MATEMAATTISESTI HAASTEELLISET KOULUTULOKKAAT – NÄKÖKULMIA PITKÄLLE EDISTYNEIDEN ENSILUOKKA-LAISTEN HUOMIOIMISEEN

Katri Pietilä

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
Luokanopettajien aikuiskoulutus
Kokkolan yliopistokeskus Chydenius
Jyväskylän yliopisto
Kesä 2008

TIIVISTELMÄ

Pietilä, K. 2008. Matemaattisesti haasteelliset koulutulokkaat – näkökulmia pitkälle edistyneiden ensiluokkalaisten huomioimiseen. Jyväskylän yliopisto. Kokkolan yliopistokeskus Chydenius. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. Sivuja 119. Liitteitä 5.

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää sekä koulunkäyntiään aloittavien lasten matemaattisia lähtövalmiuksia että pitkälle edistyneiden lasten kokemuksia lisätehtävien haasteellisuudesta. Tutkimus suoritettiin laatimalla testi lähtötason mittaamista varten ja testaamalla elokuun aikana yksilötestauksena yhden ensiluokan jokainen oppilas. Luokassa oli kymmenen tyttöä ja kymmenen poikaa. Testi laadittiin siten, että lapsi sai edetä siinä taitojensa mukaan ja näin myös aiemmista tutkimuksista poiketen lasten matemaattisten taitojen yläraja saatiin näkyväksi. Tutkimusta varten laaditusta testistä luotiin myös lyhyempi ja tiiviimpi versio, jota ensiluokan opettaja voi käyttää koulutulokkaiden matemaattisen lähtötason selvittämiseen. Selvää on, että opettajan tulee olla tietoinen lasten tasosta, jotta hän voi kohdistaa opetuksensa oikein.

Lasten matemaattisten taitojen kehitys lukujonotaidoissa, aritmeettisissa perustaidoissa ja matemaattisloogisen ajattelun kehittymisessä on monitahoinen prosessi, jossa eri osatekijät vaikuttavat toisiinsa. Kouluikään mennessä lapset ovat keränneet itselleen eri määrän kokemusta matemaattiseen kehitykseen vaikuttavista tekijöistä. Matematiikan alkuopetuksessa on lähtötasoerojen ja matemaattisten taitojen hierarkkisuuden lisäksi huomioitava esimerkiksi motivoitumisen, tunteiden ja kokemusten merkitys oppimiselle. Matemaattisesti lahjakkaiden lasten tunnistaminen ja tukeminen on haaste opettajalle.

Tutkimuksessa lasten lähtötasoerot osoittautuivat todella suuriksi. Lukujonotaidoissa edistyneimmät hallitsivat lukujonon käsittelyn jopa satojen lukualueella yltäen näin tasolle, jonka lapsen odotetaan saavuttavan toisen luokan loppuessa. Lukujonotaidoiltaan heikoin lapsi hallitsi vain lukualueen yhdestä viiteen eikä kahden lapsen lukujenluettelutaidolla ollut vielä matemaattista sisältöä. Aritmeettisten perustaitojen suhteen erot olivat myös suuria kolmen lapsen yltäessä ensimmäisen luokan lopussa odotettavalle tasolle tai jopa sen yli. Matemaattisloogisessa ajattelussa kolmen edistyneimmän lapsen joukko kaventui kahteen lapseen ja näin tulee näkyväksi lahjakkaan ja nopean laskijan välinen ero. Kokonaisuutena lasten eroja tarkasteltaessa näkyi heidän muodostavan taitojensa puolesta tasoryhmiä, jotka tulisi huomioida opetuksessa. Lasten matemaattiset lähtötasoerot osoittautuivat niin suuriksi, että koulukulttuuriimme kuuluva lasten yhtenä ryhmänä opettaminen ei tunnu lasten yksilöllisyyttä arvostavalta eikä ylipäätään lapsia kunnioittavalta toimintatavalta.

Alkutestauksen jälkeen tutkimus jatkui matemaattisesti edistyneimpien lasten haasteellisuuden ja mielekkyyden kokemusten kartoittamisella. Kolme luokan matemaattisesti edistyneintä lasta suorittavat matematiikan kirjojen vaativimpia lisätehtäviä arvioiden niiden haasteellisuutta ja mielekkyyttä. Tehtävät eivät osoittautuneet haastaviksi lasten oikeiden ratkaisujen eivätkä lasten kokemusten perusteella. Lapset kokivat mielekkäiksi alle puolet suorittamistaan tehtävistä. Tehtävän mukavuuden kokemus oli täysin yhteneväinen tehtävän hallinnan tunteen kanssa eli varmuuteen tehtävän oikeasta ratkaisusta. Vaikeaksi koettu tehtävä ei ollut lasten mielestä mukava tehtävä ja tämän asian kohtaamiseen opettajien on tietoisesti panostettava.

alkuopetus, matemaattiset suorituserot, matemaattinen lähtötasotesti, matemaattisloogiNen ajattelu, lukujonotaidot, aritmeettiset perustaidot

SISÄLLYS

TUTKIMUKSESSA ESIINTYVÄT TAULUKOT

TUTKIMUKSESSA ESIINTYVÄT KUVIOT

1 TUTKIMUKSEN LÄHTÖKOHDAT

1.1 Tutkimuksen esittely – kaiken perustana lapsen kunnioitus

Ahtee ja Pehkonen (2000, 32) ovat todenneet, että kun opetusta lähdetään suunnittelemaan, on ensimmäiseksi selvitettävä oppijoiden lähtötaso. Jo Vygotsky opetti aikoinaan, että saavutetulle kehitystasolle suuntautuva oppiminen on tehotonta lapsen kehitystä ajatellen, sillä opetuksen on tähdättävä kehityksellisen prosessin uuteen vaiheeseen eikä laahattava lapsen kehitysprosessin perässä (Hautamäki 1995, 220). Ensimmäiselle luokalle tullessaan lapset ovat matemaattisilta taidoiltaan hyvin heterogeenisia. Käytännössä heitä aletaan kuitenkin opettaa yhtenäisenä joukkona ja opetus aloitetaan aina aivan alkeista. Nämä edellä mainitut lauseet muodostavat yhtälön, josta haluan herättää keskustelua. Ongelmatilanne on kielletty ja kierretty esimerkiksi sellaisilla perusteilla, että lapsen vahvalta vaikuttavat taidot voivat olla vain näennäisoppimisen tulosta. (Ks. esim. Ikäheimo & Risku 2004, 222; Kinnunen, Lehtinen & Vauras 1994, 61.) Systeemien puolustamiseksi taitavan oloisen lapsen osaamista on vähätelty. Mutta onko meillä kuitenkaan oikeutta mitätöidä lapsen taitoja, jos emme edes tiedä, kuinka taitavia taitavilta vaikuttavat ensiluokkalaisemme todellisuudessa ovat?

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, kuinka eritasoisia ensiluokkalaiset ovat matemaattisilta taidoiltaan heti kouluun tullessaan. Tätä varten laadittiin testi lähtötason yksilömittausta varten ja testaus toteutettiin yhden ensiluokan oppilaille kolmen ensimmäisen kouluviikon aikana. Luokassa oli 20 lasta, joista tyttöjä ja poikia oli yhtä paljon. Lisäksi tutkimuksella pyritään kartoittamaan alkutestauksessa selvästi muita edistyneempien lasten haasteellisuuden kokemuksia suhteessa oppikirjojen ylöspäin eriyttäviin lisämateriaaleihin. Luokan matemaattisesti edistyneimmät oppilaat suorittivat niitä itsenäisesti arvioiden samalla tehtävien mielekkyyttä ja haastavuutta.

Mielenkiinto aiheen tutkimiseen heräsi minussa jo vuosia sitten. Aihe on minulle tärkeä niin oman persoonani ja työhistoriani kuin ylipäätään lapsia kunnioittavan elämänotteeni pohjalta. Selvitin ammattikorkeakoulun opinnäytetyössäni esikoulusta kouluun siirtyvien lasten näkemyksiä ja odotuksia kouluunsiirtymävaiheesta. Oppiminen oli tärkein asia, jota lapset odottivat koulunkäynniltään. Kun koulua oli käyty kolme kuukautta, yksi lapsista koki, ettei hän ollut oppinut siellä mitään. Hän oli omasta mielestään osannut kaikki ja enemmänkin jo kouluun tullessaan, ja tästä syystä hän olisi halunnut vaihtaa istumapaikkansa luokan taakse – päästäkseen luikertelemaan pulpettinsa alle. (Pietilä 1997, 68–69.) Edellinen esimerkki kertoo karuudessaan siitä, että oikeus oppia uutta on hyvin oleellinen asia ensiluokkalaisille ja että opettajan täytyisi luoda sille edellytykset. Tyhjästä on kuitenkin paha nyhjäistä, eli kustantamoilla olisi oltava tarjottavana laaja kirjo eritasoisia materiaaleja. Tai koko opetusta olisi alettava rakentamaan yksilöllisemmällä tyylillä, lapsilähtöisemmin.

Jos koulun tarjonta ei vastaa lapsen tarpeita, lapsi pettyy ja turhautuu. Luonnollisesti tällainen lapsi suuntaa energiansa muuhun kuin oppimiseen, sillä eihän hänelle ole tarjolla mitään opittavaa. Liian helpot tehtävät voivat siis johtaa koko koulunkäynnin merkityksen kyseenalaistamiseen, turhautumiseen ja häiriköimiseen. Epäilen myös sitä, että kirjasarjojen tarjoamat lisämateriaalit eivät tarjoa tarpeeksi paljon tarpeeksi haastavaa tekemistä. Silloin, kun lapsi hallitsee jo kaikki koulussa opetettavat asiat, hänelle ei tule vastaan ongelmanratkaisutilanteita, joiden myötä hän harjoittaisi niiden sietokykyä ja pinnistelemisen sinnikkyyttä. Lisätehtävät näyttävät usein olevan tunnilla opetellun toistoa, jota tarvitsisivat enemmän ne oppilaat, joille asiat tuottavat vaikeuksia. Eivät ne, joille niiden ratkaiseminen on itsestään selvää.

Ennen kuin pääsin tutkimaan näitä lähtötasotaidoiltaan edistyneimpiä lapsia, minun tuli saada selville ketkä luokassa olivat matemaattisilta taidoiltaan muita edellä. En löytänyt yhtään valmista lähtötasotestiä, joilla suorituserot pääsivät sujuvasti eriytymään niin pitkälle kuin lapsella riitti kapasiteettia. Tästä voitaneen päätellä, että tämän asian tutkiminen on jäänyt vähemmälle huomiolle. Niinpä kehittelin testin, jolla mittasin lasten lähtötasovalmiudet. Tämän testin laadinta oli tutkielman haasteellisin vaihe. Käytännön työssä testiä olisi kuitenkin liian raskasta suorittaa joka syksyisenä operaationa, joten tämän vuoksi yhtenä tutkimustehtävänä on tiivistää testistä lyhyempi versio ensiluokan opettajan työkaluksi. Tutkimuksessa on näin ollen kolme tutkimustehtävää; tavoitteena on selvittää koulutulokkaiden lähtötasoerot, tuottaa opettajalle testi lähtötasojen mittaamista varten ja tutkia tarjolla olevan ylöspäin eriyttävän oppimateriaalin haastavuutta ja mielekkyyttä.

Tutkimuksen yhtenä lähtökohtana oli siis ajatus, että jos lapsi selviytyy jo luokalle tullessaan kaikista vuosiluokalla opetettavista asioista, olisi aika nostaa keskusteluun tällaisten lasten opetuksen taso eli lahjakkaiden parempi huomioiminen. Lahjakkailla on oltava tasavertaiset oikeudet omantasoiseen opetukseen kuin muillakin. Lahjakkaiden lisämateriaalien ei tulisi tarjota lapselle viihdykettä tai luoda tunnetta toisten odottelusta, vaan niiden tulisi olla haastavuudessaan innostavia ja vaativuudessaan palkitsevia. Tutkimuksessani tarkastelen kahden kirjasarjan ensimmäisen luokan syyslukukauden opettajanoppaissa olevia kopioitavia lisätehtäviä. Toisessa kirjasarjassa vaativimmat ylöspäin eriyttävät tehtävät oli valmiiksi osoitettu ja toisesta suoritin valikoinnin itse.

Tutkimuksen teoreettinen viitekehys pohjautuu osa-alueittain matemaattisten taitojen kehityksen tarkasteluun, sillä sen tiedon varassa rakensin testin ja arvioin lasten tulokset. Ymmärtääksemme sen kontekstin, jonka ympärillä tutkimuksen aihepiiri on ylipäätään olemassa, on tarkasteltavana teemana myös matematiikan alkuopetus. Lapsen aiempi matemaattinen kehitys sekä varhaiskasvatuksen ja esiopetuksen merkitys tulevat puolestaan huomioiduksi luonnollisena osana lapsen kehitystä läpi koko työn. Ja kun tutkimuksen yhtenä mielenkiinnon kohteena on lahjakkaiden haasteellisuuden kokemukset, rakentuu viitekehyksen kolmas pääteema matemaattisen lahjakkuuden ympärille. Koulunkäynnin aloituksen onnistumisella on kauaskantoisia vaikutuksia ja siksi siihen olisi panostettava. Lisäksi koko alakoululla on suuri vaikutus lasten käsityksiin matematiikasta, heidän asenteisiinsa ja arvostuksiin, koska se on ensimmäinen koulu ja kestää pisimpään (Malaty 1993, 9). Opetuksen tulisi siis motivoida lapsia ja jokaisen lapsen tulisi saada kokea oppimisen iloa.

Tässä tutkimuksessa käytetään kouluaan aloittavasta ensiluokkalaisesta pääsääntöisesti termiä koulutulokas. Itse asiassa koulualokkaalla tarkoitettaisiin lasta, joka on juuri aloittanut koulunkäynnin, ja koulutulokkaalla kuvattaisiin kouluun siirtyvää lasta. Näiden termien sisältämä ajallinen ero on kuitenkin niin pieni, ettei sillä ole tämän tutkimuksen kannalta merkitystä. Oppilaiden suorituksissa ilmenevistä eroista pyrin käyttämään Linnanmäen (2004, 242) tavoin arvoneutraalia käsitettä suoritusero, sillä sen avulla ei leimata ketään yksilöä. Toisaalta, vaikka lahjakas -käsite ei ole yksioikoinen, myös sitä käytetään tässä tutkimuksessa käsitteen yleisyyteen vedoten.

1.2 Matemaattisesti lahjakkaiden huomioimisen tärkeys

Kyseisen tutkimuksen teemalle on löydettävissä tukea jopa nykyiseltä hallitukseltamme, joka hallitusohjelmassaan on sitoutunut edistämään luovuutta, erilaista lahjakkuutta ja innovatiivisuutta varhaiskasvatuksesta alkaen (ks. Tikkanen 2007, 34). Mutta miksi lahjakkuutta tulisi tukea? Malaty (1997, 63; 2008, 50–53) perustelee lahjakkaiden tunnistamista ja heidän opetuksen huomioimista toteamalla, että lahjakkaista ei riipu vain yhden yhteiskunnan kehitys, vaan koko ihmiskunnan kulttuurin kehitys. Brunell (1993, 49) näkee asian siten, että kun oppilaat saavat keskittyä sellaiseen, minkä osaavat hyvin ja josta pitävät paljon, he motivoituvat sen ohella kehittämään monia muita tärkeitä taitoja ja ominaisuuksia. Tällä tavalla voi oppilaan vahvoja puolia korostava yksilösuuntautunut pedagogiikka vaikuttaa tietomäärän kasvuun, kohottaa itsetuntoa ja itsekunnioitusta sekä ehkäistä osaltaan sosiaalista väliinputoamista. Näin menestys synnyttää menestymistä, josta loppupelissä voivat hyötyä kaikki.

Suomi on menestynyt todella hyvin viime vuosien Pisa-tutkimuksissa. Suomen vahvuutena on ollut erityisesti heikkojen oppilaiden vähyys eli kansakuntamme perusta on siltä osin hyvä. Ståhlen (ks. Tikkanen 2007, 35) mukaan Suomen on kuitenkin pakko alkaa panostaa myös lahjakkaisiin, ettei Suomi jää edistyksen junasta. Ståhle valjastaisi koulutuksen ja erityisesti lahjakkaat kiskomaan Suomen kilpailukyvyn yhä huimempaan vauhtiin, sillä maamme sijoittuu bruttokansantuotetta mittaavassa OECD-tutkimuksessa vasta sijalla 15. Ståhlen mukaan lahjakkaisiin on jo suorastaan pakko panostaa ilman pelkoa tasoeroista. Myös Brunell (1993, 50) rohkaisee samalle tielle todeten, että monet seikat osoittaisivat suomalaisen peruskoulun voivan paremmin, jos se ei enää olisi niin samanlainen kaikille. Englannissa huomattiin, että kun opetuksessa alettiin kiinnittää huomiota lahjakkaiden oppilaiden tarpeisiin, se nosti parhaassa tapauksessa kaikkien oppilaiden tasoa (Tikkanen 2007, 34).

Vaikka edellä mainituilla näkökohdilla voidaankin perustella lahjakkaan lapsen huomioimisen tärkeyttä, niiden kautta lapsi nähdään välineenä muiden tavoitteiden toteutumiselle eli ne välineellistävät lapsen. Omaa lapsikäsitystäni läheisemmät perustelut lahjakkaiden lasten huomioimiselle löytyvät lahjakkaista lapsista itsestään. Uusikylä (1994) toteaa, että oppilaille, jotka eivät saa normaaliluokassa tarpeeksi haasteita, saattaa kehittyä heikkoja opiskeluasenteita ja työtapoja. Samasta asiasta puhui Hollingworth jo

1900-luvun alkuvuosikymmeninä ollen näin paljon aikaansa edellä. Kun lahjakkaita syytettiin laiskuudesta ja suulaudesta, arveli Hollingworth heidän olevan ikävystyneitä. Hänen mukaansa lapset halusivat esittää kysymyksiä ja ottaa asioista selvää. Kun koulun vaatimustaso lapsen kykyihin nähden oli liian matala, se ei vaatinut lahjakkailta lapsilta ponnisteluja vaan pelkkää läsnäoloa. (Uusikylä 1994, 26–27, 174.) Tällaisten perustelujen kautta jokainen lapsi nähdään arvokkaana ja tärkeänä, jolloin jokaisella lapsella on myös oikeus sellaiseen tukeen, jota hän tarvitsee edistyäkseen omassa kehityksessään – olipa lapsi sitten minkä tasoinen hyvänsä.

Lahjakkaiden ajatellaan melko yleisesti pärjäävän ilman tukea, mikä ei kuitenkaan pitäne paikkaansa. Tietysti osa löytää itse omat mahdollisuutensa, mutta jotkut masentuvat tai häiriköivät ja toiset nielevät turhautumisensa antaen lahjojensa kuihtua. (Tikkanen 2007, 34–35.) Ruokamo (2000, 36–37) viittaa amerikkalaiseen tutkimukseen (Stanley & Benbow 1982), jossa todettiin, että useimmat henkilöt, joilla oli poikkeuksellisen hyvä matemaattinen päättelykyky 12-vuoden iässä, eivät kuitenkaan hyödyntäneet tätä yksilöllistä kykyään, sillä ikävystyminen oli tappanut kiinnostuksen, aineen arvostuksen ja ajattelun terävyyden. Jos antaisimme oppilaiden oppimisen eriytyä heidän lahjakkuuttaan ja motivaatiotaan vastaavasti, sillä saattaisi olla hyvinkin selvää apua oppimismotivaation ja oppimistulosten edistämisessä (Kallonen-Rönkkö 1997, 264).

Perusteita lahjakkaiden erityisopetukselle voi ymmärtää paremmin jos vertaa heitä älykkyysjakauman toiseen äärilaitaan. On selvää, etteivät älykkyystestillä mitattuna heikoimpia pistemääriä saavat lapset pysty seuraamaan normaaliopetusta ja tarvitsevat siten erityisopetusta. Myöskään toisen äärilaidan lapset eli aivan huippuälykkäät tai erityislahjakkaat eivät hyödy tavallisesta opetuksesta tarpeeksi. Lahjakkaiden opetuksessa on siis yksinkertaisesti kysymys siitä, että opetusta eriytetään vastaamaan myös lahjakkaiden kykyjä ja tarpeita. (Uusikylä 1994, 167, 169.)

Malaty (2008, 53) toteaa, että jotkut ihmiset väittävät matemaattisesti lahjakkaiden erityiskasvatuksen vaateita merkiksi yhteiskuntamme kovenevista arvoista ja bisnesajattelusta. Malatyn mukaan tällaiset ihmiset osoittavat mielipiteillään vain sen, etteivät he tunne matematiikkaa ja sen luonnetta. Kasvatuksen kannalta katsottuna matematiikalla on erityisrooli kasvavan ihmisen ajattelun kehityksessä. Eikä matemaatikoiksi tulla juuri muista syistä kuin rakkaudesta matematiikkaan – matematiikan kautta koettavan ilon takia.

1.3 Matematiikan merkityksellisyys

Kun pyrimme selvittämään oppijoiden lähtötasoa ja sen pohjalta pohtimaan eriyttämiseen liittyviä asioita, meidän on hyvä ymmärtää asioiden laajempi konteksti. On nähtävä kokonaisuus eli ymmärrettävä mistä kaikista asioista on kyse ja miten ne ovat toisiinsa yhteydessä. Näitä käsitellään seuraavassa luvussa, mutta näin aluksi on vielä tarpeen pohtia, mitä matematiikka on ja miksi sitä koulussa opiskellaan.

Kuparin (1993, 123) mielestä matematiikka ymmärretään yleisesti laskutoimitusten suorittamiseksi eli matemaattisten symbolien kirjoittamiseksi. Kuitenkin matematiikka on ennen kaikkea ajattelemista. Tämä ajatteluprosessi alkaa hetkestä, jolloin ihminen alkaa ajatella tehtävää. Myös Malaty (1993, 9) määrittelee matematiikan ajattelutavaksi, joka heijastaa ihmisen kykyä abstrahointiin. Itse ajattelisin, että tarve matemaattisen tehtävän suorittamiseen voi syntyä joko ihmisestä itsestään tai se voi olla ulkoapäin annettu. Koulussa painopiste on varmasti jälkimmäisessä, mutta se voidaan motivoinnin kautta saada siirtymään sisäiseksi, mikäli tehtävässä on tarpeeksi haastetta. Niin kuin matemaattisesti lahjakkaiden huomioimista, niin myös matematiikan merkitystä kouluaineena voidaan perustella yhtä lailla yhteiskunnallisilla näkökohdilla kuin subjektiivisilla perusteilla.

Matematiikan kuulumista koulun opetussuunnitelmaan lienee harvoin kyseenalaistettu. Ihmiset tosin perustelevat ja näkevät sen hyödyn eri tavoin. Laskennallisia taitoja pidetään hyödyllisinä ihmisen arkielämän kannalta ja matematiikkaa pidetään hyödyllisenä yhteiskunnalle, sen tieteelliselle kehitykselle, modernille teknologialle sekä kaupalle ja teollisuudelle. Nämä hyödyllisyysnäkökohdat nojautuvat matematiikkaan selkeänä ja tehokkaana kommunikoinnin välineenä. Kuten aiemmin, enää ei kuitenkaan epäillä elektronisten laitteiden käytön vähentävän ihmisten tarvetta ymmärtää matematiikkaa. (Kupari 1993, 115–116.)

Kun yhteiskuntamme kehittyi nopeasti kehittyväksi tietoyhteiskunnaksi, nousi matemaattis-luonnontieteellinen osaaminen aiempaa merkittävämpään rooliin. Niinpä vuonna 1995 opetushallitus asetti tavoitteeksi suomalaisen matemaattis-luonnontieteellisen osaamisen nostamisen kansainväliselle tasolle ja opetusministeriö julkisti sen myötä vuosille 1996–2002 matematiikan ja luonnontieteiden kehittämisohjelman, josta käytettiin nimitystä LUMA-talkoot. (Esim. Kupari & Törnroos 2004, 138; Ruokamo 2000, 38.)

Kuparin mukaan (1993, 116) matematiikan merkityksellisyys ei voi kuitenkaan perustua pelkästään yhteiskunnalliseen näkökantaan. Matematiikan opettaminen perustuu yhtälailla sen tarjoamiin älyllisiin nautintoihin ja mieluisiin elämyksiin. Matematiikka voidaan nähdä myös ihmiskunnan kulttuurisena perintönä, jolloin se on jo siitä syystä arvokas opiskelun kohde. Myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004, 160) mukaan matematiikan merkitys on nähtävä laajasti. Matematiikan avulla myötävaikutetaan oppilaan henkiseen kasvamiseen sekä edistetään oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta. Näiden näkökohtien lisäksi matematiikka edustaa minulle itselleni myös esteettisyyttä. Lukiossa oma opettajani totesi aina matematiikan olevan kaunista, ja kun ymmärsin ajatella asiaa tästä näkökannasta, se alkoi minustakin sekä näyttää että tuntua todella kauniilta.

Vaikka loogisen ajattelun oppiminen yhdistetään yleisesti matematiikan oppimiseen, ei Kupari (1993, 116) kuitenkaan pidä loogisen ajattelun kehittämistä riittävänä perusteena matematiikan opettamiselle. Hänen mukaansa matematiikka voi edistää loogisen ajattelun taitoja, mutta se on liiaksi riippuvainen opettamisen tavasta eli jos koulun matematiikka perustuu rutiinitehtävien toistuvaan suorittamiseen, ei looginen ajattelu kehity. Kuitenkin Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004, 160) matematiikan opetuksen tehtäväksi mainitaan heti ensimmäisenä mahdollisuuksien tarjoaminen matemaattisen ajattelun kehittämiseen. Opetuksen tulee kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua. Näin ollen matemaattisen ajattelun kehittäminen ei voi olla opettajasta riippuvainen tavoite vaan normi, jota jokaisen opettajan on noudatettava.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004, 161) alkuopetuksen matematiikan tavoitteeksi on asetettu lapsen oppiminen kehittämään ajatteluaan saaden tyydytystä ongelmien ymmärtämisestä ja kokien iloa niiden ratkaisemisesta. Lapsen tulee harjaantua tekemään havaintoja itsensä kannalta merkityksellisistä ja haasteellisista matemaattisista ongelmista ja oppia perustelemaan ratkaisujaan ja päätelmiään sekä löytämään ilmiöistä yhtäläisyyksiä ja eroja, säännönmukaisuuksia sekä syy-seuraussuhteita. Matematiikka onkin monipuolista ajattelutaitojen kehittämistä ja näitä ajattelutaitoja kehittävät erityisesti päättely-, hahmottamis- ja ongelmanratkaisutehtävät (Ilmavirta 1995, 48).

Leppäaho (2007, 31) kuvaa kykyjä yksilön synnynnäisiksi valmiuksiksi ja taitoja opituiksi ominaisuuksiksi. Hänen mukaansa molempia voidaan kehittää harjoittelun avulla ja lisätä näin yksilön suoritustasoa eli taitavuutta tietyllä alueella. Kirjallisuudessa termejä taito ja kyky näytetään kuitenkin käyttävän toistensa synonyymeina eikä niiden ero tule siten tässäkään tutkimuksessa selkeästi esille.

2 MATEMAATTISTEN TAITOJEN KEHITYS JA OSA-ALUEET

Tässä luvussa tarkastellaan matemaattisten taitojen kehitystä aluksi hieman yleisellä tasolla ja sen jälkeen tarkemmin osa-alueittain. Matemaattisten taitojen jaottelu osoittautui erittäin haastavaksi, sillä erilaiset osataidot nivoutuvat yhteen ja muodostavat yhdessä laajempia kokonaisuuksia kaiken vaikuttaessa kaikkeen. Yksiselitteistä jakoa ei tästä syystä liene olemassa eikä täysin samaa jaottelua juuri esiinny kotimaisessa eikä ulkomaisessa tutkimuskirjallisuudessa. Jokainen tutkija näyttää määrittelevän käyttämänsä jaottelun valitsemansa tutkimusnäkökulman kautta. Salonen ym. (1994, 87) ovat jakaneet matemaattiset taidot kolmeen osa-alueeseen, joita ovat matemaattislooginen päättelytaito, lukujonotaidot ja aritmeettiset taidot. Kyseinen jaottelu toimii myös tämän tutkimuksen pohjana. Salosen ym. (1994) tutkimuksessa tarkasteltiin lasten matemaattisen taidon kehitystä koulutulokkaasta 1. luokalle edellä mainituilla osa-alueilla.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004, 161–162) alkuopetuksen matematiikka on jaoteltu sisältönsä puolesta viiteen eri osa-alueeseen. Näitä keskeisiä sisältöjä ovat luvut ja laskutoimitukset, algebra, geometria, mittaaminen sekä tietojen käsittely ja tilastot. Nämä kaikki ovat sijoitettavissa myös tämän tutkimuksen kolmeen osa-alueeseen. Luvut ovat osa selkeästi lukujonotaitoja ja laskutoimitukset aritmetiikkaa. Geometria, mittaaminen ja tilastot ovat esimerkiksi matemaattisloogiseen ajatteluun kuuluvaa hahmottamista ja tietojen käsittely ja algebra ovat yleisesti matemaattisloogista ajattelua. Algebran käsitettä avataan hieman seuraavassa kappaleessa. Mutta kuten edellä on sanottu, jyrkkä luokittaminen ei ole totuus todellisuudesta. Se on ainoastaan keino tarkastella asioita teoreettisesti.

Mitä algebralla siis tarkoitetaan? Yksinkertaisesti ilmaistuna se on kirjainlausekkeiden käsittelyä. Moses (1997) on kuvannut algebran tavaksi ajatella ja menetelmäksi erilaisten relaatioiden ilmaisemiseen (Hihnala 2005, 44). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 (161–162, 168) algebran oppiaines on sijoitettu pääosin luokille 6–9, mutta joitakin algebran aihealueita on joka vuosiluokalla. Esimerkiksi kahden ensimmäisen luokan tavoitteena on oppia säännönmukaisuuksien, suhteiden ja riippuvuuksien havaitsemista kuvista. Algebran käsitettä ei Hihnalan (2005, 24, 53, 64) mukaan juuri esiinny peruskoulun matematiikan oppikirjoissa. Siirtyminen aritmetiikasta algebraan näkyy oppikirjoissa lähinnä siinä, että numerolukujen tilalle ilmestyy kirjainlukuja eli muuttujia.

2.1 Matemaattisten taitojen kehittyminen

Lasten matemaattiset taidot ovat kehittyneet merkittävästi jo ennen kouluikää, ja tuohon kehitykseensä lapset ovat saaneet hyvin eriarvoisesti sosiaalista tukea. Lapsen kasvuympäristöllä on suuri merkitys sille, kuinka paljon hän kohtaa matemaattisia asioita ja kuinka häntä autetaan niitä kohtaamaan. Lasten arki on täynnä asioita, joilla on myös matemaattinen puolensa ja aikuinen voi luontevasti toimia näiden piirteiden havainnoijana ja matemaattisten ajatusten herättäjänä. Tällainen jo alle kouluikäisten lasten matemaattisen kehityksen tukeminen ja taitojen kartuttaminen vaatii lähinnä kasvattajan tietoisuutta asiasta. (Aunio, Hannula & Räsänen 2004, 213, 217–218.)

Lapset näyttävät suuntautuvan lukumääriin hyvin spontaanisti 3–6-vuoden iässä ja nämä lasten erot näyttävät olevan vahvasti yhteydessä lasten matemaattiseen osaamiseen. Kehittyvien matemaattisten taitojen ja spontaanin lukumäärien havaitsemisen välillä vallitsee vastavuoroinen suhde eli kun lapsi kiinnittää toiminnassaan huomiota lukumääriin, hän harjaantuu operoimaan lukumäärillä, mikä kehittää lisää hänen matemaattisia taitojaan. Matemaattisten taitojen kehittyessä lapsi alkaa kiinnittää huomiota suurempiin lukumääriin, mikä puolestaan kasvattaa hänen matemaattista taitoarsenaaliaan entisestään. (Aunio ym. 2004, 209–210.)

Aunola, Leskinen, Lerkkanen ja Nurmi (2004, 699, 711) ovat seurantatutkimuksellaan osoittaneet lasten matemaattisten taitojen kehityksen kumulatiivisuuden. Kun lapset etenivät esikoulusta toiselle luokalle, lasten väliset yksilölliset erot matemaattisissa tehtävissä kasvoivat yhä suuremmiksi. Matemaattisten taitojen kehittyminen oli siis nopeampaa niillä lapsilla, joilla oli jo esiopetukseen tullessaan parempi matemaattisen osaamisen taso, kuin niillä lapsilla, joiden lähtötaso oli heikompi.

Räsänen ja Ahonen (2002) toteavat, että matematiikan oppimisen, oppimisvaikeuksien ja opetuksen tutkimusalue on luonteeltaan monitieteistä. Jopa matematiikan alkeidenkin hallinnassa on kyse monimutkaisista ja monivaiheisista kognitiivisista suorituksista.

Ahonen ja Räsänen viittaavat Rourkeen ja Strangiin (1983), joiden mukaan matematiikan oppimisessa joutuvat lukuisat kognitiiviset kyvyt koetukselle, kun samaan tehtävään voi sisältyä niin monenlaisten taitojen hallintaa. Matemaattinen tehtävä voi edellyttää esimerkiksi esineiden laskemista, numero- ja lukukäsiteiden hallintaa, erilaisia laskutoimitusten suorittamisprosesseja, kertotaulun muistamista ja sanallisten tehtävien ratkaisustrategioita. (Räsänen & Ahonen 2002, 191, 193.)

Aluksi lasten matemaattinen tietämys on vahvasti sidoksissa käytännön toimintaan ja havaitsemiseen. Vähitellen kokemusten ja harjoittelun kautta tiedot ja taidot kehittyvät niin, että lapsi kykenee käsittelemään matemaattista informaatiota mielessään ilman välittömien havaintojen ja konkretian tukea. (Baroody 1987, 26–28.) Galperinin teorian mukaan jokainen henkinen toiminto on aina ulkoisen aineellisen toiminnan heijastus ja siksi jokaisen uuden henkisen asian opettaminen pitää lähteä konkreettisesta toiminnasta. Ihminen voi hallita henkisiä toimintoja neljällä eri tasoilla. Näitä tasoja Galperin nimittää sisäistämisen asteiksi tai toiminnan tasoiksi. (Haapasalo 1998, 89–92.)

