssä niin menestyksekkäästi kuin esimerkiksi kvanttielektrodynamiikassa (QED, quantum electrodynamics). Laskuja voidaan kuitenkin suorittaa Monte Carlo-simulaatioina neliulotteisessa hilassa, jossa aika ja 3 paikkaulottuvuutta on diskretisoitu. Laskujen tekeminen vaatii paljon prosessoritehoa. Tietokoneiden laskentateho on kasvanut rajusti, mutta siitä huolimatta joudutaan käyttämään vielä suhteellisen pieniä hiloja, jolloin tulokset eivät välttämättä ole luotettavia.

Hilasimulaatioiden avulla on kuitenkin pystytty kiistattomasti ennustamaan, että energiatiheden kasvaessa tarpeeksi suureksi hadronit sulautuvat yhdeksi kokonaisuudeksi, missä kvarkit ja gluonit voivat liikkua vapaasti. Tätä ainetta kutsutaan kvarkki-gluoni-plasmaksi (QGP, quark-gluon plasma). Tätä aineen olomuodon muutosta hadroneista QGP:ksi kutsutaan QCD-faasitransitioksi.

QGP:tä voidaan verrata atomien muodostamaan plasmaan. Plasmaa saadaan kun ainetta puristetaan tai lämmitetään tarpeeksi. Tällöin ei voida sanoa, mihin atomiytimeen elektronit kuuluvat. Samalla tavalla, hadronisysteemiä puristamalla tai lämmittämällä, saadaan tilanne, jossa ei voida sanoa mihin sidottuun tilaan kvarkit kuuluvat. Tällöin muodostuu ainetta, jossa kvarkit liikkuvat vapaina. Ne eivät kuitenkaan voi karata aineen ulkopuolelle. Asia on esitettyinä kuvassa 1.



Kuva 1: Hadronien muuttuminen kvarkkigluoniplasmaksi.

Laboratorio-olosuhteissa QGP:aa arvellaan muodostuvan kahden raskaan ionin (esimerkiksi kulta tai lyijy) suurienergisessä törmäyksessä. Törmäysalueella syntyy tällöin paljon hiukkasia ja riittävän tiheyden saavutettuaan systeemiin muodostuu QGP:aa. Sitä syntyy muutaman atomiytimen verran ja se muuttuu takaisin hadroneiksi noin 10^{-23} sekunnissa. Hilasimulaatioissa käytetään kuitenkin staattista, termisessä tasapainossa olevaa järjestelmää, joten tilanne on dynaamisesti varsin erilainen kuin kokeissa.

Suurienergisissä raskasionitörmäyksissä törmäykseen osallistuu noin 400 nukleonia, joten törmäyksen mallintaminen QCD:n perusteorian avulla on erittäin vaikeaa. Törmäysprosessi jaetaan yleensä seuraaviin vaiheisiin: hiukkasten ja QGP:n syntyminen primäärisissä törmäyksissä, QGP:n laajeneminen, faasitransitio hadronikaasuksi, hadronikaasun laajeneminen sekä irtikytkytyminen ja lopputilassa tapahtuvat hiukcashajoamiset.

Hydrodynamikka on teoria, joka kuvaa fluidin kollektiivista laajenemista. Hydrodynamikka ei pysty käsittelemään sitä, mitä primäärisissä törmäyksissä tapahtuu. Tiedetään kuitenkin, että törmäysalueelle muodostuu RHIC:ssä ja LHC:ssä tuhansia hiukkasia, jotka vuorovaikuttavat keskenään vahvasti. Jos nämä vuorovaikutukset ovat riittävän voimakkaita, systeemi siirtyy kohti termistä tasapainotilaa nopeasti. Kun terminen tasapaino on muodostunut, voidaan soveltaa hydrodynamikkaa.

Hydrodynamikan avulla voidaan kuvata QGP:n laajeneminen, faasitransitio ja hadronikaasun laajeneminen. Tämän onnistumiseksi tarvitaan kuitenkin vahvasti vuorovaikuttavan aineen tilanyhtälö. Tilanyhtälö kuvaa, kuinka fluidin ominaisuudet liittyvät toisiinsa, kuten esimerkiksi klassi-

sessä fysiikassa ideaalikaasun tilanyhtälö. Tilanyhtälö rakennetaan niin, että se sisältää QGP:n ja hadronikaasun, sekä niiden välisen faasitransition. Tällaista tilanyhtälöä käyttämällä saadaan faasitransitio sisällytettyä hydrodynamiikkaan.

Kun syntynyt QGP on muuttunut hadroneiksi ja laajentunut tarpeeksi, on hiukkastiheys lopulta niin pieni, että hadronit eivät enää vuorovaikuta keskenään. Hadronit siis irtikytykeytyvät systeemista vapaiksi hiukkasiksi. Tällöin fluidi ei voi olla termisessä tasapainossa, joten hydrodynamiikkaa ei voida enää käyttää.

Hydrodynamiikalla voidaan siis kuvata törmäysprosessin keskivaiheet. Teorian etuna on sen yksinkertaisuus. Tarvitaan vain alkutilan nopeus- ja energiatiheysjakaumat ja tilanyhtälö, mihin on sisällytetty faasitransitio. Suurimmat epävarmuudet hydrodynaamisissa malleissa kohdistuvatkin alkutilaan, tilanyhtälöön ja irtikytykeytymiseen.

Termisen tasapainon vaatimuksesta voidaan hieman tinkiä, kun otetaan hydrodynamiikkaan mukaan dissipatiiviset ilmiöt. Tällöin oletukseksi riittää se, että systeemi on lähellä termistä tasapainotilaa. Tämä kuitenkin hankaloittaa järjestelmän numeerista ratkaisemista. Dissipatiivisia vaikutuksia raskasioneitörmäysten mallintamisessa onkin alettu tutkia riittävän yksityiskohtaisesti vasta 2000-luvulla, kun tietokoneiden laskentateho on kasvanut.

1.1 Merkintöjä

Tutkielmassa käytetään luonnollista yksikköjärjestelmää, missä $c = \hbar = k_B = 1$ ja muut suureet määritellään näiden mukaan. Tätä yksikköjärjestelmää käytetään usein hiukkasfysiikassa.

Kolmivektoreiden sijaan käytetään usein nelivektoreita. Merkitään kolmivektoria \boldsymbol{x} :llä ja nelivektoria x^μ :lla. Kun indeksi on ylhäällä on kyseessä kontravariantti vektori. Tarvitaan myös kovariantit vektorit, joissa indeksi on alhaalla. Ne saadaan metrisen tensorin $g_{\mu\nu}$ avulla

$$u_\mu = \sum_{\nu=0,1,2,3} g_{\mu\nu} u^\nu = g_{\mu\nu} u^\nu. \quad (1)$$

Kun sama indeksi on ylhäällä ja alhaalla, suoritetaan summaus sen yli. Nelivektorien pistetuloksi määritellään

$$a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu. \quad (2)$$

Minkowskin avaruuden metrinen tensori tavallisessa karteesisessä kannas-

sa (t, x, y, z) on

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Määritellään nelipaikkavektoriksi

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}), \quad (3)$$

joka kertoo pisteen sijainnin aika-avaruudessa. Vastaavasti määritellään nelinopeus

$$u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v}), \quad (4)$$

missä Lorentzin gammatekijä

$$\gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{1/2} \quad (5)$$

on normitustekijä, joka määräytyy ehdosta

$$u^\mu u_\mu = 1. \quad (6)$$

Määritellään vielä neliliikemääräksi

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}). \quad (7)$$

Derivaatan merkintä puolestaan on

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (8)$$

Laskujen helpottamiseksi määritellään projektio-operaattori

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu = \Delta^{\nu\mu}, \quad (9)$$

joka toteuttaa seuraavat relaatiot

$$\Delta^{\mu\alpha} \Delta_\alpha^\nu = \Delta^{\mu\nu}, \quad \Delta^{\mu\nu} u_\mu = 0. \quad (10)$$

Sen avulla voidaan määritellä derivaattaoperaattori

$$\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu, \quad (11)$$

joka lokaalissa lepokoordinaatistossa $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ vastaa derivaatan avaruuskomponentteja. Määritellään vielä merkintä

$$A^{(\mu\nu)} = \left[\frac{1}{2} (\Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu + \Delta_\alpha^\nu \Delta_\beta^\mu) - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta} \right] A^{\alpha\beta}, \quad (12)$$

missä $A^{(\mu\nu)}$ on symmetrinen ja jäljetön.

Koordinaatistomuunnos kannasta $\{x^\mu\}$ kantaan $\{x'^\mu\}$ vektorille v^ν on

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu. \quad (13)$$

Kaarevissa koordinaatistoissa derivaatta pitää korvata kovariantilla derivaatalla D_μ , jolle pätee

$$\begin{aligned} D_\mu x^\mu &= \partial_\mu x^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu x^\lambda \\ D_\mu A^{\mu\nu} &= \partial_\mu A^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu A^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A^{\mu\lambda}, \end{aligned} \quad (14)$$

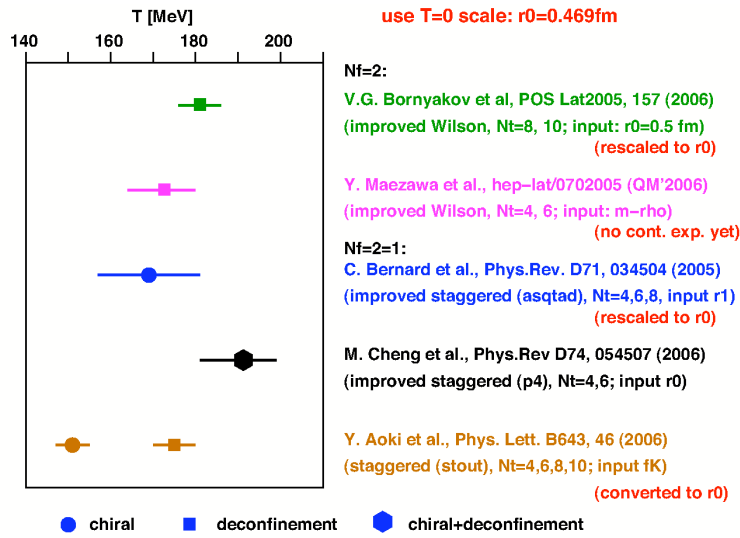
missä $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ on Christoffelin symboli. Se voidaan laskea koordinaatiston metrisestä tensorista $g_{\mu\nu}$

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (\partial_\nu g_{\lambda\gamma} + \partial_\lambda g_{\nu\gamma} - \partial_\gamma g_{\nu\lambda}). \quad (15)$$

Minkowskin avaruuden metrinen tensori tavallisessa karteesisessä kannassa ei riipu koordinaateista, joten kaikki Christoffelin symbolit ovat nolliä. Tällöin $D_\mu x^\mu = \partial_\mu x^\mu$.

2 Vahvasti vuorovaikuttavan aineen tilanyhtälö

Jotta voimme ratkaista hydrodynamiikan liikeyhtälöt, meidän tulee tietää vahvasti vuorovaikuttavan aineen tilanyhtälö. Tilanyhtälö saadaan periaatteessa hila-QCD laskuista, mutta käytännössä mm. faasitransitiolämpötilan ja faasitransition kertaluvun tulokset ovat vielä epävarmoja. Kuvassa 2 on eri tutkimusryhmien hilalaskuista saamat faasitransitiolämpötilat. Kuten nähdään, tulokset jakautuvat vielä melko suurelle välille.



Kuva 2: Eri tutkimusryhmien hilasimulaatioilla laskettuja QCD-aineen faasitransitiolämpötiloja. Kuva puheesta [1].

Seuraavaksi johdetaan yksinkertaistettu tilanyhtälö, jota tässä tutkielmassa käytetään. Tarkastellaan tilannetta, jossa huomioidaan kolme kevyintä kvarkkimakua, siten, että outoustiheys n_S on lokaalisti nolla. Samaa tilanyhtälöä on käsitelty esimerkiksi lähteissä [2, 3]. Lähdetään liikkeelle statistisen fysiikan perusteista.

Termisessä tasapainossa olevan systeemin tilaa kuvaavat suureet ovat paine P , tiheys n , energiatiheys ϵ , lämpötila T , entropiatiheys s ja kemiallinen potentiaali μ . Hydrodynamiikan kannalta on edullista valita vapaiksi muuttujiksi energiatiheys ϵ ja baryonilukutiheys n_B tai lämpötila T ja baryonilukuun liittyvä kemiallinen potentiaali μ_B . Kaikki suureet voidaan laskea suurkanonisesta tilasummasta \mathcal{Z}_G , joka on yhdelle hiukkaslajille

$$\mathcal{Z}_G = \sum_{N_r} \exp[(\mu N - E_{N_r})/T], \quad (16)$$

missä E_{N_r} on mikrotilan energia ja N on siihen tilaan liittyvien hiukkasten lukumäärä. Mikrotilan N_r todennäköisyys systeemissä on

$$p_{N_r} = \frac{1}{\mathcal{Z}_G} \exp[(\mu N - E_{N_r})/T]. \quad (17)$$

Systeemin entropia S voidaan määrittellä mikrotilan todennäköisyyden avulla [4], jolloin saadaan

$$\begin{aligned} S &= - \sum_{N_r} p_{N_r} \ln p_{N_r} \\ &= - \sum_{N_r} p_{N_r} \left(\frac{\mu N}{T} - \frac{E_{N_r}}{T} - \ln \mathcal{Z}_G \right) \\ &= \frac{\langle E \rangle}{T} - \frac{\mu \langle N \rangle}{T} + \ln \mathcal{Z}_G, \end{aligned} \quad (18)$$

missä $\langle E \rangle$ on keskimääräinen energia ja $\langle N \rangle$ on keskimääräinen hiukkasten lukumäärä systeemissä. Tällöin saadaan suurkanoniseksi potentiaaliksi Ω

$$\Omega = E - TS - \mu N = -T \ln \mathcal{Z}_G. \quad (19)$$

Gibssin-Dunheimin relaation

$$E = TS - PV + \mu N \quad (20)$$

avulla saadaan suurkanoninen potentiaali (19) muotoon

$$\Omega = -PV. \quad (21)$$

Termodynaamisessa tasapainossa systeemin suurkanoninen potentiaali on minimissä, jolloin yhtälön (21) mukaan paine on suurin mahdollinen. Differentioimalla Ω :n lauseke ja käyttämällä termodynamiikan 2. pääsääntöä, saadaan

$$d\Omega = -PdV - SdT - Nd\mu. \quad (22)$$

Tästä saadaan tärkeät relaatiot

$$\begin{aligned} s &= \frac{S}{V} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V,\mu} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,\mu} \\ n &= \frac{N}{V} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{T,V} \\ P &= - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T,\mu}. \end{aligned} \quad (23)$$

Energiatiheys saadaan yhtälön

$$\epsilon = Ts - P + \mu n \quad (24)$$

avulla. Kun tarkastellaan usean vuorovaikutuksettoman hiukkasein systeemiä, saadaan systeemin tilasumma \mathcal{Z} helposti yksihiukkastilasummien \mathcal{Z}_i tulona

$$\mathcal{Z} = \prod_i \mathcal{Z}_i. \quad (25)$$

Tarkastellaan nyt fermionien ja bosonien tilasummia. Hiukkaseinassa yhdellä tilalla on $N = \sum_i n_i$ hiukkasta, joiden energia on $E_{N_r} = \sum_i \epsilon_i n_i$, missä n_i on tilan miehitysluku ja ϵ_i on tilan energia. Tällöin voidaan kirjoittaa tilasumma muodossa

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_G &= \sum_{n_1, n_2, \dots} \exp[\mu(n_1 + n_2 + \dots)/T - (n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots)/T] \\ &= \left(\sum_{n_1} e^{(\mu - \epsilon_1)n_1/T} \right) \left(\sum_{n_2} e^{(\mu - \epsilon_2)n_2/T} \right) \dots \end{aligned} \quad (26)$$

missä fermioneilla n_i voi saada arvot 0 ja 1 ja bosoneilla summaus suoritetaan nolasta äärettömyyteen. Kun suoritetaan summaukset, saadaan

$$\mathcal{Z} = \prod_i (1 \pm e^{(\mu - \epsilon_i)/T})^{\pm g_{F/B}}, \quad (27)$$

missä $+$ on fermioneille, $-$ bosoneille ja g_F on fermionien degeneraatio ja g_B on bosonien degeneraatio.

Kun tiedetään tilasumma, saadaan paineen lausekkeeksi

$$\begin{aligned} P &= \frac{T}{V} \ln \mathcal{Z} = \pm g \frac{T}{V} \sum_{i=0}^{\infty} \ln[1 \pm e^{(\mu - E_i)/T}] \\ &= \pm T \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \ln[1 \pm e^{(\mu - E)/T}], \end{aligned} \quad (28)$$

missä summa yli tilojen on korvattu liikemääräintegraalilla. Tiheys saadaan paineen osittaisderivaatasta yhtälön (23) avulla

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \frac{1}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1}. \quad (29)$$

Energiatiheys voidaan laskea energian odotusarvona yhtälöstä

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\langle E \rangle}{V} = \sum_{N_r} p_{N_r} E_{N_r} \\ &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \frac{E}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1} \end{aligned} \quad (30)$$

tai yhtälön (24) avulla, kun muut suureet tunnetaan. Tässä tutkielmassa on laskettu energiatiheys odotusarvon (30) avulla ja entropiatiheys yhtälön (24) avulla.

Osittaisintegroimalla paineen lauseketta (28), saadaan

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}^2}{3E} \frac{1}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1}, \quad (31)$$

josta nähdään heti, että massattomille hiukkasille pätee

$$P = \frac{1}{3}\epsilon. \quad (32)$$

2.1 QGP:n tilanyhtälö

Kvarkkigluoniplasmaa voidaan yksinkertaisimmillaan tarkastella massattomien kvarkkien ja gluonien muodostamana aineena. Kun oletetaan hiukket massattomiksi, voidaan aineen ominaisuudet laskea analyttisesti tapauksessa $\mu \neq 0$.

Hiukkasen kemialliseksi potentiaaliksi määritellään

$$\mu = B\mu_B + S\mu_S, \quad (33)$$

missä B on hiukkasen baryoniluku, S on hiukkasen outous ja μ_B, μ_S ovat koko systeemin baryonilukuun ja outouteen liittyvät kemialliset potentiaalit. Kun fermionien kemiallinen potentiaali on μ_F , niin antifermioneilla kemiallinen potentiaali on $-\mu_F$. Lisäksi bosoneilla on aina $\mu_B = 0$.

Kun oletetaan hiukket massattomiksi, on $E = |\mathbf{p}|$. Tällöin voidaan äärellisen kemiallisen potentiaalin tapauksessa laskea fermionien ja antifermionien aiheuttama paine analyttisesti yhtälöstä (31). Tarvitaan aputulokset [5]

$$\begin{aligned} \int_{-\mu/T}^{\infty} dx \frac{(x + \frac{\mu}{T})^3}{e^x + 1} &= \int_0^{\infty} dx \frac{(x + \frac{\mu}{T})^3}{e^x + 1} + \int_{-\mu/T}^0 dx \frac{(x + \frac{\mu}{T})^3}{e^x + 1} \\ \int_{\mu/T}^{\infty} dx \frac{(x - \frac{\mu}{T})^3}{e^x + 1} &= \int_0^{\infty} dx \frac{(x - \frac{\mu}{T})^3}{e^x + 1} + \int_{-\mu/T}^0 dx (x + \frac{\mu}{T})^3 \left(1 - \frac{1}{e^x + 1}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Nyt muuttujanvaihoilla $x = (p \pm \mu)/T$ ja aputuloksien (34) avulla saadaan

fermionien ja antifermionien paineeksi

$$\begin{aligned}
P_F + P_{\bar{F}} &= \frac{g_F}{(2\pi)^3} \left(\int d^3\mathbf{p} \frac{|\mathbf{p}|}{\exp[(|\mathbf{p}| - \mu)/T] + 1} + \right. \\
&\quad \left. \int d^3\mathbf{p} \frac{|\mathbf{p}|}{\exp[(|\mathbf{p}| + \mu)/T] + 1} \right) \\
&= \frac{g_F}{2\pi^2} \frac{T^4}{3} \left[\int_0^\infty dx \frac{(x + \mu/T)^3 + (x - \mu/T)^3}{e^x + 1} + \right. \\
&\quad \left. \int_{-\mu/T}^0 dx (x + \mu/T)^3 \right] \\
&= g_F \left[\frac{7\pi^2}{360} T^4 + \frac{1}{12} (\mu T)^2 + \frac{1}{24\pi^2} \mu^4 \right].
\end{aligned} \tag{35}$$

Vastaavilla muuttujanvaihoilla ja aputuloilla saadaan kvarkkien ja antikvarkkien tiheyksien erotukseksi laskettua

$$n_q - n_{\bar{q}} = \frac{g_F}{6} \left[\mu T^2 + \frac{1}{\pi^2} \mu^3 \right]. \tag{36}$$

Koska outoustiheyden pitää olla lokaalisti nolla, saadaan

$$n_S = \sum_{u,d,s} S(n_q - n_{\bar{q}}) = -\frac{g_F}{6} \mu_s \left(T^2 + \frac{1}{\pi^2} \mu_s^2 \right) = 0, \tag{37}$$

joten s-kvarkin kemiallinen potentiaali on aina nolla. Tästä saamme μ_B :n ja μ_S :n välille riippuvuuden

$$\begin{aligned}
\mu_s &= \frac{1}{3} \mu_B - \mu_S = 0 \\
\Rightarrow \mu_S &= \frac{1}{3} \mu_B.
\end{aligned} \tag{38}$$

Koska u- ja d-kvarkeilla ja antikvarkeilla kemiallinen potentiaali on

$$\mu_{u,d} = \frac{1}{3} \mu_B. \tag{39}$$

saadaan baryonitiheydeksi

$$\begin{aligned}
n_B &= \sum_{u,d,s} B(n_q - n_{\bar{q}}) \\
&= \frac{g_F}{6} \left(\frac{2}{9} \mu_B T^2 + \frac{2}{81\pi^2} \mu_B^3 \right).
\end{aligned} \tag{40}$$

Gluonien aiheuttamaksi paineeksi saadaan

$$\begin{aligned}
P_g &= \frac{g_B}{3(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{|\mathbf{p}|}{e^{|\mathbf{p}|/T} - 1} \\
&= g_B \frac{\pi^2}{90} T^4.
\end{aligned} \tag{41}$$

Massattomien hiukkasten tapauksessa sekä kvarkkien että gluonien energiatiheydeksi saadaan

$$\epsilon = \frac{g_F}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{|\mathbf{p}|}{\exp[(|\mathbf{p}| - \mu)/T] \pm 1} = 3P. \tag{42}$$

Nyt kvarkkien degeneraatio on $g_F = \text{väri} \cdot \text{spin} = 3 \cdot 2 = 6$ ja bosonien degeneraatio on $g_B = \text{väri} \cdot \text{spin} = 8 \cdot 2 = 16$. Kun lisätään vielä malliin pussivakio B [6], jolla kuvataan QGP-faasin vakuumin energiatiheyttä, saadaan QGP-faasille

$$\begin{aligned}
P &= \frac{19\pi^2}{36} T^4 + \frac{1}{9} \mu_B^2 T^2 + \frac{1}{162\pi^2} \mu_B - B \\
\epsilon &= 3P + 4B \\
n_B &= \frac{2}{9} \mu_B T^2 + \frac{2}{81\pi^2} \mu_B^3 \\
\mu_S &= \frac{1}{3} \mu_B.
\end{aligned} \tag{43}$$

2.2 Hadronikaasun tilanyhtälö

Muodostetaan seuraavaksi tilanyhtälö hardoneista koostuvalle kaasulle. Otetaan huomioon kaikki Particle Data Groupin listaamat [7] alle 2 GeV:n hadronit, jotka sisältävät u-,d- ja s-kvarkkeja. Hadronien välille voitaisiin lisätä myös repulsiivinen potentiaali [2], jolloin faasitransitio tapahtuu myös suurilla baryonitiheyksien arvoilla. Tässä tutkielmassa käytetyssä tilanyhtälössä siis ei tapahdu faasitransitiota suurilla baryonilukutiheyksillä. Tämä ei kuitenkaan haittaa, koska RHIC- ja LHC-kiihdyttimien raskasionikokeissa, joita lähinnä tarkastelemme, baryonilukutiheys on pieni.

Baryoni- ja outoustiheydet saadaan nyt yhtälöistä

$$\begin{aligned}
n_B &= \sum_h B_h \frac{g_h}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{\exp[(E - B_h \mu_B - S_h \mu_S)/T] + 1} \\
n_S &= \sum_h S_h \frac{g_h}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{\exp[(E - B_h \mu_B - S_h \mu_S)/T] \pm 1} = 0,
\end{aligned} \tag{44}$$

jotka pitää ratkaista numeerisesti. Tiheyksien avulla voidaan ratkaista muut termodynaamiset suureet. Olisi mahdollista laskea muut suureet integraaleista suoraan, mutta laskentatehon kannalta on parempi ratkaista ominaisuudet summana modifioituja Besselin funktioita, jotka ovat integraalimuodossa

$$\begin{aligned}
I_\nu(x) &= \int_0^\infty \cos(\nu t) e^{-x \cos t} dt \\
K_\nu(x) &= \int_0^\infty \cosh(\nu t) e^{-x \cosh t} dt.
\end{aligned} \tag{45}$$

Lähdetään liikkeelle paineen lausekkeesta (28). Kehittämällä logaritmi sarjaksi, jolloin pitää olettaa, että $m > \mu$, saadaan

$$\begin{aligned}
P &= T \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \sum_{n=1}^\infty \frac{(\mp 1)^{n+1}}{n} e^{-n(E-\mu)/T} \\
&= T \frac{g}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{(\mp 1)^{n+1}}{n} e^{n\mu/T} \int d^3\mathbf{p} e^{-\sqrt{p^2+m^2}/T} \\
&= \frac{g}{2\pi^2} m^2 T^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{(\mp 1)^{n+1}}{n^2} e^{n\mu/T} K_2\left(\frac{m}{T}n\right).
\end{aligned} \tag{46}$$

Paineen osittaisderivaattana saadaan tiheys ja entropia

$$\begin{aligned}
n &= \frac{g}{2\pi^2} m^2 T \sum_{n=1}^\infty \frac{(\mp 1)^{n+1}}{n} e^{n\mu/T} K_2\left(\frac{m}{T}n\right) \\
s &= \frac{4P}{T} - \frac{n\mu}{T} + \frac{g}{2\pi^2} m^3 \sum_{n=1}^\infty \frac{(\mp 1)^{n+1}}{n} e^{n\mu/T} K_1\left(\frac{m}{T}n\right).
\end{aligned} \tag{47}$$

Näiden avulla saadaan energiatiheudeksi

$$\begin{aligned}
\epsilon &= Ts - P + n\mu \\
&= 3P + \frac{g}{2\pi^2} m^3 \sum_{n=1}^\infty \frac{(\mp 1)^{n+1}}{n} e^{n\mu/T} K_1\left(\frac{m}{T}n\right).
\end{aligned} \tag{48}$$

2.3 Faasitransitio

Vahvasti vuorovaikuttavan aineen tilanyhtälö saadaan yhdistämällä QGP:n ja hadronikaasun tilanyhtälöt. Termodynaamisessa tasapainossa paine on

aina suurin mahdollinen, joten faasitransitio tapahtuu kun eri faaseilla on sama paine samoilla lämpötilan ja kemiallisen potentiaalin arvoilla

$$P_{QGP}(T, \mu_B) = P_{HG}(T, \mu_B). \quad (49)$$

Hadronikaasun energitiheys on kuitenkin pienempi kuin QGP:llä samassa lämpötilassa ja kemiallisessa potentiaalissa. Tämä energiatihyysien ero on faasitransitioon liittyvä latentti lämpö. Kuvassa 3a on piirretty energiatiheyden käytös lämpötilan funktiona. Kuvassa näkyy selvästi faasitransitioon liittyvä latentti lämpö energiatiheyden hyppäyksenä. Lisäksi paineen derivaatassa on faasitransition aiheuttama epäjatkuvuus. Kuvassa 3b on paineen käytös energiatiheyden funktiona.

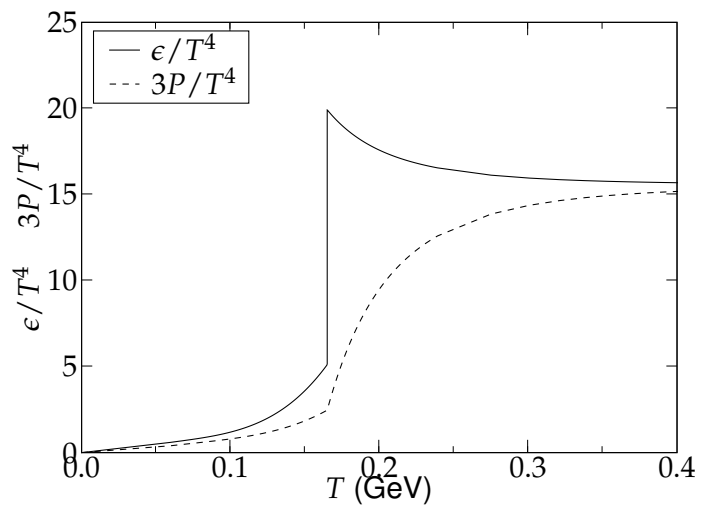
Faasitransitioalueessa ajatellaan aineen olevan sekafaasissa, jossa on kvarkkeja, gluoneja ja hadroneita. Energiatiheys voidaan Maxwellin konstruktiolla kirjoittaa muotoon

$$\epsilon = x\epsilon_{HG} + (1 - x)\epsilon_{QGP}, \quad (50)$$

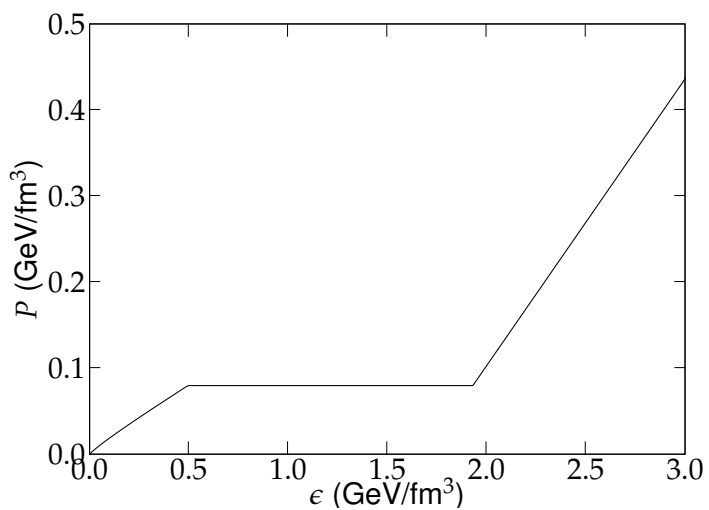
missä x on hadronikaasun tilavuuden osuus koko systeemin tilavuudesta.

Tätä tutkielmaa varten tilanyhtälöä ei ratkaistu numeerisesti vaan käytettiin Harri Niemeltä saatua tilanyhtälötaulukkoa, missä pussivakio on valittu niin, että faasitransitiolämpötila on 165 MeV.

Tässä on syytä painottaa, että tarkasteltu tilanyhtälö on yksinkertainen malli termodynaamiselle QCD-systeemille. Pussivakion ansiosta saadaan aikaan faasitransitio, joka on ensimmäistä kertalukua. Hila-QCD:stä saatujen tulosten nojalla tätä nykyä uskotaan, että QCD-faasitransitio on 1. kertalukua puhtaalle gluonisysteemille ja massattomien kvarkkien muodostamalle systeemille, mutta ei fysikaaliselle QCD:lle, jossa kvarkkien massat on huomioitu. Faasitransition kertaluvulla ei kuitenkaan ole oleellista vaikutusta tässä työssä tarkasteltuihin hiukkasspektreihin, joten yllä oleva yksinkertainen intuitiivinen malli on täysin riittävä.



(a) Energiatiheyden ja paineen riippuvuus lämpötilasta.



(b) Paineen riippuvuus energiatiheydestä.

Kuva 3: Tilanyhtälön käyttäytyminen, kun $\mu = 0$.

3 Relativistinen hydrodynamiikka

Raskasionitörmäysten hydrodynamiikan ensimmäisiä merkittäviä askeleita oli Bjorkenin malli [8]. Bjorkenin 0+1-ulotteisessa mallissa huomioidaan vain pitkittäinen skaalavirtaus ja oletetaan ettei poikittaisvirtausta ole. Tässä tilanteessa hydrodynamiikan liikeyhtälöt voidaan ratkaista analyttisesti.

Seuraava suuri askel oli poikittaisvirtauksen huomioiminen. Ensimmäisenä tutkittiin 1+1-ulotteista sylinterisymmetristä pitkittäissuuntaan puskusymmetristä tapausta [9] ja 2+1-ulotteista sylinterisymmetristä tapausta ilman puskusymmetriaa pitkittäissuunnassa [3]. Systeemin tullessa monimutkaisemmaksi ei liikeyhtälöitä voitu enää ratkaista analyttisesti, joten piti turvautua tietokoneella tehtäviin simulaatioihin.

Sylinterisymmetrinen tapaus soveltuu hyvin täysin keskeisten törmäysten kuvaamiseen. Täysin keskeisessä törmäyksessä molempien ytimien keskikohdat ovat törmäysakselilla. Kiihdyttimillä tehtävissä kokeissa tulee kuitenkin paljon epäkeskeisiä törmäyksiä. Niiden mallintamista varten pitää luopua atsimuuttisymmetriasta, jolloin puhutaan xy -hydrodynamiikasta. Tässä tilanteessa virtausta kehittyy eri määrä eri suuntiin. Tällöin voidaan laskea hiukkasspektrit epäkeskeisille törmäyksille ja tutkia törmäyksessä kehittyvän elliptisen virtauksen [10] määrää.

Tutkittaessa pitkittäissuunnassa puskuinvarianttia systeemiä, voidaan soveltaa Bjorkenin skaalavirtausta z -akselin suuntaan. Tällöin päästään tarkastelemaan realistista 3+1-ulotteista tapausta niin, että ratkaistavista differentiaaliyhtälöistä tulee 1+1- tai 2+1-ulotteiset. On myös olemassa täysin 3+1-ulotteisia hydrodynaamisia koodeja [11, 12], missä ei sovelleta Bjorkenin virtausta z -akselin suunnassa.

Koska raskasionikokeissa syntyy vain tuhansia hiukkasia, on kysyttävä, voidaanko systeemiä käsitellä kollektiivisesti. Normaalisti vaaditaan, että hiukkasia on vähintään Avogadron luvun verran eli noin 10^{24} . Lisäksi simulaatioissa on oletettu, että aine termalisoituu nopeasti. Myös tätä nopeaa termalisoitumista on arvosteltu. Hydrodynaamisilla simulaatiolla ennustettu RHIC:n Au+Au-törmäysten elliptinen virtaus on kuitenkin vahva osoitus hydrodynamiikan toimivuudesta ja varhaisesta termalisoitumisesta [13, 14], koska elliptinen virtaus kehittyy QGP:ssä nimenomaan pienillä aikaparametrin arvoilla.

3.1 Ideaalista hydrodynamiikkaa

Relativistisessa hydrodynamiikassa tutkitaan fluidin kollektiivisia ominaisuuksia. Fluidille määritellään energiatiheys ϵ , paine P , baryonilukutiheys

n_B , baryoniluvun kemiallinen potentiaali μ_B , outousluvun kemiallinen potentiaali μ_S ja nelinopeus u^μ .

Hydrodynamiikassa tehdään voimakas oletus, että fluidi on lokaalisesti termodynaamisessa tasapainossa. Tämän takia hydrodynamiikkaa ei voida soveltaa välittömästi ydintörmäyksen jälkeen, vaan on odotettava ns. "termalisoitumisajan" verran, jotta syntynyt fluidi on ehtinyt saavuttaa termodynaamisen tasapainon.

Relativistisessa teoriassa käytetään energia-liikemäärätensoria $T^{\mu\nu}$ liikeyhtälöiden kirjoittamiseen. Se on ideaalisessa tapauksessa muotoa [15]

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}. \quad (51)$$

Tavallisessa hydrodynamiikassa vaaditaan, että massa säilyy. Relativistisessa tapauksessa vaaditaan neliliikemäärän säilyminen. On kuitenkin olemassa myös muita säilyviä suureita. Esimerkiksi baryoniluvun pitää säilyä. Määritellään baryonivirta j_B^μ , joka on ideaalisessa tapauksessa

$$j_B^\mu = n_B u^\mu. \quad (52)$$

Relativistisen hydrodynamiikan säilymlait kirjoitetaan muodossa

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\mu j_B^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Systemin ominaisuudet voidaan ratkaista näistä yhtälöistä, kun tunnetaan tilanyhtälö. Yhtälöiden ratkaiseminen analyttisesti on hyvin usein mahdotonta jopa yksinkertaisissa tapauksissa.

Entropiavirta on ideaalisessa tapauksessa

$$S^\mu = s u^\mu, \quad (54)$$

missä s on entropiatiheys lokaalissa koordinaatistossa. Näytetään seuraavaksi, että ideaalisessa tapauksessa entropiavirta säilyy. Kun kontrahoidaan energia-liikemäärätensarin säilymlaki (53) u_ν :lla, saadaan

$$u^\mu \partial_\mu \epsilon + (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu = 0. \quad (55)$$

Lisäksi tarvitaan termodynamiikan toista pääsääntöä muodossa

$$\partial s = \frac{\partial \epsilon}{T} - \frac{\mu_B \partial n_B}{T}, \quad (56)$$

missä μ_B on baryonitiheyteen n_B liittyvä kemiallinen potentiaali. Nyt yhtälöiden (53), (55) ja (56) avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(su^\mu) &= s\partial_\mu u^\mu + u^\mu\partial_\mu s \\
&= \frac{1}{T}(\epsilon + p - \mu_B n_B)\partial_\mu u^\mu + \frac{1}{T}u^\mu(\partial_\mu \epsilon - \mu_B \partial_\mu n_B) \\
&= \frac{1}{T}((\epsilon + p)\partial_\mu u^\mu + u^\mu\partial_\mu \epsilon) - \frac{\mu_B}{T}(n_B\partial_\mu u^\mu + u^\mu\partial_\mu n_B) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{57}$$

Tämä on merkittävä tulos, koska entropia voidaan liittää siihen, kuinka paljon hiukkasia törmäyksessä syntyy.

3.2 Bjorkenin malli

Bjorkenin mallissa [8] oletetaan alkutila törmäysakselin suunnassa puskuinvariantiksi ja unohdetaan poikittaisvirtaus, mutta huomioidaan pitkittäinen skaalavirtaus. Nämä oletukset ovat realistisia kun tarkastellaan törmäysakselin lähiympäristöä tarpeeksi pienillä aikaparametrin arvoilla. Näillä oletuksilla hydrodynamiikan liikeyhtälöt saadaan ratkaistua analyttisesti.