Galperinin sisäistämisen asteen ensimmäinen taso on materiaalinen vaihe, jolloin yksilö tukeutuu konkreettisiin objekteihin. Seuraava taso on puhuttu vaihe ja tällöin yksilö tukee henkistä toimintoaan ääneen puhuen. Kolmannella tasolla eli sisäisen puheen vaiheessa hän kykenee toimimaan itsekseen puhuen ja lopulta edetään neljänteen tasoon eli sisäistyneeseen vaiheeseen, jolloin toiminta on täysin sisäistynyttä ja ajatus on jo puhetta nopeampaa. Toiminnan tasot ilmentävät siis niitä muutoksia, joiden kautta ulkoinen toiminto muuttuu sisäiseksi tiedoksi tai ymmärtämiseksi. (Haapasalo 1998, 89–92.) Keranto (1979, 82) kuvaa kielellisen tason toimintoja sillaksi henkisen eli symbolisen tason käsitteellisiin toimintoihin.

Galperinin teoriassa on sisäistämisen asteen lisäksi havaittavissa sama kehityskulku myös yleisyyden suhteen, toiminnon lyhenemisen suhteen ja toiminnon automatisoitumisen suhteen (Haapasalo 1998, 91–92). Yleistämisen aste määrittää paljolti lapsen matemaattisten oppimistulosten laatua, sillä laadussa on oleellista se, kuinka laajalle opittua toimintoa pystytään yleistämään (Keranto 1979, 77–78). Käytännön esimerkkinä voitaisiin ajatella tilannetta, jossa lapsi on oppinut laskemaan kolmen kissan korvien yhteismäärän. Osaako hän nyt soveltaa äsken oppimansa myös neljän koiran silmien määrän laskemiseen vai täytyykö hänen aloittaa koko prosessi aivan alusta. Kerannon (1979, 78) mukaan lyhentämisen asteen tärkeys matematiikan alkuopetuksessa on vähintäänkin samaa luokkaa kuin yleistämisparametrin. Operoiko lapsi palikoilla kooten jokaisen luvun erikseen, liittäen ne sitten yhdeksi ryhmäksi ja lopuksi laskee yksitellen palikat ensimmäisestä viimeiseen? Hieman lyhyempi tapa kun olisi ottaa ensimmäinen luku kokonaisuutena ja lisätä toinen luku siihen yksitellen.

Kun lapsi tulee toimeen ilman ulkoisia objekteja ja äänekästä puhetta, tämän voidaan ajatella vastaavan Piaget'n operationaalista vaihetta, mikäli kyseisen prosessin kautta syntynyt henkinen toiminto on tullut samalla käänteiseksi. Mutta jos lapsi suorittaa jonkin toiminnon päässään ilman, että on kykeneväinen sanomaan sitä ääneen tai tekemään sitä materiaalisten objektien avulla, on toiminto suoritettu ymmärtämättä sen sisältöä. (Keranto 1979, 80.)

2.2 Lukujonotaidot

Lukujonotaidot pohjautuvat lukusanojen oppimisen päälle. Lukusanojen luettelemisen oppiminen on kehityksen alkuvaiheessa kuitenkin hyvin voimakkaasti kielellinen tapahtuma ja tässä vaiheessa sen kytkennät varsinaiseen matemaattis-loogiseen ajatteluun ovat hyvin heikot (Lehtinen & Kinnunen 1993, 41). Kinnunen ym. (1994, 57) kuvaavatkin lukujonotaitojen kehittymisen ensimmäistä vaihetta lähinnä lorun kaltaiseksi kielelliseksi taidoksi. Tätä ensimmäistä askelta ei pidä kuitenkaan vähätellä, sillä lukujonon oppiminen on hyvin keskeinen elementti pienten lasten matemaattisen ajattelun kehityksessä (esim. Aunio ym. 2004, 202). Seuraavaksi lukujonotaitojen kehitystä tarkastellaan lukukäsitteen ja lukujonossa liikkumisen kehittymisen kautta ja lisäksi tarkastellaan lukujonotaitojen yhteyttä aritmeettisiin perustaitoihin ja matemaattisloogiseen ajatteluun.

2.2.1 Lukukäsitteen kehittyminen

Lukujenkäsittelytaitojen kehitystä voidaan kuvata viiden tason avulla. Ensimmäiseksi lapsi oppii lukusanat ja lukusanalorun, mutta lukujen nimet eivät välttämättä hahmotu vielä erillisinä tai lukujen järjestys voi onnistuneen alun jälkeen muuttua sattumanvaraiseksi. Seuraavaksi lapsi oppii käyttämään lukujonoa esineiden määrän selvittämiseen. Laskeminen on kuitenkin työlästä, sillä esimerkiksi esineiden määriä muutettaessa lapsen on laskettava kaikki esineet uudelleen. Kolmannessa vaiheessa lapsi osaa käyttää lukujonoa karttuvan määrän laskemiseen. Neljännellä tasolla lukujono edustaa lapselle suuruusjärjestyksessä olevia lukuja ja tämä mahdollistaa ajatuksellisen liikkumisen lukujonossa eteen- ja taaksepäin. Tällöin lapsi myös ymmärtää, että edellisessä luvussa on aina yksi vähemmän ja seuraavassa yksi enemmän. Viidennellä tasolla lapsi ymmärtää lukujonon lukumäärien jonona. Tämän ymmärryksen myötä lapsi oppii kokoamaan lukumäärän eri tavoin ja lapselle avautuu näin mahdollisuus nopeammille ja tehokkaammille laskustrategioille sekä lukumäärien keskinäisten suuruussuhteiden ymmärtämiselle. (Kinnunen 2003, 3–6.)

Kinnusen (2003, 6) mukaan useimmat lapset ovat koulua aloittaessaan saavuttaneet lukujenkäsittelytaidoissaan vähintään neljännen tason ja heillä on siten jonkinasteinen valmius käsitellä lukumääriä pienellä lukualueella. Tästä syystä he pysyvät helposti mukana matematiikan opetuksessa ja koulun laskuharjoitukset varmistavat ja monipuolistavat heidän lukujenkäsittelytaitojaan. Muun muassa Vuorio (2005, 51) on huomannut tutkiessaan esiopetusikäisten lukukäsitteen kehittymistä, että lapsia tulisi jo ennen kouluikää tukea paremmin lukujen käsittelyyn. Lukusanojen käyttö tulisi ottaa arjen tilanteissa jokapäiväiseen käyttöön ja erityisesti esikoulussa lapsia tulisi rohkaista luettelemaan lukuja pitkälle eteenpäin ja taaksepäin.

Lukusanataitojen kehittyminen vaatii lapselta sääntöjen konstruointia. Lapsen on konstruoitava itselleen sellaiset säännöt, joiden mukaan hän voi tuottaa lukusanoja kunkin kymmenen ylityksen jälkeen. Lukusanoja on kielessä niin paljon, että ilman tätä tuottamissääntöjen hallintaa niiden oppiminen olisi liiaksi ulkomuistia kuormittavaa ja siten ylivoimaisen työlästä. Kun lapsi on saanut konstruoitua itselleen lukujen tuottamissäännöt, yhdeksäätoista ei seuraa enää kymmentoista. (Kinnunen ym. 1994, 58.) Kallonen-Rönkkö (1986, 74–75) näkee melko suoraviivaisen yhteyden lukujen muodostumisperiaatteen sisäistämisestä siihen, että lapsi onnistunee myös annettua lukua yhtä suuremman luvun nimeämisessä.

Monet lapset oppivat jo paljon ennen kouluikää luettelemaan lukuja järjestyksessä pitkällekin sekä laskemaan yhteen- ja vähennyslaskuja. Tästä voi aikuiselle syntyä helposti kuva, että lapsen matemaattinen osaaminen on vahvaa. Toisinaan lapsen osaaminen perustuu kuitenkin ulkoa oppimiseen, matkimiseen ja rutiineihin ja pohjimmiltaan lapselta voi esimerkiksi puuttua käsitys lukujen suuruudesta, niiden suhteesta toisiinsa sekä lukujen yhteydestä arkielämään. (Ikäheimo & Risku 2004, 222.) Myös Kinnunen ym. (1994, 61) toteavat, että joskus sujuvankin lukujen luettelijan takaa voi paljastua hyvin kehittymättömät lukujonotaidot, jotka eivät tarjoa käyttökelpoista perustaa aritmeettisten perusoperaatioiden oppimiselle. Yleensä lasten tullessa kouluun he osaavat luetella lukuja pidemmälle kuin tuntevat lukuja vastaavat symbolit (Keranto 1979, 69).

Malisen (1980, 43) tutkimuksessa koulualokkaista 31 % osasi luetella lukuja ainoastaan lukuun 20 asti. Kinnusen ym. (1994, 63, 66) tutkimuksessa tutkituista koulutulokkaista 2 % osasi laskea yhdestä eteenpäin korkeintaan viiteentoista. Lapsista 35 % osasi laskea yli viidentoista, mutta eivät päässeet viiteenkymmeneen tai pääsivät viiteenkymmeneen, mutta tekivät virheitä. Loput lapset eli 63 % koulutulokkaista hallitsi lukujonon luettelun hyvin laskien virheittä viiteenkymmeneen.

2.2.2 Lukujonossa liikkuminen

Sujuvakin lukujonon luettelija voi olla kömpelö laskija, ja useimpien lasten on harjoiteltava luettelemista pitkään siten, että aina lähdetään lukujonon alusta liikkeelle. Tällä luettelutaidolla lukumäärään lisääminen tai siitä vähentäminen on hidasta, virhealtista ja suurta keskittymistä vaativaa työskentelyä. (Aunio ym. 2004, 203.) Keranto (1979, 82–83) lähestyy asiaa siten, että niin kauan kuin lapsen täytyy luettelemalla saavuttaa annettu luku, jotta hän voi sitä operoida, ei luku ole tullut hänelle tehokkaaksi käsitteeksi, joka itse olisi henkisen toiminnon erityinen objekti. Se ei vielä ole merkityksellinen merkki tietylle määrälle objekteja yksinkertaisena kokonaisuutena.

Kinnunen ym. (1994, 57, 66, 68, 75) toteavat, että lukujenluettelutaidolla ei ole matemaattista sisältöä, jos lapsi ei osaa aloittaa laskemista muusta lukusanasta kuin ykkösestä eikä osaa luetella lukusanoja laskevassa järjestyksessä. Heidän tutkimuksessaan n. 7 %:lla koulutulokkaista oli lukujonotaitojen kehitys vasta alkuvaiheessa. Suurimmalta osin koulutulokkaat näyttivät olevan juuri vakiinnuttamassa keskivaikeita lukujonotaitojaan eli he suoriutuvat hyvin lukujen luettelusta eteenpäin ja taaksepäin alle kymmenen lukualueella, mutta varmistelivat taitoaan yli kymmenen lukualueella ja työmuistia enemmän kuormittavissa tehtävissä. Ensimmäisen kouluvuoden aikana tutkimukseen osallistuneiden lasten lukujonotaidot kehittyivät voimakkaasti siten, että tällöin enää vajaalla kolmanneksella oli hankalammissakaan lukujonotehtävissä vaikeuksia.

Lukujonotaitojen hallinnan arvioinnissa lukujen taaksepäin luettelu on eteenpäin luettelemista merkityksellisempää, sillä siinä virheet tulevat selkeämmin esille. Tämä johtuu siitä, että lapset saavat tyypillisesti enemmän harjoitusta lukujonon luettelusta eteenpäin kuin taaksepäin, jolloin eteenpäin laskeminen alkaa sujua automaattisemmin ja vähemmän työmuistia kuormittavasti kuin taaksepäin laskeminen. (Kinnunen ym. 1994, 67.) Myös Keranto (1984, 13) toteaa, että lukujen luettelutaidoista eteenpäin luettelutaidot edeltävät vastaavia taaksepäin luettelutaitoja aivan kuten loogisesti ottaen kuuluu ollakin.

Matemaattisen sisällön omaavasta lukujonotaidosta voidaan puhua vasta sitten, kun lapsi ymmärtää lukujonon järjestyksen edustavan myös määrällistä kasvua. Kehittyneemmät lukujonotaidot, joihin sisältyy taito aloittaa laskeminen mistä tahansa luvusta sekä eteenpäin että taaksepäin, käyvät mahdollisiksi juuri järjestyksen ja lukuisuuden integroitumisen kautta. Olennaista on, että lapsi ymmärtää lukusanojen jonossa tietyn luvun olevan seurausta edellisen luvun ja ykkösen yhdistämisestä. Tämän sisäistettyään lukusanojen jono ei rasita lapsen muistikapasiteettia ja samalla se suo lapselle mahdollisuuden liikkua ajatuksellisesti lukujen järjestelmässä. (Kinnunen ym. 1994, 59.)

Malinen (1980, 29, 43) selvitteli tutkimuksessaan lukukäsitteen ja laskutoimitusten oppimista peruskoulun alaluokilla. Kun koulualokkaita pyydettiin sanomaan luku, joka oli yhtä pienempi ja yhtä suurempi kuin kolme vain 36 % suoriutui molemmista tehtävistä, 40 % osasi nimetä toisen luvuista ja 24 % ei osannut tehtävää ollenkaan. Silti Malinen totesi edellytysten lukujonon käyttöön perustuvalle matematiikan opetukselle olevan melko hyvät koulunkäynnin alkaessa. Malinen on tällä johtopäätöksellään hieman eri näkökannalla kuin Kinnunen ja Vauras (1997, 274–275), joiden mukaan lapsen taito sujuvaan lukujenkäsittelyyn heti koulun alkuvaiheessa on keskeisin tekijä koko alakoulun matematiikan oppimiselle yhdessä lapsen sanallisten tehtävien ratkaisutaidon kanssa.

Lukujonotaidoille ominainen ajatuksellinen liikkuminen lukujen järjestelmässä kehittyy moninaisemmaksi ja nopeammaksi vähitellen. Lukujonotaidot voidaankin luokittaa yksinkertaisempiin ja kehittyneempiin sen suhteen, miten vaativia kognitiivisia operaatioita ne sisältävät. Tässä luokituksessa otetaan yleensä huomioon neljä näkökohtaa eli suunta, lukualue, millaisin askelin lukujonossa liikutaan ja millaista työmuistin kuormitusta edellytetään. Yksinkertaisimmalla taidon tasolla lapsi kykenee virheettömiin suorituksiin vain laskiessaan eteenpäin yhden askelin alle kymmenen lukualueella. Kehittyneimmällä tasolla lapsi kykenee virheettömiin suorituksiin liikkuen taaksepäin selvästi kymmenen ylittävällä lukualueella tietyn luvun verran. (Kinnunen ym. 1994, 59.)

Keranto muistuttaa, että taidot luetella lukuja tietyn välein näyttävät kehittyvän pääsääntöisesti siten, että aluksi lapsi ei kykene tehtävään, seuraavassa vaiheessa hän luettelee hiljaa mielessään puuttuvat lukusanat ja lopuksi hän kykenee siihen ilman puuttuvien lukujen avustusta (Keranto 1984, 13). Jatkossa nämä lukujonotaidot eli kyky tuottaa lukujonoon lukuja useampien askelien välein tai kertoa niiden askelten määrä, mikä vaaditaan siirtymiseen luvusta johonkin lukujonossa kauempana olevaan lukuun, kumuloituvat kertotaulun oppimiseen ja vaikuttavat siten lähes kaikkeen matematiikan oppimiseen (Kinnunen & Vauras 1997, 275).

2.2.3 Lukujonotaidot pohjana peruslaskutaidoille

Luettelemalla laskeminen edellyttää siis lapselta ymmärrystä yksi yhteen- vastaavuudesta lueteltujen lukusanojen ja laskettavien esineiden välillä sekä ymmärrystä lukujen pysyvästä järjestyksestä. Lapsen on ymmärrettävä, että laskemisjärjestyksellä ei ole merkitystä, vaan tulos pysyy samana riippumatta siitä, missä järjestyksessä hän joukon yksiköt laskee. (Gelman & Gallistel 1978, 77–82.) Kehittyneemmällä tasolla luettelemalla laskeminen voi Anghilerin (2000, 4) mukaan tapahtua yksi luku kerrallaan luettelemisen sijasta myös esimerkiksi kahden, viiden, kymmenen tai sadan ryhmissä. Aunio ym. (2004, 203) yhdistävät lapsen taidon aloittaa lukujen luetteleminen keskeltä lukujonoa kyvykkyyteen laskea ryhmittelemällä.

Anghilerin (2000, 47–49) mukaan lapsen yhdistäessä ajatuksen ’yksi enemmän tai yksi vähemmän’ lukujonossa seuraavana tulevaan lukuun, hänelle rakentuu vähitellen ymmärrys siitä, miten lukujonoa voi hyödyntää yhteen- ja vähennyslaskussa. Lukujonotaidot kehittyvät siis tukemaan saumattomasti yhteen- ja vähennyslaskutaitoja. Aunio ym.

(2004, 205) toteavat oppimisen luetella lukuja pienenevässä järjestyksessä avaavan vähennyslaskuissa tarvittavat strategiat. Lisäksi taito aloittaa luetteleminen mistä kohden lukujonoa tahansa helpottaa ja nopeuttaa laskemista huomattavasti.

Lukujonotaitojen edistynein vaihe on saavutettu silloin, kun lapsi oivaltaa lukujen olevan toisiinsa merkityksellisesti liittyviä eli hän ymmärtää suuremman luvun muodostuvan sitä pienempiä lukuja yhdistämällä. Lukujonotaidot ja yhteen- ja vähennyslaskutaidot kietoutuvat toisiinsa saumattomasti lapsen kyetessä liikkumaan lukujonossa kahteen suuntaan eripituisia askelia käyttäen. Jos lapsella on lisäksi ymmärrys lukujonon katkottavuudesta ja uuden lukujonopalasten liittämismahdollisuudesta sekä kyky aloittaa lukujen luettelu mistä tahansa lukujonon kohdasta, on lapsen peruslaskutaitojen oppiminen mahdollisimman sujuvaa. Ylipäätään laskemisen harjoittelu tuo lapselle konkreettisia harjoitustilanteita lukujonossa liikkumiseen ja näin lasten kokemukset lukujen välisistä suhteista lisääntyy. (Aunio ym. 2004, 203–205; Räsänen 1999, 347.) Luonnollisesti lukujonotaitojen hallinta kertautuu yhteen- ja vähennyslaskujen lisäksi myös kertotaulun käsitteeseen ja kertotaulujen oppimiseen.

Yksilön kyky tunnistaa esineiden lukumääriä ja nimetä ne oikealla lukusanalla on luonnollisesti edellytys yhteen- ja vähennyslaskujen suorittamiselle. Pienellä, alle kymmenen lukualueella saatetaan selvitä vielä ilman kehittyneempiä lukujonotaitoja, mutta suuremmilla lukualueilla selviäminen edellyttää joustavaa ajatuksellista liikkumista lukujonossa eteen- ja taaksepäin. Lukujonotaitojen taso ja automatisoituneisuuden aste vaikuttavat siihen, millaisiin ja kuinka nopeisiin aritmeettisiin suorituksiin lapsi kulloinkin yltää. Lisäksi aritmeettisten taitojen kehitystä suuntaavat edellä käsitellyt strategiat, joita lapsi oppii tehtävien ratkaisemisessa käyttämään. Kinnusen ym. tutkimuksessa lukujonotaitojen hallinta nousikin keskeisimmäksi koulutulokkaan myöhempää koulun aritmetiikan hallintaa ennustavaksi tekijäksi. Näin ollen voidaan sanoa, että mitä paremmat lukujonotaidot, sitä paremmat aritmeettiset taidot. (Kinnunen ym. 1994, 60, 75.)

Mitä kehittyneempi käsitys lapsella on luvuista ja lukujonosta, sitä vähemmän hänen täytyy tukeutua lukuja ja lukumääriä kuvaaviin ulkoisiin symboleihin kuten sormiin, palikoihin tai kirjoitettuihin lukuihin. Vahva lukujonokäsitys vähentää siis riippuvuutta ulkoisesta tuesta. (Aunio ym. 2004, 205.) Jo ennen koulun alkua lapsilla on suhteellisen paljon tietoja tai taitoja ratkaista lukumääriin liittyviä ongelmia. Esimerkiksi jo alle viisivuotias oivaltaa varsin nopeasti, että samaan ratkaisuun pääsee ottamalla suoraan annetun määrän (sormia) ja jatkamalla laskua siitä eteenpäin kuin laskemalla kaikki yhteenlaskun luvut (sormet) yksitellen. (Räsänen & Ahonen 2002, 215.)

2.2.4 Lukujonotaitojen yhteys matemaattisloogiseen ajatteluun

Lukukäsitteen hallinta edellyttää lapselta taitoa luokitella, järjestää ja vertailla. Lisäksi lapsella täytyy olla ymmärrys yksi-yhteen vastaavuudesta. (Vuorio 2005, 43.) Lukujen luettelutaidolla ei voida nähdä olevan yhteyttä numeroiden merkityksen ymmärtämiselle, jos lapselta puuttuu ymmärrys lukumäärän säilyvyydestä eli jos lapsen mielestä esineiden sijoittelulla eli siis järjestyksen tai ryhmittelyn muutoksilla on vaikutusta esinejoukon lukumäärään (Perkkilä 2002, 40).

Aunio ym. (2004) viittaavat Grecon (1962) tutkimukseen, jossa kuusivuotiaat ja sitä nuoremmat sanoivat harvempaan asetellussa jonossa olevan enemmän esineitä kuin lyhyemmässä jonossa, vaikka he laskivat itse molemmissa olevan yhtä paljon esineitä. Piaget esittikin edelliseen tutkimukseen vedoten, että laskutaidon perusteella ei voida tehdä päätelmiä yksi yhteen -vastaavuuden käsitteellisestä ymmärtämisestä. Piaget ajatteli, että matemaattisten taitojen juuret ovat lasten kehittyvässä kyvyssä ajatella loogisesti. Näin ollen lasten ymmärrys luvuista ja laskemisesta kehittyy yhtäaikaisesti muun käsitteellisen kehityksen kanssa, eikä lukujonojen luettelutaidon mukaisesti. (Aunio ym. 2004, 205.)

Transitiivisella päättelyllä tarkoitetaan yksilön kyvykkyyttä yhdistellä eri joukkoja koskevia tietoja ja tehdä niiden perusteella uusia päätelmiä. Transitiivista päättelyä tarvitaan mm. lukujonotaitojen hallintaan eli lukujen välisten suhteiden ymmärtämiseen. Jos lapsella ei ole kykyä transitiiviseen päättelyyn, hän saattaa tietää jotakin peräkkäisten lukujen suhteista, kuten esimerkiksi että kolme on suurempi kuin kaksi, mutta hän ei kykene luomaan yhteyttä sellaisten lukujen välille, joita ei voi suoraan verrata. (Perkkilä 2002, 40.)

Kinnusen ym. (1994, 68–69, 75) testissä osoitettiin selvä yhteys matemaattisloogisen ajattelun ja lukujonotaitojen välille siten, että mitä vaativammista lukujonotaidoista oli kyse, sitä suurempi oli matemaattisloogisten taitojen hallinnan yhteys. Vaativampien lukujonotaitojen hallinta edellytti erityisesti lukumäärän säilyvyyden ymmärtämisen kehittyneisyyttä. Helpoimmilla lukujonotehtävillä, kuten luvusta eteenpäin laskeminen alle kymmenen lukualueella, saattoi onnistua nekin lapset, joiden suoritukset matemaattisloogisilla tehtävillä olivat heikot. Tämä voi osoittaa sitä, että lapset saattavat suoriutua helpommista lukujonotehtävistä ilman niiden matemaattisen sisällön ymmärtämistä ja matemaattisloogisen ajattelun käyttöä.

2.3 Aritmeettiset perustaidot

Aritmetiikalla tarkoitetaan oppia luvuista ja niiden ominaisuuksista. Kirjoitetulla aritmetiikalla tarkoitetaan yleisesti sovittuja merkitsemistapoja, joiden avulla matematiikassa kommunikoidaan (Perkkilä 2002, 41). Aritmeettiset operaatiot ovat mahdollisia vasta lukuisuuden käsitteen ja lukuisuuksien vertailujen hallinnan jälkeen eli lapsen tulisi ennen aritmeettisia operaatioita ymmärtää yksi yhteen -vastaavuus, lukumäärän säilyvyys, kyetä transitiiviseen päättelyyn ja pienten esinejoukkojen lukuisuuksien vertailuun. Jotta lapsi kykenee tekemään vertailuja, hänen on ymmärrettävä käsitteet enemmän, vähemmän ja yhtä monta. (Kinnunen ym. 1994, 57.) Vainionpää, Mononen ja Räsänen (2004, 296) määrittelevätkin laskutaidon kyvyksi laskea määriä ja niiden muutoksia sekä kyvyksi verrata lukumäärien välisiä suhteita.

Suhdekäsitteiden merkityksen oppiminen on haastavampaa kuin yleisten sanojen, sillä suhdekäsitteiden ymmärtäminen edellyttää aina päättelyä. Suhdekäsitteiden hallinta näyttäisikin liittyvän niin kielelliseen päättelykykyyn kuin yleiseen älykkyyteen. Suhdekäsitteitä on kutsuttu myös matemaattisiksi käsitteiksi, sillä ilman suhdekäsitteitä matemaattisten sääntöjen ja ilmiöiden kuvailu on hyvin vaikeaa. Yleensä lasten suhdekäsitteiden hallintakykyä yliarvioidaan. (Vainionpää ym., 2004, 296–297.) Geary (1996, 43) pitää valitettavana sitä, että lasten aritmeettisten käsitteiden kehitystä ei ole tutkittu riittävästi.

Myös päässälaskuissa eli aritmeettisissa sanallisissa ongelmatehtävissä pääpaino on muutosten käsiteltävyydessä. Sanallisissa tehtävissä yhdistellään tai vertaillaan asioita tai tasataan tilanteita siten, että itse luvut eivät ole tehtävissä pääpulma. Kyse on siis tehtävien ehtojen luokittelusta, eri vaiheiden tulosten muistamisesta ja aritmeettisten operaatioiden käyttämisestä. Oppilaan tulee saada selville, miten tehtävässä esiintyviä sinällään helposti miellettäviä ja muistettavia lukuja tulee käsitellä: laskea yhteen, vähentää, kertoa vai jakaa. Sanallisten päässälaskujen tulisi olla oppilaille jo itsestään selviä heidän ollessaan kuudennella luokalla. Päässälaskuista suoriutumisen kautta voidaan seurata ja tarkkailla yleisesti lasten sanallisen ymmärryksen kehitystä ja ymmärryksen soveltamista matemaattisissa tilanteissa sekä muistia ja muiden sellaisten kehitykseen liittyvien valmiuksien tasoa, jotka olennaisesti auttavat yksilöä toimimaan. (Hautamäki, Scheinin & Arinen 1999, 102.)

Gearyn (1996, 91–93) mukaan aritmetiikkaa on kaikissa kulttuureissa ympäri maailman ja joka puolella on aritmeettisessa kehityksessä havaittu samanlaisia piirteitä. Silti kulttuurisilla tekijöillä voidaan vaikuttaa lasten aritmeettiseen kehitykseen. Lapsen aritmeettiseen kehitykseen vaikuttaa yhtenä tekijänä se, millainen rooli matemaattisilla tehtävillä on lapsen ja vanhempien vuorovaikutuksessa. Suurin vaikutus aritmetiikan kehitykseen on kuitenkin kulttuurisidonnaisella muodollisella koulutuksella. On osoitettu, että vain muodollisella opetuksella saavutetaan sellaista taitojen kehitystä, jota ei todennäköisesti tapahtuisi luonnollisessa ympäristössä.

Aritmeettisten taitojen kehityksessä ei ole kyse yhdestä yksittäisestä prosessista vaan useasta rinnakkaisesta prosessista, joihin puolestaan sisältyy erilaisten osataitojen kehittymistä. Matemaattiset ajattelutaidot, lukujonotaidot, aritmetiikkaa koskevat faktatiedot ja strategiset valmiudet ovat kaikki omalta osaltaan vaikuttamassa lapsen aritmeettisten taitojen kehitykseen (Kinnunen ym. 1994, 61). Alijoki (2006, 52–53) tarkentaa aritmetiikkaa koskevat faktatiedot tarkoittamaan opetuksen ja oman kokemuksen kautta hankittuja tietoja luvuista, lukujen suhteista, toimintatavoista ja laskuoperaatioiden tuloksista.

2.3.1 Aritmeettisten strategioiden kehitys

Aritmeettisissa taidoissa kehittymisen on kuvattu tapahtuvan vaiheittain niin, että lapsi oppii ensin hitaita, luettelemiseen perustuvia tapoja suorittaa laskutoimitus oivaltaen opetuksen kautta yhä tehokkaampia ja nopeampia tapoja ratkaista sama lasku. Yksi taso arvioida lapsen matematiikan taitoja onkin tutkia kuinka pitkällä lapsi on tällaisten strategioiden kehityksessä. (Räsänen & Ahonen 2002, 191.) Geary (1996, 48, 92–93) kuitenkin muistuttaa, ettei aritmeettinen kehitys etene lineaarisesti tai selvästi vaiheittain. Lapset eivät ensimmäiseksi ratkaise yhteenlaskuongelmia yksinomaan sormilla laskien, sitten laskien sanallisesti ja lopulta mieleenpalauttamisen kautta, vaan he käyttävät erilaisia ongelmanratkaisukeinoja tehden niistä itselleen sopivia yhdistelmiä. Aritmeettisen osaamisen voidaan sanoa koostuvan käytetyistä strategioista, tarkkuudesta ja nopeudesta.

Luettelemispohjainen laskustrategia on hidas ja herkästi virheellinen, sillä lapsi saattaa helposti kadottaa vaikkapa järjestyksen, jossa oli laskiessaan esimerkiksi sormiaan. Mikäli lapsi tekee paljon virheitä näissä alkeellisimmissa laskustrategioissa, hänen on vaikeampi siirtyä kehittyneempiin strategioihin. Toisinaan ajatellaan, että konkretiaan tukeutuva laskeminen hidastaa lapsen pyrkimystä ratkaista laskuja mielessään. Tämä on kuitenkin osoitettu erheelliseksi, sillä lapsi luopuu visuo-motorisesta tuestaan heti, kun ei koe enää tarvitsevansa sitä. Erilaiset strategiat eivät ole toisiaan poissulkevia vaan toisiaan tukevia. (Räsänen & Ahonen 2002, 191, 217.)

Aluksi lapsi oppii luettelemalla laskien ja konkreettisia apuja käyttäen suorittamaan pieniä yhteen- ja vähennyslaskuja. Ulkoisen puheen avulla suoritettu luettelu sisäistyy harjoittelun myötä sisäiseksi puheeksi ja automatisoituu vähitellen nopeaksi mieleenpalauttamiseksi. (Ahonen, Lamminmäki, Närhi & Räsänen 1995, 185–186.) Mieleenpalauttamisstrategia on nopein tapa ratkaista yksinkertaisia laskuja ja se tapahtuu hakemalla vastaus suoraan muistista. Eräiden tutkijoiden mukaan juuri toistuvat päätymiset oikeisiin vastauksiin ovat avain siihen, että lapselle syntyy näitä helpottavia automatisoituneita muistirakenteita. Mitä useammin lapsi laskee laskun, sitä paremmin lapsi pystyy hakemaan sen suoraan muistista. (Räsänen & Ahonen 2002, 216.) Brunell (1933, 49) toteaakin, että matematiikan oppimisessa tuloksia saavutetaan vain harjoittelemisen kautta. Brunellin mielestä hyvien tulosten paras tae on harjoittelun määrä yhdistettynä merkityksellisyyden ja motivaation kokemiseen. Oleellista on kuitenkin muistaa, että ellei lapsi ole sisäistänyt lukujonoa, ei laskujen harjoittelemisella päästä tuloksien automaation asteelle (Ikäheimo, Aalto & Puumalainen 1998, 14).

Mikäli lapsi on epävarma mieleenpalauttamisstrategialla hakemaansa vastaukseen, hän turvautuu hitaampiin strategioihin, joita käytti kehityksensä aiemmassa vaiheessa. Osa lapsista on persoonallisuudeltaan sellaisia, että heillä on tarve varmistaa, että ovat päässeet oikeaan vastaukseen. Nämä lapset ovat suorituksissaan yhtä hitaita kuin lapset, joilla on vaikeuksia oppia nopeampia strategioita, mutta näiden kahden ryhmän ero on virheiden määrässä (Siegler 1988). (Räsänen & Ahonen 2002, 217.)

Suuremmalla lukualueella oikeiden ja nopeiden vastausten tuottaminen on monen tekijän yhteistulos. Siinä yhdistyy aritmeettisen faktatiedon ”varastosta” noudettavat tiedot yleiseen matemaattiseen ajatteluun, kuten kymmenjärjestelmän ymmärtämiseen ja hahmottamiseen sekä kykyyn jakaa lukuja erilaisiksi osiksi ja koota niitä uudelleen. Mitä vaativimmista aritmeettisista taidoista on kysymys, sitä suurempi rooli on tehokkailla strategioilla. Näin ollen matemaattisilta taidoiltaan eritasoiset oppilaat näyttävät eroavan toisistaan juuri hallitsemiensa strategioiden käytön suhteen. (Kinnunen ym. 1994, 60–61.)

2.3.2 Aiempia tutkimuksia aritmeettisten taitojen kehityksestä

Viime vuosina Suomessa on tutkittu alle kouluikäisten matemaattisten taitojen kehittymistä, mutta koulutulokkaiden tai alakouluikäisten tutkimus on ollut vähäistä. Hannula (2005) toteaa erojen lasten matemaattisissa valmiuksissa olevan suuria koulun alkaessa johtuen paljolti siitä, että lapsilla on ennen kouluikää huomattavia eroja omaehtoisessa, spontaanissa suuntautumisessa ympäristön esineiden ja tapahtumien tarkkoihin lukumääriin. Kuten lukujonotaitojen yhteydessä mainittiin, lapsi, joka alkaa kiinnittää huomioita lukumääriin tulee hankkineeksi huomattavan määrän monipuolista ja merkityksellistä harjoitusta lukumäärien tunnistamisesta ja näin hän oppii myös hyödyntämään laskemistaitoaan itselleen mielekkäissä yhteyksissä ja tilanteissa. Myös Mattinen (2006) on tutkimuksessaan osoittanut, että perusta lapsen matemaattisille taidoille luodaan jo päiväkodin varhaiskasvatuksessa. Aunion (2006) tutkimuksessa luotiin puolestaan lukukäsitetesti löytämään sellaiset alle kouluikäiset lapset, joilla oli pulmia matemaattisten esitaitojen kehityksessä. Kansainvälisen vertailun kautta osoitettiin suomalaisten lasten lukukäsitteen hallinta heikommaksi kuin muissa tutkituissa maissa ja tutkimuksessa todettiin, että asiaan voidaan vaikuttaa varhaiskasvatuksessa opetuksellisin ratkaisuin. Vaikka varhaiskasvatuksen matematiikasta on tehty maassamme viime vuosina useita merkittäviä tutkimuksia, seuraavaksi käsiteltävät koulunaloitusvaiheeseen sijoittuvat tutkimukset ovat huomattavasti vanhempia.