Määritellään ydintörmäysten kannalta hyödylliset suureet ominaisaika τ ja avaruus-aika-rapiditeetti η_s

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} \quad \eta_s = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}. \tag{58}$$

Näiden suureiden avulla puskuinvariantissa tapauksessa fluidin kolmino-peudeksi voidaan valita $v_z = z/t$, jolloin nelinopeudeksi saadaan

$$u^\mu = \frac{1}{\tau}(t, 0, 0, z) = (\cosh \eta_s, 0, 0, \sinh \eta_s). \tag{59}$$

Siirtymällä karteesisesta (t, x, y, z) -koordinaatistosta (τ, x, y, η_s) -koordinaatistoon saadaan nelinopeus muotoon

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0). \tag{60}$$

Käytetyn koordinaatiston metrinen tensori on $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -\tau^2)$ ja nollostapoikkeavat Christoffelin symbolit ovat

$$\Gamma_{33}^0 = \tau \quad \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{\tau}. \tag{61}$$

Nyt vaihtamalla tavalliset derivaatat kovarianteiksi derivaatoiksi, saadaan $T^{\mu\nu}$:n säilymislain kontraktoituksi muodoksi (55)

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \frac{\epsilon + P}{\tau} = 0, \quad (62)$$

joka voidaan ratkaista käyttämällä ideaalista tilanyhtälöä (32). Ratkaisuksi saadaan

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{4/3}, \quad (63)$$

missä ϵ_0 on energiatiheys termalisoitumisen hetkellä ja τ_0 on ominaisaika termalisoitumisen hetkellä.

Todellisuudessa, kun törmäyksestä on kulunut riittävästi aikaa, poikittaisvirtaus aiheuttaa merkittäviä efektejä myös törmäysakselin ympäristöön, joten Bjorkenin mallin oletukset eivät enää ole voimassa. Seuraavaksi huomioidaan poikittaisvirtauksen aiheuttamat vaikutukset, mutta säilytetään pitkittäissuunnan puskuinvarianssi eli käsitellään pitkittäisvirtaus skaalavirtauksena kuten Bjorkenin mallissa.

3.3 Poikittaisvirtaus

Tarkastellaan seuraavaksi monimutkaisempaa tapausta, missä sallitaan fluidin laajeneminen myös poikittaissuuntaan. Oletetaan kuitenkin, että törmäys on täysin keskeinen, jolloin poikittaislaajeneminen on symmetristä z -akselin suhteen. Oletetaan tilanne edelleen puskuinvariantiksi z -akselin suunnassa. Näillä oletuksilla tilanteesta tulee sylinterisymmetrinen.

Siirrytään koordinaatistoon (τ, r, ϕ, η) , missä

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{t^2 - z^2} & \eta_s &= \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} & \phi &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (64)$$

Siirtyminen (t, x, y, z) -koordinaatistosta (τ, r, ϕ, η_s) -koordinaatistoon onnistuu koordinaattimuunnoksella

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \cosh \eta_s & 0 & 0 & -\sinh \eta_s \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \sin \phi & \frac{1}{r} \cos \phi & 0 \\ \frac{1}{\tau} \sinh \eta_s & 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \cosh \eta_s \end{pmatrix}.$$

Tässä tapauksessa Minkowskin avaruuden metriseksi tensoriksi saadaan

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau^2 \end{pmatrix}.$$

Lisäksi voidaan määrittää nollasta poikkeavat Christoffelin symbolit. Tämä on helppoa, koska metrisessä tensorissa on vain kaksi vakioista poikkeavaa komponenttia. Ainoat nollasta poikkeavat symbolit ovat

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^0 &= \tau & \Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{\tau} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}.\end{aligned}\tag{65}$$

Kannassa (τ, r, ϕ, η_s) nelinopeudeksi saadaan

$$u^\mu = \gamma_r(1, v_r, 0, 0),\tag{66}$$

missä v_r on poikittaisnopeus kohdassa $z = 0$ ja

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{1 - v_r^2}}.\tag{67}$$

Käyräviivaisen koordinaatiston tapauksessa saadaan hydrodynamiikan liikeyhtälö kovariantin derivaatan D_μ avulla muotoon

$$D_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} = 0.\tag{68}$$

Tämän yhtälön pitää toteutua jokaisella $\nu = 0, 1, 2, 3$. Tapaukset $\nu = 2, 3$ ovat triviaaleja symmetrioiden takia. Saadaan siis

$$\begin{aligned}\partial_0 T^{00} &= -\partial_1 T^{01} - \frac{1}{r} T^{01} - \frac{1}{\tau} T^{00} - \tau T^{33} \\ \partial_0 T^{01} &= -\partial_1 T^{11} - \frac{1}{r} T^{11} - \frac{1}{\tau} T^{01} + r T^{22}.\end{aligned}\tag{69}$$

Energia-liikemäärätensoren komponenttien T^{11} ja T^{01} välille saadaan yhteys

$$T^{11} = T^{01} v_r + P.\tag{70}$$

Kun lisäksi huomataan, että

$$T^{22} = \frac{P}{r^2} \quad \text{ja} \quad T^{33} = \frac{P}{\tau^2},\tag{71}$$

saadaan liikeyhtälöt muotoon

$$\begin{aligned}\partial_0 T^{00} + \partial_1 (T^{00} w) &= -\frac{v_r}{r} (T^{00} + P) - \frac{1}{\tau} (T^{00} + P) \\ \partial_0 T^{01} + \partial_1 (T^{01} v_r) &= -\partial_1 P - \frac{v_r}{r} T^{01} - \frac{1}{\tau} T^{01},\end{aligned}\tag{72}$$

missä

$$w = \frac{T^{01}}{T^{00}} \quad (73)$$

on nopeuden kaltainen suure. Liikeyhtälöt (72) on nyt muokattu sellaiseen muotoon, että niiden numeeriseen ratkaisemiseen voidaan käyttää SHASTA-algoritmia, joka kuvaillaan myöhemmin.

Kun $r = 0$, ei liikeyhtälöitä voida soveltaa edellä olevassa muodossa, koska yhtälöissä esiintyy termejä $1/r$. Kuitenkin kaikissa tapauksissa $1/r$ esiintyy muodossa v_r/r , jolloin kehittämällä v_r Taylorin sarjaksi nollan ympäristössä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{v_r}{r} &= \frac{v_r(0) + v_r'(0)r + v_r''(0)r^2 + \dots}{r} \\ &= v_r'(0), \quad \text{kun } r = 0, \end{aligned} \quad (74)$$

koska symmetrian takia pitää olla $v_r(0) = 0$.

Energian säilymisen lisäksi tarkastellaan baryoniluvun säilymistä. Baryonivirran säilymisestä

$$D_\mu j^\mu = \partial_\mu j^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu j^\lambda = 0 \quad (75)$$

saadaan

$$\partial_0 j^0 + \partial_1 (j^0 v_r) = -\frac{v_r}{r} j^0 - \frac{1}{\tau} j^0. \quad (76)$$

Myös tämä yhtälö voidaan ratkaista SHASTA:n avulla.

Nopeuden poikittaiskomponentti saadaan tensorin komponenttien avulla yhtälöstä

$$v_r = \frac{T^{01}}{T^{00} + P(\epsilon, n_B)} \quad (77)$$

ja energiatiheys saadaan yhtälöstä

$$\epsilon = T^{00} - T^{01} v_r. \quad (78)$$

Mielivaltaisen tilanyhtälön tapauksessa poikittaisnopeus ja energiatiheys pitää siis määrittää epälineaarista yhtälöstä. Sen numeerinen ratkaiseminen vie paljon laskentatehoa, koska nopeus ja energiatiheys pitää ratkaista jokaisella aika-askeleella.

4 Viskositeetti

Raskasionitörmäysten yhteydessä hydrodynamiikasta puhuttaessa on yleensä unohdettu dissipatiiviset vaikutukset. Vasta 2000-luvulla on alettu kiinnittää huomiota erityisesti viskositeetin aiheuttamiin ilmiöihin.

Eckartin [16] ja Landaun [15] kehittämät ns. 1. kertaluvun teorit, jotka ottavat huomioon nopeuden 1. kertaluvun derivaatat, kärsivät kausaliteettiongelmasta. Osittain tästä syystä niitä ei juurikaan ole huomioitu raskasionitörmäysten hydrodynamiikan kehityksessä. Kausaliteettiongelma ratkaistiin kuitenkin jo 70-luvulla kun ensin Muller [17] kehitti teorian, joka ei huomioinut relativistisia vaikutuksia, ja hänen työstään riippumattomasti Israel ja Stewart [18] kehittivät relativistisen ns. toisen kertaluvun teorian, jossa huomioidaan myös 2. kertaluvun derivaattoja. Yleensä tästä puhutaan Israel-Stewart-teorian tai kausaalisen dissipatiivisen teorian. Israel-Stewart-teoria ei ole ainoa kausaalinen teoria vaan on olemassa esimerkiksi Öttingerin ja Grmelan johtamat yhtälöt [19, 20, 21].

Israel-Stewart-teoriaa on alettu soveltaa raskasionitörmäysten hydrodynamiikkaan vasta 2000-luvulla [22]. Teoria on jo melko vanha, mutta sitä ei toisaalta ole tarvinnut soveltaa, koska ideaalinenkin hydrodynamiikka on antanut hyviä tuloksia. Toisaalta Israel-Stewart-teoria tuo lisää differentiaaliyhtälöitä ratkaistavaksi, joten suuresti kasvanut laskentakapasiteetti on tehnyt mahdolliseksi teorian lisäämiseen hydrodynaamiseen simulaatioihin. Ensimmäiset tulokset, jotka huomioivat elliptisen virtauksen ja viskoottiset vaikutukset, ovat ilmestyneet vuosina 2007-2008 [23, 24, 25, 26].

4.1 Navier-Stokes-teoria

Oletetaan nyt, että systeemi on lähellä lokaalia termistä tasapainoa. Tällöin pitää ottaa energia-liikemäärätensoriin termejä, jotka kuvaavat systeemin siirtymistä kohti tasapainoa. Navier-Stokes-teoriassa huomioidaan vain termit, jotka sisältävät 1. kertaluvun gradientteja.

Oletetaan, että korjaus energialiikemäärätensoriin $\Delta T^{\mu\nu}$ on pieni verrattuna ideaalisen tapauksen energialiikemäärätensoriin $T_{\text{id}}^{\mu\nu}$. Kirjoitetaan

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{id}}^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu}. \quad (79)$$

Korjauksen $\Delta T^{\mu\nu}$ muoto voidaan selvittää termodynamiikan toisen pääsäännön perusteella. Muodon johtamiseen voi perehtyä esimerkiksi erikoistyössäni [27].

Kun dissipatiiviset vaikutukset on otettu huomioon, ei nelinopeuden w^μ valinta ole enää yksikäsitteinen. Tavallisesti on käytetty joko Landaun

[15] tai Eckartin [16] määritelmää nelinopeudelle. Landaun määritelmässä lepokoordinaatisto liitetään energiavirtaan, jolloin nelinopeus on

$$u^\mu = \frac{T_\nu^\mu u^\nu}{\sqrt{u^\alpha T_\alpha^\beta T^{\beta\gamma} u^\gamma}}. \quad (80)$$

Tällöin energia-liikemäärätensori ja hiukkasvirta saadaan muotoon

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T_{\text{id}}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} + \zeta \Delta^{\mu\nu} \partial_\gamma u^\gamma \\ j^\mu &= n_B u^\mu + \nu^\mu, \end{aligned} \quad (81)$$

missä

$$\pi^{\mu\nu} = 2\eta \nabla^{\langle\mu} u^{\nu\rangle} \quad (82)$$

on jännitystensori, ζ on tilavuusviskositeetti, η on leikkausviskositeetti ja

$$\nu^\mu = \kappa \left(\frac{n_B T}{\epsilon + P} \right)^2 \nabla^\mu \left(\frac{\mu_B}{T} \right) \quad (83)$$

on hiukkasdiffuusio, missä κ on vakio.

Eckartin määritelmässä lepokoordinaatisto kiinnitetään baryonivirtaan j^μ , jolloin nelinopeus on

$$u^\mu = \frac{j^\mu}{\sqrt{j^\nu j_\nu}}. \quad (84)$$

Tällöin energia-liikemäärätensori ja baryonivirta saadaan muotoon

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T_{\text{id}}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} + \zeta \Delta^{\mu\nu} \partial_\gamma u^\gamma + \chi (q^\mu u^\nu + q^\nu u^\mu) \\ j^\mu &= n_B u^\mu, \end{aligned} \quad (85)$$

missä

$$q^\mu = \nabla^\mu T - T u^\gamma \partial_\gamma u^\mu \quad (86)$$

on lämpövuoto ja χ on lämmönjohtavuus. Joskus voidaan käsitellä tapausta, jossa ei ole baryonivirtaa. Tällöin Eckartin määritelmän käyttäminen ei ole mielekäästä.

4.2 Viskositeetti ja Bjorkenin malli

Tutkitaan nyt ainoastaan (leikkaus)viskositeetin vaikutuksia Bjorkenin malliin, kun baryonitiheys on nolla kaikkialla. Tällöin energialiikemäärätensori on muotoa

$$T^{\mu\nu} = (e + P) u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}. \quad (87)$$

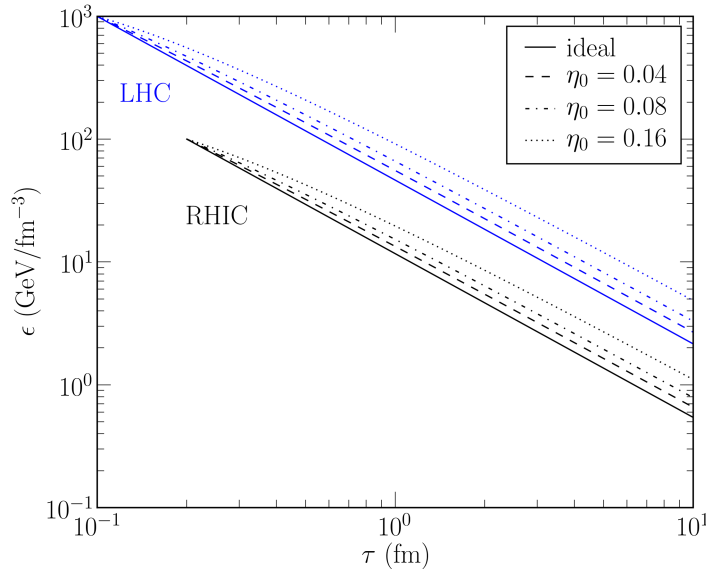
Liikkeyhtälö (53) saadaan Bjorkenin mallin tapauksessa muotoon

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \frac{\epsilon + P}{\tau} = \frac{4}{3} \frac{\eta}{\tau^2}, \quad (88)$$

kun se kontraktoidaan u_ν :lla. Tämä differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista analyttisesti, kun käytetään ideaalista tilanyhtälöä ja oletetaan, että

$$\eta = \eta_0 s, \quad (89)$$

missä η_0 on viskositeettikerroin ja s on entropiatiheys. AdS/CFT-dualiteetin avulla on ehdotettu QCD:n kaltaisille teorioille viskositeettikertoimen alarajaksi $1/4\pi \approx 0.08$ [28]. Tätä arvoa tullaan käyttämään jatkossa.



Kuva 4: Energiatiheyden kehitys Bjorkenin mallissa ilman viskositeettia ja viskositeetin kanssa.

Ideaalisessa tilanyhtälössä

$$\begin{aligned} P &= aT^4 \\ \epsilon &= 3aT^4 \\ s &= 4aT^3, \end{aligned} \quad (90)$$

missä $a = g\pi^2/90$ ja g on degeneraatiotekijä, joka sisältää bosonit ja fermionit. Nyt kirjoitetaan differentiaaliyhtälö (88) lämpötilan avulla, jolloin saadaan

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{1}{3\tau} T = \frac{4}{9} \frac{\eta_0}{\tau^2}. \quad (91)$$

Tämä differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista analyttisesti ja tulokseksi saadaan

$$T(\tau) = T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/3} + \frac{2\eta_0}{3\tau_0} \left[\left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/3} - \frac{\tau_0}{\tau} \right], \quad (92)$$

missä T_0 ja τ_0 ovat lämpötila ja ominaisaika termalisoitumishetkellä.

Kuvassa 4 on lämpötilan käytös RHIC-kiihdyttimen Au+Au-törmäysten tapauksessa, jossa $T_0 = 600$ MeV ja $\tau_0 = 0.2$ fm, sekä LHC-kiihdyttimen Pb+Pb-törmäysten tapauksessa, jossa $T_0 = 1.0$ GeV ja $\tau_0 = 0.1$ fm. Viskositeetin aiheuttamat korjaukset ovat noin kymmenien prosenttien luokkaa. Tämä on merkittävä ero ja antaa viitteitä siitä, että realistisemmassakin tapauksessa viskositeetin vaikutuksia on tutkittava. Tarkemmin viskositeetin vaikutuksiin Bjorkenin mallissa voi perehtyä erikoistyössäni [27].

4.3 Viskositeetti ja poikittaisvirtaus

Lisätään nyt 1. kertaluvun teorian viskositeetin vaikutukset aikaisemmin esiteltyyn sylinterisymmetriseen tapaukseen. Selvitetään ensin jännitystensorin käytös ja sen jälkeen katsotaan kuinka liikeyhtälöt muuttuvat. Muokattuja liikeyhtälöitä ei kuitenkaan tässä tutkielmassa ratkaista numeerisesti, koska ne ovat numeerisesti epästabiileja.

Ratkaistaan ensin tensorin $\sigma^{\mu\nu} = \nabla^{(\mu} u^{\nu)}$ nollasta poikkeavat komponentit. Ne ovat

$$\begin{aligned} \sigma^{00} &= (1 + \gamma_r^2) \left(\frac{2\theta}{3} - \frac{\gamma_r}{\tau} - \frac{\gamma_r v_r}{r} \right) \\ \sigma^{01} &= v_r \sigma^{11} \\ \sigma^{11} &= -\gamma_r^2 \left(\frac{2\theta}{3} - \frac{\gamma_r}{\tau} - \frac{\gamma_r v_r}{r} \right) \\ \sigma^{22} &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\theta}{3} - \frac{\gamma_r v_r}{r} \right) \\ \sigma^{33} &= \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\theta}{3} - \frac{\gamma_r}{\tau} \right), \end{aligned} \quad (93)$$

missä $\theta = D_\mu u^\mu$.

Laskettujen $\sigma^{\mu\nu}$:n komponenttien avulla yhtälöstä (82) nähdään, että

$$\pi^{02} = \pi^{03} = \pi^{12} = \pi^{13} = \pi^{23} = 0. \quad (94)$$

Jännitystensoriin jää siis viisi nollasta eroavaa komponenttia. $\pi^{\mu\nu}$:n pitää olla jäljetön, joten saadaan

$$\pi^{00} = \pi^{11} + r^2 \pi^{22} + \tau^2 \pi^{33}. \quad (95)$$

Lisäksi pitää olla

$$u_\mu \pi^{\mu\nu} = 0, \quad (96)$$

koska leikkausjännitystä ei esiinny virtausnopeuden suuntaan. Yhtälöstä (96) saadaan tapauksissa $\nu = 0, 1$

$$\pi^{00} = v_r \pi^{01} \quad \text{ja} \quad \pi^{01} = v_r \pi^{11}. \quad (97)$$

Näiden ehtojen jälkeen meille jää vain kaksi toisistaan riippumatonta komponenttia. Ilmaistaan muut komponentit π^{22} :n ja π^{33} :n avulla [29]:

$$\begin{aligned} \pi^{11} &= -\gamma_r^2 (r^2 \pi^{22} + \tau^2 \pi^{33}) \\ \pi^{01} &= v_r \pi^{11} \\ \pi^{00} &= v_r^2 \pi^{11}. \end{aligned} \quad (98)$$

Tarkastellaan seuraavaksi, kuinka viskositeetti vaikuttaa varsinaisiin hydrodynamiikan liikeyhtälöihin. Energia-liikemäärätensori on nyt muotoa

$$T^{\mu\nu} = T_{id}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}, \quad (99)$$

missä $T_{id}^{\mu\nu}$ on ideaalisen tapauksen energia-liikemäärätensori (51). Ainoat nolasta poikkeavat komponentit ovat

$$\begin{aligned} T^{00} &= (\epsilon + P_r) \gamma_r^2 - P_r \\ T^{01} &= (\epsilon + P_r) \gamma_r^2 v_r \\ T^{11} &= T^{01} v_r + P_r \\ T^{22} &= \frac{P + r^2 \pi^{22}}{r^2} \\ T^{33} &= \frac{P + \tau^2 \pi^{33}}{\tau^2}, \end{aligned} \quad (100)$$

missä $P_r = P - r^2 \pi^{22} - \tau^2 \pi^{33}$. Näiden avulla saadaan liikeyhtälöt muotoon

$$\begin{aligned} \partial_0 T^{00} + \partial_1 (w T^{00}) &= -\frac{1}{r} T^{01} - \frac{1}{\tau} (T^{00} + P + \tau^2 \pi^{33}) \\ \partial_0 T^{01} + \partial_1 (v_r T^{01}) &= -\partial_1 (P - r^2 \pi^{22} - \tau^2 \pi^{33}) - \frac{1}{\tau} T^{01} \\ &\quad - \frac{1}{r} (T^{01} v_r - 2r^2 \pi^{22} - \tau^2 \pi^{33}). \end{aligned} \quad (101)$$

Poikittaisnopeus saadaan nyt ratkaistua yhtälöstä

$$v_r = \frac{T^{01}}{T^{00} + P(\epsilon, n_B) - r^2 \pi^{22} - \tau^2 \pi^{33}}. \quad (102)$$

Israel-Stewart-teoriassa myös jännitystensorin $\pi^{\mu\nu}$ komponentit kehittyvät differentiaaliyhtälöiden mukaan. Tämä vaikeuttaa yhtälöiden numeerista ratkaisemista huomattavasti. Ensimmäisen kertaluvun teoria ei kuitenkaan ole kausaalinen ja sen numeerinen ratkaiseminen on hankalaa numeeristen epästabiilisuuksien takia [30]. Tämän takia kannattaa suoraan siirtyä 2. kertaluvun teoriaan, mutta sitä ei tässä tutkielmassa tehdä. Navier-Stokes- ja Israel-Stewart-teorian antamia numeerisia ratkaisuja on vertailtu artikkelissa [31], missä tutkitaan kuitenkin tilavuusviskositeettia pitkittäisvirtauksen tapauksessa, joten tilanne on erilainen kuin tässä tutkielmassa. Artikkelin simulaatiot kuitenkin osoittavat 1. kertaluvun teorian numeerisen epästabiilisuuden.

Esimerkiksi artikkelista [24] nähdään, että sylinterisymmetrisessä tapauksessa irtikykytymispinnat eivät muutu paljoa kun käytetään Israel-Stewart-teoriaa. Tämän perusteella oletetaan, että viskoottiset korjaukset ovat pieniä ja tehdään simulaatio käyttämällä ideaalista hydrodynamiikkaa.

5 Irtikytkeytyminen

Hydrodynamiikan avulla voidaan selvittää, miten raskasionitörmäyksessä muodostuneen aineen evoluutio, eli kehittyminen ajassa ja paikassa, sujuu. Hydrodynaaminen evoluutio ei kuitenkaan jatku loputtomiin, koska aine harvenee laajetessaan. Jossain vaiheessa hiukkasten välimatkat ovat niin suuret, ettei lokaali terminen tasapaino ole enää mahdollinen, koska hiukkaset eivät enää vuorovaikuta toistensa kanssa.

Yksi hydrodynaamisten mallien suurimmista ongelmista on irtikytkeytyminen eli siirtyminen hydrodynaamisesta systeemistä vapaiden hiukkasten muodostamaan systeemiin. Tavallisesti irtikytkeytyminen hydrodynamiikassa tehdään niin, että lasketaan ratkaisut kaikille tiheyksille ja valitaan sen jälkeen irtikytkeytymislämpötilaa vastaava tasa-arvopinta. Tämän irtikytkeytymislämpötilan yläpuolella hiukkasten käytöstä kuvaa hydrodynamiikka ja alapuolella hiukkaset ovat vapaita. Siirtymä tapahtuu äärettömän ohuella pinnalla. Todellisuudessa jokaisella hiukkasella olisi todennäköisyys, jolla se karkaa systeemistä vuorovaikuttamatta muiden hiukkasten kanssa. Tämä käsittely olisi kuitenkin huomattavasti työlämpi kuin itse hydrodynamiikka, joten käytetään ensin kuvattua menetelmää. Kuitenkin esimerkiksi artikkelissa [32] on yhdistetty hydrodynamiikka ja kaskadisimulaatio.

Yleensä irtikytkeytyemisessä syntyvien hiukkasten määrä lasketaan Cooperin ja Fryen menetelmällä [33] eli integroidaan hiukkasjakaumafunktiota $f(x, p)$ yli nelipinnan σ

$$\frac{dN}{d^2p_T dy} = \int_{\sigma} f(x, p) p^{\mu} d\sigma_{\mu}. \quad (103)$$

Valitaan nyt, että irtikytkeytyminen tapahtuu tietyllä lämpötilalla T_f . Sylinterisymmetrisessä tilanteessa lämpötila riippuu vain ominaisajasta τ ja säteestä r . Irtikytkeytymispinta voidaan nyt ilmoittaa esimerkiksi säteen r_f avulla. Tällöin ominaisaika irtikytkeytymispinnalla on $\tau_f = \tau_f(r_f)$. Irtikytkeytymishetken määräämän tasa-arvopinnan σ pinta-alkio on tässä tapauksessa [34]

$$d\sigma^{\mu} = (\cosh \eta_s, -\cos \phi \frac{\partial \tau_f}{\partial r_f}, -\sin \phi \frac{\partial \tau_f}{\partial r_f}, -\sinh \eta_s) \tau_f r_f dr_f d\phi d\eta_s. \quad (104)$$

Neliliikemäärä karteesisissa komponenteissa on

$$p^{\mu} = (m_T \cosh y, p_T \cos \phi_p, p_T \sin \phi_p, m_T \sinh y), \quad (105)$$

joten saadaan aputulos

$$p^\mu d\sigma_\mu = \left[m_T \cosh(\eta_s - y) - p_T \frac{\partial \tau_f}{\partial r_f} \cos(\phi - \phi_p) \right] \tau_f r_f dr_f d\phi d\eta_s. \quad (106)$$

Kannassa (τ, r, ϕ, η_s) neliliikemäärä on

$$p^\mu = (m_T \cosh(\eta_s - y), p_T \cos(\phi - \phi_p), \frac{p_T}{r} \sin(\phi - \phi_p), \frac{m_T}{\tau} \sinh(\eta_s - y)) \quad (107)$$

ja nelinopeus on yhtälön (66) mukainen, joten saadaan toinen aputulos

$$p^\mu u_\mu = m_T \gamma_r \cosh(\eta_s - y) - p_T \gamma_r v_r \cos(\phi - \phi_p). \quad (108)$$

5.1 Ideaalinen tilanne

Ideaalisen kaasun jakaumafunktio on muotoa

$$f(x, p) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{p^\mu u_\mu}{T} - \frac{\mu}{T}\right) \mp 1}, \quad (109)$$

missä g on degeneraatiokerroin, etumerkki $-$ on bosoneille ja $+$ on fermioneille. Nyt voimme laskea Cooper-Frye-menetelmän antaman termisen p_T -jakauman (103). Aputuloksissa (106) ja (108) η_s ja ϕ esiintyvät vain erotuksissa $\eta_s - y$ (puskuinvarianssi) ja $\phi - \phi_p$ (sylinterisymmetria). Tekemällä muuttujanvaihdot

$$\eta'_s = \eta_s - y \quad \text{ja} \quad \phi' = \phi - \phi_p. \quad (110)$$

ja kehittämällä jakaumafunktio geometriseksi sarjaksi saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d^2 p dy} &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{dr d\phi' d\eta'_s \tau_f r (m_T \cosh \eta'_s - p_T \frac{\partial \tau_f}{\partial r_f} \cos \phi')}{\exp\left(\frac{m_T \gamma_r}{T} \cosh \eta'_s - \frac{p_T \gamma_r v_r}{T} \cos \phi' - \frac{\mu}{T}\right) \mp 1} \\ &= \frac{g}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} \int dr d\phi' d\eta'_s \tau_f r e^{n \frac{\mu}{T}} \exp \left[-n \left(\frac{m_T \gamma_r}{T} \cosh \eta'_s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{p_T \gamma_r v_r}{T} \cos \phi' \right) \right] \left(m_T \cosh \eta'_s - p_T \frac{\partial \tau_f}{\partial r_f} \cos \phi' \right). \end{aligned} \quad (111)$$

Integraalin sisällä olevat suureet eivät riipu η_s :sta tai ϕ :stä, joten integraalit niiden yli voidaan laskea, kun käytetään modifioituja Besselin funktioita (45). Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d^2 p dy} &= \frac{4\pi g}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} \int dr \tau_f r e^{n \frac{\mu}{T}} \left[m_T I_0 \left(n \frac{p_T \gamma_r v_r}{T} \right) K_1 \left(n \frac{m_T \gamma_r}{T} \right) \right. \\ &\quad \left. - p_T \frac{\partial \tau_f}{\partial r} I_1 \left(n \frac{p_T \gamma_r v_r}{T} \right) K_0 \left(n \frac{m_T \gamma_r}{T} \right) \right], \end{aligned} \quad (112)$$

missä integraali r_f :n yli pitää laskea numeerisesti.

5.2 Jakaumafunktion korjaus

Kun otetaan mukaan dissipatiiviset vaikutukset, pitää tarkastella myös jakaumafunktion muuttumista. Oletetaan, että korjaus myös jakaumafunktion on pieni. Kirjoitetaan

$$f(x, p) = f_0(x, p) + \delta f(x, p), \quad (113)$$

missä f_0 on ideaalinen jakaumafunktio ja δf on dissipatiivinen korjaus. Kirjoitetaan jakaumafunktio muodossa

$$f(x, p) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{y(x,p)} \pm 1}, \quad (114)$$

missä $y = y_0 + \delta y$, missä y_0 on ideaalisen tapauksen jakaumafunktion (109) argumentti ja δy on dissipatiivista vaikutuksista tuleva korjaus. Nyt voidaan jakaumafunktio kehittää sarjaksi y_0 :n ympäristössä [35], jolloin saadaan

$$f(x, p) = f_0 \left[1 + \left(1 \mp \frac{(2\pi)^3}{g} f_0 \right) (y - y_0) + \dots \right] \quad (115)$$

Kun kirjoitetaan δy liikemäärän potenssien avulla saadaan,

$$\delta y = C_1 + C_2 p^\mu u_\mu + C_3 p^\mu p^\nu \pi_{\mu\nu} + C_4 p^\mu p^\nu u_\mu u_\nu + \dots, \quad (116)$$

missä C_1, C_2, C_3 ja C_4 ovat lämpötilasta riippuvia vakioita. Tästä nähdään, että $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, koska δy :n pitää hävitä tasapainossa. Tällöin saadaan jakaumafunktion korjaukseksi [36]

$$\delta f(x, p) = C_3 f_0 \left(1 \mp \frac{(2\pi)^3}{g} f_0 \right) \frac{p_\mu p_\nu \pi^{\mu\nu}}{2T^2(e + p)}, \quad (117)$$

missä $1/(\epsilon + P)T^2$ on lisätty helpottamaan jatkoa. Vakio C_3 saadaan määritettyä vaatimalla

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{id}}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} = \int d^3 \mathbf{p} \frac{p^\mu p^\nu}{E} f. \quad (118)$$

Koska

$$T_{\text{id}}^{\mu\nu} = \int d^3 \mathbf{p} \frac{p^\mu p^\nu}{E} f_0, \quad (119)$$

saadaan korjaukselle δf vaatimus

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{C_3}{2T^2(e + p)} \int d^3 \mathbf{p} \frac{p^\mu p^\nu p^\gamma p^\sigma}{E} f_0 \left(1 \mp \frac{(2\pi)^3}{g} f_0 \right) \pi_{\gamma\sigma}. \quad (120)$$

Integraalista tulee symmetrinen neljännen asteen tensori. Se voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\gamma\sigma} &= \frac{C_3}{2T^2(e+p)} \int d^3\mathbf{p} \frac{p^\mu p^\nu p^\gamma p^\sigma}{E} f_0 \left(1 \pm \frac{(2\pi)^3}{g} f_0\right) \\ &= a_0(u^\mu u^\nu u^\gamma u^\sigma) + a_1(\Delta^{\mu\nu} u^\gamma u^\sigma + \text{permutaatiot}) \\ &\quad + a_2(\Delta^{\mu\gamma} \Delta^{\nu\sigma} + \Delta^{\mu\sigma} \Delta^{\gamma\nu} + \Delta^{\mu\nu} \Delta^{\gamma\sigma}). \end{aligned} \quad (121)$$

Jännitystensorilla on ominaisuudet

$$u_\mu \pi^{\mu\nu} = 0 \quad \text{ja} \quad \Delta_{\mu\nu} \pi^{\mu\nu} = \pi_\mu^\mu = 0, \quad (122)$$

joiden avulla saadaan yhtälö (120) muotoon

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu} &= a_2(\Delta^{\mu\gamma} \Delta^{\nu\sigma} + \Delta^{\mu\sigma} \Delta^{\gamma\nu}) \pi_{\gamma\sigma} \\ &= 2a_2 \pi^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (123)$$

Siis pitää olla $a_2 = 1/2$. Nyt, kun kontraktoidaan (121) lausekkeella

$$K_{\mu\nu\gamma\sigma} = \Delta_{\mu\gamma} \Delta_{\nu\sigma} + \Delta_{\mu\sigma} \Delta_{\gamma\nu} + \Delta_{\mu\nu} \Delta_{\gamma\sigma}, \quad (124)$$

saadaan oikeasta puolesta

$$I^{\mu\nu\gamma\sigma} K_{\mu\nu\gamma\sigma} = \frac{45}{2}. \quad (125)$$

Tensorin komponentissa I^{iiii} , missä $i = 1, 2, 3$, oleva integraali voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$I^{iiii} = \frac{C_3}{10T^2(e+p)} \int d^3\mathbf{p} \frac{|\mathbf{p}|^4}{E} f_0 \left(1 \pm \frac{(2\pi)^3}{g} f_0\right). \quad (126)$$

Lisäksi tensorin $I^{\mu\nu\gamma\sigma}$ komponenttien välille saadaan yhteys

$$I^{iijj} = \frac{1}{3} I^{iiii} \quad \text{kun } i \neq j, \quad (127)$$

missä $i, j = 1, 2, 3$. Näiden ominaisuuksien avulla saadaan lokaalissa lepo-koordinaatistossa

$$I^{\mu\nu\gamma\sigma} K_{\mu\nu\gamma\sigma} = 15 I^{iiii}. \quad (128)$$

Tällöin vakiolle C_3 saadaan lauseke

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{15T^2(\epsilon + P)} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{p}|^4}{E} f_0 \left(1 \mp \frac{(2\pi)^3}{g} f_0\right). \quad (129)$$

Vakion arvoa voidaan arvioida esimerkiksi massattomien hiukkasten tapauksessa, kun $\mu = 0$. Tällöin yhtälö (129) antaa

$$\frac{1}{C_3} = \frac{\zeta(5)}{\pi^4} \approx 0.958. \quad (130)$$

Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että $C_3 \approx 1$. Tällöin korjaus on muotoa

$$\delta f(x, p) = f_0 \left(1 \mp \frac{(2\pi)^3}{g} f_0 \right) \frac{p_\mu p_\nu \pi^{\mu\nu}}{2T^2(e + p)}. \quad (131)$$

Seuraavaksi lasketaan jakaumafunktion korjauksen aiheuttama vaikutus termiseen spektriin (103). Aloitetaan kehittämällä korjauksessa esiintyvät jakaumafunktiot geometrisiksi sarjoiksi, jolloin saadaan

$$f_0 \left(1 \mp \frac{(2\pi)^3}{g} f_0 \right) = \frac{g}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} n(\pm 1)^{n+1} \exp(-ny) \quad (132)$$

Summa suppenee nopeasti ja käytännössä vain summan ensimmäisellä termillä on merkitystä. On siis perusteltua laskea korjaukset vain Boltzmannin kaasulle [37], jossa

$$f_0 = \frac{g}{(2\pi)^3} e^{-(p^\mu u_\mu - \mu)/T} \quad (133)$$

ja korjauksessa esiintyvä $f_0(1 \mp (2\pi)^3/g f_0)$ korvataan pelkällä f_0 :lla. Pidetään laskuissa nyt mukana summan kaikki termit, koska ne eivät olennaisesti vaikeuta laskua.

Ilmaistaan nyt muut jännitystensorin komponentit (τ, r, ϕ, η_s) -kannassa π^{11} :n ja π^{33} :n avulla

$$\begin{aligned} \pi^{00} &= v_r^2 \pi^{11} \\ \pi^{01} &= v_r \pi^{11} \\ r^2 \pi^{22} &= -\frac{1}{\gamma_r^2} \pi^{11} - \tau^2 \pi^{33}. \end{aligned} \quad (134)$$

Tämä valinta on tehty, jotta tulosta voidaan verrata Baierin ja Romatschken saamaan lausekkeeseen [38]. Tällä valinnalla korjauksessa (117) esiintyvä termi saadaan muotoon

$$\begin{aligned} p_\mu p_\nu \pi^{\mu\nu} &= \pi_1^1 \left[2v_r m_T p_T \cosh(\eta_s - y) \cos(\phi - \phi_p) - p_T^2 \left(\cos^2(\phi - \phi_p) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin^2(\phi - \phi_p) \right) - v_r^2 m_T^2 \cosh^2(\eta_s - y) - v_r^2 p_T^2 \sin^2(\phi - \phi_p) \right] \\ &\quad + \pi_3^3 \left[-m_T^2 \sinh^2(\eta_s - y) + p_T^2 \sin^2(\phi - \phi_p) \right]. \end{aligned} \quad (135)$$

Nyt voidaan laskea muuttuneen jakaumafunktion aiheuttama korjaus termiseen p_T -jakaumaan. Kuten ideaalisessa tapauksessa, integraalit yli η_s :n ja ϕ :n voidaan laskea modifioitujen Besselin funktioiden avulla. Saadaan [38]

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{d^2pdy} = & \frac{g}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(\pm 1)^{n+1} \int dr \frac{\tau_f(r)r}{2T^2(\epsilon + p)} e^{n\frac{\mu}{T}} \\
& \left[2v_r m_T p_T \pi_1^1 \left(m_T (K_2 + K_0) I_1 - p_T \frac{\partial \tau_f}{\partial r} K_1 (I_2 + I_0) \right) \right. \\
& - p_T^2 \pi_1^1 \left(2m_T K_1 I_2 - p_T \frac{\partial \tau_f}{\partial r} K_0 (I_3 + I_1) \right) \\
& - v_r^2 m_T^2 \pi_1^1 \left(\frac{1}{2} m_T (K_3 + 3K_1) I_0 - p_T \frac{\partial \tau_f}{\partial r} (K_2 + K_0) I_1 \right) \\
& - v_r^2 p_T^2 \pi_1^1 \left(m_T K_1 (I_0 - I_2) - \frac{1}{2} p_T \frac{\partial \tau_f}{\partial r} K_0 (I_1 - I_3) \right) \\
& - m_T^2 \pi_3^3 \left(\frac{1}{2} m_T (K_3 - K_1) I_0 - p_T \frac{\partial \tau_f}{\partial r} (K_2 - K_0) I_1 \right) \\
& \left. + p_T^2 \pi_3^3 \left(m_T K_1 (I_0 - I_2) - \frac{1}{2} p_T \frac{\partial \tau_f}{\partial r} K_0 (I_1 - I_3) \right) \right], \tag{136}
\end{aligned}$$

missä modifioitujen Besselin funktioiden argumentit on yksinkertaisuuden vuoksi jätetty kirjoittamatta. Ne ovat samat kuin ideaalisessa tapauksessa (112).