Luvun osittamisella tai hajottamisella tarkoitetaan ymmärrystä lukumäärien hajotettavuudesta osajoukoiksi ja koonnin käsitteellä tarkoitetaan ymmärrystä osajoukkojen yhdistettävyydestä jälleen kokonaisuudeksi. Tämä lukujen hajottamisen ja koonnan ymmärtäminen on yhteen- ja vähennyslaskuja edeltävä taito. Kinnusen ym. (1994, 67) tutkimuksessa lukujen osittamisen ja koonnin hallitsi koulutulokkaista vain 13 %. Pienellä lukualueella onnistui 17 % ja peräti 70 % ei suoriutunut tehtävästä ollenkaan. Tehtävässä testaaja kertoi näköesteen takana olevan esinemäärän ja otti niistä osan pois. Lapsen tuli päätellä, montako esinettä jäi esteen taakse.

Kun Malisen (1980) tutkimuksessa kysyttiin koulualokkailta, mitä saadaan laskettaessa yhteen 3 ja 2, suoritti 47 % laskun ilman apua, 40 % laski sormin opettajan avustamana ja 24 % ei osannut suorittaa laskua. Laskuista 32-5 ja kuusi jaettuna kahdella ei suoriutunut kukaan. Kun samassa tutkimuksessa koulualokkailta kysyttiin, paljonko pöydällä oli rahaa, kun siinä oli yksi 10 pennin raha ja kolme pennin rahaa, selviytyi 21 % laskusta ilman apua, 16 % suoriutui avustettuna ja 63 % ei osannut tehtävää. Kun tehtävää jatkettiin ja kysyttiin paljonko rahaa jää, jos rahoilla ostetaan 5 pennin karkki, sai oikean tuloksen vain 11 % lapsista. Malinen toteaakin, että vaikka koulualokkaat osaavat luetella lukuja melko paljon, he eivät osaa yhtä hyvin operoida rahoilla. (Malinen 1980, 46, 49–50, 53–54.) Yllättävää kuitenkin on, että Malinen rinnastaa rahalaskujen hallinnan lukujen luettelutaitoon eikä muihin aritmeettisiin operaatioihin.

Kinnusen ym. (1994, 70–71, 73) tutkimuksessa todettiin, että keskitasoa parempien aritmeettisten taitojen saavuttaminen ensimmäisellä luokalla näyttää edellyttävän koulutulokkaalta hyvin varmasti hallittua matemaattisloogista ajattelua ja pitkälle automatisoituneita lukujonotaitoja, joita hän kykenee spontaanisti soveltamaan aritmeettisissa ongelmissa. Samassa tutkimuksessa lapset suoriutuivat ensimmäisen luokan lopussa hyvin yhteenlaskun, vähennyslaskun ja aukkotehtävien vaatimista aritmeettisista operaatioista, jos ne sijoittuivat alle 20 lukualueelle. Sen sijaan yli 20 lukualueella oli huomattavan suurella osalla lapsista (39 %) vaikeuksia ja vain 7 % laski kaikki oikein. Ensimmäisen luokan lopussa lapset siis näyttävät ymmärtävän ja hallitsevan aritmeettiset perusoperaatiot, mutta suurin osa ei hallitse vielä lukujonotaitoja suuremmilla lukualueilla tai ei osaa strategisesti siirtää alempien lukualueiden vaatimia operaatioita suuremmille luku-alueille. Kuinkahan turhautuneita mahtoikaan olla ensimmäisen vuoden lopussa ne 7 % lapsista, jotka kenties olivat osanneet kyseiset operoinnit jo kouluun tullessaan?

2.4 Matemaattisllooginen ajattelu

Ajattelua on määritelty monin eri tavoin, sillä ajattelun tutkimus kuuluu monen eri tieteenalan piiriin. Lyhyesti voitaisiin ajattelun sanoa olevan ajatusten yhdistelemistä niin, että niistä voidaan muodostaa tai tuottaa uusia ajatuksia. Ajattelun osatekijöinä voidaan pitää luovaa ajattelua, älykkyyttä, muistin ja tiedon prosessointia, kriittistä ajattelua sekä ongelmanratkaisua ja päätöksentekoa. Muistin ja tiedon prosessointiin sisältyy puolestaan käsitteenmuodostusprosessi, päättely ja selittäminen. (Ks. esim. Hautamäki 1995, 219; Swartz & Perkins 1989, 54; Mehtäläinen 1993, 18, 94, 96.)

Ihmisten ajattelun on todettu olevan muodoltaan samanlaista, mutta nopeudessa ilmenee eroavaisuuksia. Sille asialle, että toiset oivaltavat nopeammin kuin toiset, löytynee perustelut neurofysiologiasta. (Mehtäläinen 1993, 95.) Malisen (1992, 24, 39–40) mukaan kaikilla oppilailla looginen ajattelutapa on samanlaista, mutta toisilla se toimii epätarkemmin, jolloin heidän ajatteluprosessinsa jää ikään kuin kesken. Loogisen ajattelun tutkiminen ei ole yksiselitteistä, sillä matemaattisia tehtäviä suorittaessaan oppilas ei osaa useinkaan kuvailla ajatuksiaan. Näin ollen loogisen ajattelun tutkiminen on selkeästi sidoksissa oppilaan kielelliseen ilmaisuun. Tutkimuksen mukaan vanhempien oppilaiden looginen päättely on keskimäärin nopeampaa ja selkeämpää kuin nuorempien ja he hallitsevat paremmin yhdistettyjä tehtäviä, mutta hajonta kullakin ikäluokalla on laajaa.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 korostetaan matemaattista ajattelua ensimmäisistä luokista lähtien ja sitä ehdotetaan jopa alkuopetuksen ydintehtäväksi. Näin vahva matemaattisen ajattelun korostus alkuopetuksesta lähtien viestinee siitä, että matematiikan perusasioiden opettamiseen kaivattaneen muutosta. Opetussuunnitelman perusteet jättävät kuitenkin avoimeksi kysymyksen siitä, mitä on matemaattinen ajattelu. (Hihnala 2005, 34.) Myös Leppäaho (2007, 29) toteaa, ettei matemaattista ajattelua kuvailla tai määritellä tarkemmin opetussuunnitelman yhteydessä. Leppäaho arvelee sen johtuvan käsitteen laajuudesta ja sen määrittelemisen vaikeudesta.

2.4.1 Matemaattisloogisen ajattelun kehitys

Kinnusen ja Vauraksen (1998) mukaan koulutulokkaiden välillä on suuria kehityksellisiä eroja matemaattisen ajattelun taidoissa. Erojen syntymistä on edesauttanut se, millaisia matemaattisia käsitteitä ja operaatioita lapsella on ollut omissa toimintaympäristöissään mahdollisuus konstruoida. (Kinnunen & Vauras 1998, 271–272.) Kuitenkin koulun alkuvaiheessa oppilailla on erittäin harvoin vakavia kehitysviivästymiä matemaattisloogisessa ajattelussa. Matemaattislooginen ajattelu alkaa siis kehittyä ympäristön ohjatessa lapsen ajattelua ja sitä konstruointiprosessia, jonka avulla hän alkaa ympäristöään jäsentää ja ymmärtää. Kouluikään mennessä lapset ovat tyypillisesti kehittäneet itselleen jo suuren joukon ajattelun valmiuksia, joita he käyttävät määrällisessä ja loogisessa päättelyssä. (Kinnunen ym. 1994, 56, 61.) Yleensä koulutulokkailla ovat kehittyneet määrälliseen päättelyyn liittyvistä ajatuksellisista valmiuksista yksi yhteen -vastaavuus, lukumäärien säilyvyys ja transitiivinen päättely (Perkkilä 2002, 40).

Kinnusen ym. (1994, 62–63, 65) arvioidessa koulutulokkaiden matemaattisloogisen ajattelun kehitystasoa tutkittiin taitoa vertailla joukkoja, kykyä tehdä määrien vertailuja koskevia transitiivisia päätelmiä sekä lukumäärän säilyvyyden käsitteen hallintaa. Samalla kerättiin huomioita yksi yhteen -vastaavuuden hallinnasta. Ensimmäisen luokan lopussa arvioitiin myös luokkainkluusion hallintaa, jolla tarkoitetaan luokan ja sen alaluokan ymmärtämistä ja niiden oikeaa käyttöä esimerkiksi lukumäärien vertailussa. Koulutulokkaina 67 % hallitsi arvioidut matemaattisloogiset tehtävät, 29 % lapsista oli jonkin verran vaikeuksia ja lapsista 4 %:lla oli selviä puutteita matemaattisloogisessa ajattelussaan.

Kuten edellä todettiin, voidaan ajattelua tutkia eri tieteenalojen piirissä. Psykologiassakin ajattelun tutkimista voidaan lähestyä esimerkiksi ongelmanratkaisun perinteestä käsin, ajattelun monitieteisen tutkimuksen kautta tai kehityksen näkökulmasta, jota esimerkiksi Piaget edustaa. Piaget'n teoria esitetään tavanomaisesti siten, että siinä mainitaan vaiheen tyypillinen ikä. (Hautamäki 1995, 219–221, 224.) Piaget'n teorian mukaiset kouluikäisten kehitysvaiheet ovat intuitiivinen taso, jolla lapset ovat vielä 5–6 vuoden iässä, konkreettisten operaatioiden kausi, joka alkaa 6–7-vuotiaana lasten ymmärtäessä lukumäärän säilyvyyden ja pystyessä suorittamaan konkreettisiin kohteisiin liittyviä henkisiä operaatioita sekä formaalisten operaatioiden vaihe noin 11–12 vuodesta lähtien (Ikäheimo 1994, 9). Ilmavirran (1995, 46) tutkiessa ensiluokkalaisten käsitteellisen ajattelun tasoa lapset sijoittuivat Piaget'n kognitiivisen kehityksen vaiheista konkreettien operaatioiden vaiheeseen. Muodollisen vaiheen abstraktiin ajatteluun heillä oli vielä matkaa.

Piaget'n teorian mukaan siirtyminen esioperationaaliseen vaiheeseen tapahtuu yksi yhteen -vastaavuuden kiteytymisen kautta eli silloin kun lapsi ei enää harhaannu luulemaan lukumäärän muuttuvan muutettaessa merkkijonoa tiheämmäksi tai harvemmaksi. Tämän jälkeen lapsi siirtyy aikaiseen konkreettiseen vaiheeseen, jossa luokittelu onnistuu yhden ominaisuuden suhteen. Konkreettisen vaiheen keskivaiheessa lapsen käsityksissä painon käsite eriytyy aineksen määrästä, sarjoittaminen vakiintuu ja luokittelussaan lapsi kykenee jo useamman luokitteluperustan käyttämiseen, vaikkeivät ne olekaan vielä samanaikaisia. Konkreettisten operaatioiden kehittyneimmässä vaiheessa lapset kykenevät käsittelemään tehokkaasti kahden ominaisuuden suhdetta ja tällöin keskeistä ei ole enää maailman havaitseminen, vaan mallin ja maailman vastaavuus. Tämä viimeinen vaihe ajoittuu keskimäärin peruskoulun päättövaiheeseen, tosin jo peruskoulun alkuvaiheessa tämän on saavuttanut ajattelutaidoiltaan kehittynein alle 10 %:n joukko. (Hautamäki 1995, 228–230, 240.)

Koska todellisuutta koskeva tieto perustuu havaintoon, voidaan havaitsemista pitää ajattelun tärkeimpänä lähtökohtana. Tärkeää ajattelun kehittämisessä on siis oppia näkemään asioita ja tekemään havaintoja sekä omasta itsestä että ympäröivästä maailmasta. (Sieppi & Tuomi 1994, 121.) Lisäksi tehokkaat ajattelemisen taidot heijastuvat kaikkeen oppimiseen ja vaikuttavat siten myös lapsen käsitykseen itsestään oppijana (Ilmavirta 1995, 48). Freesen (1992, 79) mielestä lapset, jotka ovat omaksuneet ajattelun perustaitoja kuten käsitteenmuodostusta, luokittelua, olettamusten tekoa, perustelua ja päättelyä, ovat todennäköisesti valmiimpia vastaamaan muihinkin älyllisiin haasteisiin. Myös Kallonen-Rönkkö (1986, 41) toteaa ajattelumallien harjaannuttamisen luovan edellytyksiä kaikkien tietoaineiden oppimiselle.

Matemaattisten periaatteiden ymmärtäminen ja taito suorittaa matemaattisia operaatioita kehittyvät vahvassa yhteydessä toisiinsa. Tutkimuksissa on todettu, että joissain taidoissa lapset oppivat ensin ymmärtämään periaatteita ja sitten vasta toimivat periaatteiden mukaan. Toisinaan taas lapsilla on havaittavissa matemaattisia taitoja, vaikka heillä ei vielä ole ymmärrystä kyseistä toimintaa ohjaavista periaatteista. Vielä ei ole selvinnyt, missä määrin kyse on yksilöllisestä vaihtelusta ja missä määrin oppimisen yleisemmistä lainalaisuuksista. (Aunio ym. 2004, 207.)

Opettajan tulee muistaa, että oppilaat kehittävät matemaattista ajatteluaan ja tietämystään sosiaalisissa vuorovaikutustilanteissa (Lehtinen & Kinnunen 1993, 38). Ohjaavan aikuisen rooli on auttaa lasta ihmettelemään, tulemaan tietoiseksi ristiriidoista ja tarjota tilanteita ja materiaaleja, joista on apua ristiriidan käsittelyssä (Kallonen-Rönkkö 1986, 12–13). Hautamäki (1991, 22–23) esittää älyllistä konfliktia kaiken ajattelutyön pohjaksi. Hänen mukaansa tarvitaan juuri sopiva eroavuus oppilaan omien tietojen ja ratkaistavan ongelman välille, jotta opiskelu olisi mielenkiintoista. Jos kuilu näiden kahden asian välillä on liian suuri, ei oppilas koe ongelmaa kiinnostavana. Kallonen-Rönkkö (1986, 43) lisää, että harjoitusten tulee olla tieteellisesti perusteltua ja samalla kiehtovia ja jännittäviä lapsen itsensä kannalta.

Asennekasvatuksella pystytään vaikuttamaan siihen, että lapsi oppii pitämään ajatteluponnistuksista, keskittyneestä työskentelystä ja luvuilla toimimisesta. Kun lapset saavat kokea oivalluksen iloa, he oppivat pitämään ajatteluponnistuksista. (Kallonen-Rönkkö 1986, 31, 42.) Myös Malaty (1993, 21) korostaa, että ajattelun kehittymisessä tärkeää on löytämisen ilo ja ajattelulle annettava aika. Mehtäläisen (1993, 98, 112) mukaan ajattelun kehittymiselle suotuisan oppimisympäristön luominen alkaa kotoa, sillä juuri kodeilla on merkittävä rooli siinä, kuinka se onnistuu luomaan lapsissa myönteistä ja vahvaa asennetta sinänsä työlästä toimintaa eli ajattelua kohtaan. Joka tapauksessa ihminen voi niin halutessaan pyrkiä kehittämään ajatteluaan milloin vain. Iän myötä tapahtuvaa kehittymistä sanotaan viisastumiseksi.

2.4.2 Ongelmanratkaisu- ja päättelytehtävät

Päättelytehtävien joukko on laaja ja se on helposti jaoteltavissa pienempiin kategorioihin. Loogisen päättelyn tehtäviä ovat esimerkiksi vaaka- ja hintapäättelytehtävät, kuviosarjan jatkamiset, yhteisten ominaisuuksien etsimiset ja koodin selvittämiset. Luvullisen päättelyn tehtävät ovat puuttuvien lukujen tai laskutoimitusmerkkien täydentämistä, taikaneliöitä tai muunlaisia lukujen sijoitusongelmia. Verbaalisen päättelyn tehtävissä päätellään esimerkiksi nimiä, ikää, ammattia tai sukulais- tai suuruussuhteita. Visuaalisen päättelyn tehtävät ovat erilaisia sokkelotehtäviä, palapelitehtäviä, kuvion jatkamisia, kolmiulotteista hahmottamista jne. Avoimet päättelyt laajentuvat ratkaisijan kykyjen mukaan ja niissä on useita ratkaisuja. (Ilmavirta 1995, 43–45.)

Kognitiivisella konfliktilla tarkoitetaan ihmisen kokemaa ongelmatilannetta. Se on tilanne, jossa yksilö on eräänlaisessa ristiriita- ja epätasapainotilassa. Tämä aiheuttaa yksilössä päämäärähakuista ajattelua tähdäten ristiriidan poistamiseen eli ratkaisun löytymiseen. Ellei edellä mainittua konfliktia synny, tilanne on joko rutiinitehtävä tai yksilö ei halua siihen reagoida. Ongelman ratkaisu tarkoittaa pelkästään valmiin ratkaisun esittämistä, mutta ongelmanratkaisu tarkoittaa ongelman ymmärtämisen, ratkaisusuunnitelman laatimisen, ratkaisusuunnitelman toteutuksen ja prosessin tulkinnan ja feedbackin muodostamaa kokonaisuutta. (Haapasalo 2004, 85–86.) Ongelmanratkaisutehtävä määritellään tehtäväksi, jonka ratkaisemiseksi oppilaalla ei ole käytettävissä valmista mallia. Näin ollen ongelmaa ratkaistessaan yksilö joutuu yhdistelemään aikaisempia tietojaan uudella tavalla ja kokeilemaan erilaisia ratkaisureittejä. (Esim. Ilmavirta 1995, 34.)

Ongelmatehtävän määrittely ei ole yksiselitteistä. Pehkonen (1984, 41) pohtii, että jos oppilas voi heti tunnistaa tehtävän suorittamiseen tarvittavat säännöt, hän ei harjoita ongelmanratkaisua, koska ongelma ei ole hänelle ongelma. Tällaisessa tapauksessa yksilö vain ratkoo rutiinitehtävää. Ongelmaksi voidaan sanoa vain sellaista tehtävätilannetta, jonka ratkaisemiseksi oppilas joutuu yhdistelemään tuttuja tietoja hänelle uudella tavalla. Leppäaho (2007, 39) lisää, että kysymys siitä, määritelläänkö tehtävä ongelmaksi vai rutiinitehtäväksi, on riippuvainen henkilön kapasiteetista ja kehitysasteesta. Kertolaskut ovat ongelmia koulunsa aloittaneille, mutta rutiinitehtäviä lukiolaisille. Hihnala (2005, 21) kokee vaikeaksi sen, että opetussuunnitelman perusteissa käytetään useaan otteeseen ongelma-käsitettä ilman, että sille esitetään mitään selitystä tai määritelmää.

Ongelmatehtäviä voidaan luokitella eri tavoin. Eräs tapa on luokitella niitä esitysmuodon mukaan, jolloin ongelmat ovat joko verbaalisia, kuvallisia tai symbolisia. Jakoperusteena voidaan käyttää myös ongelman esiintymistä, ratkaisutapaa, strategiatyyppiä, tiedonhankintaprosessia tai osa-aluetta. Jos ongelma vaatii tiettyä yksittäistä oivallusta, sitä kutsutaan pulmatehtäväksi. (Haapasalo 1998, 43.) Leppäaho (2007, 39) luokittelee ongelmantehtävät sanallisiksi, numeerisiksi tai geometrisiksi tehtäviksi. Matemaattiset sanalliset ongelmat voidaan ratkaista muodostamalla tilanteesta laskulauseke, apupiirros tai molemmat. Numeeriset ongelmat edellyttävät numeerista päättelyä tai vaikkapa sarjan tai kaavan löytämistä lukujonosta. Geometriset ongelmatehtävät vaativat geometristen muotojen havaitsemista ja niihin liittyvien kaavojen soveltamista.

Myös tutkimustehtävät voidaan sisällyttää ongelmanratkaisutehtäviin, mutta siinä painopiste on kuitenkin luovassa ajattelussa. Tutkimustehtävällä ei ole selvästi määrättyä loppua, ja sillä on yleensä useita erilaisia ratkaisuja tai mahdollisesti ratkaisua ei ole lainkaan. (Ilmavirta 1995, 37.) Näin ollen tutkimustehtävää voidaankin kutsua avoimeksi tehtäväksi. Ahtee ja Pehkonen (2000, 61) kuvailevat avointen ja suljettujen tehtävien eroa siten, että suljetussa tehtävässä alku- ja lopputilanne on yksikäsitteisesti määritelty ja ratkaisijan tehtävänä on keksiä niiden välinen ratkaisureitti. Oppikirjojen tehtävät ovat suurimmalta osalta suljettuja. Avoimessa tehtävässä alku- ja lopputilanne tai molemmat sisältävät useita vaihtoehtoja ja arkielämässä kohdattavat ongelmatilanteet ovat yleensä juuri tämäntyyppisiä. Avoimet tehtävät tarjoavat oppilaille enemmän harkinnanvapautta ratkaisemisvaiheessa ja he joutuvat käyttämään hallitsemaansa tietoa monipuolisemmin.

Ongelmatehtävät on useimmiten sijoitettu oppikirjoissa aukeamien viimeisiksi tehtäviksi. Tämä on koulun arjessa johtanut siihen, että ongelmanratkaisun opettaminen on jäänyt usein ns. rutiinitehtävien varjoon ja vain nopeimmat ja lahjakkaimmat ovat ehtineet tutustua niihin, lähinnä lisätehtävien avulla ja useimmiten ilman opettajan ohjausta. Muille oppilaille ongelmanratkaisutehtäviin tutustuminen on voinut jäädä hyvinkin vähäiseksi ja lisäksi heikompien ja hitaampien oppilaiden harjoittelu ongelmanratkaisutehtävien parissa on saattanut olla vain sarja epäonnistumisten kokemuksia. (Leppäaho 2007, 16.) Kuitenkaan ongelmanratkaisu- ja erilaiset päättelytehtävät eivät saisi jäädä vain lahjakkaimpien oppilaiden yksinoikeudeksi, sillä kaikentasoisten oppilaiden pitäisi päästä ratkaisemaan tällaisia tehtäviä. Erityisesti heikommat oppilaat tarvitsevat ohjausta ajattelemisen taitojen kehittämiseen eikä heitä pitäisi jättää aina vain rutiinitehtävien pariin. (Ilmavirta 1995, 48.)

Ongelmanratkaisutaidoissa kehittyminen kehittää lapsen tutkimisen, arvioimisen ja vuorovaikutuksen taitoja, auttaa lasta ymmärtämään matematiikan merkityksen yli tieteen rajojen, harjaannuttaa lapsen teknisiä valmiuksia, kehittää taitoa lähestyä asioita monesta eri näkökulmasta, auttaa kehittämään pitkäjännitteistä paneutumista tehtävän tekemiseen ja kehittää niin lapsen yksilöllisiä kuin yhteistoiminnallisia taitoja. Ongelmanratkaisutehtävät tarjoavat lisäksi luontevan mahdollisuuden eriyttää opetusta erilaisille oppilaille sopivaksi. Voidaankin sanoa, että matematiikan sydän on taito ratkoa ongelmia. (Berry & Sahlberg 1995, 70–71.) Ongelmanratkaisu on yleisesti hyväksytty matemaattisen ajattelun kehittämiskeino, mutta yhtä oleellisena voimme pitää matemaattisen ajattelun hauskuutta. Matemaattisen ongelman ratkaisemisen juju on juuri siinä, että ihminen saa nauttia siitä henkisesti. (Esim. Malaty 1993, 134.)

Kokonaisuutena voidaan lasten matemaattisten taitojen kehityksessä tähdentää ympäristön luoman virikkeellisyyden merkitystä lapsen kehittymiselle. Lasten varhaiset matemaattiset taidot muodostavat itseään ruokkivan kehän ja kun kouluikään mennessä lapsilla on takanaan noin kuuden vuoden matemaattisen kehityksen historia, se määrittää sen tason, miltä pohjalta lapsi aloittaa koulunkäyntinsä. Erityisesti lukujonotaidoissa kehittyminen on lapsilla selkeästi havaittava prosessi, jota opettajien ja kasvattajien olisi selkeämmin tuettava. Esimerkiksi karttuvan määrän laskeminen on asia, joka lasten oletetaan osaavan kouluiässä ilman, että sitä on heille ikinä tietoisesti opetettu. Lasten jokapäiväiseen arkeen olisi kuuluttava lukujonon eteenpäin ja taaksepäin luettelemiset niin alusta aloittaen kuin annetusta luvusta jatkaen. Tätä kautta lapsi saisi haltuunsa lukujonon kyeten liikkumaan sillä sujuvasti ja sisäistäisi näin myös nopeammat ja tehokkaammat laskustrategiat. Ylipäätään lapsen matemaattinen kehitys muodostaa selkeän prosessin kehittymällä esimerkiksi ulkoisesti havaittavasta toiminnosta sisäiseen prosessointiin. Tätä kehitystä kasvattajien olisi tietoisesti seurattava ja tuettava. Myös ajattelun taidot ovat opettavia taitoja, jotka eivät ole tai tule lapseen itsestään. Seuraavaksi onkin tarpeen tarkastella lähemmin matematiikan alkuopetukseen liittyviä tekijöitä.

3 MATEMATIIKAN ALKUOPETUKSEN KULMAKIVET

Tässä luvussa pohditaan ensiluokkalaisten matematiikan opetusta kuudesta eri näkökulmasta. Koska nykyisen ymmärryksemme mukaan ajattelemme oppimisen olevan tulosta oppijan aktiivisesta konstruointiprosessista, kristallisoituvat opetuksen ydintehtävät tämän oppimiskäsityksen avaamisen kautta. Matematiikan osaaminen ilman siihen kuuluvien keskeisten käsitteiden ymmärtämistä on mahdoton tehtävä. Abstrakti käsite ja koulunsa aloittava lapsi kohtaavatkin toisensa parhaiten konkreettisen tutustumisen kautta. Tehtävien ratkaiseminen ja asioiden ymmärrys luovat lapselle iloa, joka motivoi lasta ja saa aikaan myönteisen, itseään ruokkivan kehän. Kuitenkin esimerkiksi Kupari (1993, 118–119) viittaa tutkimuksiin, joiden mukaan monilla lapsilla matematiikan mieluisuuden kokeminen näyttää vähenevän lapsen kasvaessa. Matemaattisten taitojen on todettu olevan selvemmin hierarkkisesti rakentuvia kuin monien muiden taitojen.

Kun huomioidaan lisäksi Snellmanin ja Rädyn (1998, 88) esille nostamia koulujärjestelmämme dilemmoja, ei se ainakaan helpota opettajan roolia ensimmäisen luokan matematiikan opettajana. Snellman ja Räty ovat huomanneet, että koulujärjestelmässämme yksilöllisyyden huomioimista korostetaan ja opettajan tulee tukea kunkin oppilaan myönteistä minäkäsitystä ja onnistumisen kokemuksia, mutta arvostelussa lapsia mitataan yhteismitallisesti ja kaikki lapset tulevat oppimaan siinä oman paikkansa. Lisäksi koulun pyrkimyksenä on vaalia oppilaiden kokonaispersoonallisuutta, mutta silti tiettyjä kykyjä arvostetaan toisia kykyjä enemmän. Matematiikan ei tarvitse kuitenkaan kärsiä arvostuksen puutteesta, sikäli kun huomioidaan sen pääsevän yleisesti äidinkielen kanssa lasten ensimmäisiin todistuksiin. Näiden dilemmojen myötä korostuu varsinkin alkuopettajan rooli tasapainoilla erilaisten ristipaineiden välissä. Ja jos opettajalta puuttuu tämä tasapainokyky, hän tulee tiedostamattomasti näyttäneeksi valitsemansa puolen hyvinkin pienillä sanoilla ja eleillä.

3.1 Konstruktivistinen oppimiskäsitys opetuksen pohjana

Kun ymmärrämme oppimisen nykyisin yksilön tietojärjestelmien rakennusprojekteiksi, tulee matematiikan opetuksen keskipisteenä olla oppilaan oppiminen hänen oman toimintansa ja ajattelunsa kautta. Opettajan tehtäväksi jää tämän konstruoinnin ohjaava tukeminen. Näin ollen matematiikkaa ei voi ymmärtää pelkäksi staattiseksi tietorakennelmaksi, joka on siirrettävissä uudelle sukupolvelle. Konstruktivistisen näkemyksen mukaan myös matematiikka on dynaaminen, jatkuvasti laajentuva kulttuurituote ja sen opiskelu on yksilön kannalta katsoen matematiikan tuloksia uudelleen keksivä tutkimusprosessi. (Kupari 1993, 123–124.) Malaty (1997, 63) heittää tosin ilmoille kysymyksen, kuinka käytännössä tarjoaisimme kullekin lapselle juuri hänen kykyjensä mukaista hauskaa ja tehokasta opetusta, jossa lapsi on itse aktiivinen keksijä?

Konstruktivistisen suuntauksen myötä on käsitys matematiikan opettamisesta muuttunut automaatioon johtavasta tekniikkadrillauksesta ymmärtämiseen tähtäävään suoritukseen. Opetuksen tulee palvella oppilaan matemaattisen ajattelun kehittymistä sekä käsitteiden, käsiterakenteiden, sääntöjen ja käsitteiden logiikan ymmärtämistä. Kun suoritus perustuu ymmärtämiseen, voidaan sen varassa tekniikkaa soveltaa erilaisiin, aikaisemmista poikkeaviinkin tilanteisiin – ei automaatioon. (Kallonen-Rönkkö 1997, 261.)

Nykyaikaisella yleissivistykselläkään ei tarkoiteta enää laajojen tietomäärien muistamista ja toistamista vaan ennen kaikkea kykyä hyödyntää valtavan nopeasti kasvavaa tietovarantoa oman ymmärryksen syventämiseksi, todellisten ongelmien ratkaisemiseksi ja uudenlaisten tietokokonaisuuksien työstämiseksi. Nopeatempoisella tietotulvavyöryllä se ei onnistu eli oppimistapahtumassa on annettava oppijalle aikaa asian työstämiseen. (Välijärvi 1998, 102–103.) Konstruktivistisessa oppimisnäkemyksessä painopiste siirtyy siis tuotoksesta prosessiin ja yksittäisistä ratkaisuista vaihtoehtoihin. Oppilaat tulee nähdä aktiivisina ajattelijoina, jotka yrittävät perehtyä uusiin asioihin aikaisemmin oppimaansa hyväksikäyttäen. Oppilaat pyritään tietoisesti asettamaan kognitiivisten ristiriitatilanteiden eteen, josta he eri menetelmin etenevät kohti ratkaisua. Oleellista on, että ymmärrämme oppilaan rakentavan omaa matemaattista tietämystään vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa. (Kupari 1993, 126.)

Vaikka konstruktivismi onkin vallalla oleva oppimisnäkemys, ei se silti ole ainoa oppimiskäsitys, jolla on sijaa opetuksessa. Humanistinen oppimiskäsitys korostaa esimerkiksi oppilaan kunnioittamista ja sosio-konstruktivismi teroittaa sosiaalisen kontekstin merkitystä oppimisessa, ja nämä molemmat näkemykset ovat nähtävissä myös opetussuunnitelman perusteissa. Tämän päivän opetuskulttuurin mukaisesti opetus ei voi enää rakentua opettajan esittävän opetuksen ja oppilaiden itsenäisen työskentelyn varaan. Yhdessä oppiminen toiminnallisuuden kautta edistää parhaiten lasten ymmärryksen lisääntymistä. Yksinpuurtamisen henki matematiikan opetuksessa alkaa olla auttamattomasti ohi.

3.2 Käsitteiden opettaminen konkretian avulla

Matemaattiset käsitteet ovat abstraktioita ja sellaisina vaikeasti ymmärrettäviä. Silti matematiikan oppiminen edellyttää käsitteiden ymmärtämistä. Lapsille ei kuitenkaan tule opettaa matematiikassa abstraktioita, vaan tarjota käsitteistä konkreettiset mallit, joilla he voivat opiskella matematiikkaa. Opetettava asia on tärkeä havainnollistaa sitä useammin ja monipuolisemmin, mitä nuorempien on tarkoitus oppia kyseinen käsite. (Yrjönsuuri 2004, 112–113.) Perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteissa (2004, 160–161) vuosiluokkien 1–2 matematiikan opetuksen yhtenä ydintehtävänä onkin kokemusten hankkiminen matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostumisen perustaksi.

Käsitteiden ymmärtämistä auttaa, kun lapsi saa tutkia ympäristönsä esineitä, eliöitä, kappaleita, kuvioita, aineita ja ilmiöitä sekä luokitella, vertailla ja järjestää niitä esimerkiksi muotojen ja määrien perusteella. Jos lapsi siirretään liian aikaisin toimimaan symbolitasolle, se voi aiheuttaa puutteita keskeisten käsitteiden ymmärtämiselle ja hallinnalle ja siitä voi seurata lapselle oppimisvaikeuksia. (Ikäheimo & Risku 2004, 222, 225.) Olisi siis ensiarvoisen tärkeää, että opettaja tarkkailisi lasten käsitteiden kehitystä ja sopeuttaisi opetuksensa lasten tasoon eikä oppikirjan etenemiseen (Perkkilä 2002, 174).

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004, 161) alkuopetuksen tavoitteissa korostetaan siis käsitteiden ymmärtämistä. Oppilaiden tulisi saada monipuolisia kokemuksia eri tavoista esittää matemaattisia käsitteitä ja tässä käsitteiden muodostusprosessissa keskeisiä ovat niin välineet ja symbolit kuin sekä puhuttu että kirjoitettu kieli. Lisäksi oppilaan tulisi ymmärtää, että käsitteet muodostavat rakenteita. Luonnollisesti lapsen on myös ymmärrettävä luonnollisen luvun käsite ja opittava siihen soveltuvia peruslaskutaitoja. Ikäheimon ja Riskun (2004, 222, 226) mukaan esi- ja alkuopetuksen tavoitteena onkin konkreettisten ja toiminnallisten tehtävien avulla antaa lapselle vankka pohja matemaattiseen ajatteluun sekä matematiikan käsitteiden muodostumiseen. Myös leikinomaisuus ja toiminnallisuus ovat keskeisiä työskentelytapoja matematiikan opetuksessa.