Jos hydrodynaamisessa aikakehityksessä ei ole huomioitu dissipatiivisia vaikutuksia, emme tiedä stressitensorin komponentteja tarkasti irtikykytymispinnalla. Oletetaan seuraavassa, että viskositeetin vaikutukset hydrodynamiikassa ovat pieniä ja lasketaan jännitystensorin komponentit irtikykytymispinnalla, joka on saatu ideaalista hydrodynamiikkaa käyttäen. Jos olisi käytetty 2. kertaluvun teoriaa hydrodynamiikassa, saattaisivat stressitensorin komponentit olla erilaisia, koska ne kehittyvät differentiaaliyhtälöiden mukaan. Pääasiana tässä tutkielmassa on kuitenkin tutkia, lähinnä kvalitatiivisesti, kuinka irtikykytymisen korjaus käyttäytyy, joten jännitystensorien komponenttien arvojen aivan täsmällisellä tuntemisellä ei ole suurta merkitystä.

6 Simulaatiosta

Olemme nyt käsitelleet suurienergiaisessa raskasionitörmäyksessä syntyneen aineen hydrodynaamista aikakehitystä. Koska hydrodynamiiikka alkaa toimia vasta termalisoitumishetken τ_0 jälkeen, tarvitaan muilla menetelmillä laskettu alkutila.

Tässä tutkielmassa ei perehdytä alkutilan määrittämiseen kovin tarkasti, mutta koska se on hyvin olennainen osa hydrodynamiiikan antamien tulosten kannalta, esitellään käytettyjä menetelmiä hieman. Tämän luvun lopuksi perehdytään vielä hydrodynamiiikan yhtälöiden numeerisessa ratkaisussa käytettyyn menetelmään.

6.1 Alkutila

Käsitellään nyt lyhyesti realistisen alkutilan muodostamista suurienergiaiselle raskasionitörmäykselle Glauberin mallin avulla. Esitellään kaksi erilaista alkutilaa, jotta voimme myöhemmin tutkia alkutilan merkitystä hydrodynamiiikalle. Tässä tutkielmassa käytettyä hydrodynamiiikkaa varten tarvitaan energia- ja baryonilukutiheydelle alkutila (τ_0, r) -tasossa.

Ytimen, jonka massaluku on A , tiheys ρ saadaan Woods-Saxon-profiilista

$$\rho_A(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(|\mathbf{r}| - R_0)/\xi]}, \quad (137)$$

missä $R_0 = 1.12A^{1/3}\text{fm} - 0.86A^{-1/3}\text{fm}$, $\xi = 0.54\text{fm}$ ja ρ_0 valitaan siten, että

$$\int d^3\mathbf{r} \rho_A(\mathbf{r}) = A. \quad (138)$$

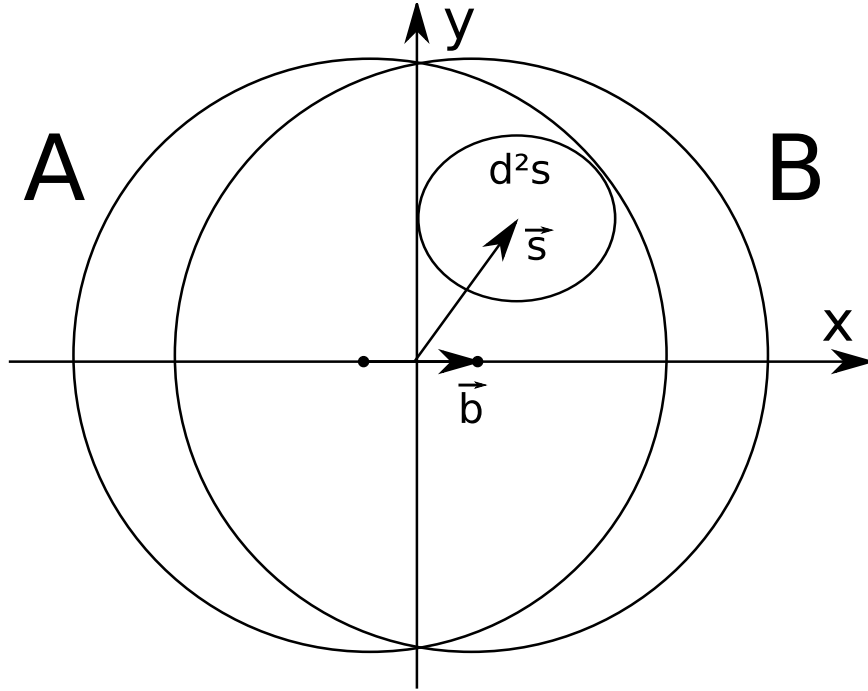
Ytimen paksuusfunktioiksi määritellään

$$T_A(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho_A(\sqrt{\mathbf{s}^2 + z^2}), \quad (139)$$

missä \mathbf{s} on vektori (x, y) -tasossa.

Ytimen A ja ytimen B välisen törmäyksen impaktiparametriksi \mathbf{b} määritellään ytimen keskipisteiden erotus ja oletetaan, että z -akseli kulkee \mathbf{b} :n keskikohdan kautta, kuten kuvassa 5. Yleensä \mathbf{b} valitaan x -akselin suuntaiseksi.

Tarkastellaan ensin eBC-mallia [39]. Mallissa energia- ja baryonilukutiheys määritetään binääristen nukleoni-nukleoni-törmäysten lukumäärästä. Otetaan ytimistä pienet putket A ja B , joiden ala on $d^2\mathbf{s}$. Kun putkessa A



Kuva 5: Törmäävien ytimien impaktiparametri \mathbf{b} ja ytimissä olevat d^2s :n kokoiset putket.

olevat nukleonit törmäävät kaikkien putkessa B olevien nukleonien kanssa, saadaan törmäyksien lukumääräksi

$$dN^{\text{coll}} = d^2s \sigma_{NN} T_A(\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{b}) T_B(\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{b}), \quad (140)$$

missä σ_{NN} on nukleoni-nukleoni-törmäyksen vaikutusala. Binääristen törmäysten keskimääräiseksi lukumääräksi saadaan siis

$$N^{\text{coll}} = \sigma_{NN} T_{AB}(\mathbf{b}), \quad (141)$$

missä

$$T_{AB}(\mathbf{b}) = \int d^2s T_A(\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{b}) T_B(\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{b}) \quad (142)$$

on ydinten peittofunktio. eBC-mallissa oletetaan, että binääriset törmäykset tuottavat yhtä paljon energiaa, joten energiatiheydeksi saadaan

$$\epsilon(\mathbf{s}, \tau_0, \mathbf{b}) = K_\epsilon^{\text{coll}}(\tau_0) T_A(\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{b}) T_B(\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{b}), \quad (143)$$

missä K_ϵ^{coll} on vakio. Määritellään baryonilukutiheys vastaavasti

$$n_B(\mathbf{s}, \tau_0, \mathbf{b}) = K_{n_B}^{\text{coll}}(\tau_0) T_A(\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{b}) T_B(\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{b}), \quad (144)$$

missä K_n^{coll} on vakio. Nukleoni-nukleoni-törmäyksen vaikutusala σ_{NN} on nyt sisälletetty kertoimiin K^{coll} .

Toisessa alkutilassa tarvitaan törmäykseen osallistuvien nukleonien määrä. Tarkastellaan epäelastista A+B törmäystä. Binäärisiä törmäyksiä on maksimissaan AB kappaletta. Ytimen A nukleonin todennäköisyys törmätä putkessa B olevaan nukleoniin on

$$P_{NB} = \frac{\sigma_{NN} T_B(\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{b})}{B}. \quad (145)$$

Tällöin todennäköisyys sille, että ytimen A nukleoni ei törmää ytimen B nukleonien kanssa on

$$P = \left(1 - \frac{\sigma_{NN} T_B(\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{b})}{B}\right)^B \quad (146)$$

ja todennäköisyys sille, että nukleoni törmää vähintään yhden nukleonion kanssa, ts. nukleoni osallistuu törmäykseen, on

$$P = \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma_{NN} T_B(\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{b})}{B}\right)^B\right]. \quad (147)$$

Tällöin putkessa A törmäykseen osallistuvien nukleonien lukumäärä on

$$dN^{\text{wn}} = d^2\mathbf{s} T_A(\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{b}) \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma_{NN} T_B(\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{b})}{B}\right)^B\right]. \quad (148)$$

Vastaavasti saadaan putkessa B törmäykseen osallistuvien nukleonien lukumäärä. Siis törmäykseen osallistuvien ("haavoittuneiden") nukleonien tiheydeksi n_{wn} xy -tasossa saadaan

$$n_{\text{wn}} = T_A(\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{b}) \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma_{NN} T_B(\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{b})}{B}\right)^B\right] + T_A(\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{b}) \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma_{NN} T_A(\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{b})}{A}\right)^A\right]. \quad (149)$$

Tämän tiheyden avulla määritellyssä eWN-mallissa [39] energiatiheydeksi saadaan

$$\epsilon(\mathbf{s}, \tau_0, \mathbf{b}) = K_\epsilon^{\text{wn}} n_{\text{wn}}, \quad (150)$$

missä K_ϵ^{wn} on vakio ja baryonilukutiheydeksi saadaan

$$n_B(\mathbf{s}, \tau_0, \mathbf{b}) = K_{n_B}^{\text{wn}} n_{\text{wn}}, \quad (151)$$

missä $K_{n_B}^{\text{wn}}$ on vakio. Binäärisiin törmäyksiin perustuvassa eBC-mallissa jokainen binäärinen törmäys tuottaa saman määrän energiaa kun taas havoittuneiden nukleonien eWN-mallissa jokainen törmäykseen osallistuva nukleoni tuottaa yhtä paljon energiaa.

Koska kiihdyttimellä tehtävissä kokeissa ei voida määrittellä impaktiparametriä, pitää olla joku tapa luokitella törmäykset eri keskeisyysluokkiin. Tässä työssä käytetään optista Glauberin mallia luokkien määrittelemiseen. Mallin mukaan koko törmäyksen vaikutusala σ_{tot} on

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d^2\mathbf{b} \frac{d\sigma_{\text{tot}}}{d^2\mathbf{b}} = \int d^2\mathbf{b} [1 - e^{T_{AB}(\mathbf{b})\sigma_{NN}}]. \quad (152)$$

Nyt määritellään keskeisyysluokat $c_1 = 0 - 5\%$, $c_2 = 5 - 10\%$, \dots , siten, että keskeisyysluokkia vastaavat impaktiparametrivälit $[0, b_1]$, $[b_1, b_2]$, \dots antavat

$$\sigma_{c_n}/\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{\sigma_{\text{tot}}} \int_{b_{n-1}}^{b_n} d^2\mathbf{b} [1 - e^{T_{AB}(\mathbf{b})\sigma_{NN}}] = 0,05. \quad (153)$$

Tässä työssä käsitellään vain luokkaa $0 - 5\%$ ja oletetaan, että $\mathbf{b} = 0$. Todellisuudessa keskeisyysluokille pitäisi laskea keskimääräinen impaktiparametri ja käyttää sitä [40], mutta koska simulaatiossa käytetään sylinterisymmetriaa, ei voida tutkia tapauksia $\mathbf{b} \neq 0$. Keskeisyysluokan $0 - 5\%$ keskimääräinen impaktiparametri RHIC-kiihdyttimen tapauksessa on 2.24 fm [40], joten keskimäärin aivan reunalla olevat nukleonit eivät osallistu törmäykseen. Efektiivistä massalukua A_{eff} käyttämällä saadaan mallinnettua keskeisyysluokan tilannetta.

Tarvittavat vakiot määritetään EKRT-mallin [41] avulla. eBC-mallin kertoimet saadaan lausekkeista [42]

$$\begin{aligned} K_{\epsilon}^{\text{coll}} &= \frac{\sigma \langle E_T \rangle_{\Delta y, p_{\text{sat}}}}{\tau_0 \Delta y} \\ K_{n_B}^{\text{coll}} &= \frac{\sigma \langle N^{B-\bar{B}} \rangle_{\Delta y, p_{\text{sat}}}}{\tau_0 \Delta y}, \end{aligned} \quad (154)$$

joissa esiintyvät tekijät on lueteltu taulukossa 1. Suureet $\sigma \langle E_T \rangle$ ja $\sigma \langle N^{B-\bar{B}} \rangle$ saadaan EKRT-mallissa QCD:n häiriöteoriaa käyttämällä minijettilaskulla käyttäen QCD:n gluonien saturoitumisominaisuutta. eWN-mallin kertoimet saadaan vaatimalla, että baryoniluku ja $dS/d\eta$ ovat samat kuin eBC-mallissa.

Jotta energialiikemäärätensorin komponentit saadaan laskettua alkutilanteessa, pitää tietää energiatheyden lisäksi poikittaisnopeus. Termali-

$\sqrt{s}/A[\text{GeV}]$	200	5500
A	197	208
A_{eff}	181	193
$\tau_0[\text{fm}]$	0.17	0.097
$\sigma\langle E_T\rangle[\text{mbGeV}]$	85.9	479
$\sigma\langle N^{B-\bar{B}}\rangle[\text{mb}]$	0.536	0.109

Taulukko 1: EKRT-mallin antamat suureet 0-5% keskeisille A+A-törmäyksille, kun $\Delta y=1$. Arvot artikkelista [42].

soitumisen aikana ei voi kehittyä suurta poikittaisnopeutta, joten yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan poikittaisnopeudeksi $v_r = 0$, kun systeemi termalisoituu.

Artikkelissa [43] on hiukkasspektrit saatu tuotettua paremmin käyttämällä poikittaisvirtaukselle alkunopeutta. Artikkelissa on kuitenkin käytetty myöhäisempää termalisoitumishetkeä $\tau_0 = 0.6$ fm. Koska tässä tutkielmassa käytetään varhaisempää termalisoitumishetkeä, on virtaus- ta ehtinyt jo kehittyä jonkin verran kun $\tau = 0.6$ fm. Tämänkin takia on perusteltua jättää alkunopeus nolaksi tämän tutkielman tapauksessa.

6.2 SHASTA

Käsittelimme aikaisemmin hydrodynaamisen systeemin ratkaisemista. Saimme differentiaaliyhtälöitä, jotka pitää ratkaista numeerisesti. Hydrodynamiikan liikeyhtälöt saatiin muotoon

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\rho) = S, \quad (155)$$

missä ρ on "tiheys", \vec{v} on nopeus ja S sisältää lähdeterminit. Tällaisen yhtälön ratkaisemiseen soveltuu SHASTA-algoritmi [44].

Hilapisteessä j on aika-askeleella n tiheys ρ_j^n . Ensimmäisessä vaiheessa tehdään tiheydelle lineaarinen approksimaatio, kuten kuvassa 6a. Nyt kahden hilapisteen välissä oleva massa on

$$m = \left[\rho_j^n + \frac{1}{2}(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) \right] dx. \quad (156)$$

Tämän jälkeen siirretään hilapisteitä $v_j\Delta t$:n verran, kuten kuvassa 6b. Massan pitää säilyä, joten määritellään jokaiseen hilapisteeseen uudet ti-

heydet ρ_j^+ ja ρ_j^- siten, että

$$\begin{aligned} m' &= \left[\rho_j^+ + \frac{1}{2}(\rho_{j+1}^- - \rho_j^+) \right] (dx + v_{j+1}dt - v_jdt) \\ &= \left[\rho_j^n + \frac{1}{2}(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) \right] dx = m. \end{aligned} \quad (157)$$

Valitaan

$$\begin{aligned} \rho_j^+ &= \frac{dx}{dx + v_{j+1}dt - v_jdt} \rho_j^n \\ \rho_j^- &= \frac{dx}{dx + v_jdt - v_{j-1}dt} \rho_j^n. \end{aligned} \quad (158)$$

Tiheydet ρ_j^+ ja ρ_j^- ovat kuvassa 6c.

Seuraavaksi määritetään alkuperäisessä tilavuusalkiossa oleva massa, kuten kuvassa 6d. Tästä voidaankin määrittää tilavuusalkion tiheys kuljetuksen jälkeen. Saadaan

$$\rho_j^{n+1} = \frac{1}{2}Q_+^2(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) + \frac{1}{2}Q_-^2(\rho_{j-1}^n - \rho_j^n) + (Q_+ + Q_-)\rho_j^n, \quad (159)$$

missä

$$Q_{\pm} = \frac{\frac{1}{2} \mp v_j \frac{dt}{dx}}{1 \pm (v_{j\pm 1} - v_j) \frac{dt}{dx}}. \quad (160)$$

Jotta menetelmä toimisi oikein, ei hilapiste saa kulkeutua tilavuusalkion ulkopuolelle. Tämä ehto toteutuu kun

$$\left| v_j \frac{dt}{dx} \right| < \frac{1}{2}. \quad (161)$$

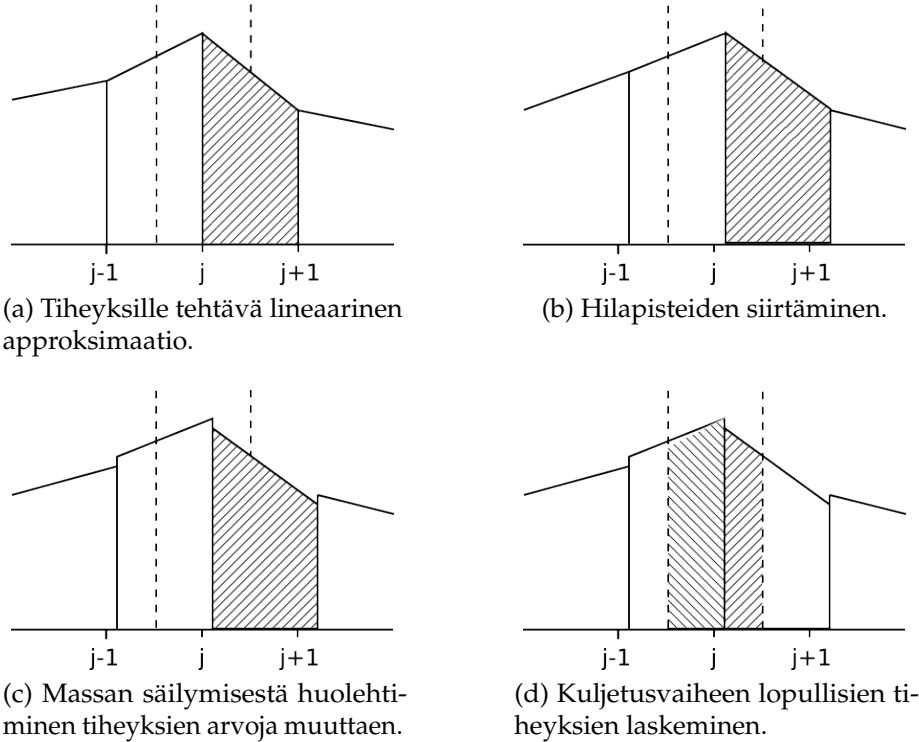
Kuljetusvaiheessa syntyy paljon diffuusiota. Esimerkiksi nopeuden ollessa nolla kaikkialla saadaan yhtälö (159) muotoon

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n + \frac{1}{8}(\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n), \quad (162)$$

missä jälkimmäinen termi kertoo nopeudesta riippumattoman diffuusion suuruuden. Jos nopeus ei ole nolla, tulee nopeudesta riippuvaa diffuusiota, joka on kuitenkin pieni verrattuna nopeudesta riippumattomaan diffuusion [44]. Aiheutunut diffuusio pitää poistaa tai algoritmi on lähes käyttökelvoton.