Toisessa luvussa käsitellystä Galperinin teoriasta on luotavissa matematiikan alkuopetukseen hyvä pohja, sillä ulkoinen materiaali ja ääneen ajatteleminen tehostavat kaikkien oppilaiden oppimista. Samojen välineiden avulla eritasoiset lapset kehittävät omaa ajatteluaan omista lähtökohdistaan. (Ikäheimo & Risku 2004, 226.) Myös Ilmavirta (1995, 39) toteaa, että toimintamateriaalien on todettu auttavan ja tehostavan myös hyvin suoriutuvien oppilaiden oppimista. Välineitä käyttäen he pystyvät usein entistä syvällisempään oppimiseen ja matemaattisiin oivalluksiin sekä kykenevät käyttämään luovuuttaan vaadittavia laajempien ongelmien mallintamiseen ja ratkaisemiseen.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2004, 160) mukaan konkreettisuuden on siis toimittava tärkeänä apuvälineenä yhdistettäessä oppilaan kokemuksia ja ajattelujärjestelmiä matematiikan abstraktiin järjestelmään. Vasta kun lapsella on hallussaan käsitteet, hän voi hyödyntää niitä. Malaty (1993, 16) toteaakin, että soveltaminen on mahdotonta ilman käsitteiden ja periaatteiden ymmärtämistä, sillä soveltaminen tarkoittaa ennen kaikkea käsitteiden ja periaatteiden ymmärtämisen soveltamista ongelmien ratkaisemisessa.

3. 3 Kohti ymmärrystä – ajattelun ja ongelmanratkaisutaitojen opettaminen

Koulumatematiikka voidaan ymmärtää yhdistelmänä laskutaitoa ja ajattelutaitoa, sillä matematiikan kouluopetuksella tähdätään sekä laskuvalmiuden kehittämiseen että asioiden ymmärtämiseen. Ymmärtäminen ei synny pelkästään paljosta laskemisesta eikä myöskään laskutaito parane itsestään ymmärryksen lisääntyessä (Hihnala 2005, 22). Kupari (1993, 122) jatkaa, että irrallisten faktojen tai yksittäisten osasuoritusten opettelu ei kumuloidu itsestään laajemmaksi ymmärrykseksi opiskelluista asioista.

Peruskoulun matematiikan kehittämiseen ehdotettiin jo vuonna 1991 opetuksen painopisteen siirtämistä rutiinitaitojen harjaannuttamisesta ajattelun kehittämiseen sekä opetusmenetelmien monipuolistamista ja nykyaikaisten opetusvälineiden tehokasta hyödyntämistä (Matematiikan opetuksen kehittämisen suunnat 1991, 5). Samoihin aikoihin Ikäheimo (1994, 38) totesi käytännön havaintona, että matematiikan tunneilla keskustellaan liian vähän ja lasketaan liian paljon mekaanisia laskuja. Ikäheimon mielestä esimerkiksi ongelmanratkaisu- ja sovellustehtävissä pääpaino voisi toisinaan olla ratkaisujen yhdessä pohtimisessa eikä aina ratkaisun kirjallisessa esitystavassa. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2004, 160) mukaan arkipäivän tilanteissa eteen tulevia ongelmia, joita on mahdollista ratkoa matemaattisen ajattelun tai toiminnan avulla, tulisi hyödyntää tehokkaasti.

Hannulan ja Lepolan (2006b, 133) mukaan valtaosa alkuopetuksen matematiikasta kohdistuu aritmeettisiin taitoihin ja luonnollisten lukujen järjestelmän periaatteiden ymmärtämiseen. Kuitenkin Perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteissa (2004, 160–161) vuosiluokkien 1–2 matematiikan opetuksen ydintehtäviksi on nostettu matemaattisen ajattelun kehittäminen, keskittymisen, kuuntelemisen ja kommunikoinnin harjaannuttaminen sekä kokemusten hankkiminen matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostumisen perustaksi. Jo esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2000, 12) korostetaan lapsen keskittymiskyvyn, kuuntelutaitojen, kommunikoinnin ja ajattelun taitojen kehittämisen tärkeyttä. Olennaista on, että lapsi oppii tarkkailemaan omaa ajattelemistaan ja siksi lasta on kannustettava kertomaan, mitä hän ajattelee tai miten hän ajatteli tehtävää ratkaistessaan.

Kun pyritään ongelmanratkaisutaitojen kehittämiseen, opetuksen painopiste siirtyy sisältöjen opettamisesta ajattelemisen taitojen harjaannuttamiseen ja oppilaiden työskentelyn ohjaukseen. Kun oppilaat työskentelevät ongelmanratkaisun parissa, he oppivat tiedonhankintaa, etsimään säännönmukaisuuksia, tekemään johtopäätöksiä ja luokittelemaan asioita sekä keksimään, kokeilemaan ja arvioimaan erilaisia vaihtoehtoja (Ilmavirta 1995, 37.) Tässä on merkittävä rooli opettajan omalla toiminnalla ja asenteella. Haapasalon mielestä (2004, 87–88) opettaja voi opettaa lapsia pitämään kognitiivisista haasteista olemalla itse mallina eli osoittaen nauttivansa ongelmatilanteista ja niiden ratkaisemisesta.

Oppilaille tulisi tarjota ratkaistaviksi ongelmia, jotka vaativat lapsia työskentelemään yhdessä käyttäen hyödyksi teknisiä apuvälineitä. Kun lapset jakavat omat ideansa ja lähestymistapansa muiden kanssa, he tottuvat esittämään ongelmia useilla eri tavoilla, etsimään erilaisia ratkaisumalleja niihin sekä muotoilemaan itse ongelmia todellisista tilanteista. Näin he oppivat samalla arvostamaan ratkaisuprosessia yhtä paljon kuin lopputulosta. Sitä mukaa kun oppilaat kehittyvät matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa kyeten viestimään ja järkeilemään matemaattisesti, he oppivat arvostamaan matematiikkaa ja heidän uskonsa omiin kykyihinsä kasvaa. Näin ollen matemaattisten ongelmanratkaisuprosessien merkitystä tulee tarkastella juuri oppilaan henkisen kasvun kannalta. Oppimalla luottamaan omaan ajatteluunsa ja sen perusteluihin sekä kehittämällä herkkyyttään kuulla ja kunnioittaa toistenkin ajatuksia ja mielipiteitä oppilas kehittää samalla tervettä itsetuntoaan ja sosiaalisia taitojaan. (Haapasalo 2004, 85, 88–89.)

Ilmavirran mukaan ongelmanratkaisusitkeyttä kasvattavat parhaiten sopivan vaativat tehtävät ja ongelmakokonaisuudet sekä kannustava, yrittämisen ja erehtymisen salliva ilmapiiri. Ongelmanratkaisutaitoja kehittävät tehtävät voidaan jakaa loogisiin, luvullisiin, verbaalisiin, visuaalisiin ja avoimen päättelyn tehtäviin (Ilmavirta 1995, 37, 43, 45), mutta ratkaistaviksi tarjottavista ongelmista tulisi kuitenkin osan olla sellaisia, joihin ei ole lainkaan tai ainakaan yksiselitteistä ratkaisua. Näin lapset oppisivat suhtautumaan ongelmanratkaisuun todellisuusperusteisemmin. Koulussa on tyypillisesti totutettu lapset siihen, että ongelmiin on aina yksi oikea ratkaisu, vaikka todellisuus on lähes komplementaarinen: yleensä ongelmille ei ole joko lainkaan ratkaisua tai mikäli se on, ratkaisuja on useita. (Haapasalo 2004, 88–89.)

Matemaattiset ongelmat, joita koulutulokkaan tyypillisillä valmiuksilla kyetään ratkaisemaan, ovat yksinkertaisia ja kuvastavat lasten toimintaympäristössä spontaanisti syntyviä ongelmia. Enimmäkseen ne kohdistuvat määrien, kokojen tai pituuksien määrittämiseen ja vertailuun. (Kinnunen & Vauras 1997, 272.) Oppilaantuntemuksen kautta opettaja voi kuitenkin johdatella lapsia kohti oivallusta ja näin auttaa heitä kehittämään ajattelumalleja, joiden avulla he voivat päästä aikaisemman tasonsa yläpuolelle. Lapsella tulisi olla aikaa ajattelulle, sillä vain hän itse voi oivaltaa ja muodostaa omat päätelmänsä. (Sieppi & Tuomi 1994, 126.) Ymmärtäminen tuottaa lapsille oppimisen iloa ja sitä kautta korvaamatonta motivaatiota (Malaty 1993, 16).

3.4 Motivoitumisen, tunteiden ja kokemusten merkitys oppimiselle

Tiedollisen oppimisen ohella on asenteiden ja oppimiskokemusten merkitys havaittu yhä tärkeämmäksi tekijäksi oppilaiden kasvussa ja kehityksessä. Kun Kallonen-Rönkkö (1997) kysyi tutkimuksessaan seitsemäsluokkalaisilta alakoulun matematiikan kiinnostavuuteen vaikuttavia tekijöitä, työtapojen yksipuolisuus ja oppiaineksen vaativuustaso heikensivät kiinnostavuutta. Myöskään oppiaineksen vaativuustaso ei ollut kohdannut oppilaita ollen joko liian helppoa tai liian vaikeaa vastaajasta riippuen. Tutkimukseen osallistuneista lapsista hyvin harvat oppilaat (5,5 %) kokivat matematiikan oppituntien olevan yleensä koulupäivän mieluisimpia oppimistilanteita. (Kallonen-Rönkkö 1997, 263–264.)

Vuoden 1990 Peruskoulun arviointitutkimuksen mukaan matematiikka kuului 4. luokalla oppilaiden mieliaineiden joukkoon, mutta jo 6. luokan lopussa joka viides piti matematiikkaa vastenmielisenä aineena. Samassa tutkimuksessa todettiin, että matematiikka ei ollut vaikea aine peruskoulun neljäsluokkalaisille. Sen vaikeana kokeminen lisääntyi kuitenkin tasaisesti siten, että 9. luokalla sitä piti vaikeana jo kolmasosa oppilaista. (Kupari 1993, 118–119.) Tämä viittaisi siihen, että erot osaamisessa kasvavat sisällön vaikeutuessa. Aunolan (2004) mukaan taitopuutteet näyttävät jo alkuopetusvaiheessa kietoutuvan motivaatio-ongelmiin ja tämä yhteys vauhdittaa taitoerojen kasvua matematiikassa (Hannula & Lepola 2006b, 136).

Heti kouluun tullessaan oppilaat tyypillisesti suhtautuvat myönteisesti matematiikkaan riippumatta siitä, millainen heidän taitotasonsa on. Kehityksessään selvästi muita jäljessä olevien kohdalla suhtautuminen alkaa helposti muuttua kielteisemmäksi, mitä enemmän epäonnistumisia ja ongelmia heille alkaa matematiikassa kasaantua. Matematiikasta alkaa tulla vastenmielistä, kun se liitetään hallinnan tunteen menetykseen, huonommuuden kokemuksiin, epäuskoon omista kyvystä ymmärtää ja oppia sekä erilaisiin välttämispyrkimysten tuomiin konflikteihin koulussa ja kotona. Kielteisestä asenteesta tulee uusi kompastuskivi heikkojen perustaitojen rinnalle. Molemmat vahvistavat pyrkimystä vain selviämään jotenkuten ja kehittämään siihen soveltuvia pinnallisia selviytymiskeinoja, jotka eivät oikealla tavalla tue matemaattisten taitojen kehittymistä. (Kinnunen 2003, 16.) Asenteisiin vaikuttaa siis niin yksilön taipumukset ja asioiden sisäistämisaste kuin hankitut kokemukset. Jos yksilö kokee onnistumisen tunteen jollakin alalla, hän asennoituu siihen entistä myönteisemmin, lisää ponnistelujaan ja kehittää alalla tarvittavia suoritusvalmiuksiaan. (Ruohotie 1998, 42.)

Toimintaan liittyvä tunnetila on yhteydessä yksilön taitotason ja tehtävän haasteellisuuden kanssa eli esimerkiksi matalalla taitotasolla haasteellinen tehtävä aiheuttaa ahdistuneisuutta. Kun sekä taitotaso että tehtävän vaatimustaso ovat korkeita, yksilöllä on mahdollisuus kokea flow-tunne tehtävää tehdessään. Kouluopiskelussakin flow-tilan saavuttaminen onnistuu, jos tehtävän vaikeus on sopivassa suhteessa yksilön taitoihin. (Uusikylä & Atjonen 2005, 138–139.) Hakkarainen, Lonka ja Lipponen (1999, 83) kuvaavat flow-tilaa huippuelämykseksi – motivoivaksi, haastavaksi ja palkitsevaksi kokemukseksi. Tällöin ihmisen mieli tempautuu piristävään tilaan ja optimaaliseen virtaukseen, jossa kaikki tuntuu sujuvan vaivattomasti. Syvimmät oivallukset ja huippukokemukset syntyvätkin juuri pohdiskelevan, pintatason ylittäneen ajattelun yhteydessä.

Oppilaiden toiminta suuntautuu oppitunneilla muuhunkin kuin oppimiseen. Tätä oppituntien toimintaa voidaan kuvata neljän tilanneorientaation kautta. Tehtäväorientaatio kuvaa yksilön omatoimista ja itsenäistä toiminnan suuntaamista suoritettavaan tehtävään, matematiikan oppitunneilla siis matematiikan oppimiseen. Tällainen suuntautuminen on tehokkaan ja syvällisen matematiikan oppimisen edellytys. Riippuvuusorientaatio kuvaa yksilön epäitsenäistä eli sosiaalisesta ympäristöstä riippuvaa suuntautumista toimintatilanteissa. Tällöin oppilas noudattaa opettajan tai oppilastovereiden odotuksia vailla omia oppimisen intentioita. Minäorientaatio kuvaa yksilön toiminnan suuntautumista minän esilletuomiseen tai puolustamiseen. Näin toimiva yksilö ei opi matematiikkaa tarkoitetulla tavalla. Luopumisorientaatio kuvaa yksilön intentioita olla omistautumatta yhteiseen tehtävään tai toimintaan. Matematiikan oppitunnilla käsiteltävä asia ei ole tällä tavoin orientoituvalle oppilaalle merkityksellinen, vaan hän ajattelee ja tekee jotain muuta. Hän ei myöskään tunne oppitunnin sosiaalisen tilanteen vaativan itseltään mitään. Kärjistetysti voidaan sanoa, että juuri nämä tilanneorientaatiot ratkaisevat sen, oppiiko oppilas opiskelemaan vai inhoamaan ja vihaamaan matematiikkaa. (Yrjönsuuri & Yrjönsuuri 2004, 131, 133.)

Edellä kuvaillut motivationaaliset orientaatiot ovat jatkuvan muutoksen alaisia. Koska orientaatiotapojen synnyssä koulukokemukset ovat keskeisellä sijalla, oppimista tulisi ohjata niin, ettei epätarkoituksenmukaisia orientaatioita pääsisi syntymään. Opettajan tulisi pyrkiä löytämään sellaisia oppimistehtäviä, jotka mahdollisimman moni kokisi itselleen mielekkäiksi ja tarkoituksenmukaisiksi. Tehtävien sisällä olisi lisäksi hyvä olla mahdollisuus löytää eritasoisia osa-alueita tai ratkaisumalleja. (Sieppi & Tuomi 1994, 120.)

Keltikangas-Järvinen (2004) näkee tehtäväorientaation muodostuvan oppilaan aktiivisuudesta, sinnikkyydestä ja keskittymisen asteesta eli temperamenttipiirteistä. Temperamentilla lienee myös oma osuutensa siihen, kuinka lapsi suhtautuu matematiikan opiskeluun. Lapsi, joka on yliaktiivinen ja helposti häirittävissä eikä omaa sinnikkyyttä, menestyy koulussa todennäköisesti huonommin kuin vähemmän aktiivinen ja keskittymiskykyinen lapsi, joka ei helpolla luovuta haastavankaan tehtävän edessä. Temperamentin ja matemaattisen lahjakkuuden yhteyden tutkiminen on kuitenkin ymmärtääkseni jäänyt vähemmälle tutkimiselle, vaikka Keltikangas-Järvinen yhdistääkin edellä mainitut temperamenttipiirteet juuri matematiikassa menestymiseen. Hänen mukaansa matematiikan oppiminen edellyttää kärsivällisyyttä viipyä tehtävässä niin kauan kuin tarve vaatii ymmärtääkseen sen ja toistonsietokykyä eli samantyylisten tehtävien suorittamista siihen pisteeseen, että tehtävien suorittamiseen rutinoituu. (Keltikangas-Järvinen 2004, 265, 286, 297.) Vaikka matematiikassa onkin tärkeää lukujonotaitojen ja peruslaskutoimitusten automatisoituminen, ei matematiikan oppiminen vaatine ensisijaisesti kykyä passiiviseen ja tylsään toistamiseen.

Temperamentti johtaa myös motivaatioeroihin, sillä toisia oppiminen ei kiinnosta, jos asia tuntuu vaikealta. Jos lapsella on temperamenttipiirteenä matala sinnikkyys, hän ei jaksa harjoitella määrätietoisesti. Jos tällainen lapsi kokee, ettei hän opi riittävän nopeasti, hän antaa periksi ja jättää tehtävän. Temperamentiltaan sinnikäs tai peräänantamaton lapsi ei luovuta, vaikka asia tuntuisi vaikealta, sillä vaikeus on hänelle haaste. (Keltikangas-Järvinen 2006, 95, 97, 266.) Huomion syvällinen suuntaaminen koulutehtäviin, ponnistelu ja sitkeys uusien tehtävien suhteen sekä haasteellisten tehtävien itsenäinen suorittaminen kuvastavat lapsen tiedonhaluun ja taitojen kehittymiseen liittyvää motivaatiovalmiutta (Hannula & Lepola 2006a, 10).

Motivaatio on tiettyyn tilanteeseen liittyvä, yksilön muuttuva henkinen tila, joka määrää millä vireydellä ja mihin suuntautuneena hän toimii (Peltonen & Ruohotie 1992, 10). Motivaatiolla tarkoitetaan siis kaikkien niiden tekijöiden summaa, jotka saavat ihmisen toimimaan tiettyä tavoitetta kohti. Motivaatio antaa pyrkimyksille sekä suunnan että syvyyden eli se johdattaa yksilön kohti tiettyä tavoitetta tietyllä innostuksen asteella.

Oppimisen tärkein, tehokkain ja palkitsevin motivaatio tulee oppijasta itsestään, mutta lapsi tarvitsee sen kehittämiseen aikuisen tukea ja kasvatusta. (McLean 2003, 9, 123, 128.)

Sekä oppimisessa että ajatteluprosessin kehittymisessä oppilaiden motivaatiolla ja asenteilla on keskeinen merkitys. Ilman motivaatiota oppimista ei tapahdu ja siksi opetettavaksi valittujen sisältöjen tulee olla mielekkäitä. (Sieppi & Tuomi 1994, 119.) Yrjönsuuri ja Yrjönsuuri (1994) toteavat, että kun yksilö suuntautuu tavoittelemaan jotakin, hän pitää tekoa ja teon tavoitetta jollakin perusteella itselleen merkityksellisenä ja valitsemisen arvoisena. Ihminen tekee sitä, mitä hän pitää omalta kannaltaan mielekkäänä ja merkityksellisenä. Mielekkyyden ja merkityksellisyyden kokeminen on siis subjektiivista ja henkilökohtaista. (Yrjönsuuri & Yrjönsuuri 2004, 124.) Lapsen kokiessa työniloa, hän itse tuskin huomaa, miten kovasti hän työskentelee (Brunell 1993, 49–50). McLean (2003, 34, 83, 127) tarkentaa motivaation olevan sidoksissa niin kunkin lapsen yksilölliseen lähestymistapaan kuin kulloiseenkin oppimiskontekstiin. Esimerkiksi liian helpot ja liian vaikeat tehtävät eivät motivoi ja erilaiset oppijat motivoituvat jopa erilaisista ohjeistuksista. Motivoivat tehtävät herättävät aina jollain tavalla oppilaan uteliaisuuden eli saavat oppilaan haluamaan tietää asiasta enemmän. Tehtävän on luotava oppilaalle tunne siitä, että hän voi itse ohjata omaa työskentelyään käyttäen siihen omaa mielikuvitustaan ja luovuuttaan. Tällaiset tekijät auttavat oppijassa sisäisen motivaation syntymistä ja näin toiminnan painopiste siirtyy lopputuloksen sijasta oppimisprosessiin. Motivaatiota kasvattaa lisäksi se, että opetettavalle asialle luodaan yhteys oppilaan elämään, sillä vain tehtävät, jotka tuntuvat oppilaasta merkittäviltä ja mielenkiintoisilta innostavat oppimaan.

Opettajan tulisi siis muistaa, että liian vaikeat tehtävät aiheuttavat oppilaille huolta ja ahdistusta ja liian helpot taas ikävystymistä ja turhautuneisuutta. Ihanteellista olisi, että haasteet lisääntyisivät tasaisesti taitojen, tietojen ja kykyjen kehittyessä. Oppilaan pitäisi aina tuntea, että hänen on mahdollista päästä yhä parempiin tuloksiin. (Uusikylä & Atjonen 2005, 138–139.) Haasteellisuus siis motivoi ja edistää oppimista ja kehittymistä. Opetuksessa ja harjoittelussa tehtävien vaikeustason tulisi olla ns. lähikehityksen vyöhykkeellä. Tehtävät eivät siis saisi olla niin helppoja, että oppilas suoriutuu niistä rutiinilla, pohtimatta, mutta ei myöskään niin vaikeita, että oppilas ei pysty oppimaan niistä edes avustettuna. Sopivan haasteellisella tasolla oppilaalla itsellään on mahdollisuus säilyttää aktiivinen, omaa ymmärrystä ja osaamista rakentava rooli. (Kinnunen 2003, 35.)

Aina lapsen ympäristön tarjoama sosiaalinen tuki, aikuisten virittämät matemaattisesti kehittävät ympäristöt ja heidän intensiivinenkään opastus eivät yksinään riitä. Tärkeintä lapsen matemaattisten taitojen kehittämisen kannalta on se, miten lapsi osallistuu näihin toimintoihin ja mitä hän itse tekee ja ajattelee tehdessään. Kasvattajien tulee siis auttaa lasta suuntaamaan tarkkaavaisuuttaan tarkasteltavina oleviin matemaattisiin piirteisiin. (Aunio ym. 2004, 208.)

3.5 Matemaattisten taitojen hierarkkisuus ja oppimisvaikeudet

Matematiikan alkeiden oppiminen perustuu jo ennen kouluikää hankituille lukumäärän ymmärtämisen ja luettelemalla laskemisen taidoille. Samoin myöhempi matemaattinen ongelmanratkaisu nojaa koulun alkuvaiheiden matemaattisiin perustaitoihin ja niiden automatisoitumiseen. Matematiikan oppimista voidaankin pitää selvemmin varhaisemman opitun varaan rakentuvana kuin monien muiden kouluaineiden oppimista. (Ahonen ym. 1995, 183.) Silti aina, kun puhutaan matematiikan taitojen hierarkkisuudesta, puhe keskittyy oppimisvaikeuksiin ja ylipäätään niihin lapsiin, joiden taitoperusta on heikko. Niin myös tässä kappaleessa, sillä kirjallisuudessa ei juuri huomioida taitotasoltaan vahvoja lapsia.

Kinnusen (2003, 6, 16, 32) mielestä lukujen ymmärtäminen ja lukujenkäsittelytaidot ovat matematiikan opetuksessa niin keskeinen perusta, että kovin pitkälle puutteellisilla taidoilla ei pitäisi voida edetä muun luokan tahdissa. Jokainen uusi jakso tuo asioita, joiden omaksuminen edellyttää näiden taitojen yhä kompleksisempaa hallintaa ja ennen pitkää hallitsemattomien asioiden määrä on niin suuri, että oppilas ei enää pysy mukana normaaliopetuksessa. Tämän vuoksi oppilaat, joiden lukujenkäsittelytaidot ovat puutteelliset, tarvitsevat aina lisäopetusta muodossa tai toisessa. Mitä varhaisemmassa vaiheessa opetus voidaan aloittaa, sitä paremmat mahdollisuudet oppilailla on pysyä muun luokan mukana ja välttää kasautuvat matematiikan oppimisen vaikeudet. Mitä kehittymättömämpi lukujen hallinta on tai mitä ylemmällä luokalla oppilaan ongelmiin puututaan, sitä vaikeampaa muun luokan tahdissa opiskelu on ja sitä suurempaa lisäopetuspanosta tarvitaan. Toistuvana virheenä tai oppimisen esteenä ilmenevä matemaattinen oppimisvaikeus on siis aina pitkän oppimishistorian tulos (Lehtinen & Kinnunen 1993, 38). Ja kun vielä huomioidaan, että tutkimuksissa on havaittu matemaattisten oppimisvaikeuksien olevan jopa merkittävä riskitekijä syrjäytymiselle, rikollisuudelle ja työttömyydelle (Hannula & Lepola 2006b, 130–131) ei yhdenkään lapsen vaikeuksia tulisi päästää kasvamaan, vaan niihin olisi puututtava mahdollisimman varhaisessa vaiheessa.

Lukujen käsittelyn vaikeudet löytyvät usein kasautuvien matematiikan oppimisen vaikeuksien takana, mutta asiaan ei suhtauduta alkuopetuksessa tarpeeksi vakavasti. Koska pienillä lukualueilla tapahtuvista aritmeettista tehtävistä voi selvitä hyvin heikoimmillakin lukujonotaidoilla ja muistinvaraisella tiedolla, havaitaan tämä oppilaiden ongelmien vakavuus usein vasta ylemmillä luokilla. Ikätovereiden saavuttaminen lukujen käsittelyn sujuvuudessa ja sille pohjautuvissa aritmeettisissa taidoissa on siinä vaiheessa jo erittäin työlästä. Siksi olisi tärkeää, että lukujen käsittelyn ongelmiin puututtaisiin mahdollisimman varhaisessa vaiheessa eli silloin kun niiden harjoitteleminen on luonteva osa opetusohjelmaa. Alkuopetuksessa opettajan tulisi siis eri keinoin harjoittaa oppilaidensa lukujen käsittelytaitoja. (Kinnunen & Vauras 1997, 275–276.)

Hannula ja Lepola (2006b, 137) viittaavat Dowkeriin (2004), joka on koonnut matemaattisten vaikeuksien ensisijaisiksi syiksi puutteellisen matemaattista ajattelua tukevan opetuksen päivähoidossa ja koulussa, matemaattisten kokemusten puutteellisen tukemisen kotiympäristössä ja lapsen yksilöllisten piirteiden vaikutuksen johtuen esimerkiksi kehityspoikkeamista ja neurologista pohjaa olevista vaikeuksista prosessoida määrällistä informaatiota. Matemaattisia oppimisvaikeuksia voidaan osaltaan ennaltaehkäistä kiinnittämällä enemmän huomiota arjen ilmiöiden ja tilanteiden matemaattisiin piirteisiin (Aunio ym. 2004, 218). Lisäksi lapsen edun vuoksi olisi esikoulun ja koulun opettajien tehtävä yhteistyötä, sillä kun koulun opettaja saa etukäteen tietoa lapsista, jotka tarvitsevat erityistä tukea, voidaan heidän oppimistaan ryhtyä tukemaan heti koulun alkaessa (Ikäheimo & Risku 2004, 226).

Kun koulun alkuvaiheessa ymmärretään matematiikassa erityistä tukea tarvitsevaa lasta ja hänen yksilöllisyydestään johtuvia oppimista haittaavia vaikeuksia, voidaan näin lieventää lapsen itsensä omiin oppimisvaikeuksiinsa liittämiä emotionaalisia ja motivaatioon johtavia seuraamuksia (Ahonen ym. 1995, 187). Ymmärrystä ja yksilöllisiä toimia tarvitsee samalla tavoin myös matemaattisissa taidoissa hyvin vahva lapsi, sillä myös hän kokee opetuksen kohtaamattomuuden seuraukset emotionaalisesti. Näitä lahjakkaan ongelmia käsitellään tarkemmin luvussa neljä.

3.6 Lähtötaso- ja sukupuolierot matematiikan oppimisessa

Hannulan (2005, 39) tutkimustulokset osoittavat 3–7-vuotiailla lapsilla olevan merkittäviä eroja spontaanin huomion kiinnittämisessä lukumääriin, ja sillä on puolestaan vaikutusta matemaattisten taitojen kehitykseen. Myös Aunio ym. (2004, 209) ohjaavat kasvattajia tiedostamaan, että sellaiset lapset jotka tarvitsisivat eniten matemaattista harjoitusta tulevat itseohjautuvasti harjoitelleeksi kaikkein vähiten ja näin taitoerot lasten välillä pääsevät kasvamaan jo varhaislapsuudessa hyvin suuriksi. Ja suuria nuo erot ovatkin, sillä esimerkiksi Ikäheimo (1994, 45) on kuvannut havaintojaan siitä, että osa kouluun tulevista osaa laskea lukualueella 0-100 samaan aikaan kun osalle tuottaa ongelmia lukualueella 1–5 työskentely. Lasten erot näyttävät myös pysyvän suurina, sillä Hannula ja Lepola (2006b, 130–131) viittaavat tutkimukseen, jossa 10–11-vuotiaiden lasten erot matemaattisissa taidoissa todettiin seitsemäksi vuodeksi. Kun heikoimmat olivat 6–7-vuotiaiden tasolla, parhaat ylsivät keskimääräistesti 13–14-vuotiaiden tasolle.

Lukujen ymmärtäminen ja niiden käsittelyn taso vaikuttavat olennaisesti oppilaan mahdollisuuksiin ymmärtää ja oppia matematiikkaa. Tämän vuoksi lukujonotaitojen edelleen kehittämisen ja hallinnan varmistamisen tulisi olla tärkeä osa matematiikan opetusta ensimmäisinä kouluvuosina. Ongelmana kuitenkin on, että koulutulokkaiden välillä on suuria eroja lukujen hallinnan suhteen ja siten heidän tarpeidensa mukaisen opetuksen suhteen. Kyetäkseen suunnittelemaan opetusta luokanopettajan olisi hyvä tietää, minkä tasoisia hänen oppilaidensa taidot ovat eli kuinka heterogeeninen hänen luokkansa todellisuudessa on. (Kinnunen 2003, 17.) Ikäheimo ja Risku (2004, 229) ehdottavat koulunsa aloittavien oppilaiden matematiikan perustaitojen testaamiseen esimerkiksi Salosen ym. (1994) diagnostista testiä Motivaatio, metakognitio ja matematiikka.

Malaty (1997, 66–67) suoritti kokeilun koulutulokkaiden kanssa vuonna 1990 ja siinä tuli näkyväksi kuinka paljon matematiikkaa lasten olisi mahdollista oppia jo ennen koulun alkua. Jos matematiikan opetus aloitettaisiin jo lastentarhassa, pystyisivät lapset ensiluokalla aloittamaan suoraan toisen luokan matematiikan oppikirjoista. Malaty kritisoikin opetussuunnitelmien ja oppikirjojen aliarvioivan lastemme kykyjä, kun koulussa aikaa käytetään sellaisten asioiden opettamiseen, jotka lapset pystyisivät omaksumaan jo paljon aikaisemmin.

Vaikka monet kirjoittajat tuovat edellä käsiteltyä Malatyn (1997) tutkimustulosta ilmi ensiluokkalaisten lähtötasotaitojen yhteydessä, puhutaan niissä kuitenkin eri asioista. On eri asia selvittää mitä lapset osaavat aloittaessaan ensiluokan kuin nostaa esille tutkimustulosta, mihin kaikkeen he yltäisivät jo nuorempina saadessaan siihen opetusta. Yhteistä näissä on vain toteamus lähtötason mittaamisen tarpeesta, jotta lapsille voitaisiin lähteä tarjoamaan yksilöllistä opetusta. Malatyn mukaan lähtötasotesteinä voidaan pitää tavallisia matematiikan kokeita, joita opettajan oppaat tarjoavat esimerkiksi ensimmäisen luokan oppilaille vuoden lopussa. Kyseisessä kokeilussa lapsille järjestettiin lähtötasokokeiden perusteella opetusta vain niissä asioissa, joissa heille tuli virheitä ja sen jälkeen jatkettiin eteenpäin. Näin toimien lapsille pystyttiin tarjoamaan rikkaita matematiikkakokemuksia, jotka kunnioittivat lasten tasoa ja heidän aikaisempia kokemuksiaan. (Malaty 1997, 63, 70.) Tässä toimintatavassa näytetään tosin luottavan kirjasarjojen kokeisiin kritisoimatta sitä, mitataanko niiden avulla todella lapsen syvällistä ymmärrystä asiasta.

Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2000, 11) mukaan lapselle tulisi jo esikoulussa välittää matematiikasta mielenkiintoista, haastavaa, merkityksellistä ja mielekästä kuvaa. Vuorio (2005) kuitenkin aiheellisesti kaipaa esiopetuksen valtakunnallisiin perusteisiin matematiikan osalta täsmällisempiä sisältökuvauksia. Nykyisellään ne eivät anna esiopettajalle selkeää ohjetta siitä, mitä sisältöjä tulisi ottaa esille. Esimerkiksi termi lukukäsite ei esiinny esiopetuksen perusteissa lainkaan. (Vuorio 2005, 41.) Tutkimuksilla on osoitettu, että lasten taitoerot lukutaidon oppimisessa eivät kasva samalla tavoin kuin matemaattiset erot. Hannula ja Lepola (2006b, 130–131) ajattelevat tämän voivan viitata siihen, että esi- ja alkuopetus tukee erinomaisesti lähtökohdiltaan heikompien lasten lukemaan oppimista, mutta ei matemaattisten taitojen kehitystä.

Peruskoulun arviointitutkimuksissa (1990) todettiin, että oppilaiden matematiikan saavutukset olivat hyvin samanlaiset eri puolilla maata eli matematiikan opetus materiaaleineen ja järjestelyineen oli ollut tasa-asteista. Matematiikan opetusryhmän koon ja oppilaiden suoritusten välillä ei havaittu selkeää suoraa yhteyttä. On kuitenkin huomioitava, että opetusryhmän koolla on usein vaikutusta opetustapahtuman kulkuun sekä ryhmän sosiaaliseen ja affektiiviseen käyttäytymiseen ja siten ne voivat heijastua myös oppilaiden oppimistuloksiin. Tässä peruskoulun arviointitutkimuksissa todettiin, ettei tyttöjen ja poikien saavutuksissa ollut eroja. (Kupari 1993, 118.) Tutkimustulokset matemaattisen lahjakkuuden sukupuolieroista vaikuttavat kuitenkin melko kirjavalta.

Ruokamon (2000, 2, 39, 74, 174) havaintojen mukaan matemaattisen lahjakkuuden tutkimuksissa on raportoitu huomattavista sukupuolten välisistä eroista, jotka suosivat poikia. Toisinaan tyttöjen on todettu olevan ensimmäisten kouluvuosien aikana matemaattisilta kyvyiltään poikia parempia ja toisinaan taas poikien päättelykyvyt on todettu tyttöjä paremmiksi ja iän myötä tämän paremmuuden tulisi vain lisääntyä. Sukupuolieroja on selitetty mm. sosialisaatioprosesseihin, kasvatusasenteisiin ja kannustukseen liittyvien tekijöiden avulla, mutta nämä syyt eivät kuitenkaan ole yksiselitteisiä. Lisäksi erot sukupuolten sisällä ovat yleensä sukupuolten välisiä eroja suurempia. Ruokamon oman tutkimuksen mukaan poikien päättelykyvyt ja yleensäkin menestyminen matematiikassa ei ollut tyttöjen menestystä parempaa.