Syntynyt diffuusio poistetaan lisäämällä kuljetusvaiheen jälkeen sopiva määrä antidiffuusiota. Edellisen yhtälön perusteella siis oikea tiheys olisi

$$\bar{\rho}_j^n = \rho_j^n - f_{j+1/2} + f_{j-1/2}, \quad (163)$$



Kuva 6: SHASTA:n kuljetusvaiheet.

missä

$$f_{j\pm 1/2} = \pm \frac{1}{8}(\rho_{j\pm 1}^n - \rho_j^n). \quad (164)$$

Jos sovelletaan tätä menetelmää diffuusion poistamiseen, saattaa syntyä uusia, epäfysikaalisia, maksimeita tai minimeitä. Tämän takia meidän pitää asettaa ehdot niin, että hilapisteiden arvo ei mene viereisten hilapisteiden arvojen ohi. Tämä saadaan varmistettua kun valitaan korjatut antidiffuusio- f^c niin, että

$$f_{j+1/2}^c = S \max\{0, \min(S\Delta_{j-1/2}, D|\Delta_{j+1/2}|, S\Delta_{j+3/2})\}, \quad (165)$$

missä

$$\Delta_{j+1/2} = \rho_{j+1}^n - \rho_j^n, \quad (166)$$

D on antidiffuusiokerroin ja $S = \text{sign}\Delta_{j+1/2}$. Nyt lopullinen tiheys antidiffuusion jälkeen on

$$\bar{\rho}_j^n = \rho_j^n - f_{j+1/2}^c + f_{j-1/2}^c. \quad (167)$$

Lähdeterminit huomioidaan sen jälkeen kun on tehty SHASTA:n kuljetus ja antidiffuusio. Lähdeterminit lisätään vain yksinkertaisesti SHASTA:n

antamaan tiheyteen seuraavasti

$$\rho^{n+1} = \rho^{n+1} + Sdt. \quad (168)$$

Menetelmä toimii paremmin kun lasketaan ensin nopeus ja lähde-termit käyttäen puolikasta aika-askelta ja tämän jälkeen lasketaan kokonainen aika-askel käyttämällä puolikkaalla askeella laskettua nopeutta ja lähde-termejä.

SHASTA:sta voi kehittää myös version, missä tilanteen geometria otetaan huomioon jo kuljetusvaiheessa [45]. Kun tilanteen geometria otetaan huomioon vasta antidiffuusion jälkeen, tulee antidiffuusiosta pieni virhe geometrian takia. Ero on kuitenkin niin pieni, että sillä ei ole tämän työn kannalta merkitystä. Tulevaisuudessa on tarkoituksena luopua atsimuuttisymmetriasta jolloin tilanne muistuttaa enemmän yksiulotteista versiota kuin radiaaliversiota.

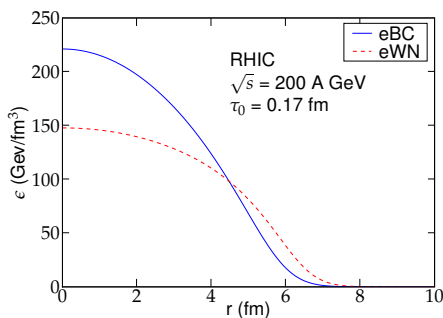
7 Tulokset

Seuraavaksi esitellään edellä kuvailuilla menetelmillä saatuja tuloksia. Ensin esitellään alkutilat ja aineen hydrodynaaminen aikakehitys RHIC-kiihdyttimellä tehtyjen Au+Au-törmäysten tapauksessa. Sen jälkeen tutkitaan, kuinka hyvin mallilla saadaan tuotettua RHIC:n törmäysten hiukkaspektrit. Sen jälkeen ennustetaan samoilla menetelmillä LHC-kiihdyttimellä tehtävien Pb+Pb-törmäyksiä hiukkaspektrit.

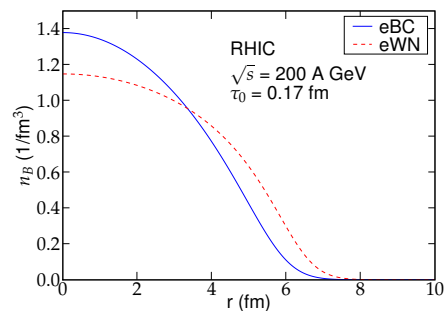
7.1 Alkutilat

Vertaillaan ensin eri alkutilojen eroavaisuuksia. Kuvissa 7a ja 7b on eBC- ja eWN-malleilla tuotetut EKRT-alkutilat RHIC:n Au+Au-törmäyksille. Kuvasta nähdään, että eBC-mallin alkutilassa on huomattavasti suurempi energia- ja baryonilukutiheys ytimien keskellä. Tilavuutta on kuitenkin huomattavasti vähemmän aineen keskellä kuin reunoilla, joten kokonaisenergian ja baryoniluvun kannalta aivan keskellä olevilla tiheyksillä ei ole suurta merkitystä.

Kun siirrytään kohti ytimien reunaa, huomataan, että eWN-mallista saadut tiheydet ovat suurempia kuin eBC-mallista saadut tiheydet. Näin tietysti pitääkin olla, koska vaadittiin, että $dS/d\eta$ ja baryoniluku ovat samat molemmissa tapauksissa. Mallien yksi eroavaisuus on siis se, että eBC-mallissa aine on keskittynyt enemmän keskelle kuin eWN-mallissa. Toinen merkittävä ero mallien välillä on se, että eBC-mallissa tiheyksien derivaatta on suurempi.



(a) Energiatiheys RHIC:n keskeisille Au+Au-törmäyksille eBC- ja eWN-malleilla.



(b) Baryonilukutiheys RHIC:n keskeisille Au+Au-törmäyksille eBC- ja eWN-malleilla.

Kuva 7: RHIC-kiihdyttimen tapauksessa käytettävät alkutilat.

7.2 Hydrodynaaminen aikakehitys

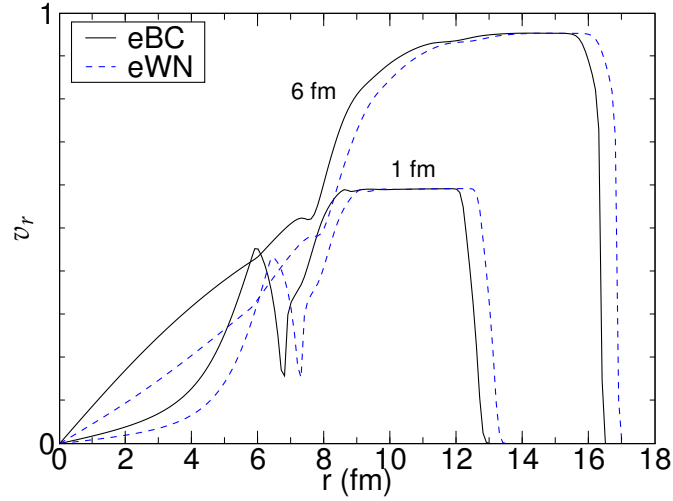
Tutkitaan seuraavaksi aineen virtausta. Plasmassa oleva paine saa aineen laajenemaan poikittaissuuntaan. Käytetyssä tilanyhtälössä on 1. kertaluvun faasitransitio, jolloin paine on sama koko faasitransition alueella. Tällöin paineen derivaatta on nolla, jolloin ei synny lisää virtausta poikittaissuunnassa. Kuvassa 8a tämä havaitaan selvästi poikittaisnopeuden kuoppa-aikaisilla ajanhetkillä.

Kuvasta 8a nähdään erilaisten alkuprofiilien erot virtauksen kehittymiseen. Binääritörmäysten luomassa alkutilassa energiatiheys laskee jyrkemmin jolloin paineen derivaatta on suurempi ja aineen virtaus on voimakkaampaa plasman keskellä. Tämä saa aikaan sen, että energiatiheys pienenee nopeammin systeemin keskellä eBC-mallissa kuin eWN-mallissa. Suurimmat nopeudet, jotka lähestyvät valon nopeutta, kehittyvät aineen reunalle, mutta pitää muistaa, että reunalla ainetta on todella vähän. Tämä alue ei vaikuta spektreihin, koska se jää kuvissa 9 olevien irtikytkeytymispintojen ulkopuolelle.

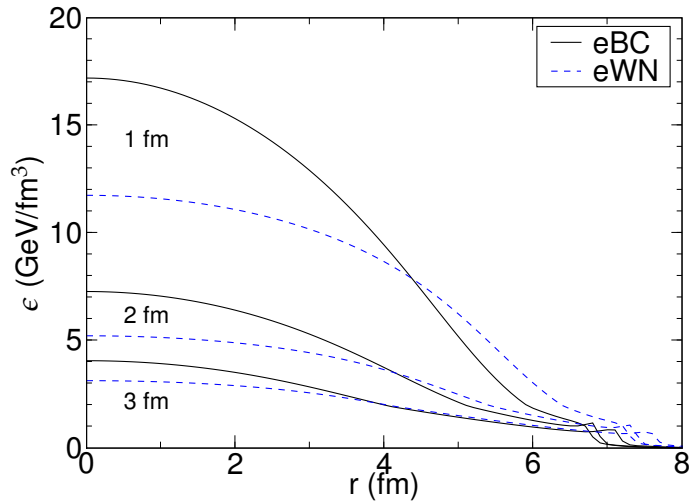
Kuvasta 8a huomataan myös, että reunalla poikittaisnopeus laskee jyrkästi nolnaan. Tämä aiheutuu siitä, että alkutilaa muodostettaessa on jonkin pienen energiatihyden jälkeen annettu vain vakioarvoja energiatihydellem. Koska energiatiheys laskee reunalla rajusti, tulee tarpeeksi suurella säteellä todella pieniä energiatihyden arvoja, jotka aiheuttavat suuria numeerisia virheitä. Koska energiatiheys on pidetty vakiona arvon $\epsilon = 10^{-8} \text{GeV}/\text{fm}^3$ jälkeen, ei tämä aiheuta mitään havaittavia muutoksia mitattaviin suureisiin. Rajaa muuttamalla myös poikittaisnopeuden jyrkän laskun paikka aineen reunalla muuttuu, mutta myös tämä käytös jää irtikytkeytymispintojen ulkopuolelle.

Muutaman fermin evoluution jälkeen nähdään selvästi, että energiatihyteen muodostuu piikki noin 7 fermin kohdalle, kuten kuvassa 8b. Tämä piikki muodostuu faasitransition takia. Kuten jo edellä todettiin, poikittaisnopeus ei kasva faasitransitioalueella, joten hieman faasitransitioalueen sisäpuolella aine saa suuremman poikittaisnopeuden. Tällöin ainetta kerääntyy faasitransitioalueen reunalle aiheuttaen piikin energiatihyyskäyriin. Faasitransitio ei todennäköisesti ole ensimmäistä kertalukua, mutta 1. kertaluokan faasitransition aiheuttama piikki syntyy sellaisessa kohtaa, että sen vaikutukset hiukkasspektriin ovat pieniä.

Kuvasarjassa 9 on piirrettyä (r, τ) -tasossa aineen faasirajat, irtikytkeytymispinnat, virtausviivat ja nopeuden tasa-arvokäyrät 0-5% keskeisille Au+Au-törmäyksille. Kuvissa 9a ja 9c alkutilana on eBC-malli ja kuvissa 9b ja 9d on käytetty eWN-alkutilaa. Kuvissa on lämpötilan tasa-arvopinnoilla eroteltuina kvarkkigluoniplasma (QGP), sekafaasi (MP) ja hadronikaasu



(a) Poikittaisnopeus säteen funktiona ajanhetkillä $\tau - \tau_0 = 1, 6$ fm eBC- ja eWN-alkutilojen tapauksessa.

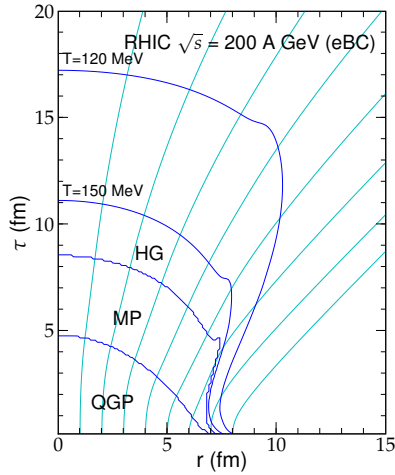


(b) Energiatiheys säteen funktiona ajanhetkillä $\tau - \tau_0 = 1, 2, 3$ fm eBC- ja eWN-alkutilojen tapauksessa.

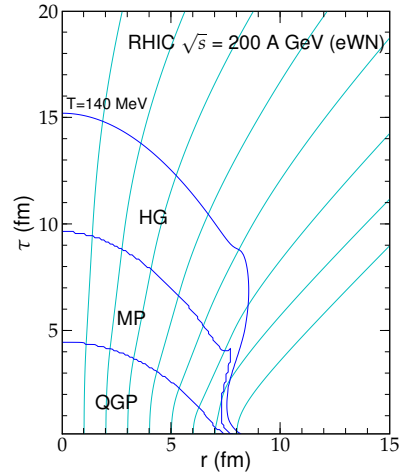
Kuva 8: Poikittaisnopeus ja energiatiheys muutamilla ajanhetkillä RHIC-kiihdyttimen Au+Au-törmäysten simulaatiossa.

(HG). Lämpötilan tasa-arvopinnoissa on faasitransition aiheuttama piikki. Irtikykytyymisessä käytettävät lämpötilan tasa-arvopinnat valitaan siten, että saadaan hiukasspektrit vastaamaan mittaustuloksia.

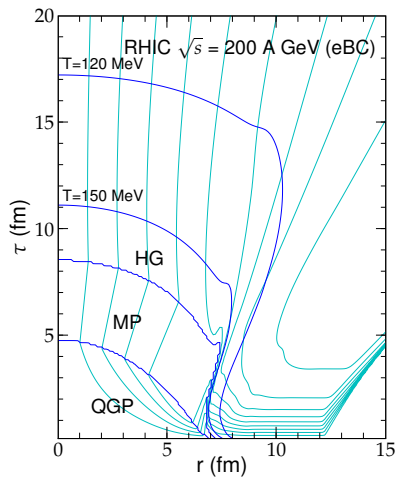
Kuvasta 9a nähdään, että kvarkkigluoniplasman elinaika systeemin kes-



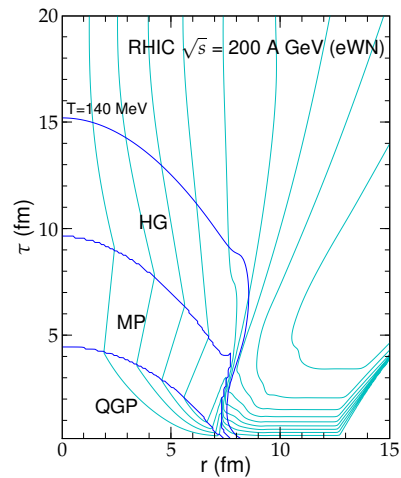
(a) Faasirajat, kaksi irtikytkeytymispintaa ja virtausviivat 0-5% keskeisille $\sqrt{s_{NN}} = 200$ A GeV Au+Au-törmäyksille eBC-alkutilalle.



(b) Faasirajat, kaksi irtikytkeytymispintaa ja virtausviivat 0-5% keskeisille $\sqrt{s_{NN}} = 200$ A GeV Au+Au-törmäyksille eWN-alkutilalle.



(c) Faasirajat, kaksi irtikytkeytymispintaa ja nopeuden tasa-arvokäyrät 0-5% keskeisille $\sqrt{s_{NN}} = 200$ A GeV Au+Au-törmäyksille eBC-alkutilalle. Nopeuden tasa-arvokäyrät vasemmalta oikealle $v_r = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.



(d) Faasirajat, kaksi irtikytkeytymispintaa ja nopeuden tasa-arvokäyrät 0-5% keskeisille $\sqrt{s_{NN}} = 200$ A GeV Au+Au-törmäyksille eWN-alkutilalle. Nopeuden tasa-arvokäyrät vasemmalta oikealle $v_r = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.

Kuva 9: RHIC:n $\sqrt{s} = 200$ A GeV Au+Au-törmäysten tasa-arvopintoja ja virtausviivoja sekä eBC- että eWN-alkutilasta lähtien.

kellä on noin 5 fm. Bjorkenin mallilla saadaan kvarkkigluoniplasman elinajaksi noin 6 fm, joten poikittaisvirtauksen vaikutukset näkyvät jo kvarkkigluoniplasman elinaikana.

Virtausviivat $r(t)$ kertovat kuinka fluidielementti liikkuu poikittaissuunnassa, kun $z = 0$ ja $\tau = t$. Virtausviivan derivaatta siis kertoo poikittaisnopeuden. Sekafaasin kohdalla virtausviivat ovat suoria, koska paine ei aiheuta kiihtyvyyttä. Entropiaa ei siirry virtausviivojen yli, joten viivat antavat hyvin kuvan siitä mihin entropia (hiukkaset) kulkeutuu. Virtausviivoista nähdään hyvin alkutilan vaikutus syntyvään virtaukseen.

Lämpötilan tasa-arvopinnoista huomataan, että irtikytkeytymislämpötilan muuttaminen vaikuttaa suuresti hadronikaasun elinaikaan. Esimerkiksi eBC-alkutilan tapauksessa kohdassa $z = 0$ hadronikaasu elää noin 6 fm pidempään kuin irtikytkeytymislämpötila muutetaan 150 MeV:sta 120 MeV:iin.

7.3 Hiukkasspektrit

Hiukkasspektrit on laskettu Harri Niemeltä saadulla ohjelmalla. Cooper-Fryen kaavan (103) antamat spektrit kertovat, mitä hiukkasia hadronikaasusta vapautuu. Suurin osa eri hiukkaslajeista kuitenkin hajoaa ennen kuin niitä voidaan ilmaisimilla havaita. Tämän takia ohjelma huomioi vahvat kaksi- ja kolmihiukkasajoamiset [46], jotta tuloksia voidaan verrata mittaustuloksiin.

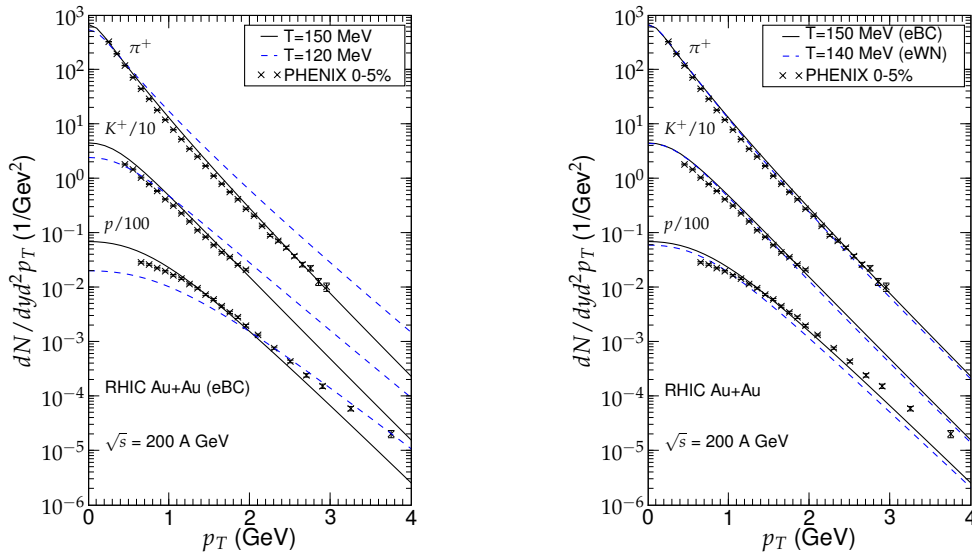
Kuvassa 10a on eBC-alkutilan tapauksessa saadut spektrit kahdessa eri irtikytkeytymislämpötilassa pioneille, kaoneille ja protoneille. Simulaatio tuottaa hyvin pionien ja kaonien spektrin kun $p_T \leq 2-3$ GeV. Tällä alueella hydrodynamiikan uskotaan toimivan. Suuremmilla p_T :n arvoilla myös muut prosessit alkavat vaikuttaa. Protonien spektriä simulaatio ei tuota hyvin, mutta protonien multiplisiteetti on oikea. Tekemällä irtikytkeytyminen hieman eri tavalla, saadaan myös protonien spektri vastaamaan mittaustuloksia [47].

Lisäksi huomataan, että $T = 120$ MeV irtikytkeytymispinnalla hiukkasspektrit menevät mittaustulosten yläpuolelle. Alhaisempaa irtikytkeytymislämpötilaa on käytetty sen takia, että saadaan käsitys siitä, kuinka irtikytkeytymislämpötila vaikuttaa hiukkasspektreihin. Kun irtikytkeytymislämpötilaa lasketaan, on systeemin elinaika pidempi. Tällöin paine ehtii luoda enemmän poikittaisvirtausta, mikä aiheuttaa sen, että suuremman p_T :n hiukkasia syntyy enemmän, kuten kuvasta 10a nähdään. Usein sanotaan, että alhaisemmalla irtikytkeytymislämpötilalla saadut spektrit ovat laakeampia.

Kuvassa 10b on molemmilla alkutiloilla saadut spektrit. eBC-alkutilalle $T_f = 150$ MeV ja eWN-alkutilalle $T_f = 140$ MeV. Haavoittuneiden nukleonien tapauksessa virtaus kehittyy hitaammin kuin binääristen törmäysten tapauksessa, joten irtikytketymislämpötila pitää valita eWN-alkutilalla matalammaksi, jotta virtausta ehtii kehittyä tarpeeksi.

Spektrissä ei näytä olevan suuria eroja eri alkutilojen välillä. Kuitenkin jos tarkastellaan epäkeskeisiä törmäyksiä, alkaa eri alkutilojen välille tulla eroja kun tutkitaan eri sentraliteettiluokkia [40]. Huomattavaa on kuitenkin se, että mitatut spektrit osuvat eri malleilla saatujen spektrien väliin. Spektrejä onkin saatu sopimaan paremmin mittauksiin, kun alkutilasta on tehty eBC- ja eWN-mallien yhdistelmä.

Taulukkoon 2 on koottu hiukkasten multiplisiteettejä dN/dy ennen ja jälkeen hajoamisen. Termisten hiukkasten lukumäärä on varsinkin pioneilla paljon pienempi kuin hajoamisen jälkeen laskettu multiplisiteetti. Koska pionit ovat keveitä hiukkasia, syntyy niitä monien raskaampien hiukkasten hajotessa. Merkittävä osa havaituista hiukkasista syntyy siis raskaampien hiukkasten hajoamisissa.



(a) Hiukkasspektrit RHIC:n Au+Au-törmäyksille eBC-alkutilalla kahdella eri irtikytketymislämpötilalla.

(b) Hiukkasspektrit RHIC:n Au+Au-törmäyksille eri alkutiloista lähtien.

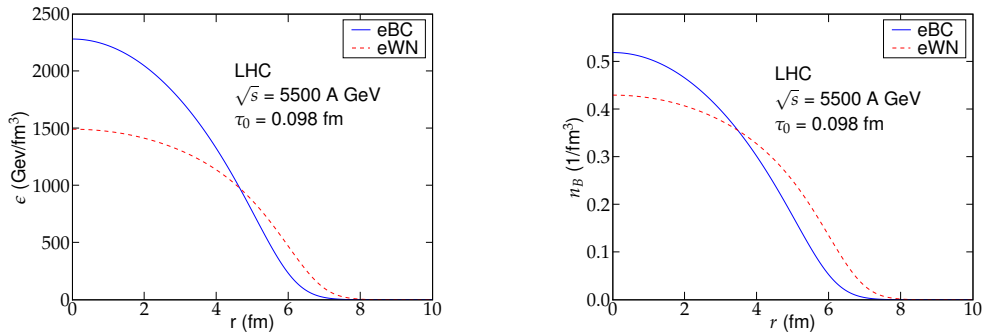
Kuva 10: RHIC:n $\sqrt{s} = 200$ A GeV Au+Au-törmäysten hiukkasspektrit eri alkutiloilla ja irtikytketymislämpötiloilla. Mittaustulokset ovat artikkelista [48].

$\sqrt{s_{NN}}$ [GeV]	200 (BC)		200 (WN)
T_f [MeV]	150	120	140
$\pi^+ dN/dy$ term.	133	233	162
$\pi^+ dN/dy$	310	327	312
$K^+ dN/dy$ term.	34	37	37
$K^+ dN/dy$	62	51	60
$p dN/dy$ term.	8	6	8
$p dN/dy$	21	10	17

Taulukko 2: Hiukkasten multiplisiteettejä ennen ja jälkeen kaksi- ja kolmihiukkashajoamisten eri irtikytkeytymispinnoilla.

7.4 Ennuste LHC:lle

CERN:in LHC-kiihdyttimellä tulevaisuudessa tehtävissä Pb+Pb-törmäyksissä saavutetaan huomattavasti suurempi alun energiatiheys kuin RHIC-kiihdyttimellä. Tämä tarkoittaa sitä, että syntyvä kvarkkigluoniplasma on kuumempaa ja näin ollen sen faasitransitio hadronikaasuksi tapahtuu myöhemmin. Tämä tarkoittaa sitä, että QGP:n ominaisuuksia pitäisi pystyä tutkimaan paremmin pidemmän elinajan takia. Kuvissa 11a ja 11b näkyy alun energiatiheys ja baryonilukutiheys eBC- ja eWN-mallien tapauksessa.

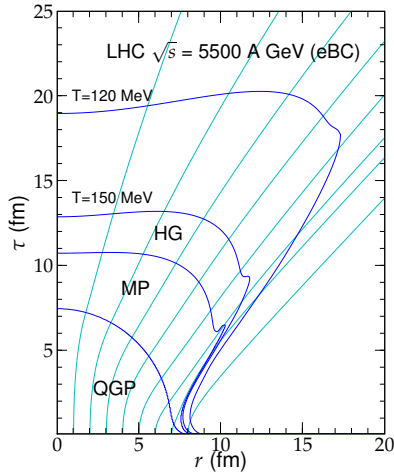


(a) Energiatiheys LHC:n Pb+Pb-törmäyksille eBC- ja eWN-malleilla.

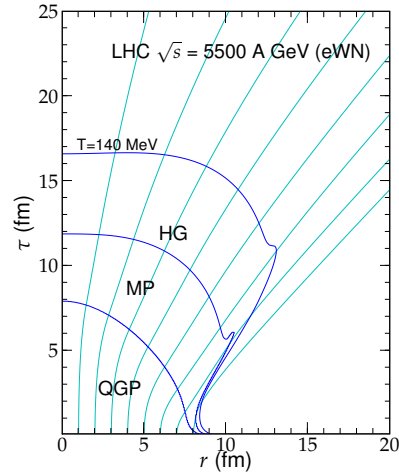
(b) Baryonilukutiheys LHC:n Pb+Pb-törmäyksille eBC- ja eWN-malleilla.

Kuva 11: LHC-kiihdyttimen tapauksessa käytettävät alkutilat.

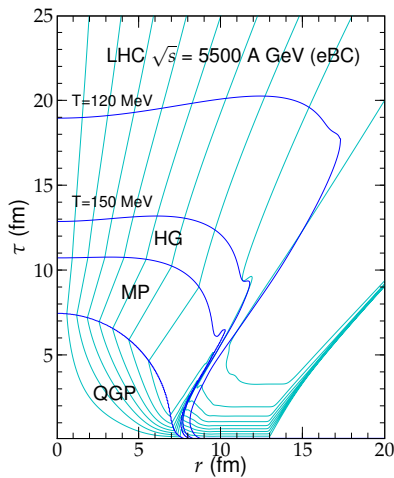
Kuvasta 11a nähdään, että kohdassa $r = 0$ fm energiatiheys on noin kymmenkertainen RHIC:n tilanteeseen nähden, mutta energiatiheys menee nollian lähes samassa kohtaa molemmissa tapauksissa. Tämä tarkoittaa, että paineen gradientit ovat suurempia LHC:n tapauksessa, joten poikittaisnopeus kasvaa nopeammin. Kuvasta 11b nähdään, että baryonilukutiheys



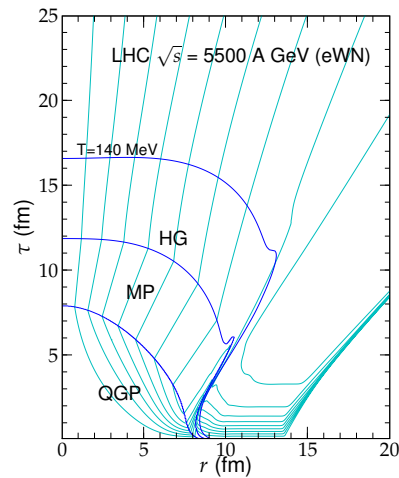
(a) Faasirajat, kaksi irtikytkeytymispintaa ja virtausviivat 0-5% keskeisille $\sqrt{s_{NN}} = 5500$ GeV Pb+Pb-törmäyksille eBC-alkutilalle.



(b) Faasirajat, kaksi irtikytkeytymispintaa ja virtausviivat 0-5% keskeisille $\sqrt{s_{NN}} = 5500$ GeV Pb+Pb-törmäyksille eWN-alkutilalle.



(c) Faasirajat, kaksi irtikytkeytymispintaa ja nopeuden tasa-arvokäyrät 0-5% keskeisille $\sqrt{s_{NN}} = 5500$ GeV Pb+Pb-törmäyksille eBC-alkutilalle. Nopeuden tasa-arvokäyrät vasemmalta oikealle $v_r = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.



(d) Faasirajat, kaksi irtikytkeytymispintaa ja nopeuden tasa-arvokäyrät 0-5% keskeisille $\sqrt{s_{NN}} = 5500$ GeV Pb+Pb-törmäyksille eWN-alkutilalle. Nopeuden tasa-arvokäyrät vasemmalta oikealle $v_r = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.

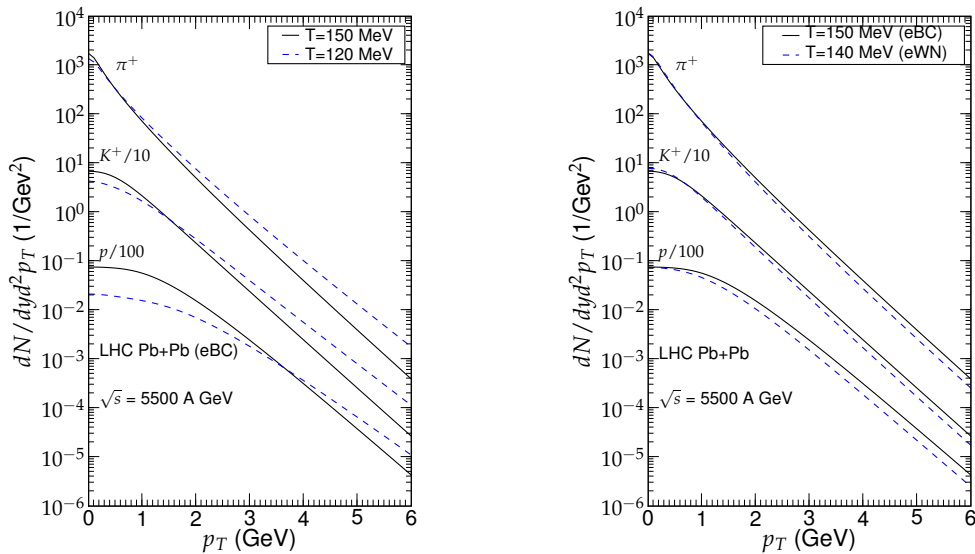
Kuva 12: LHC:n $\sqrt{s} = 5500$ A GeV Pb+Pb-törmäysten tasa-arvopintoja ja virtausviivoja sekä eBC- että eWN-alkutilasta lähtien.

on pienempi LHC:n tapauksessa kuin RHIC:n tilanteessa.

Kuvissa 12a, 12b, 12c ja 12d on piirretty faasirajat, irtikytkeytymispinnat, virtausviivat ja nopeuden tasa-arvokäyrät LHC:n keskeisyysluokan 0-5% Pb+Pb-törmäyksille. Kuvista nähdään, että kvarkkigluoniplasman elinaika on pidempi ja syntynyt virtaus on suurempi kuin RHIC:n alkutilalla.

Kuvissa 13a ja 13b ovat LHC:lle ennustetut hiukkasspektrit eri irtikytkeytymislämpötiloilla ja alkutiloilla. Pienillä p_T :n arvoilla spektrit ovat selvästi ylempänä kuin RHIC:n spektrit. Tämä tarkoittaa sitä, että hiukkasia syntyy enemmän. Näin pitääkin olla, koska törmäysenergia on suurempi.

Taulukossa 3 on ennustetut multiplisiteetit pioneille, kaoneille ja protoneille. LHC:n Pb+Pb-törmäyksissä. Artikkelissa [49] on listattuna eri ryhmien ennusteita LHC:n Pb+Pb-törmäyksessä syntyvien varattujen hiukkasten määrästä. Tässä tutkielmassa esitellyt tulokset vastaavat kohtaa Eskola et al. Huomataan, että tämä ennuste antaa huomattamasti suuremman hiukkastuoton kuin suurin osa muista ennusteista.



(a) Hiukkasspektrit LHC:n Pb+Pb-törmäyksille eBC-alkutilalla kahdella eri irtikytkeytymislämpötilalla.

(b) Hiukkasspektrit LHC:n Pb+Pb-törmäyksille eri alkutiloista lähtien.

Kuva 13: LHC:n $\sqrt{s} = 5500$ AGeV Pb+Pb-törmäysten hiukkasspektrit eri alkutiloilla ja irtikytkeytymislämpötiloilla.

$\sqrt{s}/A[\text{GeV}]$	5500 (BC)		5500 (WN)
$T_f[\text{MeV}]$	150	120	140
$\pi^+ dN/dy$ term.	465	820	566
$\pi^+ dN/dy$	1083	1148	1090
$K^+ dN/dy$ term.	117	128	125
$K^+ dN/dy$	214	173	205
$p dN/dy$ term.	25	14	22
$p dN/dy$	64	24	50

Taulukko 3: Hiukkasten multiplisiteettejä ennen ja jälkeen kaksi- ja kolmihiukkashajoamisten eri irtikytkeytymispinnoilla.

7.5 Irtikytkeytymisen viskoottinen korjaus

Tarkastellaan lopuksi viskositeetin vaikutuksia irtikytkeytymiseen lähinnä kvalitatiivisesti. Koska hydrodynamikassa ei ole käytetty viskoottisia korjauksia, jää irtikytkeytymisen korjauksien suuruuteen kvantitatiivinen epävarmuus, jota tässä ei voi arvioida tarkasti. Tarkastellaan tilannetta vain termisten spektrien avulla, joista nähdään korjauksen vaikutus nimenomaan Cooper-Frye-menetelmään. Tarkoituksena on tutkia enemmän korjauksen käyttäytymistä kuin sen varsinaista vaikutusta spektreihin.

Kuvissa 14a, 14b, 14c ja 14d on irtikytkeytymisen korjaukset, kun irtikytkeytymispintana on käytetty RHIC:n $T = 150$ MeV irtikytkeytymispintaa siten, että pinnan nopeusprofiilia on muokattu. Koska oletimme korjausten olevan pieniä, on kaikkiin kuviin piirretty viiva, jossa korjaus on 50%. Tämä on raja, johon asti korjauksen katsotaan olevan tarpeeksi pieni.

Kuvissa 14a ja 14b on oletettu poikittaisnopeus vakioksi. Suuremmalla nopeudella korjaus on voimassa isommilla p_T :n arvoilla, kun viskositeettikertoimen arvo on $\eta_0 = 0.08$. Lisäksi eri massaisten hiukkasten korjausten suuruudet eroavat enemmän toisistaan.

Kuvissa 14c ja 14d poikittaisnopeus kasvaa kun siirrytään kauemmas keskustasta. Varsin huomattava seikka on, että korjauksen hallitseva suunta on nyt alaspäin toisin kuin vakionopeuksien tapauksessa. Tämä kertoo sen, että edes korjauksen suunta ei ole triviaali. Nopeusprofiilin derivaatalakin näyttää olevan merkitystä, koska kuvassa 14c korjaus on voimassa suuremmilla p_T :n arvoilla kuin kuvassa 14d.

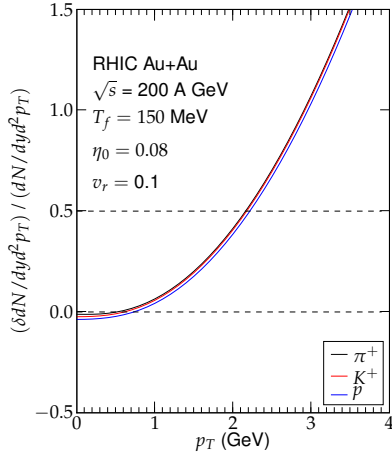
Kuvissa 15a, 15b, 15c ja 15d on sama tilanne kuin edellä, mutta nyt korjaukset ovat piirretty termeittäin. Numerointi vastaa termien järjestystä yhtälössä (136). Ensimmäinen havainto on, että termit 1, 2 ja 3 kasvavat/pienenevät nopeasti p_T :n kasvaessa. Niiden summa on kuitenkin suhteellisen lähellä nollaa. Kaikissa tapauksissa termien 1, 2 ja 3 summa

näyttää olevan hallitseva tekijä suurilla p_T :n arvoilla.

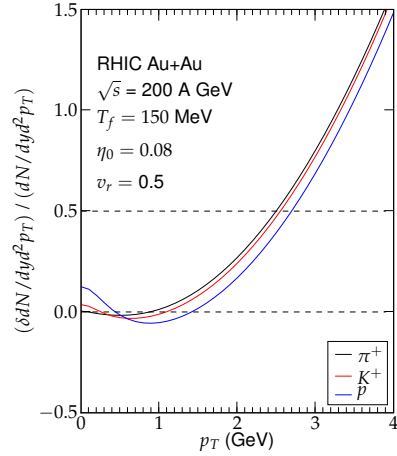
Kuvassa 15c korjaukset ovat suuremmat kuin kuvassa 15d. Jälkimmäisessä kuvassa nopeudet ovat pienempiä, mutta derivaatoissa r :n suhteen on suuria eroja, jotka vaikuttavat jännitystensorin komponentteihin. Tämän tarkastelun perusteella sekä nopeuden arvolla että nopeuden derivaatoilla on merkitystä.

Kuvissa 16a, 16b, 16c ja 16d on termiset spektrit ilman korjausta ja korjauksen kanssa RHIC:n ja LHC:n tapauksissa eBC-alkutilalle kahdessa eri irtikytkeytymislämpötilassa. RHIC:n tapauksessa korjaukset kasvavat liian suuriksi noin 2.5 - 3 GeV kohdalla. LHC:n tapauksessa korjaus pysyy paljon pienempänä ja se kasvaa liian suureksi vasta 7 GeV kohdalla. RHIC:n tapauksessa nähdään, että viskositeettikertoimen tulee olla pieni, jotta korjaus pysyy pienenä ja mitatut spektrit saadaan tuotettua.

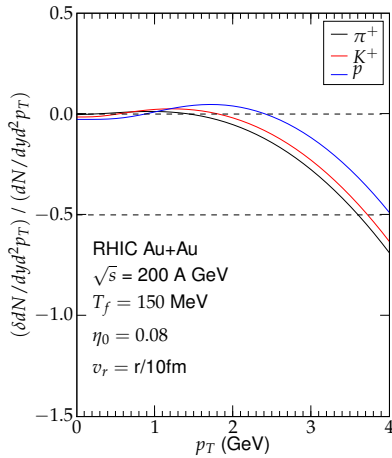
Korjaus näyttäisi siis pysyvän pienenä sitä pidempään, mitä suurempi on törmäyksessä syntyvä virtaus. Lisäksi havaittiin, että π_3^3 :n vaikutus on selvästi pienempi kuin π_1^1 :n.