Uusikylän tutkimuksessa matemaattisesti lahjakkaita nuoria edustivat peruskoulun matematiikkakilpailujen parhaat ja näistä 83 % oli poikia. Se osoittaa Uusikylän mielestä yleisesti tunnetun seikan, että noin 12 vuodesta alkaen pojat ovat tyttöjä kiinnostuneempia matematiikasta ja menestyvät siinä tyttöjä paremmin. (Uusikylä 1989, 75.) Hannula, Kupari, Pehkonen, Räsänen ja Soro (2004, 170) toteavat, että silloin jos sukupuolten välisiä matemaattisia suorituseroja on löytynyt, ne ovat yleensä suosineet poikia. Uusikylän (1994, 131) kokoamasta sukupuolieroja koskevasta kirjallisuuskatsauksesta selviää, että tytöt pärjäävät matematiikan testeissä yhtä hyvin kuin pojat noin 9–13 vuoden ikään asti. Hannulan ym. mukaan (2004, 170) peruskoulun päättyessä tyttöjen oppimisstrategiat eivät ole yhtä itsenäisiä kuin poikien ja lisäksi tytöillä on poikia heikompi itseluottamus ja alhaisemmat arviot kyvyistään matematiikassa, vaikka heidän suorituksensa olisivat yhtä hyvät kuin pojilla.

Peruskoulunsa päättävien nuorten matematiikan saavutusten taustatekijöiksi Hannula ym. (2004, 171, 175) nostavat maassa vallitsevan oppimiskulttuurin, matematiikan arvostuksen, oppimisen merkityksellisyyden sekä vanhempien ja muiden tuen, jotka ovat kaikki huomattavasti tärkeämpiä matematiikan saavutusten taustatekijöitä kuin sukupuoleen liittyvät biologiset tekijät. Mutta millä tekijöillä voitaisiin selittää koulutulokkaiden matemaattisia suorituseroja? Hannula ym. toteavatkin, että vaikka Suomessa on tehty useita tutkimuksia peruskoulun oppilaiden matematiikan sukupuolieroista, on alkuopetusta tai lukion jälkeistä opiskelua tutkittu varsin vähän.

4 OPPILAANA MATEMAATTISESTI LAHJAKAS LAPSI

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa vuonna 1985 (Brunell 1993, 34–35) säädettiin, että opetus tuli järjestää niin joustavasti, että jokaisella oppilaalla oli samanlaiset oikeudet ja mahdollisuudet kehittää osaamistaan eli kaikille oppilaille tuli periaatteessa tarjota samanlaiset mahdollisuudet saada kaikki se koulutus, jonka he pystyivät omaksumaan. Näin muotoiltiin laadullisen tasa-arvon periaate. Kansanomaisesti tätä peruskoulun tasa-arvoideologiaan pohjautuvaa menettelytapaa alettiin nimittää tasapäistämiseksi (Kallonen-Rönkkö 1997, 255). Brunell (1993, 35, 43) näkeekin määräyksen heterogeenisista ryhmistä olevan jäänteen tästä tasa-arvoajattelusta, joka painotti opetuksen sisällön yhtenäisyyttä kaikille oppilaille.

Viime aikoina kaikissa maissa, joissa on herätty keskustelemaan lahjakkaiden erityisopetuksesta, on keskusteltu myös elitismistä. Pohjoismaissa elitismin pelko on ollut hyvin voimakasta. Urheilijoille ja taiteellisesti lahjakkaille tunnutaan myöntävän helpommin oikeus erityisopetukseen kuin älyllisesti, matemaattisesti tai muuten tieteellisesti lahjakkaille. (Uusikylä 1994, 166.) Kylmäojan (2001, 45) tutkiessa matematiikan opetuksen eriyttämistä ensimmäisellä luokalla käytettiin hyvin suoriutuvien oppilaiden eriyttämisessä vertaisryhmätyöskentelyä kaikkein vähiten. Kylmäoja pohtiikin ympäristön paineiden estävän opettajaa toteuttamasta vaativampaa opetusta lahjakkaille oppilaille, vaikkakin heidän opetuksellisten tarpeiden huomiotta jättäminen estää opetuksen tasa-arvon toteutumista.

Koulumaailmassa oppikirjoihin liittyvät valmiskokeet muovaavat voimakkaasti sekä oppilaiden että opettajien käsitystä siitä, mitä osaaminen on (Kallonen-Rönkkö 1997, 259). Tässä luvussa mietitäänkin, mitä matemaattisesti lahjakkaalla tarkoitetaan ja miten sellaisen lapsen erottaa muiden tavallisten, nopeiden tai tunnollisten lasten joukosta. Tarkoitus on etsiä oikeutusta matemaattisesti lahjakkaan eriyttämiselle ja pohtia heidän eriyttämisen resursseja ja mahdollisuuksia.

4.1 Matemaattisen lahjakkuuden määrittelyä

Lahjakkuuden käsite on aina riippuvainen vallitsevasta kulttuurista, joten matemaattisesta lahjakkuudesta on mahdotonta esittää yleisesti tyydyttävää määritelmää. Matemaattisen lahjakkuuden sijasta käytetäänkin useissa tutkimuksissa matemaattisen kyvykkyyden käsitettä. Niin psykologit kuin matemaatikot erottavat matemaattisesta kyvykkyydestä yleensä kaksi tasoa: tavallinen koulukyvykkyys ja luova matemaattinen kyvykkyys. Myös Krutetskii (1976) erottaa nämä tasot toisistaan toteamalla, että kenestä tahansa voi tulla tavallinen matemaatikko, mutta huomattavaksi, lahjakkaaksi matematikoksi on synnyttävä. Monet tutkijat ovat tässä asiassa hänen kanssaan samaa mieltä. (Ruokamo 2000, 6, 18, 20.)

Stenbergin (1996, 303) mukaan ei ole yksimielisyyttä siitä, mitä on matemaattinen ajattelu tai mitä on lahjakkuus tai taipumus siihen. Csikszentmihalyi ja Robinson (1986) korostavat lahjakkuuden olemuksessa sitä, ettei lahjakkuus ole ensisijaisesti yksilön ominaisuus eikä persoonallisuuden piirre vaan pikemminkin yksilön taipumusten ja kulttuuriympäristön odotusten välinen suhde. Heidän mielestään lahjakkuus vaihtelee sisällöltään myös yksilön muuttuessa eli emme voi olettaa, että viisivuotias lahjakkuus on aikanaan lahjakas teini-ikäinen. (Uusikylä 1994, 71.) Csikszentmihalyin ja Robinsonin mukaan hyvin kilpailualttiilla alueilla menestyminen vaikeutuu iän myötä myös siksi, että lahjakkuuden lisäksi harjoittelun merkitys korostuu (Ruokamo 2000, 10). Uusikylä (1994, 174) myös muistuttaa, että lahjakkuus on harvoin yleislahjakkuutta eli lahjakkaiden lasten kehitys voi eri aloilla olla epätasaista.

Renzullin (1985) lahjakkuusmalli on länsimaissa ehkä tunnetuin lahjakkaiden opetuksen pohjana käytetty implisiittinen teoria. Siinä keskeisten lahjakkuuselementtien vuorovaikutusta kuvataan kolmen toistensa leikkaavan ympyrän avulla ja näitä elementtejä ovat keskitason selvästi ylittävä kyvykkyys, opiskelumotivaatio ja luovuus. (Uusikylä 1994, 45; Ruokamo 2000, 7.) Matematiikassa luovuus tarkoittanee matemaattisloogisen ajattelun luovuutta. Jos yksikin lahjakas menettää koulun liian alhaisen tason myötä motivaationsa, katkoo koulujärjestelmämme häneltä yhden näistä kolmesta lahjakkuutta kantavasta siivestä pois. Näin estämme lapsen lahjakkuutta pääsemästä lentoon.

Tannenbaumin (1986) mukaan lahjakkuus voi ilmetä monilla alueilla jo lapsena, mutta todelliseksi lahjakkuudeksi tarvitaan korkeatasoista yleistä älykkyyttä, erityiskyvykkyyttä jollakin alueella, oikeaa sekoitusta nonintellektuaalisia piirteitä (esim. temperamentti ja motivaatio), haasteita tarjoava ympäristö ja hyvää onnea tietyissä kriittisissä elämänvaiheissa (Uusikylä 1994, 54). Virikkeellisellä kasvuympäristöllä on ylipäätään aina hyvin suuri merkitys niin lasten matemaattisten taitojen kuin ylipäätään ajattelun taitojen kehitykselle, oli kyse sitten lahjakkaasta tai vähemmän lahjakkaasta lapsesta.

Gardnerin (1983) moniälykkyysteoriassa oleellista on älykkyyden moniulotteisuus. Gardner jakoi älykkyyden aluksi seitsemään lahjakkuuteen eli intelligenssiin, joita hän piti tärkeimpinä vaan ei ainoina älykkyysalueina. Yksi näistä älykkyysalueista on loogis-matemaattinen intelligenssi ja hänen mukaansa lapsena tämä lahjakkuus ilmenee laskutaitona ja myöhemmin se voidaan jakaa osa-alueisiin, joita ovat esim. deduktiivinen ja induktiivinen päättely sekä laskutaito. (Uusikylä 1994, 66–67.) Gardnerin mukaan loogis-matemaattisen älykkyyden alueessa keskitytään kykyyn luoda, säilyttää ja käyttää pitkiä päättelyketjuja. Loogis-matemaattiseen älykkyyteen lukeutuva matemaattinen lahjakkuus on siis yksi lahjakkuuden erityisalueista. Matemaattinen lahjakkuus voidaan puolestaan jakaa pienempiin alueisiin sen mukaan, minkä tyyppinen matematiikka on kyseessä. (Ruokamo 2000, 2, 11, 74.)

4.2 Matemaattisesti lahjakkaiden tunnistamisen problematiikka

Opettajalla on merkittävä rooli lahjakkuuden tunnistamisessa samoin kuin lahjakkaan oppilaan motivoinnissa kehittämään potentiaaliaan. Kuitenkaan opettajankoulutuksessa ei kiinnitetä juuri huomiota lahjakkaiden erityistarpeisiin. Gross (1997) on todennut eri maissa tehtyjen tutkimusten edelleen viittaavan siihen, että opettajien asenteet lahjakkaisiin oppilaisiin ja heidän opetukseensa perustuvat yleisesti myytteihin ja väärinkäsityksiin. Tutkimuksessaan hän on osoittanut, että opettajien asenteisiin voidaan merkittävästi vaikuttaa jopa yhden päivän koulutuksella. Oleellista olisi, että opettaja hyväksyisi lasten oppivan eri tavalla, erilaisia sisältöjä hyödyntäen, eri aikatauluissa ja eri järjestyksessä. (Välijärvi 1998, 102.)

Arviot lahjakkaiden lasten määristä koululuokissa on erilaisia riippuen käytetystä määrittelyperusteesta. Tunnistamismenetelminä suositellaan käytettävän rinnakkain erilaisia mittareita kuten älykkyyden yksilötestejä ja ryhmä-älykkyystestejä sekä koulusaavutustestejä yhdessä itsearviointien ja produktien arvioinnin kanssa. Näiden lisäksi myös vanhemmilta ja oppilailta itseltään saadaan hyödyllistä informaatiota. (Ruokamo 2000, 11.) Kuten edellä, jopa suomalaiset asiantuntijat viittaavat lahjakkuuksien tunnistamisen yhteydessä älykkyystestien tekemiseen, vaikka ne eivät millään tavoin kuulu koulun testauksien piiriin. Vai onko kyse siitä, että älykkyystestejä on helppo suositella käytettäväksi tutkimusten teon yhteydessä, mutta opettajien arjen tunnistustyöhön ei ole tarkoitus tarjota mitään kättä pidempää? Käytännön selvittelytyö jää nykyisellään opettajan niin sanotun mutu-tuntuman varaan ja silloin esimerkiksi oppilaan tunnollisuudesta johtuva osaaminen voi näyttäytyä opettajalle lahjakkuutena. Luvussa 2.4 käsiteltiin matemaattisloogista ajattelua ja niiden käsitysten pohjalta ajattelisin, että selkein merkki lapsen älykkyydestä lienee hänen selviytyminen erilaisista matemaattisloogista ajattelua vaativista tehtävistä. Lasta, joka on nopea ja virheetön aritmeettisissa suorituksissaan, mutta ei osoita taitavuutta matemaattisloogista ajattelua vaativissa tehtävissä, voidaan tällöin nimittää nopeaksi laskijaksi, mutta hän ei tällöin täyttäne matemaattisesti lahjakkaan kriteereitä.

Koulumenestyksen ja lahjakkuuden välinen suhde ei ole yksiselitteinen. Ruokamo (2000, 12) viittaa Kirkiin (1972), jonka mukaan koulussa hyvin menestyvät, tunnolliset, sosiaaliset ja taiteelliset tunnistetaan helpommin lahjakkaiksi kuin ne lahjakkaat, jotka eivät menesty koulussa, ovat hiljaisia tai sulkeutuneita ja joiden tavat tai harrastukset ovat epäsovinnaisia. Lisäksi tunnollisia oppilaita saatetaan helposti pitää lahjakkaina, vaikka he eivät todellisuudessa erityisen lahjakkaita olisikaan. Lahjakkaiden tunnistamista vaikeuttaa lisäksi se, että lahjakkailla voi olla emotionaalisia ongelmia jotka voivat peittää lahjakkuutta tai alhaiset sosioekonomiset olot voivat estää lahjakkuuden ilmenemistä. Lisäksi niin yksilön oppimistuloksiin kuin lahjakkuuteenkin vaikuttaa hänen tiedonhankintamenetelmien tehokkuus (Kallonen-Rönkkö 1997, 252).

Uusikylä (1989, 75) on tutkinut erityislahjakkaiden nuorten koulukokemuksia ja persoonallisuudenpiirteitä, ja tämän perusteella Uusikylä toteaa matemaattisesti lahjakkaiden nuorten koulumenestyksen olevan usein erinomaista. Matemaattisesti lahjakkaat vaikuttavat persoonallisuudeltaan olevan tunnollisia ja heillä on usein perfektionismia, mikä puolestaan aiheuttaa kouluahdistuneisuutta. Ruokamo puolestaan esittelee Strakerin (1983) kokoamaa listaa matemaattisesti lahjakkaiden alle kouluikäisten lasten ominaispiirteistä. Hänen mukaansa matemaattisesti lahjakas lapsi esimerkiksi pitää kertomuksissa ja runoissa esiintyvistä numeroista, kokee mielihyvää palapeleistä ja muista rakenteluleikeistä, käyttää pitkälle kehittyneitä kriteereitä lajitteluissa ja luokitteluissa ja osaa loogisesti yhdistellen kysyä, väitellä ja päätellä asioita. (Ruokamo 2000, 23.) Tässäkin voi olla tosin kysymys siitä, että silmien avautuminen matemaattisille tekijöille ruokkii lasten taitoja siinä entisestään muodostaen näin itseään ruokkivan kehän. Lisäksi on huomioitava esimerkiksi Hannulan (2005) ja Mattisen (2006) tutkimukset, joissa korostuu lapsen ympäristön merkitys lapsen taitojen kehittymisessä.

Krutetskii (1976) kuvailee matemaattisesti lahjakkaita lapsia siten, että he pystyvät näkemään ongelman matemaattisen sisällön sekä analyyttisesti että synteettisesti ja ovat nopeita yleistämään ongelman sisällön ja ratkaisun metodin. Lahjakkaat pystyvät myös käyttämään supistettua ongelmanratkaisumallia, sillä jos he ovat ratkaisseet aiemmin samantyyppisiä ongelmia, he oppivat melko nopeasti näkemään tietyn osan ongelmanratkaisua itsestään selvänä. Ylipäätään he etsivät yksinkertaisia, elegantteja ratkaisuja ja pystyvät säätämään ongelmanratkaisutekniikkaansa, jos valittu tekniikka osoittautuu huonoksi. Ajatuskulkunsa he pystyvät kääntämään helposti vastakkaiseksi ja kaiken kaikkiaan he osaavat ajatella joustavasti ja sopeutuvat helposti erilaisiin kognitiivisiin prosesseihin. Vaikeita ongelmia he tutkivat tarkasti eivätkä ryntää niitä päättömästi ratkaisemaan. Kaikki edellä mainitut ominaisuudet liittyvät suoraan kognitiiviseen prosessointiin ja ainoastaan yksi ominaisuus kuvastuu suoraan käyttäytymiseen – matemaattisesti lahjakkaat väsyvät vähemmän matematiikan tunneilla kuin muilla tunneilla. (Ruokamo 2000, 21–22.)

Kun tutkijat ovat pyrkineet löytämään luokasta matemaattisesti lahjakkaat lapset, he ovat tyypillisesti laatineet itselleen omat testinsä. Ilmavirta (1995, 42) testasi ensiluokkalaisten matemaattista lahjakuutta kaksiosaisella testillä. Ensimmäinen osa oli tunnin mittainen yhteistesti, jossa mitattiin hahmottamista, kolmiulotteista hahmottamista, muotojen tunnistamista, mittaamistaitoa, jako- ja kerrannaistyyppien hallintaa sekä strategisia taitoja. Yksilötestissä mitattiin lukujen luettelua, lukujen järjestyksen tajuamista, yhteen- ja vähennyslaskutyyppien hallintaa, numeerista ja rationaalista suoritusta sekä transitiivipäättelyä. Kallonen-Rönkön (1986, 70) tutkimuksessa tutkimuksen tekijät laativat itse mittarin harjoittelukoulussa käytettyjen oppikirjojen analyysin ja opetussuunnitelman pohjalta. Mittarin osa-alueet koostuivat lukujen suuruusvertailusta, lukujonojen täydentämisestä, laskutoimitusten merkitsemisestä sekä erityyppisistä sanallisista tehtävistä.

4.3 Matemaattisesti lahjakkaiden eriyttäminen

Perinteinen erityiskasvatuksemme eli oppimisvaikeuksien huomiointi on osoitus moraalisista arvoistamme ja yhteiskuntamme tasa-arvoisuudesta. Luonnollisesti heikkojen lasten tukemista tulee edelleen kehittää eikä vaatimuksella hyväksyä aidosti myös lahjakkaat erityiskasvatuksen piiriin olekaan tarkoitus vähentää tai syrjäyttää tätä perinteistä erityiskasvatusta. Kuitenkin tasa-arvon periaatteesta, jonka mukaan kaikilla on samat oikeudet, on myös lahjakkailla lapsilla oikeus saada erityiskasvatusta. Vastaavasti moraalin näkökulmasta, jossa jokaisella on oikeus saada hänelle sopivaa kasvatusta, osoittaa lahjakkaiden kasvun tarpeiden huomioimatta jättäminen koulujärjestelmältämme moraalittomuutta. Lahjakas lapsi saattaa käyttää suurimman osan matematiikan tunneistaan luokkatovereiden auttamiseen saamatta lainkaan eväitä omaan kasvuunsa. Auttaako koulu tällöin lahjakasta lasta puhkeamaan kukkaan kykyjensä mukaisesti? Kun jokaisella lapsella on oikeus kasvaa omien kykyjensä mukaan ja kasvatus on tuon kehityksen tukemista, vain tarjoamalla lapselle sopivia haasteita autamme lasta kehittymään. (Malaty 2008, 50–51.)

4.3.1 Ylöspäin eriyttämisen perusteet

Alisuoriutumista voidaan tarkastella niin ikäryhmälle asetetuttujen standardien kuin yksittäisten oppilaiden potentiaalisen kykytason kautta. Lapsi voi alisuoriutua suhteessa ikäryhmälle asetettuihin tavoitetasoihin, jos lapsi ei yllä yleisesti asetettuihin tavoitteisiin. Tämän tutkimuksen puitteissa ollaan kuitenkin kiinnostuneempia sellaisesta alisuoriutumista, jossa tavoitetaso on alimitoitettu eli oppilas kyllä suoriutuu yhteiskunnan ikäryhmälle asettamista keskimääräisistä tavoitteista, mutta alisuoriutuu suhteessa omiin älyllisiin resursseihinsa. Heidän alisuoriutumisesta aiheutuvat ongelmat eivät ilmene oppimisvaikeuksina vaan erilaisina käyttäytymishäiriöinä. Alisuoriutumisessa on siis kyse ulkoa asetetun tavoitetason ja lapsen suorituskapasiteetin välisestä ristiriidasta, joka olisi periaatteessa poistettavissa yksilöimällä oppimistavoitteet. (Kananoja 1993, 158–160.) Malaty (2008, 52) kiteyttääkin, että matemaattisesti lahjakkaista lapsista saadaan alisuoriutuvia tavallisen opetussuunnitelman avulla. Malaty kritisoi sitä, että opettaja on tyytyväinen lapseen, joka menestyy matematiikan kokeissa aina täydellisesti, mutta ei tee mitään kyseisen lapsen opetukselle asetetun riman nostamiseksi ylöspäin.

Richert (1991) on sitä mieltä, että silloin kun alisuoriutuvia etsitään lahjakkaiden lasten joukosta, on otettava huomioon, että alisuoriutumista voi ilmetä niin kyvyissä, luovuudessa, saavutuksissa kuin lapsen tunne-elämässä tai opiskelumotivaatiossa. Tyttöjen ja poikien alisuoriutumismallit eroavat hänen mukaansa toisistaan siten, että pojat ovat yleensä jo alaluokilla alisuoriutujia, kun taas tytöillä alisuoriutuminen alkaa tavallisesti murrosiässä. (Uusikylä 1994, 151–153.) Opettajien olisi oleellista muistaa, että alhaisen koulumotivaation syyksi voi paljastua turhautuminen. Oppilaalle on varmasti turhauttavaa, jos hän kokee koulun liian helpoksi ja merkityksettömäksi itselleen. Mielenkiintoinen kysymys onkin, kuinka nämä tunnistamatta jääneet lahjakkuudet sitten löydettäisiin ajoissa, jotta he eivät ehtisi turhautua liian helpon vaatimustason myötä. (Ruokamo 2000, 12.)

Ensiluokkalaisten matemaattisista lähtötasoista on tehty niin yleistäviä havaintoja kuin joitakin tutkimuksiakin. Kerannon tutkimustulokset 1970-luvulta osoittivat, että 95 % esikouluikäisistä hallitsi ensimmäisen luokan syyslukukauden matematiikan oppimäärän, kun ei huomioitu lasten luku- ja kirjoitusvaikeuksia (Kallonen-Rönkkö 1997, 262; Perkkilä 2002, 10). Kallonen-Rönkön tutkimustulokset 1980-luvulta olivat samansuuntaisia. Kananoja on puolestaan todennut 1980-luvun lopulla havaintonaan, että matematiikan opetuksesta ensimmäisen luokan syyslukukaudella hyötyy hyvin pieni osa ikäluokasta. Suurelle osalle oppilaista opittavaa asiaa alkaa tulla vasta kevätlukukauden oppikirjassa, lahjakkaimmille ehkä toukokuussa. Pienelle osalle oppiaines on kuitenkin vaikeaa, eikä vauhtia voida nopeuttaa, jos oppilaiden on edettävä samassa rintamassa. (Kallonen-Rönkkö 1997, 262.)

Kupari (1993, 122) löytää vuoden 1990 peruskoulun arviointitutkimuksesta tukea sille, että monet oppilaat pystyisivät etenemään paljon nopeammin ja samalla pysyvimmin tuloksin. Näin ollen opetussuunnitelmien mukaista etenemistä voitaneen siis pitää liian hitaana. Mutta voidaanko opetusta nopeuttaa, jos monet pystyisivät etenemään nopeammin? Niin kauan kuin opetuksemme on samanaikaisopetusta, onko meillä tarkoitus edetä nopeimpien, hitaimpien vai siltä väliltä olevien oppilaiden tahdissa? Ja mihin opetuksen ja oppikirjojen hidas eteneminen perustuu? Kuparin mukaan todennäköisin syy siihen on vankka luottamuksemme rutiinilaskentaan. Kallonen-Rönkön (1997, 263–264) seitsemännen luokan oppilaille tekemästä kartoituksesta selvisi, että neljännes oppilaista koki luokkansa etenevän liian hitaasti matematiikassa ja he olisivat halunneet edetä omassa opiskelussaan luokkaansa nopeammin. Malaty (2008, 52) muistuttaa, että matemaattisesti lahjakkaille lapsille kamppailu haasteellisten tehtävien parissa on ennen kaikkea juuri hauskaa ja motivoivaa aivovoimistelua.

Opetuksessa ja oppikirjoissa hidas eteneminen ilmenee sisältöjen runsaassa määrällisessä harjoittelussa ja jatkuvan kertaamisen painottamisena (Kupari 1993, 122). Kuparin lisäksi myös Malaty (1993, 123) kritisoi vuonna 1970 opetussuunnitelmaan tuotua spiraaliperiaatetta, jota ei ole osattu käyttää oikein. Oppisisältöjä ei tulisi vuoden välein kohdata uudelleen lähes samankaltaisina kertauksina vaan niitä tulisi käsitellä haastavina oppimistehtävinä uusilla tasoilla aiempaa abstraktisemmin ja yleisemmin. Ikäheimo (1994, 45, 56) korostaakin, että hyvin suoriutuvat ja käsitteenhallinnaltaan vahvat oppilaat turhautuvat, mikäli lisätehtävät eivät vaadi heiltä uudenlaista ajattelua. Hän peräänkuuluttaakin näille oppilaille muuta tekemistä kuin opittujen asioiden perusharjoittelua. Esimerkiksi projektitöiden tekemistä ja omien ongelmanratkaisutehtävien laatimista voitaisiin tarjota vaihtoehtona tavanomaisille vaativille lisätehtäville. Uusikylä (1994, 172) toteaa lahjakkaiden oppilaiden viihtyvän usein huonosti normaaliopetuksessa ja Malaty (2008, 52) vaatii kyseisestä aihetta tarkemmin tutkittavaksi.

4.3.2 Eriyttämisen erilaisia mahdollisuuksia

Kun Moberg (1984) selvitti tutkimuksessaan opettajien valmiutta hyväksyä opetusryhmäänsä eritavoin poikkeavia oppilaita, lähes kaikki opettajat olivat valmiita hyväksymään opetusryhmäänsä erittäin lahjakkaan oppilaan ajatellen, ettei huippulahjakkaan oppilaan vuoksi opetustyötä tarvitsisi silti eriyttää. Mobergin mukaan opettajat suhtautuisivat varauksellisemmin lahjakkaiden integraatioon, jos huippulahjakkuuksien erityistarpeet tunnustettaisiin. (Moberg 1984, 51.) Kysymyksenasettelu lienee ollut kuitenkin absurdi, sillä lahjakkaat ovat kautta aikain osallistuneet normaaliin opetukseen, eikä heidän integroimisestaan ole ollut siten milloinkaan tarvetta keskustella. Tulos kertonee enemmänkin siitä, että opettajat eivät ainakaan vielä kyseisenä tutkimusvuonna tavanneet eriyttää opetustaan ylöspäin.

Elitismin pelossa on esitetty väitteitä, että matemaattisesti lahjakkaiden erityiskasvatus romuttaisi peruskoulumme. Kuitenkaan taito- ja taideaineiden erityiskasvatus ei ole todistettavasti pystynyt sitä tekemään, vaan niiden voidaan katsoa rikastuttaneen peruskouluamme, ja sitä tekisi varmaan myös matemaattisesti lahjakkaiden huomioiminen. Lisäksi lahjakkaiden erityisluokkien on todettu yleisesti auttaneen lapsia toteuttamaan itseään ja vahvistamaan minäkuvaa. Niin kuin taito- ja taideaineiden eriyttämisessä, myös matemaattisesti lahjakkaille tulisi tarjota erityiskasvatusta mahdollisimman varhain. Lukiovaiheessa pelin avaus lahjakkaille on liian myöhäistä. (Malaty 2008, 51–53.)

Lahjakkaalla oppilaalla voi Sahlbergin, Meisalon, Lavosen ja Kolarin (1993, 13) mukaan olla vaikeuksia suhtautua asiallisesti hänen kannaltaan pitkäveteiseen luokkatyöskentelyyn eli hän tarvitsee tällaisiin ongelmiin opettajan jatkuvaa kannustusta ja opastusta. Ikäheimon (1994, 45) mukaan opettajan ammattitaitoon kuuluu selkeä tietoisuus siitä, mihin keskeisiin tavoitteisiin kaikkien oppilaiden osalta pyritään. Tämä tavoitetietoisuus antaa opettajalle uskallusta vahvaan eriyttämiseen, jonka puitteissa esimerkiksi heikosti menestyvien oppilaiden opetusta voidaan priorisoida myös lähivuosien suhteen.

Lahjakkaille annettava erityisopetus voidaan jakaa vertikaaliseen ja horisontaaliseen eriyttämiseen. Vertikaalisessa eriyttämisessä asioita käsitellään opetussuunnitelman sisällä perustasoa syvällisemmin ja horisontaalisessa eriytymisessä sisältöjä otetaan opetukseen laajemmin opetussuunnitelman ulkopuolelta. Kolmas eriyttämisen tapa on opetuksen rikastaminen ryhmittelyllä ja nopeuttamalla. Lisäksi organisatorista eriyttämistä erityisluokissa tai kouluissa voitaneen pitää voimakkaimpana tapana eriyttää. (Ruokamo 2000, 13–14.) Opetuksen rikastaminen näyttää olevan eräänlainen yleiskäsite, jolla eri kirjoittajat voivat tarkoittaa hieman eri asioita. Esimerkiksi Uusikylä (1994, 164) puhuu lahjakkaiden opetuksen rikastamisesta tarkoittaen käytännettä, jolloin lahjakkaille tarjotaan jotakin normaaliopetusta laajemmin ja syvemmin. Tyypillisesti meillä puhutaan opetuksen eriyttämisestä eli yksilöimisestä silloin, kun oppilaat etenevät omaa tahtiaan tai suorittavat edellytystensä mukaisia yksilöllisiä tehtäviä (Kangasniemi 1993, 53).

Uusikylä (1994, 169) ja Ruokamo (2000, 15) viittaavat Davisin ja Rimmin (1989) esittämään lahjakkaiden opetuksen pyramidimalliin, jossa erityisopetus jakautuu kolmeen suurusluokaltaan erilaiseen tasoon. Mallissa lahjakkaiden erityisopetus on laajimmiltaan esimerkiksi ryhmitysten ja lisämateriaalien kautta luokassa annettavaa, pienenevältä osaltaan lahjakkaiden täysiaikaista erityisluokkaopetusta ja hyvin harvoin erityiskoulussa annettavaa lahjakkaiden erityistarpeet huomioon ottavaa opetusta. Pyramidissa siis alhaalta ylös mentäessä opetuksen kohteena oleva joukko pienenee ja opetus keskittyy yhä kapeammille alueille lähestyttäessä pyramidin huippua. Huomionarvoista kuitenkin on, että vaikka Davis ja Rimm (1989, 169–170) esittelevät kyseisen mallin, he esittelevät samalla sen alkuperäisiksi luojiksi Coxin, Danielin ja Bostonin vuodelta 1985.

Niissä maissa, joiden lapset menestyvät toistuvasti kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa, on tarjota lahjakkaille erityiskouluja ja -luokkia (Malaty 2008, 51). Tässä tutkimuksessa keskitytään kuitenkin pyramidimallin alimmaiseen tasoon eli tavallisen luokan yhteydessä tapahtuvaan eriyttämiseen. Kallonen-Rönkön (1997, 263–264) tutkimuksessa kysyttiin oppilaiden mielipidettä eriyttämiseen ja sen mukaan lapset eivät halunneet eriyttämisen toteutuvan matematiikan oppituntien ulkopuolella eli tuki- tai erityisopetuksen kautta. Myöskään Malatyn (2008, 51) mielestä lahjakkaille lapsille tarjottavat kerhot eivät ole riittäviä tukitoimia, vaan lasten tulee saada tukea kehitykseensä normaalin koulutyön tahdissa.

Kylmäoja (2001, 31) viittaa Viljaseen (1975), joka on jakanut eriyttämisen resurssit opetushenkilöstöstä, oppimateriaaleista ja opetusvälineistä sekä opetustiloista riippuvaisiksi. Tällöin eriyttämistä edistävät esimerkiksi koulunkäyntiavustajat ja erityisopettajat, opettajan koulutus ja työkokemus sekä tilava ja toimiva luokkahuone. Luonnollisesti eriyttämistä helpottaa myös sopivan kokoinen luokkakoko, jonka myötä opettajalla on aikaa yksilöllisempään ohjaukseen. Edellisen jaottelun puitteissa ei työskentelytavoilla eriyttäminen ole kiinni opetuksen resursseista. Kananoja (1993, 294) toteaa, että kun ensimmäisellä luokalla osa lapsista pystyy suunnitelmalliseen työskentelyyn käsitteiden varassa, osa hyötyy vasta leikinomaisesta puuhailusta ja konkreettisista välineistä. Siispä seuraavaksi otamme eriyttämisen kohteeksi työskentelytavat ja siihen liittyen oppimateriaalit.

4.3.3 Eriyttävät opetusmenetelmät ja oppimateriaalit

Ensimmäisen luokan matematiikan eriyttämistä tutkineen Kylmäojan (2001, 45–46) mukaan hyvin suoriutuvia oppilaita eriytettiin pääasiassa lisätehtävien ja henkilökohtaisten tehtävien avulla. Monesti tällainen lapsi sai myös edetä kirjassaan omaa tahtia, joka edelleen vahvisti hyvin suoriutuvan lapsen jäämistä yksin tehtäviensä pariin. Jatkuvat lisätehtävät kuitenkin vähentävät oppimisen innokkuutta siinä vaiheessa, kun lapsi huomaa pääsevänsä vähemmällä työllä laskien perustehtävät hitaasti tai puuhaten välillä jotain muuta. Juuri tästä syystä, vaikka lapsi ensimmäisellä luokalla tekisikin innostuneesti mekaanisia lisätehtäviään, tulee opettajan kiinnittää huomiota niiden monipuolisuuteen, haastavuuteen ja laatuun. Ja jos lapsen ylimääräisiä tehtäviä ei tarkasteta, se edelleen vähentää lapsen arvostusta niitä kohtaan.