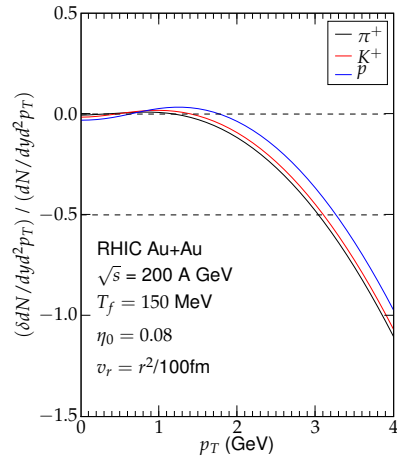
(a) Irtikytkeytymiskorjauksen suuruus kun poikittaisnopeus on kaikkialla $v_r = 0.1$.



(b) Irtikytkeytymiskorjauksen suuruus kun poikittaisnopeus on kaikkialla $v_r = 0.5$.

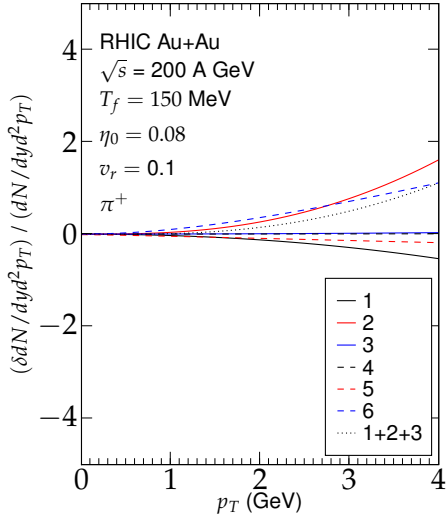


(c) Irtikytkeytymiskorjauksen suuruus kun poikittaisnopeus kasvaa lineaarisesti r :n suhteen.

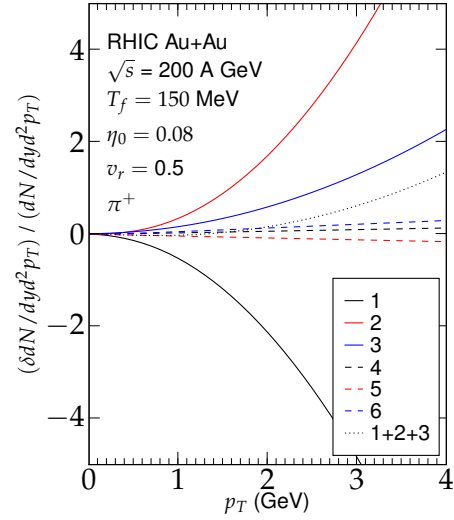


(d) Irtikytkeytymiskorjauksen suuruus kun poikittaisnopeus kasvaa parabolisesti r :n suhteen.

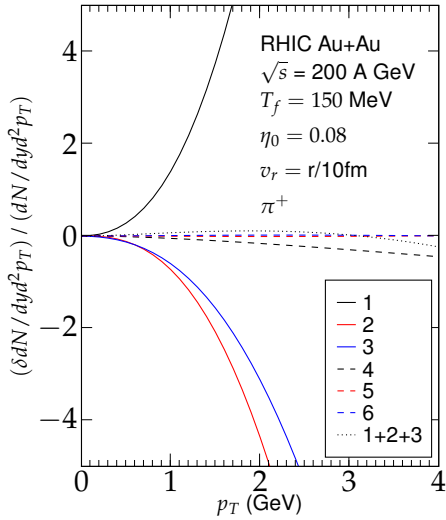
Kuva 14: Termisten jakaumien viskoottisten korjausten suhteellinen suuruus erilaisilla nopeusprofiileilla RHC:n $\sqrt{s} = 200$ A GeV Au+Au-törmäysten $T = 150$ MeV irtikytkeytymispinnalle.



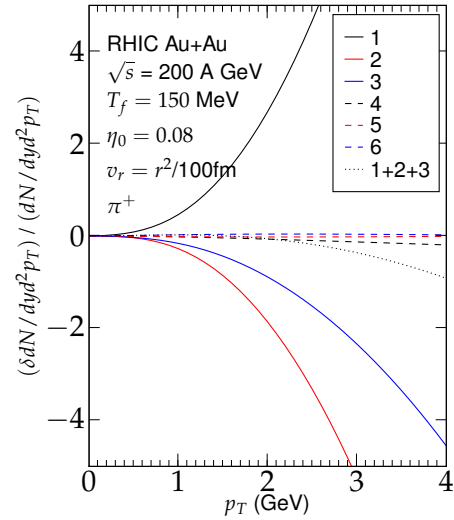
(a) Irtikykeytymiskorjauksen termien suuruudet kun poikittaisnopeus on kaikkialla $v_r = 0.1$.



(b) Irtikykeytymiskorjauksen termien suuruudet kun poikittaisnopeus on kaikkialla $v_r = 0.5$.

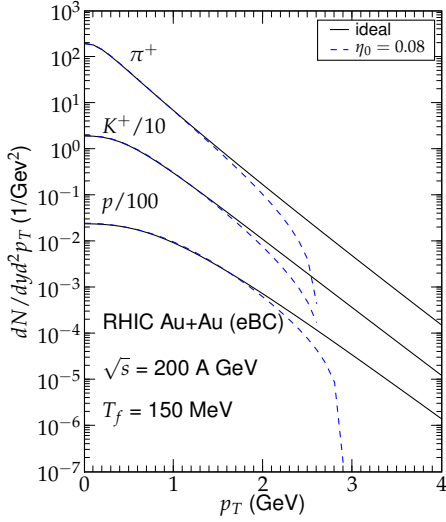


(c) Irtikykeytymiskorjauksen termien suuruudet kun poikittaisnopeus kasvaa lineaarisesti r :n suhteen.

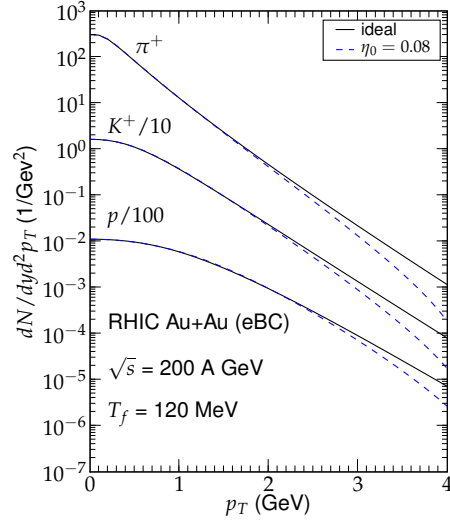


(d) Irtikykeytymiskorjauksen termien suuruudet kun poikittaisnopeus kasvaa parabolisesti r :n suhteen.

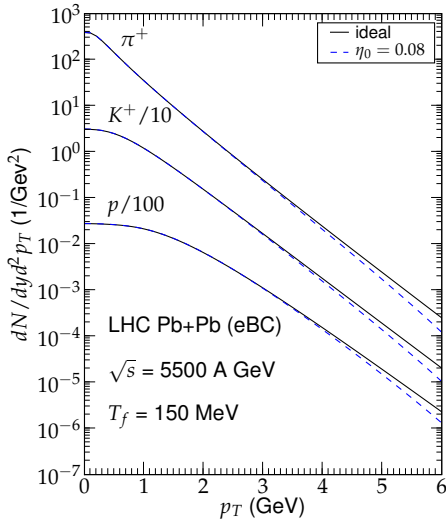
Kuva 15: Termisten jakaumien viskoottisten korjausten termien suhteellinen suuruus erilaisilla nopeusprofiileilla RHIC:n $\sqrt{s} = 200$ A GeV Au+Au-törmäysten $T = 150$ MeV irtikykeytymispinnalle.



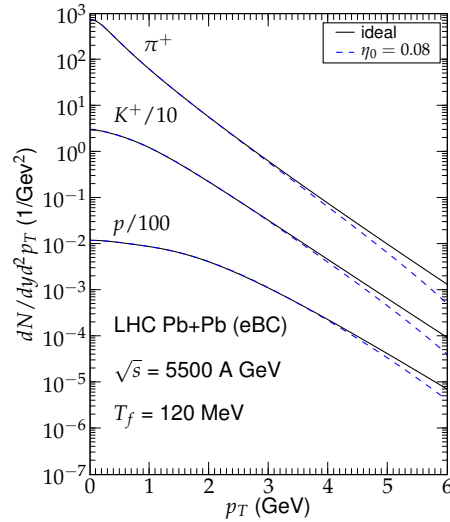
(a) Termiset hiukasspektrit RHIC:n $\sqrt{s} = 200$ A GeV Au+Au-törmäyksille kun irtikykytymislämpötila on $T = 150$ MeV.



(b) Termiset hiukasspektrit RHIC:n $\sqrt{s} = 200$ A GeV Au+Au-törmäyksille kun irtikykytymislämpötila on $T = 120$ MeV.



(c) Termiset hiukasspektrit LHC:n $\sqrt{s} = 5500$ A GeV Pb+Pb-törmäyksille kun irtikykytymislämpötila on $T = 150$ MeV.



(d) Termiset hiukasspektrit LHC:n $\sqrt{s} = 5500$ A GeV Pb+Pb-törmäyksille kun irtikykytymislämpötila on $T = 120$ MeV.

Kuva 16: Leikkausviskositeettikorjauksen vaikutus RHIC:n ja LHC:n törmäysten termisiin hiukasspektreihin.

8 Johtopäätökset

Tässä tutkielmassa mallinnettiin suurienergiaisten raskaiden ionien välisiä törmäyksiä käyttäen ideaalista hydrodynamiikkaa. EKRT-mallin avulla määritettyä alkutilaa ja luvussa 2 johdettua tilanyhtälöä käyttämällä saatiin tuotettua hyvin RHIC:n keskeisten Au+Au-törmäysten hiukkasspektrit. Ideaalinen hydrodynamiikka näyttää siis toimivan törmäysten mallintamisessa.

Käytetty tilanyhtälö ei kuitenkaan ole täysin realistinen, sillä faasitransitio on todennäköisesti "cross-over"-tyyppinen, jatkuva, eikä ensimmäistä kertalukua. QGP:lle käytettyn pussimallin sijasta olisikin parempi käyttää QCD-hilatulosten antamaa tilanyhtälöä. Nämä tilanyhtälön muutokset tuskin vaikuttavat hirveästi laskettuihin poikittaisliikemääräspektreihin ja multiplisiteetteihin, mutta jatkossa simulaatiot tulee ajaa läpi erilaisella tilanyhtälöllä.

Tutkielmassa esiteltiin myös ennuste LHC-kiihdyttimen Pb+Pb-törmäysten hiukkastuotolle. Lähteessä [49] oleviin muihin ennusteisiin nähden ennuste antaa keskimääräistä suuremman hiukkastuoton. Kun LHC:n mittaustuloksia saadaan, voidaan paremmin analysoida tilanyhtälön ja alkutilan realistisuutta.

Tutkielmassa esiteltiin dissipatiivisen hydrodynamiikan relativistinen 1. kertaluvun gradienttien Navier-Stokes-teoria, mutta sitä ei ratkaistu numeerisesti. Vaikka ideaalinen hydrodynamiikka tuottaa hyvin hiukkasspektrit ja elliptisen virtauksen määrän, tulee jatkossa ottaa huomioon myös dissipatiiviset vaikutukset.

Viskositeetin vaikutuksia tutkittiin kuitenkin irtikytkeytymisvaiheessa. Stressitensorin komponenttien arvoja ei voi pitää täysin luotettavina, mutta huomattiin, että mitä enemmän virtausta esiintyy sitä pienempi korjaus on. Tässä tutkielmassa johdettu korjaus näyttäisi kuitenkin säilyvän pienenä hydrodynamiikan pätevyysalueella, mikäli vahvasti vuorovaikuttavan aineen viskositeettikertoimen arvo on lähellä sen arvioitua alarajaa $\eta_0 \approx 1/(4\pi)$.

Viitteet

- [1] C. Schmidt. Talk at 3rd International Conference on Hard and Electromagnetic Probes of High-Energy Nuclear Collisions, 2008.
- [2] H. Niemi. Ultrarelativististen raskasionitörmäyksien hydrodynaaminen mallintaminen ja elliptinen virtaus. Pro gradu, Jyväskylän yliopiston fysiikan laitos, 2004.
- [3] J. Sollfrank et al. Hydrodynamical description of 200-A-GeV/c S + Au collisions: Hadron and electromagnetic spectra. *Phys. Rev.*, C55:392–410, 1997.
- [4] F. Mandl. *Statistical Physics Second edition*. John Wiley & Sons, 1988.
- [5] K. J. Eskola. Ultrarelativistic heavy ion collisions, luentomuistiinpanot, 2005.
- [6] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf. A New Extended Model of Hadrons. *Phys. Rev.*, D9:3471–3495, 1974.
- [7] D.E. Groom and et al. Review of Particle Physics. *The European Physical Journal*, C15:1, 2000.
- [8] J. D. Bjorken. Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region. *Phys. Rev.*, D27:140–151, 1983.
- [9] H. Von Gersdorff, L. D. McLerran, M. Kataja, and P. V. Ruuskanen. Studies of the hydrodynamic evolution of matter produced in fluctuations in anti-p p collisions and in ultrarelativistic nuclear collisions. *Phys. Rev.*, D34:794, 1986.
- [10] J. Ollitrault. Anisotropy as a signature of transverse collective flow. *Phys. Rev.*, D46:229–245, 1992.
- [11] C. Nonaka, E. Honda, and S. Muroya. (3+1)-dimensional relativistic hydrodynamical expansion of hot and dense matter in ultra-relativistic nuclear collision. *Eur. Phys. J.*, C17:663–673, 2000.
- [12] T. Hirano. Is early thermalization achieved only near midrapidity in Au + Au collisions at sNN =130 GeV? *Phys. Rev.*, C65:011901, 2002.
- [13] P. F. Kolb, J. Sollfrank, and U. W. Heinz. Anisotropic transverse flow and the quark-hadron phase transition. *Phys. Rev.*, C62:054909, 2000.

- [14] P. Huovinen, P. F. Kolb, Ulrich W. Heinz, P. V. Ruuskanen, and S. A. Voloshin. Radial and elliptic flow at RHIC: Further predictions. *Phys. Lett.*, B503:58–64, 2001.
- [15] J. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1959.
- [16] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. III. relativistic theory of the simple fluid. *Phys. Rev.*, 58(10):919–924, Nov 1940.
- [17] I. Müller. *Z. Phys.*, 198:329, 1967.
- [18] W. Israel and J. M. Stewart. Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. *Ann. Phys.*, 118:341–372, 1979.
- [19] H. C. Öttinger and M. Grmela. Dynamics and thermodynamics of complex fluids. II. Illustrations of a general formalism. *Phys. Rev. E*, 56(6):6633–6655, Dec 1997.
- [20] M. Grmela and H. C. Öttinger. Dynamics and thermodynamics of complex fluids. I. Development of a general formalism. *Phys. Rev. E*, 56(6):6620–6632, Dec 1997.
- [21] H. C. Öttinger. General projection operator formalism for the dynamics and thermodynamics of complex fluids. *Phys. Rev. E*, 57(2):1416–1420, Feb 1998.
- [22] A. Muronga. Second order dissipative fluid dynamics for ultrarelativistic nuclear collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 88:062302, 2002.
- [23] P. Romatschke and U. Romatschke. Viscosity information from relativistic nuclear collisions: How perfect is the fluid observed at RHIC? *Phys. Rev. Lett.*, 99:172301, 2007.
- [24] H. Song and U. W. Heinz. Causal viscous hydrodynamics in 2+1 dimensions for relativistic heavy-ion collisions. 2007.
- [25] K. Dusling and D. Teaney. Simulating elliptic flow with viscous hydrodynamics. 2007. arXiv:nucl-th/0710.5932
- [26] A. K. Chaudhuri. Viscous fluid dynamics in Au+Au collisions at RHIC. 2008. arXiv:nucl-th/0801.3180

- [27] H. Holopainen. Viskositeetti suurienergiasten raskasionitörmäysten hydrodynaamisessa mallissa. Erikoistyö, Jyväskylän yliopiston fysiikan laitos, 2008.
- [28] G. Policastro, D. T. Son, and A. O. Starinets. The shear viscosity of strongly coupled $N = 4$ supersymmetric Yang-Mills plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 87:081601, 2001.
- [29] U. W. Heinz, H. Song, and A. K. Chaudhuri. Dissipative hydrodynamics for viscous relativistic fluids. *Phys. Rev.*, C73:034904, 2006.
- [30] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Stability and causality in dissipative relativistic fluids. *Annals Phys.*, 151:466–496, 1983.
- [31] E. Molnar. Comparing the first and second order theories of relativistic dissipative fluid dynamics using the 1+1 dimensional relativistic flux corrected transport algorithm. 2008. arXiv:nucl-th/0807.0544
- [32] D. Teaney, J. Lauret, and E. V. Shuryak. A hydrodynamic description of heavy ion collisions at the SPS and RHIC. 2001. arXiv:nucl-th/0110037
- [33] F. Cooper and G. Frye. Comment on the single particle distribution in the hydrodynamic and statistical thermodynamic models of multiparticle production. *Phys. Rev.*, D10:186, 1974.
- [34] A. Muronga and D. H. Rischke. Evolution of hot, dissipative quark matter in relativistic nuclear collisions. 2004. arXiv:nucl-th/0407114
- [35] D. H. Rischke. Fluid dynamics for relativistic nuclear collisions. 1998. arXiv:nucl-th/9809044
- [36] D. Teaney. Effect of shear viscosity on spectra, elliptic flow, and hanbury brown-twiss radii. *Phys. Rev.*, C68:034913, 2003.
- [37] P. Romatschke. Causal viscous hydrodynamics for central heavy-ion collisions. II: Meson spectra and HBT radii. *Eur. Phys. J.*, C52:203–209, 2007.
- [38] R. Baier and P. Romatschke. Causal viscous hydrodynamics for central heavy-ion collisions. *Eur. Phys. J.*, C51:677–687, 2007.
- [39] P. F. Kolb, Ulrich W. Heinz, P. Huovinen, K. J. Eskola, and K. Tuominen. Centrality dependence of multiplicity, transverse energy, and elliptic flow from hydrodynamics. *Nucl. Phys.*, A696:197–215, 2001.

- [40] H. Niemi, K. J. Eskola, and P. V. Ruuskanen. Elliptic flow in nuclear collisions at the Large Hadron Collider. 2008. arXiv:hep-ph/0806.1116
- [41] K. J. Eskola, K. Kajantie, P. V. Ruuskanen, and K. Tuominen. Scaling of transverse energies and multiplicities with atomic number and energy in ultrarelativistic nuclear collisions. *Nucl. Phys.*, B570:379–389, 2000.
- [42] K. J. Eskola, H. Honkanen, H. Niemi, P. V. Ruuskanen, and S. S. Räsänen. RHIC-tested predictions for low-p(T) and high-p(T) hadron spectra in nearly central Pb + Pb collisions at the LHC. *Phys. Rev.*, C72:044904, 2005.
- [43] P. F. Kolb and R. Rapp. Transverse flow and hadro-chemistry in Au + Au collisions at $s(NN)^{1/2} = 200$ -GeV. *Phys. Rev.*, C67:044903, 2003.
- [44] J. P. Boris and D. L. Book. Flux-corrected transport I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys.*, 135(2):172–186, 1997.
- [45] P. Huovinen. Raskasionitörmäysten hydrodynaamisesta mallintamisesta. Pro gradu, Jyväskylän yliopiston fysiikan laitos, 1996.
- [46] S. S. Räsänen. Hydrodynaamisen mallin ennusteista keskirapidiiteetissa havaittavien hadronien liikämääräjakaumille RHIC- ja LHC-törmäyttimillä tehtävissä kokeissa. Pro gradu, Jyväskylän yliopiston fysiikan laitos, 2004.
- [47] P. Huovinen. Chemical freeze-out temperature in hydrodynamical description of Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. 2007. arXiv:nucl-th/0710.4379
- [48] S. S. Adler et al. Identified charged particle spectra and yields in Au + Au collisions at $s(NN)^{1/2} = 200$ -GeV. *Phys. Rev.*, C69:034909, 2004.
- [49] N. Armesto. Predictions for the LHC: an Overview. 2008. arXiv:hep-ph/0804.4158