Meidän tulisi siis kehittää ja käyttää sellaisia oppimis- ja opetusmenetelmiä, jotka mahdollistaisivat lasten yksilöllisen etenemisen siten, etteivät hyvin suoriutuvat lapset turhautuisi eikä heikosti suoriutuvien lasten itsetunto heikentyisi (Ikäheimo & Risku 2004, 226). Tämä edellyttäisi kuitenkin tehokkaampia keinoja selvittää lapsen taso. Lisäksi se vaatisi yleistä ymmärrystä asian tärkeydestä ja lasten suoritusterojen hyväksymistä tosiasiana. Meidän tulisi ymmärtää, että ongelma ei lakkaa olemasta sillä tavoin, että suljemme siltä silmät. Myös Ruokamo (2000, 1) toteaa, että matemaattisesti lahjakkaat oppilaat tarvitsisivat riittävän motivoivaa, monimutkaista ja kehittävää oppimateriaalia sekä erityisiä opetuksellisia toimenpiteitä ongelmanratkaisutaitojensa kehittämiseksi. Ongelmaksi tässä tosin muodostuu ongelmanratkaisun määrittely, sillä yhdelle ongelmanratkaisutehtävä on haasteellinen ongelma ja toiselle sama lasku on helppo rutiinitehtävä. Tätä ongelmaa pohdittiinkin matemaattisloogisen ajattelun yhteydessä.

Ihanteellisessa kasvatustilanteessa kasvattaja tuottaisi itse lapselle ohjelman, joka vastaisi täsmälleen lapsen kehitystarpeita ja mielenkiintoa. Tämä edellyttäisi kasvattajalta asiantuntemusta, sillä tällaiseen toteuttamistapaan ei olisi juuri mahdollista laatia etukäteen valmista ohjelmaa, vaan kasvattaja joutuisi soveltamaan itsenäisesti ideoita erilaisiin tilanteisiin. (Kallonen-Rönkkö 1986, 45.) Toki tällainen lähestymistapa olisi ihanteellinen, mutta käytännössä mahdoton toteuttaa yhden opettajan vastatessa yhtäaikaisesti parinkymmenen oppilaan opetuksesta. Resurssien niukkuus asettaa jo nykyiseenkin opetuksen eriyttämiseen reunaehtoja, sillä niin lahjakkaat kuin oppimisvaikeuksia omaavat oppilaat tarvitsisivat lisäresursseja esimerkiksi materiaalien ja tukiopetustuntien suhteen (Ruokamo 2000, 40).

Kananojan mukaan (Kallonen-Rönkkö 1997, 262) oppikirjojen lisätehtävät eivät mahdollista opetuksen eriyttämistä vaan opettajan on itse työstettävä materiaali, jos hän yrittää saada oppilaidensa ajankäyttöön mielekkyyttä. Myös Perkkilän (1999) suorittaman alkuopetuksen matematiikan oppikirjasarjojen didaktisen analyysin mukaan lisätehtävät osoittautuivat lähinnä nopeuseriyttämiseen liittyviksi tehtäviksi, sillä niiden rakenne ei olennaisesti poikennut perusaukeamien tehtävistä. Myös kotitehtäväsarjat olivat pääasiassa rutiinitehtäviä ja ne oli tarkoitettu kaikille laskettaviksi eli oppikirjojen kotitehtävien suhteen ei näyttäisi tapahtuvan eriyttämistä. (Perkkilä 2002, 52.) Ikäheimon ja Riskun (2004, 229) mukaan monet alkuopettajat ovat ratkaisseet kotitehtävien eriyttämisen antamalla sekä pakollisia että vapaaehtoisia kotitehtäviä.

Tyypillisesti matematiikan samanaikaisopetuksessa on oppikirjan rooli keskeinen oppikirjan aukeamien rytmittäessä työskentelyä. Opettaja opettaa asian kaikille yhtäaikaisesti ja sen jälkeen oppilaat laskevat asiaan liittyvät oppikirjan harjoitustehtävät mahdollisine lisätehtävineen. Opettajan aika ei riitä eriytettyyn opetukseen eli että hän opettaisi kaiken oppiaineksen oppilaille joko yksilöllisesti tai pienryhmissä sitä mukaa kun oppilaat etenisivät. Sen vuoksi eriyttävän oppimateriaalin kehitystyössä ja laadinnassa pitääkin uuden oppiaineksen opettamiseen suhtautua eri tavoin kuin nykyisissä oppikirjoissa. Tällaiseen ohjaavan oppimateriaalin laadintaan saadaan multimediaympäristöjen kautta uusia mahdollisuuksia, kun esimerkiksi oppiaineksen esittämisessä ja työstössä voi animaatio toimia merkittävänä visualisoinnin välineenä. (Kallonen-Rönkkö 1997, 264–265.) Tätä tukisi myös Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet (2004, 160), joissa todetaan, että tieto- ja viestintätekniikkaa tulee käyttää oppilaan oppimisprosessin tukemisessa.

Oppimateriaalilla on aina oma roolinsa lapsen oppimisprosessissa. Kallonen-Rönkkö (1997, 266) pitää tehokkaan oppimisen ensisijaisena edellytyksenä sitä, että oppiaines on oppimateriaalissa esitetty oppijaa kiinnostavalla tavalla. Tällaisen esittämiskontekstin kautta matematiikka muodostuu lapselle merkitykselliseksi. Myös Kupari (1993, 126–127) korostaa oppimateriaalin merkitystä lähestyen asiaa opettajan näkökulmasta. Oppimateriaalilla on hänen mielestään ratkaisevan tärkeä merkitys didaktisten uudistusten toteuttamisessa, sillä opettajat pitävät liian usein oppikirjoja opetussuunnitelminaan.

Kupari kaipaisikin lisää uusia, vaihtoehtoisia didaktisia ratkaisuja tarjoavia lisämateriaaleja, jotta matematiikan opetus pääsisi pois menetelmäkeskeisestä ja pienten tehtävien kautta tapahtuvasta matematiikan opiskelusta. Oppimateriaalia laajemmin Kupari korostaa koko opiskeluympäristön kiinnostavuutta ja monipuolisuutta tekijänä, jonka avulla oppilaiden suhtautuminen pysyttäisiin säilyttämään myönteisenä mahdollisimman pitkään.

Uusikylä (1989, 79) suosittelee lahjakkaiden opetukseen esimerkiksi oppisisältöjen liittämistä laaja-alaisiin teemoihin ja ongelma-alueisiin, asioiden tarkastelemista poikkitieteellisesti, oppilaiden itsenäistä työskentelyä heitä itseään kiinnostavilla alueilla, tehtäviä, joihin ei ole olemassa yhtä oikeata ratkaisua, perusteluiden etsimistä, itseilmaisuun rohkaisemista sekä oppilaiden ohjausta tutkimustyyppiseen työskentelyyn. Kuitenkin lahjakkaiden opetuksen järjestäminen on käytännössä ongelmallista, sillä ensiksikin lahjakkaiden löytäminen on hankalaa ja toiseksi organisatorinen eriyttäminen on vaikeaa käytännöllisten ja kasvatuksellisten näkökohtien vuoksi. Esimerkiksi harvaanasuttujen seutujen oppilaat on vaikeaa saada tällaisen erityisopetuksen piiriin ja myös opettajien resurssit voivat olla puutteelliset.

Ruokamon (2000, 17–18) mielestä on selvää, että Suomessa lahjakkaiden opetusta tulisi kehittää. Ensinnäkin lahjakkaat tulisi oikeasti hyväksyä erityisopetusta tarvitsevien piiriin ja lahjakkaiden oppilaiden erityistarpeet tulisi huomioida opetussuunnitelman laadinnan ohella myös sen toteuttamisen tasolla. Toiseksi lahjakkaiden tarpeisiin olisi kehitettävä ja tuotettava riittävän vaativia oppimateriaaleja, jotka antaisivat mahdollisuuksia oppijakeskeisen oppimisen toteuttamiseen. Entistä enemmän voitaisiin lahjakkaille myös tarjota mahdollisuuksia omatahtiseen etenemiseen eli henkilökohtaisten opintosuunnitelmien tekemiseen ja toteuttamiseen. Käytettäviin opetusmenetelmiin tulisi soveltaa samanaikaista eriyttämistä opetuksen rikastamisen ja nopeuttamisen kautta niin luokan sisällä kuin sen ulkopuolella. Myös opettajien perus- ja täydennyskoulutuksessa olisi kauttaaltaan kiinnitettävä enemmän huomiota lahjakkaiden opetukseen.

Tässä tutkimuksessa matemaattisesti lahjakas lapsi ymmärretään lähinnä Renzullin mallin mukaisesti, jolloin matemaattisesti lahjakas lapsi on keskitasoa selvästi kyvykkäämpi ja matemaattisloogiselta ajattelultaan etevä lapsi. Arjen koulutyön kannalta matemaattisesti lahjakas ja pitkälle edistynyt nopea laskija ovat kuitenkin samassa tilanteessa eli heille tarjotaan lisätehtäviä, joiden haasteellisuutta tutkimuksella lähdetään selvittämään. Luonnollisesti ylöspäin eriyttävien lisätehtävien tarpeeseen vaikuttaa myös lasten persoonallisuus- ja temperamenttipiirteet, mutta ne jätetään kuitenkin tämän tutkimuksen puitteissa huomioimatta.

5 TUTKIMUSTEHTÄVÄT JA METODOLOGISET LÄHTÖKOHDAT

Kaikki opettajat tietävät käytännöstä, että lapset ovat tiedoiltaan ja taidoiltaan heterogeenisiä ja siten eriyttäminen on luonnollinen osa opettajien arkea. Onko koulutulokkaiden matemaattisia lähtövalmiuseroja pidetty tästä syystä niin itsestäänselvyytenä, ettei niiden hajonnan laajuutta ole juuri tutkittu? Aiheeseen perehtyessäni en löytänyt tutkimuksia tai testejä, joissa lapsille olisi annettu mahdollisuus näyttää kykynsä eli osoittaa mitä kaikkea he osaavat jo kouluun tullessaan, ennen kouluopetuksen alkamista. Koulutulokkaiden matemaattisia lähtövalmiuksia näyttää siis aiemmin tutkittaneen vain tiettyjen rajattujen valmiuksien suhteen, joilla lasten taitotason yläraja ei ole tullut näkyväksi (ks. esim. Salonen ym.1994). Vaikka aihetta ei liene aiemmin juuri tutkittu tämän tutkimusasetelman mukaisesti, on koulutulokkaiden suurista suorituseroista käyty keskusteluja käytännön kokemusten pohjalta. Esimerkiksi Ikäheimo (1994, 45) on kuvannut osan koulutulokkaista osaavan operoida lukualueella 0-100 samalla, kun osalle tuottaa vaikeuksia työskennellä alle viiden lukualueella. Monissa yhteyksissä on tuotu ilmi myös sitä, etteivät lasten taidot ole välttämättä niin vahvoja kuin aikuinen voisi lasta seuraamalla olettaa (esim. Ikäheimo & Risku 2004, Kinnunen ym. 1994). <u>Tämän tutkimuksen ensimmäisenä tutkimustehtävänä onkin siis selvittää kuinka suuret lähtötasoerot ensiluokan oppilailla on heti kouluun tullessaan.</u>

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan aito oppiminen rakentuu yksilön aiempien tietorakennelmien päälle siten, että uusi tieto tai taito joko sulautuu entiseen tai muuttaa aiempaa tietämystä. Opettajan tehtävä on tukea lasta tässä konstruoimisprosessissa ja näin ollen hänen tulisi haastaa opetettavalla asialla lapsen aiempi ymmärrys asiasta. Jos opetettava asia ei jää osaksi lapsen tietorakennelmaa, asia joko ylittää tai alittaa lapsen kapasiteetin. Opetuksen kohdentamisen vuoksi opettajan olisi tiedettävä, minkä tasoisia hänen oppilaidensa lähtötaidot ovat (esim. Kinnunen 2003, 17). Koulunsa aloittavien oppilaiden matematiikan perustaitojen testaamiseen Ikäheimo ja Risku (2004, 229) ehdottavat esimerkiksi Salosen ym. (1994) diagnostista testiä Motivaatio, metakognitio ja matematiikka ja Malaty (1997, 70) ehdottaa puolestaan käytettäviksi testeiksi lukuvuoden loppukokeita. Ensimmäistä tutkimustehtävää varten kehitin yksilötestin, joka huomioi lapsen taitotason niin lukujonotaitojen, aritmeettisten perustaitojen kuin matemaattisloogisen ajattelun suhteen antaen lapsen edetä testissä joustavasti taitojensa mukaisesti. Opettajan olisi kuitenkin liian työlästä suorittaa sillä lähtötasotestaus opetuksensa ohessa, joten toisena tutkimustehtävänä on pyrkiä luomaan käytetystä testistä ensiluokan opettajalle työkalu, jolla hän voisi opetuksensa pohjaksi nopeasti selvittää oppilaittensa matemaattiset lähtövalmiudet. Testin avulla opettaja saa kattavan yleiskuvan lapsen matemaattisista taidoista, mikä auttaa opetuksen suunnittelua ja lapsen yksilöllistä huomioimista eli lapsen yksilöllisen kehityksen tukemista.

Nykyisin on alettu korostaa tiedollisen oppimisen lisäksi myös asenteiden ja oppimiskokemusten merkitystä. Motivaatio ja asenteet ovat keskeisiä tekijöitä oppimisessa, sillä oppimista ei tapahdu ilman motivaatiota. Haasteellisuus puolestaan motivoi ja siksi opettajan tulisi huolehtia tehtävien sopivasta vaikeusasteesta. Liian vaikeat tehtävät aiheuttavat oppilaille huolta ja ahdistusta ja liian helpot taas ikävystymistä ja turhautuneisuutta (Uusikylä & Atjonen 2005, 138–139). Motivaatio on korkeimmillaan silloin, kun tehtävä on sopivan vaikea tai siihen liittyy tietty onnistumisen tai epäonnistumisen riski. Jos tehtävä on liian vaikea tai helppo, motivaatio on matala. (Peltonen & Ruohotie 1992, 61.) Tehtävien vaikeustason tulisi siis olla niin sanotun lähikehityksen vyöhykkeellä eli tehtävät eivät saisi olla niin helppoja, että oppilas suoriutuu niistä ilman vaivannäköä, mutta ei myöskään niin vaikeita, ettei oppilas pysty oppimaan niistä edes avustettuna (Kinnunen 2003, 35). Motivaatioon liittyen opetettavien sisältöjen tulisi olla lapselle tietysti myös mielekkäitä ja merkityksellisiä. Tutkimuksen kolmantena tutkimustehtävänä on tutkia pitkälle edistyneiden ensiluokkalaisten selviytymistä oppikirjojen ylöspäin eriyttävistä lisämateriaaleista sekä kartoittaa kyseisten lasten näkemyksiä tehtävien haasteellisuudesta ja mielekkyydestä.

Edellä esitellyt tutkimustehtävät etenevät siis ajallisen järjestyksen mukaisesti. Ensin tutkitaan koko luokan lähtötaso, sitten testistä erotetaan merkittävimmät kysymykset, jotta testin voisi suorittaa tiivistetymmin ja lopulta tutkitaan luokan pisimmälle ehtineiden haasteellisuuden kokemuksia. Jotta aineistosta löytyy vastaukset tutkimustehtäviin, on kunkin tutkimustehtävän ratkaisemiseksi valjastettava omat menetelmänsä. Tältä osin, kun tutkimus ei ole kokonaisuutena alisteinen millekään yksittäiselle metodille, siinä voidaan nähdä myös postmodernin tutkimuksen piirteitä. Kaksi ensimmäistä tutkimustehtävää pohjautuvat testiteoriaan ja siihen lukeutuvan mittarin rakentamisen ympärille. Testin luomisen voisi toisaalta ymmärtää pelkäksi aineistonhankinnan alaiseksi menetelmäksi ensimmäiseen tutkimustehtävään, mutta tässä tutkimuksessa testin rooli on kuitenkin suurempi. Onhan toisena tutkimustehtävänäkin pyrkimys tiivistää kyseistä tutkimusta varten luotua testiä mittaamaan lähtötasovalmiudet entistä lyhyemmin ja ytimekkäämmin. Tässä tutkimuksessa käytetty testi avataan luvussa Lähtötasotestin esittely (luku 6.2) ja testi on kokonaisuudessaan liitteessä 1.

Metsämuurosen (2000c, 12–13) mukaan mittarin rakentaminen alkaa hyvin jäsennellystä kysymyksestä, johon halutaan saada vastaus. Kuten tässä tutkimuksessa, kyseessä voi olla esimerkiksi tietyn oppiaineen tai ainekokonaisuuden hallinnan selvittäminen. Mittarin pohjustus nojaa valittuun teoreettiseen viitekehykseen ja siksi ennen hyvän mittarin luomista olisi päästävä syvälle tutkittavan ilmiön teoriaan. Esimerkiksi kun lähdetään arvioimaan oppiaineen hallintaa, täytyy heti aluksi tulla tietoiseksi kyseisen alan keskeisistä opetettavista dimensioista. Tässä testissä oleellisimmat osa-alueet olivat lukujonotaidot, aritmeettiset perustaidot ja matemaattisloogINEN ajattelu ja jotta näiden hallintaa päästiin arvioimaan, aloitettiin testin rakentaminen teoriaan perehtymisestä. Tämä prosessi kuvataan tarkemmin luvussa kuusi Tutkimuksen suorittaminen.

Oleellisinta testin rakentamisessa on saada testi mittaamaan sitä, mitä se aikoo. Metsämuuronen (2000c, 14–15) toteaa tutkimuksen operationalisoinnilla tarkoitettavan ilmiön muuntamista mitattavaan muotoon eli termien määrittelemistä niin, että ne ovat mitattavissa. Jos tämä operationalisointi epäonnistuu, mittarilla mitataan väärää asiaa. Jotta sain testin mittaamaan haluttuja asioita, luokittelin teorian avulla lähteenä käyttämäni tehtävät niiden tarkoituksen mukaan. Testiin valitsemieni tehtävien ensisijaisena kriteerinä käytin siis tehtävän tarkoitusta ja tämä tehtävän päämäärä on nähtävillä myös liitteessä olevasta testilomakkeesta. Hautamäki ja Kuusela (2004, 255–256) korostavat lapsen matemaattisen vaiheen tunnistamisessa olevan ennen kaikkea kyse sekä teoreettisesta että kokeellisesta tarkkuudesta. Näin ollen he asettavat testille kaksi vaativaa ehtoa: sen avulla tulee luotettavasti selvittää, kertooko se lapsen todellisesta osaamisen tasosta ja lisäksi testillä pitää voida selvittää, mittaako testi niitä asioita mitä se väittää mittaavansa. Testin teoreettiseen tarkkuuteen pyrittiin edellä kuvatun tehtävien operationalisoinnin kautta ja kokeelliseen tarkkuuteen kiinnitettiin huomiota käytännön testitilanteissa. Tätä kuvataan tarkemmin kuudennessa luvussa, jossa kuvaillaan tutkimuksen käytännön suorittamista.

Testit voidaan rakentaa joko kriteeriperusteisiksi tai normiperusteisiksi. Tässä tutkimuksessa käytetty lähtötasovalmiuksia mittaava testi oli kriteeriperusteinen. Kriteeriperusteinen arviointi sanan mukaisesti perustuu etukäteen annettuihin kriteereihin, ja päätöksenteossa tutkitaan, miten hyvin tutkittava täyttää annetut tunnusmerkit. Kyseisen testin kriteerit löytyvät tutkimuksen toisesta luvusta, jossa matemaattisten taitojen osa-alueet ja kehitys on aukaistu hyvin seikkaperäisesti juuri testin kriteerien ymmärtämiseksi. Kriteeriperusteinen mittaväline on teoreettinen ja perusteltu eikä se ole riippuvainen niiden ihmisten määrästä, ketkä saavuttavat kyseiset kriteerit. Jos kriteerit ovat helpot, isokin osa tutkittavasta joukosta voi ylittää ne ja vastaavasti vaativia kriteerejä ei ehkä täytä kukaan. Hautamäki ja Kuusela (2004, 257) mainitsevat esimerkkinä kriteeriperusteista testistä muun muassa Piaget-testit ja matemaattisen ajattelun testit silloin, kun tutkitaan suorituksia, jotka on tarkoin etukäteen määritelty. Älykkyyden mittaaminen on puolestaan esimerkki normiperusteisesta testistä.

Yksittäiset kysymykset yhdessä muodostavat mittarin ja toimivat mittarin osina eli osioina. Kuitenkin testin yksittäistäkin osiota voidaan pitää mittarina. (Metsämuuronen 2000c, 15.) Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen eli lasten suorituserojen kartoittamiseen vastaus löytyy pisteyttämällä lasten testisuoritukset, jonka myötä saadaan kullekin heidän osaamistaan kuvaavat summamuuttujat. Aritmeettisten taitojen pisteyttämisessä tarvitaan myös lapsen suoriutumisesta tehtyjä havaintoja, jotta lapsen käyttämät ratkaisustrategiat tulevat huomioiduiksi luontevana osana hänen matemaattisen taidon tasoaan. Tarkasteltaessa tiettyjen osataitojen yhteyksiä toisiinsa tarvitaan tulosten analysoimisesta varten myös muita tilastollisia menetelmiä. Kun testistä annettavat pisteet ovat suhdeasteikollisia, voidaan kahden muuttujan välistä riippuvuutta kuvata Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokertoimella, jota jatkossa nimitetään lyhyesti vain korrelaatioksi. Korrelaatiokertoimen arvon vaihteluväli on luvusta -1 lukuun 1, ja mitä lähempänä sen arvo on nollaa, sitä vähemmän muuttujien välillä on yhteyttä. (Valli 2001, 60–61.)

Tilastollisten tutkimustulosten yhteydessä mainittava p:n arvo kertoo saadun arvon tilastollisen merkitsevyyden, joka on riippuvainen niin korrelaatiosta kuin otoskoosta. Kun suuremman tilastollisen testauksen apuvälineenä käytetään jakaumaoletusta, ei pientä otoskokoa käytettäessä voida samalla tavoin tukeutua mihinkään erityiseen jakaumaan. Pienen aineiston analysoinnissa käytetään non-parametrisiä menetelmiä, joista tämän tutkimuksen puitteissa käyttökelpoisin on Mann-Withneyn U-testi. (Valli 2001, 71, 77; Metsämuuronen 2000b, 44, 48.)

Toisen tutkimustehtävän metodiikan aukaisemisessa, jossa pyritään löytämään kyseistä tutkimusta varten kehitellystä lähtötasotestistä oleellisimmat kysymykset, tarvitaan myös korrelaatiokertoimia. Ydinosioiden esille nostamiseksi on tarkasteltava osioiden erotteluvoimia. Erotteluvoimalla tarkoitetaan kunkin osion kykyä erotella ääripäät toisistaan, ja karkeana mittana osion erottelukyvylle voidaan pitää sen korrelaatiota koko mittariin nähden. Tiiviiseen mittariin olisi hyvä pyrkiä valitsemaan sellaisia osioita, joiden korrelaatio mittarin summaan nähden on mahdollisimman suuri. (Metsämuuronen 2000c, 18.) Korrelaatiokertoimien kautta löydettäneen ne kysymyspatteristot tai tarkemmin vielä yksittäiset kysymykset, joilla lapsen taitotason pystyisi saamaan selville mahdollisimman lyhyesti ja ytimekkäästi. Metsämuurosen (2003, 517; myös Valli 2001, 87) mukaan mittarin rakentamiseen eli oleellisimpien osioiden ja tehtävien etsimiseen käytetään myös faktorianalyysia, jonka avulla on mahdollista tiivistää useiden muuttujien informaatio keskeiseen pääkomponenttiin. Faktorianalyysin avulla löydetään suuresta määrästä muuttujia ne tekijät, jotka korreloivat keskenään eniten ja muodostavat näin oman kokonaisuuden.

Hautamäen ja Kuuselan (2004, 256) mukaan kouluissa tehdään päivittäin havaintoihin pohjautuvia päätelmiä lasten osaamisen tasosta, jonka pohjalta opettaja tietonsa, taitonsa ja luulonsa perusteella tekee johtopäätöksensä. Hautamäki ja Kuusela kuitenkin toteavat, että koulun oppilaita koskevaa päätöksentekoa ei ole kunnolla tutkittu. He kohdistavat diagnostisen pohdintansa heikosti suoriutuviin ja jos heikosti suoriutuvien diagnostinen tutkimus ontuu, miten on laita lahjakkaiden suhteen, kun heidän tutkimisen tarpeesta ei tunnu edes kirjoittavan kukaan. Tästä näkökulmasta katsottuna kyseisen tutkimuksen toiselle tutkimustehtävälle vaikuttaisi olevan tiedostamaton tilaus.

Edellä todettiin, että kolmannen tutkimustehtävän rakenteesta on löydettävissä tapaustutkimuksen piirteitä. Tapaustutkimuksesta ei voida esittää yksiselitteistä määritelmää, sillä se ei ole menetelmä vaan lähestymistapa tutkittavaan ilmiöön (Saarela-Kinnunen & Eskola 2007, 194). Tapaustutkimuksessa tapauksella ei ole samaa merkitystä kuin määrällisessä tutkimuksessa, jossa tapaus on tilastollinen yksikkö. Tapaustutkimuksen kohde on usein ilmiö ja siinä tarkastellaan vain pientä joukkoa tai vain yhtä tapausta, mutta oleellista on, että tapaustutkija erottaa toisistaan tutkittavan tapauksen ja tutkimuksen kohteen. (Laine, Bamberg & Jokinen 2007, 9–10.) Tässä tutkimuksessa kohteena ovat yhdestä ensiluokasta poimitut taidoiltaan edistyneimmät lapset, mutta tutkimuksen tapauksena eli tutkittavana ilmiönä on pitkälle edistyneen koulutulokkaan ja hänelle suunnatun lisämateriaalin kohtaaminen.

Syrjälän ja Nurmisen (1988) mukaan tapaustutkimuksessa tapauksen kokonaisvaltainen ymmärtäminen on tärkeämpää kuin yleistäminen. Tilastollisen yleistettävyyden sijaan tapaustutkimuksen olemuksellisessa yleistettävyydessä keskeistä ovat aineistosta tehdyt tulkinnat. (Saarela-Kinnunen & Eskola, 2007, 189.) Aineistoa kolmanteen tutkimustehtävään eli pitkälle edistyneiden kokemuksia ylöspäin eriyttävistä lisämateriaalista hankittiin kyseisten lasten itsenäisesti suorittamilla tehtävillä, joita he myös arvioivat kaksi- ja viisiportaisilla graafisilla asteikoilla. Tämän lisäksi lasten suoritukset pisteytettiin, jotta nähtiin heidän selviytymisen taso kyseisistä lisätehtävistä. Tämän lisätehtäväpaketin rakentaminen on kuvattu tarkemmin luvussa Ylöspäin eriyttävän lisätehtäväpaketin esittely (luku 6.3).

6 TUTKIMUKSEN SUORITTAMINEN

6.1 Tutkimusprosessin eteneminen

Silloin kun on tarkoituksena arvioida tietyn oppiaineen osaamista, on oleellista selvittää, mistä osatekijöistä oppiaine tai sen osaaminen muodostuu (Metsämuuronen 2000c, 22). Juuri tämän näkökohdan vuoksi aloitin koko tutkimusprosessin perehtymällä aiheen teoriataustaan ja alkuopetuksen matematiikan materiaaleihin. Koin, että aiheeseen oli pakko perehtyä todella kattavasti, sillä muuten en olisi kyennyt rakentamaan lähtötasotestiä lasten alkumittausta varten. Työskentelin tämän vaiheen parissa päivittäin hyvin intensiivisesti kolmen kuukauden ajan. Haastavampaa kuin tiedon kerääminen oli luonnollisesti sen jäsentäminen kaiken vaikuttaessa kaikkeen.

Olin jo keväällä kysynyt kahdelta kokkolalaisen koulun ensiluokkien opettajilta mahdollisuutta suorittaa testaukseni ja jatkotutkimukseni heidän luokissaan. Heidän tavoin myös kyseisen koulun rehtori toivotti minut tutkimusaiheineni lämpimästi tervetulleeksi heidän kouluunsa. Lisäksi hain tutkimusluvan Kokkolan kaupungin sivistysjohtajalta ja ensimmäisenä koulupäivänä lähetin vanhemmille tiedotteet tutkimuksestani. Kaikki vanhemmat antoivat lastensa osallistua testeihini. Ennen koulujen alkamista olin rajannut lähtötasojen kartoittamisen vain toiseen suunnitelluista luokista sekä työmäärän kohtuullistamisen että tutkimuksen luonteen vuoksi. Ajattelin, että ellei kyseisessä luokassa olisi ketään lähtötasoltaan selvästi muita edistyneempää, tekisin alkutestauksia muissa ensiluokissa siten, että kohdistaisin nämä yksittäiset testit opettajien suositusten perusteella edistyneemmiltä vaikuttaviin oppilaisiin. Tutkimastani luokasta nousi kuitenkin kolme oppilasta, jotka olivat selvästi muita edellä matemaattisilta taidoiltaan ja minusta määrä oli riittävä tutkimukseni kokonaisuuteen nähden.

Opettaja kertoi lapsille minun toimivan jonkin aikaa luokan apuopettajana. Olinkin tässä roolissa koko kolmen viikon ajan toimien opettajan työparina ja esimerkiksi oppilaidemme tukihenkilönä välituntisin. Lohduttaessani ikävän itkuja tai hoitaessani pintanaarmuja loin samalla lapsiin turvallisen suhteen. Tämän vuoksi kukaan ei aristellut niitä hetkiä, jolloin tein heidän kanssaan matematiikkaa. Näin me lapsille puhuimme, kun kukin piipahti aina vuorollaan luokan takaosassa sohvan ympärille rakentamassani työpisteessä näyttämässä minulle matemaattisia taitojaan. Lapset olivat varmaan saamastaan yksityishuomiosta otettuja, sillä esimerkiksi yksi lapsista totesi testin loppuessa: *”Tämä on paras paikka koulussa. Saanhan tulla uudestaan taas tänne?”*

Lapset tekivät testiä jaksamisensa ja luokan muun toiminnan mukaan. Ajallisesti testasin keskimäärin neljä lasta kolmen päivän aikana. Luokan opettaja tuki tutkimustani luomalla vähintäänkin tuntien loppuosiin rauhallisia tilanteita, jolloin pystyin irrottamaan yhden lapsen luokseni matematiikkaa tekemään. Yhden lapsen testaaminen kokonaisuudessaan vei keskimäärin ehkä yhden tunnin.

Syyslukukauden puolivälissä vein lisätehtäväpaketit niille kolmelle lapselle, jotka olivat erottuneet alkutestauksessa muita edistyneimmillä taidoillaan. Olin kopioinut kullekin oman värisensä monistenipun ja lisäksi nimennyt valmiiksi jokaisen monisteen. Jokainen sai papereilleen laatikon, joka oli samanvärinen kuin hänen monisteensa. Laatikossa oli lapsen nimi ja hän sai lisäksi itse koristella sitä. Valmiit tuotokset lapsen tuli tiputtaa minun nimelläni olevaan postilaatikkoon, jonka kävin kerran viikossa tyhjentämässä. Kolmessa viikossa lapset suoriutuivat tästä lisämonisteurakastaan. Markkinoin lisätehtäviä vaikeina ja kaikki lapset olivat heti roolistaan innostuneita. Yksi lapsista kommentoi heti silmät loistaen: *”Minä rakastan vaikeita tehtäviä!”* Annoin luokan kaikille lapsille mahdollisuuden laittaa minulle postia postilaatikkooni ja sainkin reilusti kirjeitä ja piirustuksia, joihin tietysti vastasin. Näin kaikki olivat mukana postileikissämme. Näiden kolmen lapsen vanhemmalta kysyin ja sain suullisesti luvat tähän tutkimuksen toiseen vaiheeseen.

Aloittaessamme tätä tutkimuksen kakkosvaihetta otin kyseiset kolme lasta erilliseen tilaan, jossa selitin heille, miten näiden tehtävien suhteen toimitaan. Kerroin, että he saivat tehdä näitä vaikeita tehtäviä silloin, kun opettaja antoi esimerkiksi toisille muita lisätehtäviä tai luvan tehdä omaa piirustusvihkoa. Kerroin, että lapset saivat tehdä monisteet haluamassaan järjestyksessä. Erityisesti teroitin heille arviointien merkitystä. Selitin lapsille, että halusin erityisesti tietää, mitä mieltä lapset olivat näistä tehtävistä ja kerroin, mitä milläkin hymynaamalla tarkoitettiin. Lapset halusivat heti tehdä useamman monisteen ja näin pystyin opastamaan jokaista vielä henkilökohtaisesti tässä arviointiasiassa. He ymmärsivät idean nopeasti ja olivat muistaneet täyttää arvioinnit jokaisen tehtävän jälkeen. Opettajaa opastin siten, että hän neuvoisi, jos lapsi ei ymmärtäisi itsenäisesti tehtävän ideaa, mutta ei puuttuisi tehtävien oikeellisuuteen. Opettaja kertoi, että lapset olivat suorittaneet niitä todella innokkaasti joskus jopa tyylillä ’määrä korvaa laadun’. Lapset olivat myös kyenneet suorittamaan ne täysin itsenäisesti.

Aarnos (2007, 170–171) on todennut, että lapsia tutkittaessa on hyvin tärkeää koko tutkimusprosessin ajan huolehtia lapsiystävällisyydestä ja tutkimuksen etiikasta. Osallistumisen tulisi olla lapsille arkipäiväistä, mutta hauskaa, ja olisi hyvä jos tutkija hakeutuisi luokkaan esimerkiksi apuopettajaksi ennen aineistonkeruuta. Oppilaita tutkittaessa on yhteistyö luokanopettajan kanssa välttämätöntä. Kaikki edellä mainitut näkökohdat tulivat kyseistä tutkimusta tehdessä huomioiduiksi.

6.2 Lähtötasotestin esittely

Kirjallisuuteen perehtymisen jälkeen jatkoin lähtötasotestini laadintaa kokoamalla yhteen eri lähteistä löytämäni tehtävät. Jaottelin ne tehtävätyyppeihin niiden tarkoitusperänsä mukaan, joka puolestaan pohjautui kirjallisuuteen, sekä yhdistelin ja karsin niitä lisäten joukkoon myös muutamia itse kehittelemiäni kysymyksiä. Testin tuli olla sisältönsä puolesta laaja ja kattava, mutta tehtäviensä osalta ytimekäs ja tiivis paketti. Asetin reunaehdoiksi, että lasten voimavaroja ei tule tuhlata turhiin kysymyksiin ja toisekseen lasten tulee saada edetä jouhevasti kykyjensä mukaan, niin että taitotaso on löydettävissä yhdellä ja samalla testillä. Rajasin kokoamastani tehtäväpankista pois muun muassa algoritmit eli tässä vaiheessa allekkainlaskut, sillä niitä lapsi ei yleensä opi ilman opetusta. Kysymysten vuosiluokkaiseen jaotteluun käytin lähteinä seuraavia kokeita ja testejä:

- koulutulokkaille sekä toista ja kolmatta luokkaa aloittaville laadittuja MAKE-KO-testejä (Ikäheimo, Putkonen & Voutilainen 2002),
- Tuhattaituri 1 alkutestiä (Haapaniemi, Mörsky, Tikkanen & Voima 2007b, 4, 7),
- Laskutaito 1 lähtötasotestiä (Rikala, Sintonen & Uus-Leponiemi 2005, 8),
- Matikkamatkan 1. luokan lähtötason kartoitukseen tehtyä diagnostista testiä (Lilli, Putkonen & Sinnemäki 2002a, 11),
- Matikkamatkan 1. luokkalaisille laadittuja päättökokeita ja ongelmanratkaisukokeita (Lilli, Putkonen & Sinnemäki, 2002b, 197–205),
- Matikkamatkan 2. luokkalaisille laadittuja päättökokeita ja ongelmanratkaisukokeita (Putkonen, Sinnemäki, Arhomaa & Tikka 2003, 195–203),

- Malisen tutkimusta lukukäsitteen ja laskutoimitusten ymmärtämisestä (1980, 39–54) sekä
- Salosen ym. (1994, 87–108) koulutulokkaille laadittua diagnostista matemaattisen ajattelun testiä.

Käyttämäni lähtötasotesti löytyy siis liitteestä 1 ja testissä käytetyt oheismateriaalit liitteestä 2. Testi on tutkimuksen viitekehyksen myötä kolmijakoinen eli lukujonotaidot, aritmeettiset perustaidot ja matemaattislooginen ajattelu ovat kukin omia kokonaisuuksiaan. Testilomakkeessa lapselle esitetty pelkistetty kysymys on lihavoituna ja jokaisen kysymyksen ohessa on sen pisteytysohje.

Lukujonotaitojen ja aritmeettisten perustaitojen osalta testilomakkeen taulukot koostuvat neljästä sarakkeesta. Jokaisen taulukon ensimmäisen sarakkeen ylimmästä rivistä käy ilmi koko osion tarkoitus, esimerkiksi tarkastellaanko siihen kuuluvilla kysymyksillä lukujen luettelutaitoa vai lukujonossa liikkumista. Osioissa on eri määrä kysymyksiä. Esimerkiksi järjestyslukujen hallintaan sisältyy vain yksi tehtäväpatteristo, mutta lukujonossa liikkumista arvioidaan neljän osa-alueen avulla. Seuraavissa kappaleissa esitetään kaikki testissä tarkastellut osiot. Taulukoiden ensimmäisiin ruutuihin on myös merkitty aina kyseisen tehtäväosion pisteiden vaihteluväli.

Testilomakkeen kolme seuraavaa saraketta ovat nimetty tasoiksi 1, 2 ja 3. Näistä ensimmäisen tason kysymykset ovat teoriataustan ja lähteenä käytettyjen testien ja kokeiden perusteella koulutulokastason tehtäviä. Oppilaiden lähtötasotaitojen hajonta voitaisiin suorittaa jo yksistään tämän tason kautta, jos haluttaisiin vain erotella taidoiltaan heikoimmat lapset. Taso 2 kuvastaa taitotasoa, johon lapsen odotetaan yltävän ensimmäisen luokan lopussa ja taso 3 kuvastaa toisen luokan loppuessa hallittavaa taitotasoa.

Lukujonotehtävissä pyrin mahdollisimman luotettaviin tuloksiin kysymällä saman osa-alueen hallintaa useamman luvun kautta, jotta mahdollisen arvauksen avulla suoriutuminen tuli näkyväksi. Lapsen lukujonotaitojen tasoa tarkasteltiin seitsemän eri osa-alueen kautta. Näitä osa-alueita olivat lukujen luettelutaito, ryhmittelemällä laskeminen, määrän, lukusanan ja numeromerkin vastaavuus, lukujen vertailu, luvun hajottaminen, järjestysluvut ja lukujonossa liikkuminen. Näiden osa-alueiden merkityksellisyys osoitettiin luvussa Lukujonotaidot (luku 2.2).

Aritmeettisten perustaitojen pisteytyksessä huomioitiin niin tarkkuus eli vastausten oikeellisuus kuin laskutapahtuman sisäistymisen aste eli nopeus ja laskustrategiat. Niinpä aritmeettisten perustaitojen arvioinnissa sanallisten laskujen pisteytys oli kolmiluokkaista siten, että oikeasta vastauksesta sai 2 pistettä, jos sen laski sisäisesti, ja yhden pisteen, jos laskeminen tukeutui ulkoiseen puheeseen tai konkretiaan. Osassa tehtäviä myös nopeus huomioitiin siten, että täysiä pisteitä ei voinut saada, jos oikea vastaus tuotettiin erityisen hitaan tai työlään prosessin kautta. Luonnollisesti virheellinen vastaus ei kartuttanut lapsen pistetiliä. Kirjallisissa laskuissa pisteytys perustui vain oikeaan vastaukseen. Niistä sai kuitenkin puoli pistettä, jos lapsi oli huomioinut laskumerkin väärin, mutta osasi itse korjata vastauksen kysyessäni lapselta mitä kyseinen laskumerkki tarkoitti. Tämä on luonnollinen esimerkki siitä, että näissä testaustilanteissa oli tärkeintä saada selville lapsen oikea taso. Jos lapsi osasi kysytyn tason tehtävät, etenimme seuraavaan tasoon.

Aritmeettisten perustaitojen hallintaa mitattiin yhdentoista tehtävätyypin kautta. Tehtävät rakentuivat joukkojen vertailusta, yhteen- ja vähennyslaskuista sekä niiden aukkotehtävistä, osittamisen ja koonnin hallinnasta, kerto- ja jakolaskuista, rahalaskuista sekä kirjallisista peruslaskuista. Näiden asioiden merkityksellisyys on osoitettu luvussa Aritmeettiset perustaidot (luku 2.3) ja sieltä löytyy ymmärrys aritmeettisten taitojen ja strategioiden kehittymiselle sekä tuloksia aiemmista tutkimuksista.

Matemaattisloogisen ajattelun osiossa rakenne ja pisteytys muuttuivat yksiluokkaisiksi. Kun kysymys on hoksaamisesta, tehtävä on joko oikein tai väärin, eikä se ole aritmetiikan tavoin riippuvainen sisäistämisen asteesta. Matemaattisloogista ajattelua arvioitiin loogisen, luvullisen, visuaalisen ja verbaalisen päättelyn sekä hahmottamisen kautta, ja kyseinen matemaattinen osa-alue esiteltiin luvussa Matemaattislooginen ajattelu (luku 2.4).

6.3 Ylöspäin eriyttävän lisätehtäväpaketin esittely

Alun perin ajattelin ottaa lisätehtävien haasteellisuuden tarkastelua varten yhden oppikirjan kultakin suurimmalta kustantajalta, mutta kun Tammen Matikkamatkan opettajanoppaassa ei ollut lainkaan monistettavia lisätehtäviä, kokosin lisätehtäväpaketin Laskutaidon ja Tuhattaiturin pohjalta. Laskutaito-kirjassa (Rikala ym. 2005, 5) lisätehtävien vaativuusaste kohoaa kokomerkintöjen mukaan eli haasteellisimmat tehtävät on merkitty L ja XL -symboleilla. Oppaassa todetaan niiden olevan tarkoitettuja nopeille ja lahjakkaille oppilaille. Valitsin lisätehtäväpakettiin Laskutaito-kirjasta yksitoista XL-tason lisätehtävää. Tuhattaiturissa (Haapaniemi, Mörsky, Tikkanen, Vehmas & Voima 2007a) lisätehtävien vaativuustasoa ei ole eritelty, mutta valikoin sieltä mukaan kolmetoista yksittäistä tehtävää. Ne olivat rakenteeltaan pienempiä tehtäväkokonaisuuksia, kun Laskutaidon tehtävät ovat kaikki pituudeltaan sivun mittaisia. Näin paketista muodostui myös vaihteleva kokonaisuus.

Lapset saivat täytettäväkseen 22 monistesivun paketin, jossa oli yhteensä 24 tehtävää. Jokaista tehtävää seurasi kolme arviointikohtaa, jotka lapsi täytti heti tehtävän suorittamisen jälkeen. Lapsen tuli osoittaa valitsemansa väite värittämällä ne kasvot, jotka parhaiten kuvastivat hänen mielipidettään. Ensimmäinen kohta oli kaksiportainen graafinen asteikko ja siinä arvioitiin tehtävän mieluisuutta. Kaksi muuta asteikkoa olivat viisiportaisia graafisia asteikkoja, joista ensimmäisessä kysyttiin lapsen varmuutta ratkaisunsa oikeellisuudesta ja toisessa lapsi arvioi tehtävän vaikeusastetta.

Rakensin lasten lisätehtävätehtäväpaketin siten, että lisätehtävät edustivat kirjojen keskeisiä, toistuvia tehtävätyyppejä. Laskutaidon vaativimmista XL-tehtävistä valitsin lähes kaikki eli yksitoista tehtävää kolmestatoista, mutta Tuhattaiturin tehtävien poimiminen ei voinut kirjan luonteen vuoksi olla näin systemaattista. Vaikka lisätehtävät ovat kahdesta eri lähteestä, käsittelen niitä tutkimustulosten osalta yhtenä kokonaisuutena ja näin ne edustavat yhdessä kirjasarjojen vaativimpia ylöspäin eriyttäviä lisätehtäviä. Näin siksi, että tutkimuksessani on tarkoituksenmukaisempaa saada yleiskuva lisätehtävien haasteellisuudesta kuin keskittyä vertailemaan kirjasarjojen materiaaleja. Seuraavassa taulukossa ne on kuitenkin eriteltyinä, ja siitä on nähtävissä Laskutaitokirjan vaativimpien lisätehtävien painottuvan verbaalisen päättelyn ja Tuhattaituri-kirjan luvullisen päättelyn tehtäviin.

TAULUKKO 1. Lisätehtäväpakettiin valittujen tehtävien tehtävätyypit kirjakohtaisesti tarkasteltuna.

	Laskutaito-kirjasta (Rikala ym. 2005)	Tuhattaituri-kirjasta (Haapaniemi ym. 2007a)	tehtäviä yhteensä
visuaalisen päättelyn tehtäviä	2	0	2
hahmottamisen tehtäviä	1	0	1
loogisen päättelyn tehtäviä	1	2	3
luvullisen päättelyn tehtäviä	2	7	9
verbaalisen päättelyn tehtäviä	5	4	9
tehtäviä yhteensä	11	13	24

Lisätehtävien analysointi tehtävätyyppeihin ei ollut yksiselitteistä, sillä tehtävä edustaa harvoin puhtaasti yhtä tyyppiä. Poikkeuksetta lähes kaikki tehtävät vaativat niin lukutaitoa kuin matemaattista lukutaitoa sekä luetun ymmärtämistä. Vaativimmat lisätehtävät näyttävät kaikki edellyttävän laajaa sanavarastoa sisältäen esimerkiksi suuntien ja suhdekäsitteiden ymmärtämisen. Tehtävissä käytettiin esimerkiksi käsitteitä yhtä monta, jaetaan tasan, vaaka- ja pystyrivi, yhteenlaskun tulos, yhteensä, ylä- ja alapuolella, oikealla, vasemmalla, enemmän kuin, vähemmän kuin, korkein, matalin, vierekkäin, keskimmäisen, puolivälissä ja lopuista puolet. Lähtötasotestiä tehdessäni merkitsin ylös kunkin lapsen lukutaidon ja nämä kolme edistyneintä lasta olivat osanneet kaikki lukea ja kirjoittaa täysin sujuvasti jo hyvin pitkään, useamman vuoden ajan. Tehtävien verbaalisuus ei siis muodostunut näille lapsille ongelmaksi.

7 TUTKIMUSTULOKSET

7.1 Lasten suoritusero matemaattisissa lähtövalmiuksissa

Seuraavissa alaluvuissa seuraa toisinaan yksittäisten lasten matemaattisen taitotason kuvailua kyseiselle lapselle annettu kirjain (A-T). Näin lukijakin voi luoda lasten suorituseroista tarkempia kuvauksia, kuin että jos lapsia ei pystyisi mitenkään kohdentamaan. Nämä kirjaimet annoin lapsille summittaisesti tulosten pisteyttämisen yhteydessä, paitsi että sijoitin taidoissaan pisimmälle edistyneet kolme lasta aakkosten ensimmäisiksi. Pienestä aineistosta johtuen (N=20) tulosten yhteydessä ei muutamaa poikkeusta lukuun ottamatta käytetä prosentti- vaan frekvenssijakaumia.

7.1.1 Yleisiä huomioita lukujonossa liikkumisesta ja lukukäsitteiden hallinnasta sekä lapsikohtaiset suoritusero lukujonotaidoissa

Vaikka koulun matematiikka painottuu pääosin matemaattisten operaatioiden ympärille, osoittaa lapsen hallitsema lukualue niille sekä omat rajansa että ehtonsa. Vain hallitsemansa lukualueen sisällä lapsi voi ymmärtää suoritettavat operaatiot. Onkin mielenkiintoista tutkia, minkälaisilla lukujonotaidoilla lapset aloittavat koulunkäyntinsä. Myös Hautamäen ja Kuuselan (2004, 255) mukaan kouluikäisten matemaattisen tason testauksissa perimmäisin kysymys kohdistuu juuri luvun käsittämiseen.

Lukukäsitteet olivat lapsilla hallinnassa muutamia poikkeuksia lukuun ottamatta. Yhden lukujonotaidoiltaan heikon lapsen (R) lukua 19 seurasi yhdessä kohdin luku 10 ja toisessa luku kymmenentoista. Suuremmilla lukualueilla myös kaksi muuta lasta (I ja L), jotka olivat matemaattisilta taidoiltaan ikäistensä tasolla, käyttivät lukuja 190-kymmenen ja 40-sataa. Vaikka oltiinkin suurilla lukualueilla, eivät lukusanat olleet heille niin sisäistyneitä, että kyseiset luvut olisivat kuulostaneet heidän korviinsa epäsopivilta.

TAULUKKO 2. Koulutulokkaiden lukujen luettelutaito eteenpäin (N=20)

Kuinka pitkälle lapsi osaa luetella lukuja?	Lukuun 10 asti	Lukuun 19 asti	Lukuun 20 asti	Lukuun 29 asti	Lukuun 30 asti	Lukuun 43 asti	Lukuun 50 asti
Lasten lukumäärä	1 lapsi	1 lapsi	3 lasta	1 lapsi	1 lapsi	1 lapsi	12 lasta, joista 3 lapsella joitakin virheitä.

Taulukosta nähdään, että jos lapsi ei osaa luetella lukujonoa suvereenisti yli viidenkymmenen, hänen lukujonotaitonsa pysähtyy jonkun kymmenylityksen kohdalle. Vain yksi lapsi pysähtyi luettelussaan johonkin muuhun kuin kymmenylitykseen. Kuten viitekehyksessä todettiinkin, lukujonolorun osaaminen ei tosin tarkoita vielä muuta kuin lukujen tuottamissääntöjen hallintaa. Malisen (1980, 43) tutkimista koulualokkaista 31 % osasi luetella lukuja ainoastaan lukuun 20 asti ja samalle tasolle jäi tässä ensiluokassa 25 % lapsista. Kinnusen ym. (1994, 66) tutkimuksessa 63 % koulutulokkaista hallitsi lukujonon luettelun hyvin laskien virheittä viiteenkymmeneen. Tässä tutkimusjoukossa 45 % koulualokkaista ylsi samaan. Tämän tutkimuksen tutkimusjoukkona oli siis vain yksi 20 lapsen ensiluokka eli otos oli hyvin pieni, eivätkä prosenttijakaumat ole tällöin kovin käyttökelpoisia. Tulokset näyttävät kuitenkin samansuuntaisilta aiempien tutkimusten kanssa eli luokka vaikuttaisi tasoltaan tavanomaiselta. Myös kyseisen luokan opettajan mielestä luokan taso vaikutti tavanomaiselta, vaikkakin hänelle syntyi heti syksyllä näkemys siitä, että tässä luokassa matemaattisilta taidoiltaan ääripäissä olevat lapset erottuivat tavanomaista selkeämmin.

TAULUKKO 3. Koulutulokkaiden lukujen luettelutaito taaksepäin (N=20)

Mistä asti lapsi kykenee luettelemaan lukuja taaksepäin?	Ei kykene ollenkaan	Luvusta 10	Luvusta 20
Lasten lukumäärä	1 lapsi	7 lasta, joista 2 lasta osittain virheellisesti	12 lasta, joista 1 lapsi osittain virheellisesti

Lukujen luetteleminen taaksepäin näkyi testitilanteissa olevan lapsille huomattavasti työläämpää kuin eteenpäin luettelu. Taaksepäin luettelu oli paljon hitaampaa ja se vaati useilta lujaa keskittymistä. Lapsi Q, joka ei kyennyt luettelemaan lukuja alenevasti kymmenestä, osasi luetella lukusanoja eteenpäinkin vain kymmeneen asti ja hän tunsi numerosymbolit vain yhdestä viiteen. Kuten luvussa Lukujonossa liikkuminen (luku 2.2.2) todettiin, lukujenluettelutaidolla ei ole matemaattista sisältöä, jos lapsi ei osaa aloittaa laskemista muusta lukusanasta kuin ykkösestä eikä osaa luetella lukusanoja laskevassa järjestyksessä (Kinnunen ym. 1994, 57). Nämä reunaehdot toteutuivat sekä edellä mainitun lapsen että seuraavassa kappaleessa kuvailtavan lapsen R osalta eli heidän lukujenluettelutaidot olivat vielä vailla matemaattista ymmärrystä.

Laskiessaan taaksepäin luvusta 10 lapsi R laski jokaisen luvun erikseen sormista aloittaen luettelun aina luvusta 1. Näin toimien lukujonon muodostaminen vei kauan ja hän tuli myös hypänneeksi yhden luvun yli. Lapsi on tällaisella taitotasollaan lukujenkäsittelytaitojen kehityksessä vasta tasolla kaksi, jossa lapsen taito rajoittuu esineiden määrän selvittämiseen. Tällöin lapsella ei ole edellytyksiä liikkua ajatuksellisesti lukujonossa eteen- eikä taaksepäin ja laskeminen on sekä työlästä että virhealtista. Kyseinen lapsi ei kyennytkään lainkaan tehtäviin, joissa pyydettiin luettelemaan lukuja taaksepäin annetuista luvuista. Hän ei kyennyt myöskään nimeämään annetuille luvuille edellistä tai seuraavaa lukua, mutta eteenpäin luettelu keskeltä lukujonoa häneltä toisinaan onnistui pienellä lukualueella. Osaaminen oli kuitenkin hyvin satunnaista, josta esimerkkinä vastaus, jonka hän tarjosi, kun häntä pyydettiin luettelemaan luvut kahdesta seitsemään; *”2,1,3,4,5.”*

TAULUKKO 4. Lukujonossa eteenpäin liikkuminen tietyin askelin (N=20)

Millaisin askelin lapsi kykenee etenemään?	Joka toinen luku lukuun 20 asti	Joka viides luku lukuun 50 asti	Joka kolmas luku lukuun 30 asti
Lasten lukumäärä, joilta tehtävä onnistui	11 lasta	6 lasta	2 lasta (lapset A ja B)

Niin kuin luvussa 2.2.3 todettiin, kehittyneemmällä tasolla luettelemalla laskeminen voi yksi luku kerrallaan luettelemisen sijasta tapahtua myös ryhmittäin (Anghiler 2000, 4). Joka toisen luvun luetteleminen onnistuu vielä melko monelta, kun puuttuvan luvun voi sanoa mielessään, mutta viiden välein sama strategia ei enää toimi yhtä helposti. Silti se näyttää olevan lapsille helpompi kuin kolmen välein luettelu, johon ei pystynyt kuin kaksi lasta. Kyetäkseen näihin kertotaulusarjoihin, lapsella täytyy olla sisäistettynä lukusuora, jolla hän voi askeltaa annettujen ehtojen mukaan.

TAULUKKO 5. Esineiden lukuisuuden määrittäminen ryhmittelemällä (N=20)

Ryhmittelemällä laskeminen	Lasten lukumäärä, jotka laskivat molemmat oikein ryhmittelemällä	Lasten lukumäärä, jotka laskivat molemmat oikein yksitellen	Lasten lukumäärä, jotka eivät onnistuneet kummassakaan tehtävässä
Helmitaulussa 32 helmeä ja sormikaskuvassa 35 sormea	4 lasta (lapset A, B, C ja E)	5 lasta	11 lasta

Taulukosta 4 näimme kuuden lapsen hallitsevan lukujonossa viiden välein etenemisen, mutta taulukosta 5 voidaan nähdä, että kaksi lasta ei kuitenkaan käyttänyt tuota taitoaan esineiden lukuisuuden määrittelyyn. He laskivat esineet yksitellen ja tekivät laskuprosesseissaan virheitä. Yksi lapsista (E) laski hansikaskuvasta ensin jokaisen hansikkaan sormet tarkistaen, että jokaisessa oli viisi sormea. Vasta sen jälkeen hän ryhmitteli sormet muodostaen laskun 10+10+10+5 ja sai oikean vastauksen. Olettaisin, että lapsi ei ollut sisäistänyt lukua viisi yhden käden sormien lukumääräksi, sillä hän ei muissa tehtävissä vaikuttanut näin tarkalta ja huolelliselta.

Numeroiden 0–9 tunteminen oli lapsilla hyvin hallussa, mutta asettaessaan numerokortteja suuruusjärjestykseen kävi ilmi, että kolme lasta järjesti ne oikealta vasemmalle ja kolme aloitti tilan loppuessa uuden lukujonorivin edellisen yläpuolelta. Vaikka numerot olivat heille tuttuja, ei suunta ollut heille vielä vakiintunut. Lapsi Q tunnisti vain luvut 1-5, lapsi R ei tunnistanut ja tiennyt numeroa 0 ja lapsi S ei puolestaan tiennyt, mikä numero 9 oli ja mihin se kuului. Yllättävää oli, että lapset eivät sekoittaneet numerokortteja 6 ja 9. Numeroita tuottaessaan lapset aloittivat poikkeuksetta ne vääristä kohdin ja hyvin monella numerot kääntyivät peilikuvikseen. Numeroiden tuottamisen harjoittelu vaatii siis sijansa ensiluokkalaisten opetuksessa, vaikka se ei olekaan sisällöltään matemaattista toimintaa.

TAULUKKO 6. Lukujenkirjoittamisen taito kymmenten ja satojen lukualueella (N=20)

Lukualue	10-99	100-999
Lasten lukumäärä, jotka hallitsevat lukujen tuottamisen	7 lasta	4 lasta (lapset A, B, C ja G)

Viitekehyksessä Keranto (1979, 69) totesi lasten osaavan kouluun tullessaan luetella lukuja pidemmälle kuin mitä he tuntevat lukuja vastaavia symboleita. Kun lisäksi huomioimme sen, että lukuja vastaavien symbolien tunnistaminen on helpompi operaatio kuin lukujen tuottaminen, voidaan tätä tehtävää pitää vaikeana. Jos lapsi siis hallitsee lukujen kirjoittamisen satojen lukualueella, voidaan hänen lukukäsitteen hallintaa pitää hyvin vahvana ja varmana. Tyypillisenä virheenä esimerkiksi 27 piirrettiin luvuksi 207 tai 14 kirjoitettiin muotoon 41. Mielenkiintoisimpia virhevariaatioita syntyi luvusta 111, joka muuttui esimerkiksi muotoon 10011, 100011 ja 011.

TAULUKKO 7. Lasten taito vertailla lukuja eri lukualueilla (N=20)

Lapsen hallitsema lukualue lukuja vertaillessa	1-5	0-9	10-99	100-999
Lasten lukumäärä	1 lapsi	6 lasta	7 lasta	6 lasta

Kun verrataan lasten kykyä tuottaa itse pyydetty luku (taulukko 6) ja ymmärtää annettu luku (taulukko 7), vaikuttaa jälkimmäinen aavistuksen helpommalta toiminnolta. Satojen lukualueella neljä lasta osasi kirjoittaa annetun luvun, mutta kuusi lasta kykeni samalla lukualueella valitsemaan kahdesta vaihtoehdosta suuremman luvun. Toki tässä jälkimmäisessä tehtävätyypissä on olemassa onnistumisen mahdollisuus myös arvauksen avulla. Tutkimuksessa oli siis kaksi lasta, jotka eivät osanneet tuottaa esimerkiksi lukua 105, mutta tiesivät luvun 161 olevan suurempi kuin 116. Viitekehyksessä pohdittiin, kumpi tulee ensin; periaatteen ymmärtäminen vai sen mukaan toimiminen (Aunio ym. 2004, 207). Tässä yhteydessä voitaneen todeta, että nämä kaksi lasta ymmärsivät numeron paikka-arvon merkityksen, mutta eivät vielä osanneet soveltaa sitä omaan toimintaansa.

Lukujen vertailutehtävässä erottelevimmaksi kysymykseksi nousi tehtävä, jossa tuli valita suurempi luku luvuista 27 ja 72. Kuusi lasta kompastui tässä kohdin ja heistä lähes kaikki tuumasivat hyvin varman oloisesti lukujen olevan yhtä suuria. Määrän, lukusanan ja numeromerkin vastaavuuksia ja niiden hallintaa tarkasteltiin useampien tehtävätyyppien kautta, joista oleellisimpia oli tuottaa itse annettu luku, järjestää numerot suuruusjärjestykseen ja vertailla lukupareja sekä rakentaa annettu luku tuhatkuution tarvikkeilla. Kyseiset tehtävät osoittivat samalla myös numeron paikka-arvon ymmärtämisen. Neljälle lapselle (lapset A, B, C ja G) satojen lukualue oli täysin selvää kaikilla tehtävätyypeillä kysyttynä.

Järjestyslukujen hallintaa mitattiin kysymällä lapsilta rivin ensimmäistä, toista, viidettä ja viimeistä lasta. Lapsista 11 hallitsi kaikki nämä käsitteet ja vastaavasti yksi lapsista (N) ei onnistunut yhdenkään käsitteen kanssa siitä syystä, että hänen lukusuuntansa lähti joka kohdassa oikealta. Kuusi lasta ei tosin hallinnut esimerkiksi järjestyslukua viides, vaikka he aloittivat oikeasta suunnasta.

Malisen (1980) tutkimista koulualokkaista 36 % osasi nimetä sekä yhtä suuremman että yhtä pienemmän luvun kuin kolme, mutta tämän tutkimuksen koulualokkaista yhtä lukuun ottamatta kaikki (95 %) pystyivät samaan. Tässä tutkimuksessa alle kymmenen lukualueesta selviytymiseen vaadittiin lisäksi myös luvun yhdeksän onnistunut operointi.

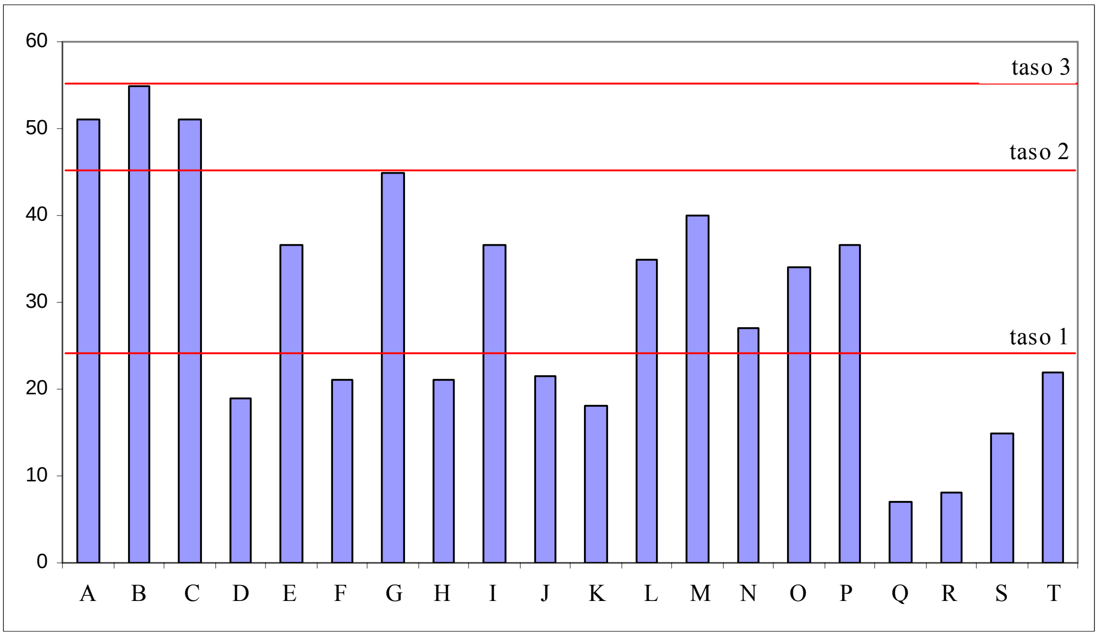
TAULUKKO 8. Lasten taidot nimetä yhtä suurempi ja yhtä pienempi luku (N=20)

Lukualue, jonka sisällä lapsi onnistuu	Operointi ei onnistu täysin millään lukualueella	0-10	11-100	101-1000
Lasten lukumäärä	4 lasta	7 lasta	5 lasta	4 lasta (lapset A, B, C ja G)

Lapsi R, joka ei hallinnut lukujonoa edes pienellä lukualueella, oli sitä mieltä, että seuraava luku luvusta 3 on 1 ja lukua 9 seuraa luku 9. Myös taaksepäin lukua 3 seurasi 1 ja lukua 9 edelsi luku 9. Jos lapsi ei hahmota lukujonon rakentumista, hän ei näytä todellakaan kykenevän nimeämään seuraavaa lukua luvusta kolme. Minkä tyylistä tulisikaan opetuksen olla, jotta operoitaisiin tällaisen lapsen lähikehityksen vyöhykkeellä? Toki moni lapsi ylitti kysymysten alueella oman taitoarseliininsa, mutta se oli tarkoituksenakin, jotta lapsen taidon raja tuli näkyväksi. Kun operoitiin lapsen taitotason yläpuolella, seuraava luku luvusta 202 saattoi olla 123 tai 1000 ja lukua 29 seurasi luku 20. Saman logiikan mukaan edellinen luku luvusta 100 saattoi olla 90, lukua 55 edelsi luku 66 ja luvun 333 edellä oli voinut olla luku 40-sataa. Lisäksi, kun käsiteltävä lukujono ylittää lapsen taitokapasiteetin, mutkat näyttävät lukujonon luettelussa helposti suoristuvan erityisesti kymmenen tai satojen ylittämisen yhteydessä. Tästä esimerkkinä seuraavat lasten jatkamat lukujonot:

- 95, 96, 97 → *98, 99, 100, 200*
- 196, 197, 198 → *199, 100, 101*
- 196, 197, 198 → *199, 190-kymmenen*
- 196, 197, 198 → *199, 2000*
- 196, 197, 198 → *199, 200, 1000, 2000*

Seuraavaksi tarkastellaan lasten lukujonotaitojen suorituseroja lapsikohtaisesti. Vaikka edellä käsiteltyjen yksittäisten taitojen tarkastelu antaa yleiskäsityksen lasten lukujonotaitojen hallinnasta, on tarpeen ymmärtää myös lasten taitojen suurta jakaumaa. Tässä luvussa keskityttiin lahjakkaiden huomioimisen ohella myös lukujonotaidoissa ilmenneisiin heikkouksiin. Näin siksi, että kun luodaan kuvaa lasten välisistä tasoeroista, on ymmärrettävä saman ikäisten lasten valtavan suuri taitohaitari. Lukujonotaidot muodostavat perustan, jolle lapsen laskennalliset taidot rakentuvat. Ellei perustaa laiteta ensin kantavaksi, ei juuri vaikuta yrittää lähteä rakentamaan sille yhdeksänvuotista peruskoulun matematiikkatornia. Ja toisaalta, jos lapsi hallitsee lukujonon satojenkin lukualueella, lieneekö tarkoituksenmukaista aloittaa matematiikan opiskelu luvun yksi käsitteestä.



taso 1: koulutulokastaso
taso 2: 1. luokan lopputaso
taso 3: 2. luokan lopputaso

KUVIO 1. Lasten lukujonotaitojen suorituserot lapsikohtaisesti tarkasteltuna

Kuviosta 1 nähdään, että lasten suorituserot lukukäsitteen hallinnassa ovat todella huikeat. Koulutulokastasolla eli ensimmäisellä tasolla täysien pisteiden saaminen edellytti lukujonon hallintaa pääsääntöisesti alle kymmenen lukualueella. Koulun opetus ei luonnollisesti lähde siltä tasolta, vaan aivan alkeista, ja siltä osin ensimmäisen tason alle jääneet oppilaatkin omaavat kaikki mahdollisuudet edetä luokan mukana ja omaksua opetettavat asiat. Kaikkein heikompien lasten osalta olisin kyllä jo tässä vaiheessa huolissani. Kuten aiemmin (luku 2.2.1) olen viitannut, niin Kinnunen (2003, 3–6) on todennut lasten olevan tyypillisesti koulua aloittaessaan saavuttanut lukujenkäsittelytaidoissaan vähintään neljännen tason ja näin ollen he pysyvät helposti mukana matematiikan opetuksessa. Neljännellä tasolla lukujono edustaa lapselle jo suuruusjärjestyksessä olevia lukuja mahdollistaen ajatuksellisen liikkumisen lukujonossa eteen- ja taaksepäin ja lapsi hallitsee tällöin myös edellisen ja seuraavan luvun nimeämisen. Aiemmin tässä luvussa todettiin kahden heikoimman lapsen olevan lukujenkäsittelytaidoissaan vasta tasolla kaksi eikä heidän lukujenluettelutaidoillaan ollut vielä edes matemaattista sisältöä. Näin ollen koulun opetus ei varmaan kohtaa lasta hänen lähikehityksen vyöhykkeellä ja lisäksi opetuksen tahti lienee näille lapsille liian kova. Näillä lähtötaidoillaan he tuskin ehtivät omaksua ja sisäistää opetettavia asioita.

Toinen taso vastaa sellaista lukujonotaitojen hallintaa, jonka lapsen odotetaan saavuttaneen ensimmäisen kouluvuoden aikana. Tällöin lapsi kykenee tuottamaan ja ymmärtämään luvut alle sadan lukualueella. Vastaavasti lapsen tulisi hallita kolmas taso toisen kouluvuoden lopussa, jolloin hän kykenee liikkumaan satojen lukualueella. Lukujonotaidot luovat siis pohjaa aritmeettisten taitojen oppimiselle, mutta lukujonotaitojen hallinta ei tarkoita sitä, että lapsi hallitsisi kyseisellä lukualueella tehtävät laskuoperaatiot. Kinnusen ym. (1994) tutkimuksessa todettiin, että keskitasoa parempien aritmeettisten taitojen saavuttaminen ensimmäisellä luokalla näyttää edellyttävän koulutulokkaalta pitkälle automatisoituneita lukujonotaitoja. Tässä alaluvussa loimme käsityksen lasten lukujonotaitojen suorituseroista heidän aloittaessaan koulunkäyntinsä ja seuraavaksi onkin mielenkiintoista tarkastella lasten aritmeettisia lähtötasotaitoja heti koulunkäynnin aloitusvaiheessa.

7.1.2 Suorituserot aritmeettisissa perustaidoissa

Meidän matematiikanopetus näyttää vahvasti keskittyvän erilaisten laskuoperaatioiden ympärille ja yleisestikin lapsen laskutaitoa pidetään arvostettuna taitona. Tästä näkökulmasta voitaisiin olettaa, että koulutulokkaiden aritmeettisten lähtötasotaitojen ylärajaa olisi tutkittu enemmänkin. Kirjallisuuteen perehtyessäni en kuitenkaan havainnut tehtäneen tällaisia tutkimuksia. Onkin mielenkiintoista saada selvyys, kuinka taitavia laskijoita lapset ovat heti kouluun tullessaan. Mielenkiinto asiassa kohdistuu niin taitojen hajontaan ja lasten käyttämiin laskustrategioihin kuin pisimmälle edistyneimpien taitotason selvittämiseen. Vaikka matemaattinen osaaminen on jaoteltu tässä tutkimuksessa kolmeen osa-alueeseen, jako on tehty vain helpottamaan asioiden analyyttistä tarkastelua. Luvussa 7.1.4 vedetään kaikki osa-alueet yhteen lapsikohtaisesti tarkasteltuna, mutta tässä vaiheessa on mielenkiintoista muun muassa tarkastella joittenkin lukujonotaitojen ja aritmeettisten osatekijöitten yhteyttä toisiinsa.

Anghilerin (2000, 47–49) mukaan edellisen ja seuraavan luvun hallinnalla on yhteys yhteen- ja vähennyslaskuista suoriutumiseen ja se näkyi myös kyseisessä tutkimuksessa. Tämän aineiston mukaan edellisen ja seuraavan luvun hallinnalla oli voimakas yhteys yhteen- ja vähennyslaskuista suoriutumiseen (c = 0,651) ja taulukosta 9 näkyy, että jos lapsi oli heikko edellisen ja seuraavan luvun nimeämisessä, hän oli automaattisesti heikko myös yhteen- ja vähennyslaskuissa. Mutta lapsista, jotka osasivat nimetä hyvin edellisen ja seuraavan luvun, vain kolmannes oli taitavia myös yhteen- ja vähennyslaskujen suhteen. Näin ollen voitaisiin edellisen ja seuraavan luvun hallinnan olettaa olevan yhteen- ja vähennyslaskuja edellyttävä taito, mutta näiden aritmeettisten taitojen pohjaksi vaaditaan lapsilta myös muiden tekijöiden hallintaa.

TAULUKKO 9. Edellisen ja seuraavan luvun nimeämisen yhteys yhteen- ja vähennyslaskujen hallintaan

			yht.- ja väh. laskuissa		
			heikot	taitavat	Total
edellisen ja seuraavan luvun nimeämisessä	heikot	Count	7	0	7
		%	100%	0%	100%
	vahvat	Count	9	4	13
		%	69%	31%	100%
Total		Count	16	4	20
		%	80%	20%	100%

p = 0,017

Taulukossa 9 ja osittain jatkossakin mainittavalla p:n arvolla kerrotaan tuloksen merkitsevyystasosta eli siitä kuinka todennäköisesti tutkimustulos voidaan yleistää koskemaan perusjoukkoa. Kun p:n arvo eli yleistettävyyden todennäköisyys on alle 0,001, on tulos erittäin merkitsevä. P:n arvon ollessa alle 0,01 tulosta voidaan pitää merkitsevänä ja alle 0,05 arvolla melkein merkitsevänä. (Valli 2001, 71.) Tämän tutkimuksen puitteissa pienten luokkien osuus oli kuitenkin melko suuri ja siten tulosten yleistettävyyteen on suhtauduttava varauksella.

Aunio ym. (2004, 205) totesivat taidon luetella lukuja pienenevässä järjestyksessä avaavan vähennyslaskuissa tarvittavat strategiat. Tässä tutkimuksessa lapsen taito luetella lukuja taaksepäin korreloi vähennyslaskutaidon kanssa korrelaatiokertoimella 0,530. Seuraavasta ristiintaulukoinnista nähdään, että vain kolmannes niistä lapsista, jotka osasivat hyvin luetella lukuja taaksepäin, olivat vahvoja vähennyslaskuissa. Näin ollen voisimme jälleen olettaa, että taito nimetä edellinen ja seuraava luku on ehto aritmeettisten operaatioiden suorittamiselle, mutta tämä taito ei yksistään avaa aritmeettisia strategioita.

TAULUKKO 10. Lukujen taaksepäin luettelemisen yhteys vähennyslaskujen hallintaan

			vähennyslaskuissa		
			heikot	vahvat	Total
lukujen taaksepäin luettelemisessa	heikot	Count	9	0	9
		%	100%	0%	100%
	hyvät	Count	8	3	11
		%	73%	27%	100%
Total		Count	17	3	20
		%	85%	15%	100%

p = 0,004

Vähennyslaskuja laskiessa tarvitaan luonnollisesti lukujen taaksepäin luettelutaitoa. Esimerkiksi lapsi A luetteli lukuja hiljaa taaksepäin ja sai oikean vastauksen ratkaistessaan kuinka paljon Kalle (98 cm) oli Liisaa (92 cm) pidempi. Samoin lapsen B laskiessa paljonko esineitä jäi piiloon, kun 12:sta otettiin 5 pois, hän otti esineen kerrallaan käteensä ja laski takaperin päästen oikeaan vastaukseen, vaikka kysyttäessä laskua 12-5 hän olisi varmaan ratkaissut vastauksen sisäisestikin. Edelliset lapset (A ja B) osasivat ylipäätään käyttää vaihtelevasti tilanteisiin sopivia ja yleensä taloudellisia ratkaisustrategioita. Kun he olivat laskeneet pöydällä olevat rahat (28 e), molemmat siirsivät niistä konkreettisesti 11 euroa syrjään ja laskivat loppurahat, kun kysyttiin paljonko rahaa jää, jos rahoilla ostaa 11 euron lelun. Tämä on luonnollisesti helpoin tapa tehtävän ratkaisemiseen, mutta tätä strategiaa eivät muut lapset käyttäneet.

Viitekehyksessä todettiin vahvan lukujonokäsityksen vähentävän riippuvuutta ulkoisesta tuesta (Aunio ym. 2004, 205). Tässä tutkimuksessa asioiden yhteys ei näyttäisi kuitenkaan niin suoraviivaiselta. Laskin jokaiselle lapselle suhdeluvun konkretian avulla oikein lasketuille laskuille suhteessa lapsen kaikkiin oikein laskettuihin laskuihin. Jos suhdeluku kertoi, että lapsi oli laskenut yli neljäsosan tehtävistään tukeutuen konkretiaan, ei hänen laskustrategiansa ollut vielä sisäistynyt. Seuraavasta taulukosta nähdään, että lukujonotaidoiltaan heikkoja ja vahvoja lapsia on lähes tulkoon saman verran sekä sisäisesti laskevissa että ulkoisiin apuihin tukeutuvissa laskijoissa.

TAULUKKO 11. Lukujonotaitojen ja laskustrategian yhteys

			laskustrategia		
			sisäinen	ulkoinen	Total
lukujono-taidoiltaan	heikot	Count	4	5	9
		%	44%	56%	100%
	vahvat	Count	5	6	11
		%	46%	54%	100%
Total		Count	9	11	20
		%	45%	55%	100%

p = 0,965

Tämän tutkimuksen lapsilla vahvat lukujonotaidot eivät siis näytä vähentävän aritmeettisten suoritusten riippuvuutta ulkoisesta tuesta. Luvussa 2.3.1 Geary (1996, 48, 92–93) totesi lasten käyttävän yleensä vaihtelevasti erilaisia strategioita. Voitaisiinko edellisestä taulukosta päätellä, että taito käyttää erilaisia strategioita kertookin lapsen kyvykkyydestä ajatella matematiikkaa? Tätä tukisi ainakin se huomio, että lukujonotaidoiltaan heikoimmat lapset (Q ja R) sijoittautuivat oheisessa jaottelussa sisäisiin laskijoihin, vaikka he eivät kyenneet ratkaisemaan kuin muutaman aritmeettisen tehtävän. Taulukko 11 ei siis kerro sitä, kuinka monista tehtävistä lapsi ylipäätään suoriutui. Taulukosta 12 nähdään, että lukujonotaidoiltaan heikot lapset eivät suoriutuneet kuin muutamista testissä olleista tehtävistä. Lukujonotaidoiltaan vahvoista noin kolmannes sijoittautui heidän kanssaan samaan ryhmään eli heidän lukujonotaidoistaan ei ollut vielä huomattavaa hyötyä aritmeettisille toiminnoille. Kun ristiintaulukoin erikseen lasten ratkaisemien tehtävien määrät kyseiseen laskustrategiajaotteluun, osoittautui, että vain yksi lapsi laski useita tehtäviä suulliseen laskemiseen tai konkretiaan tukeutuvalla laskustrategialla.

TAULUKKO 12. Lukujonotaitojen yhteys oikein laskettujen aritmeettisten tehtävien määrään

			oikein laskettuja tehtäviä		
			vähän (lkm)	paljon (lkm)	Total
lukujono-taidoiltaan	heikot	Count	9	0	9
		%	100%	0%	100%
	vahvat	Count	4	7	11
		%	36%	64%	100%
Total		Count	13	7	20
		%	65%	35%	100%

p = 0,004

Osa lapsista osasi kuvailla käyttämiään laskustrategioita ja joiltakin se oli helposti nähtävissä. Esimerkiksi tehtävässä, jossa sohvalla oli seitsemän ja neljän esineen ryhmät ja lapsen tuli sanoa paljonko toiseen ryhmään pitäisi antaa lisää, jotta esineitä olisi yhtä monta, erotti lapsi I isommasta ryhmästä neljä ja laski loput. Strategia oli toimiva ja helposti nähtävissä. Matemaattisilta taidoiltaan vahva lapsi B taas laski sujuvasti yhteen 132 ja 25. Kysyessäni miten hän laski, hän selitti laskeneensa yhteen luvut 32 ja 25 ja lisänneensä siihen sitten satasen. Edellisen lapsen tavoin myös lapsi A osasi sanallistaa hyvin ajatuksiaan ja strategioitaan. Kun hän oli laskenut laskun 4+5, hän selitti strategiansa seuraavasti: *”Mää laskin ensin, että 5+5 on 10 ja sitten mää vähennän siitä yhden.”*

Vaikka lapsi käyttäisi konkreettisia apuvälineitä laskemisen apuna, ei se poissulje ajattelemisen ja ymmärtämisen osuutta. Tästä on esimerkkinä tilanne, jossa lapsi S ratkaisi erästä vähennyslaskun aukkotehtävää. Hän etsi lukua, joka pitäisi vähentää kymmenestä, jotta jäljelle jäisi vain yksi. Lapsi otti sormet esille, katseli niitä ja oivalsi niistä hyvin varman oloisesti vähennettäväksi luvuksi luvun yksi. Ja toisaalta, jos lapsi ymmärtää hyvin lukujonon rakentumisen, hän voi halutessaan hyödyntää suurissakin laskuissa sormiaan. Laskiessaan kirjallista tehtävää 60-6-4, lapsi A laski sen sormiensa avulla saaden oikean vastauksen.

Keranto (1979, 80) totesi, että silloin kun lapsi suorittaa jonkin toiminnon päässään ilman, että on kykeneväinen sanomaan sitä ääneen, hän on suorittanut toiminnon ymmärtämättä sen sisältöä. Lapsi R, joka oli erityisen heikko lukujonotaidoissaan, ratkaisi sisäisesti tehtävän, jossa kysyttiin pihalla olevien poikien lukumäärää kun pihalla oli kahdeksan lasta, joista tyttöjä oli kolme. Kysyessäni miten lapsi ratkaisi tehtävän, hän sanoi: *"Mää en tiiä mistä mää tiiän."* Viitaten Kerannon mallintamisen vaatimukseen, heräsi minulle testitilanteessa epäilys siitä, oliko oikea vastaus arvattu. Niinpä kehitin hänelle samantyylisen tehtävän eri luvuilla ja hän ratkaisi senkin oikein. Kyseisen lapsen sanavarasto vaikutti heikolta ja se saattoi vaikeuttaa käytetyn strategian sanallistamista, mutta silti tämän lapsen osaamisen peruste jäi minulle hieman epäselväksi.

Laskiessaan 20 lapsen kenkämäärää, lapsi A osasi kertoa strategiansa: *"Ensin kaikille yhdet kengät jalkaan ja sitten kaikille toiset eli ensin 20 ja sitten 20. Ne lasketaan yhteen."* Prosessi oli nopea ja vastaus varma. Samaa laskua yritettiin myös seuraavalla strategialla. *"Mulla on oma tekniikka.* (Ottaa 20 palikkaa.) *Nämä on lapsia. Yksi palikka on kenkäpari. 2, 4, 6,… "* Tämä lapsi O ei onnistunut kuitenkaan suorittamaan tehtävää loppuun asti valitsemallaan tekniikalla. Hän olisi tarvinnut laskemisensa avuksi konkreettisemmat palikat eli hänelle ei riittänyt se, että kukin palikka edusti yhtä paria, sillä hän ei suoriutunut lukujonotehtävissäkään joka toisen luvun sanomisesta. Lapsella oli siis oikea ajatus tehtävän suorittamisesta, mutta käytännön edellytykset sen ratkaisemiseksi vielä puuttuivat.

Erityisesti yksi lapsi (H) prosessoi aritmeettisia laskuja todella hitaasti. Hän laski sormilla yksitellen ottaen myös varpaansa mukaan. Häntä ei näyttänyt häiritsevän se, että osa laskuista kesti todella kauan. Myös lapsi O otti käyttöönsä niin sormet kuin varpaansakin, vaikka sukka oli jalassa ja varpaat vaikeasti erotettavissa. Helpompaa olisi ollut käyttää pöydällä olleita palikoita, mutta yleisesti näytti siltä, että lapset tukeutuvat ensisijaisesti omiin ruumiinosiinsa, erityisesti sormiinsa. Kukaan lapsista ei kuitenkaan laskiessaan koskettanut sormia huulissaan. Erityisesti yksi lapsi (K) käytti sormiaan hyvin luovasti kertolaskussa, jossa kysyttiin kukkien määrää, kun neljässä maljakossa oli kussakin kaksi kukkaa. Tämä lapsi laittoi neljä sormiparia yhteen ja laski sitten laskuun käyttämistään sormista kukkien määrän.

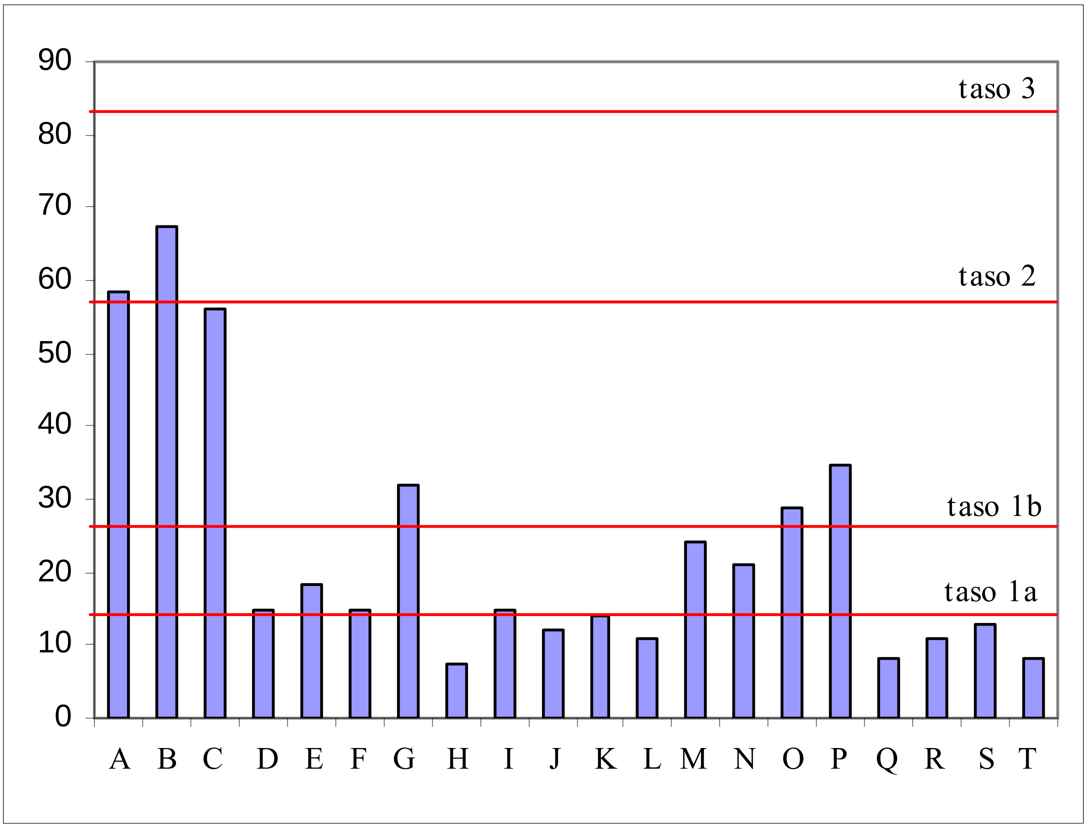
Sanotaan, että virheistä oppii. Tässä tutkimuksessa lapset eivät tulleet tietoisiksi virheistään, mutta heidän tekemistään virheistä voi tässä yhteydessä oppia lasta ohjaava aikuinen. Tärkeää on, että opettaja ymmärtää ja näkee virheen taakse. Testitilanteista jäi joitakin tilanteita erityisesti mieleen, joissa lapsen taitotaso oli mukavasti eri tasolla kuin hänen mielikuvansa itsestään laskijana. Esimerkiksi lapsi I laski sormillaan kirjallista tehtävää 4+5 ja sai vastaukseksi kahdeksan. Hän totesi: *”Tää oli liian helppo.”* Jos kyseessä olisi ollut oppitilanne, virheeseen olisi pitänyt luonnollisesti puuttua toisin kuin tässä tilanteessa. On tärkeää muistaa, että kun opettaja kohtelee lasta kunnioittaen, lapsi oppii kohtaamaan virheensä ja oppimaan niistä minäkuvan siitä kärsimättä. Lapsen tulee oppia näkemään virheet oppimisen mahdollistajina. Lapsen matemaattiselle kehittymiselle on vahingollista, jos lapsen matematiikkakuva yhdistyy virheettömyyden illuusioon.

Kahdestakymmenestä lapsesta kuudelle joukkojen vertailu oli vaikeaa. Määrä vaikuttaa minusta suurelta ja yllättävää on, että osa näistä lapsista vaikutti matemaattisilta taidoiltaan jopa reilusti keskitasoa paremmilta. Kaikki lapset osasivat sanoa, kummassa leluryhmässä esineitä oli enemmän, kun toisessa oli seitsemän ja toisessa yhdeksän esinettä. Kun kysymystä jatkettiin, paljonko toisessa ryhmässä on enemmän kuin toisessa, kaksi lasta (S ja T) ei kyennyt sanomaan tähän mitään. Neljän lapsen (E, R, L ja P) mielestä toisessa oli yhdeksän esinettä enemmän kuin toisessa. Varmistin tuloksen vielä toteamalla, että tässä on siis yhdeksän enemmän kuin tuossa toisessa ja lapset hyväksyivät vastauksensa. Testissä ei ikävä kyllä ollut vastaavaa tehtävää vähemmän kuin -käsitteestä. Enemmän ja vähemmän kuin -käsitteiden hallinta auttaa lasta yhteen- ja vähennyslaskujen ymmärtämisessä ja siksi näitä käsitteitä tulisi heti alussa systemaattisesti harjoitella ja lisäksi lukujonotaidoissa lukujen eteen- ja taaksepäin luetteleminen auttaisi lasta lukumäärien vertailutehtävissä.

Kun kertotaulut eivät kuulu vielä lasten arkeen, kukaan kolmannen tason tehtäviin edenneistä lapsista ei osannut tehdä kolmesta viiden pallon ryhmästä kertolaskua, mutta vastauksen he osasivat sen sijaan sanoa heti pisteryhmät nähtyään. Lapsille myös laskujen kirjallinen esitystapa oli luonnollisesti outoa, sillä nekään eivät tyypillisesti kuulu lasten kokemuspiiriin ennen kouluopetuksen alkamista. Niinpä plusmerkkiä voi kutsua x:ksi ja kertomerkkiä pilkuksi. Jotkut muistivat esimerkiksi miinusmerkin nimen, mutta eivät sen merkitystä.

Yhteenlaskun vaihdannaisuus ja sen myötä taloudellinen laskutapa ei ollut vielä yleisesti lasten käytössä. Esimerkiksi rahanlaskutehtävässä, jossa pöydällä oli 10 euron seteli ja kolme euron kolikkoa, kaksi lasta (E ja O) otti ensin kolme sormea ja lisäsi siihen yksitellen 10 lisää saaden oikean vastauksen. Rahalaskuistahan viitekehyksessä todettiin, että ne ovat lapsille tyypillisesti haastavia. Malisen (1980) tutkimuksessa koulualokkaat selviytyivät kymmenen pennin ja kolmen pennin rahan laskemisesta siten, että 21 % osasi laskun itsenäisesti. Tässä testissä oli sama lasku euroversiona ja lapsista peräti 50 % osasi laskea rahat. Kun Malisen tutkimuksessa tehtävää jatkettiin kysymällä paljonko rahaa jää, jos rahoilla ostetaan viiden pennin karkki, ostettiin tässä testissä vastaavasti viiden euron lelu. Malisen tutkimista lapsista oikean tuloksen sai 11 % lapsista, ja tässä tutkimuksessa ostoslaskusta suoriutui 15 %. Luonnollisesti, kun rahalaskut vaikeutuivat muun muassa lukualueen kasvaessa, suoriutui testissä kolme edistyneintä lasta niistä huomattavasti muita paremmin. Tyypillisimpänä virheenä edellisessä 13 euron tehtävässä rahat laskettiin välittämättä niiden arvosta, mutta tyypillisin tilanne oli se, että lapsi ei kyennyt edes yrittämään rahamäärän laskemista. Tällaisia lapsia oli kuusi.

Niin kuin edellisessä rahanlaskutehtävässä, suoriutuivat kyseisen tutkimuksen lapset monissa muissakin yksittäisissä tehtävissä paremmin kuin aiempien tutkimusten lapset. Esimerkiksi Kinnusen ym. (1994, 67) tutkimuksessa 17 % koulutulokkaista osasi helpon tehtävän alle viiden lukualueella lukujen osittamisen ja koonnin osiossa. Tässä testissä käytettiin myös kyseistä tehtävää ja lapsista peräti 85 % selviytyi siitä. Viitekehyksessähän todettiin lukujen hajottamisen ja koonnin edeltävän yhteen- ja vähennyslaskutaitoja. Malisen (1980) tutkimuksessa laskusta 32-5 ei suoriutunut kukaan, mutta tämän tutkimuksen lapsista kolme edistyneintä laskivat laskun oikein. Malisen tutkimuksen raportoinnista ei käy selville, kysyikö hän laskun kuusi jaettuna kahdella esimerkin kautta, pelkistettynä sanallisesti vai kirjallisessa muodossa, mutta yksikään koulutulokkaista ei ratkaissut tehtävää. Tässä tutkimuksessa lasku kysyttiin esimerkkitilanteen kautta ja 12 lasta osasi tehtävän. Silti tämä käytännöstä tuttu jakolasku osoittautui monelle myös yllättävän vaikeaksi. Tehtävänä oli jakaa kuusi kuvitteellista karkkia minun ja lapsen kesken. Kahden lapsen mielestä kumpikin saa kuusi, yhden mielestä kumpikin saa viisi ja yksi ratkaisi jakotilanteen tarjoamalla minulle kaksi ja ottamalla itse yhden. Kukaan ei ottanut vieressä olevia palikoita jaon tueksi. Seuraavassa kuviossa tarkastellaan lasten aritmeettisia taitoja lapsikohtaisesti.



taso 1a: koulutulokastaso konkreettisesti laskien
taso 1b: koulutulokastaso sisäisesti laskien
taso 2: 1. luokan lopputaso
taso 3: 2. luokan lopputaso

KUVIO 2. Lapsikohtaiset suorituserot aritmeettisissa perustaidoissa

Kuviossa 2 ensimmäinen taso on jaettu kahteen osaan. Taso 1a edustaa sitä taitotasoa, johon lapsi yltää laskemalla konkreettisten apuvälineiden tai ulkoisen puheen avulla oikein koulutulokastason tehtävät ja tasolla 1b lapsi kykenee ratkaisemaan samat tehtävät sisäisesti. Näin ollen jo 1a -tason saavuttamista voi pitää hyvänä pohjana aloittaa koulunkäynti. Kolme lasta (H, Q ja T) jäi selvimmin tuosta koulutulokastasosta, mutta enemmän kuin lasten aritmeettisista taidoista olisin huolestunut lasten heikoista lukujonotaidoista, sillä aritmeettiset strategiat lapsi oppii kyllä jos hän hallitsee lukujonon. Edellisessä lienee itse asiassa kyse vähän samasta asiasta kuin äänne-kirjain-vastaavuuden ymmärtämisen perusedellytyksestä lukemaan ja kirjoittamaan oppimisessa.

Toinen taso edustaa sitä aritmeettisten taitojen tasoa, jonka lapsen odotetaan saavuttaneen ensimmäisen vuoden lopussa ja tälle tasolle ylsi kolme lasta (A, B ja C). Suoritusero seuraaviin oli melko selkeä ja ero tulee taatusti näkyviin koulutyön arjessakin. Ennen kaikkea nämä edistyneimmät tulevat tuntemaan tuon eron, sillä yhtenäisen opetuksen taso ei tule haastamaan heitä kehityksessään eteenpäin. Kun näillä lapsilla oli lukujonotaidotkin hyvin hallinnassa, he pystyisivät aloittamaan melko lailla suoraan toisen luokan matematiikan opetuksesta. Tällaista eriyttämistä ei kuitenkaan käytetä koulujärjestelmässämme. Jotain pitäisi asialle kuitenkin tehdä, sillä lasten aritmeettiset suorituserot ovat liian isot vain tilanteen toteamiseksi.

Testitilanteissa lapset olivat hyvin motivoituneita kaikkiin tehtäviin. Haasteellisten tehtävien herättämä motivaatio näkyi selvimmin lapsen B osalta. Kun esimerkiksi yhdessä tehtävänannossa kysyttiin yhteisrahamäärää, kun lomapakossa oli 132 euroa ja kukkarossa 25 euroa, tämä lapsi selvästi nautti tilanteesta. Hän naurahti iloisesti ja totesi: *”Tämä on jo tosi vaikea!”* Lapsi oli laskussaan varma, nopea ja innokas ja hänen vastauksensa oli oikein. Kysymys montako tassua on yhteensä, jos koiria on 50, kuulosti saman lapsen mielestä myös vaikealta. Hän huudahti nauraen: *”Voi ei.”* Vastaus oli jälleen oikea ja nopeasti tuotettu. Tällaisten haasteellisten tehtävien kohdalla pystyi tästä lapsesta näkemään ryhdin oikenemisen, mielenkiinnon nousemisen ja sen, kuinka lapsen silmiin syttyi innostuksen palo. Kuinka ikävää olisikaan, jos tuo silmien ilo katoaa liian matalan vaatimustason myötä. Kyseisen lapsen toiminnassa konkretisoitui myös se, mitä teoriaosassa tarkoitettiin lähikehityksen vyöhykkeellä. Liian vaikeiden tai liian helppojen tehtävien kohdalla tämä lapsi ei millään tavoin iloinnut. Hän näytti nauttivan vain tehtävistä, jotka osuivat hänen lähikehityksensä vyöhykkeelle.

Aritmeettisia perustaitoja testattiin siis yhdentoista osa-alueen kautta. Laskin jokaiselle osa-alueelle oman keskiarvonsa lasten suoritusten perusteella ja suhteutin sen osion maksimipistemäärällä. Tämän mukaan lapset saivat vähiten pisteitä kertolaskuista ja kirjallisista laskuista eli ne osiot olisivat olleet lapsille haastavimpia. Tämä ei kuitenkaan ole näin yksioikoista, sillä juuri kyseisten osioiden tehtävien lukumäärä kasvoi tasolta toiselle. Vastaavasti joissakin osioissa ei ollut lainkaan kysymyksiä viimeisellä tasolla tai kaikki kysymykset sijoittuivat samalle tasolle. Näin oli esimerkiksi joukkojen vertailussa, jossa pyrittiin vain tarkistamaan lasten suhdekäsitteiden hallintaa. Jotta osioita olisi voitu vertailla, testi olisi pitänyt rakentaa siten, että kaikkien osioiden maksimipistemäärä olisi ollut sama.

7.1.3 Suorituserot matemaattisloogisessa ajattelussa

Matemaattisloogisilla tehtävillä voidaan harvoin mitata vain puhtaasti tietyn osa-alueen hallintaa. Sen vuoksi keskustelu tehtävien jaottelun oikeellisuudesta ei ole niin oleellista kuin se, että jaottelun kautta nähdään mukana olevan erityylisiä tehtäviä. Tämän testin matemaattisloogiset tehtävät jaoteltiin hahmottamisen tehtäviin sekä Ilmavirtaa (1995, 43–45) mukaillen neljään eri päättelytehtävien kategoriaan; loogiseen, luvulliseen, verbaaliseen ja visuaaliseen. Lukumäärän säilyvyyden hallinta sisällytettiin osaksi hahmottamista.

Perkkilä (2002, 40) totesi, ettei lukujen luettelutaidolla voida nähdä olevan yhteyttä numeroiden merkityksen ymmärtämiselle, jos lapselta puuttuu ymmärrys lukumäärän säilyvyydestä. Esineiden järjestyksen tai ryhmittelyn muutosten ei tulisi siis vaikuttaa esinejoukon lukumäärään. Tässä tutkimuksessa vain kolme lasta kahdestakymmenestä (A, B, N) näytti hallitsevan lukumäärän säilyvyyden täysin, kun sitä kysyttiin kahdella eri tavalla. Mielenkiintoista oli, että kaksi lasta (M ja P) jopa laskivat oikein esineiden lukumäärän, joita oli siis yhtä monta, mutta silti he uskoivat mieluummin silmiään kuin laskutulostaan. Toisen lapsen (M) silmissä lyhyemmässä jonossa oli enemmän ja toisen lapsen (P) mukaan laajemmassa joukossa näytti olevan enemmän esineitä.

TAULUKKO 13. Lukumäärän säilyvyyden ymmärtäminen (N=20)

	enemmän lyhyemmässä tai tiheämmässä	enemmän pidemmässä tai harvemmassa	molemmissa yhtä paljon
toista jonoa venytetään	3 lasta	14 lasta	3 lasta (A, B, N)
toista rykelmää tihennetään	4 lasta	10 lasta	6 lasta

Testiä laatiessani olin ajatellut tämän kysymyksen helpoksi. Mutta kun vain murto-osa lapsista näytti hallitsevan asian, aloin epäillä, oliko kysymyksen asettelussa jotain vikaa. Näin ollen kun olin tehnyt testin jokaisen lapsen kanssa, tein asiasta lisäkysymyksen Lampista, Ikäheimoa ja Drägeriä (2007, 40–41) mukaillen ja testasin lasten lukumäärän säilyvyyden hallintaa vielä kaikilta niiltä, jotka eivät testin mukaan hallinneet sitä lainkaan. Tässä tehtävässä asetin kaksi seitsemän esineen parijonoa vierekkäin ja lapsen kanssa totesimme yksi yhteen -vastaavuuden kautta niissä olevan yhtä monta esinettä. Tämän jälkeen siirsin lapsen nähden toista jonoa kauemmas ja kysyin lapselta onko jommassakummassa jonossa nyt enemmän esineitä. Seuraavaksi pidensin siirrettyä jonoa ja lapsen tuli taas päätellä, oliko jommassakummassa aiempaa enemmän esineitä.

TAULUKKO 14. Lisäkysymys lukumäärän säilymisestä niille, joilla testin molemmat lukumäärän säilyvyyttä mittaavat tehtävät väärin (N=14)

	enemmän paikalle jäävässä	enemmän siirretyssä tai venytetyssä	yhtä paljon
toista jonoa siirretään kauemmas	0 lasta	5 lasta	9 lasta
siirrettyä jonoa venytetään	2 lasta	8 lasta	4 lasta

Asiaa uudelleen kysyttäessä oli neljästätoista lapsesta edelleen kymmenen sitä mieltä, että esineiden lukumäärä muuttuu, jos ne ryhmitellään uudella tavalla. Kirjallisuuden perusteella minulle oli syntynyt kuva siitä, että tämä asia on yleensä koulutulokkaiden hallinnassa. Esimerkiksi Perkkilä (2002) ja Hannula (2005) ovat todenneet koulutulokkailla olevan yleensä kehittyneen ajatuksellisista valmiuksista muun muassa juuri ymmärryksen lukumäärien säilyvyydestä, mutta tämän tutkimuksen lapsista puolet ei kuitenkaan ymmärtänyt sitä vielä. Lisäksi minut yllätti se, että yksi lukujonotaidoiltaan ja aritmeettisilta taidoiltaan kolmen edistyneimmän joukossa ollut lapsi C ei ymmärtänyt lukumäärän säilyvyyttä laisinkaan. Vielä tässä lisäkysymyksessä hän totesi sekä siirretyssä että venytetyssä jonossa olevan enemmän esineitä kuin verrokkijonossa, vaikka hänenkin kanssaan oli aluksi todettu niissä olevan yhtä monta esinettä.

Kinnunen ym. (1994, 68–69, 75) osoittivat testissään matemaattisloogisella ajattelulla ja lukujonotaidoilla olevan selvän yhteyden siten, että mitä vaativammista lukujonotaidoista oli kyse, sitä suurempi oli matemaattisloogisten taitojen hallinnan yhteys. Erityisesti vaativampien lukujonotaitojen hallinta edellytti lukumäärän säilyvyyden ymmärtämisen kehittyneisyyttä. Tämän tutkimuksen lapsi C ei siis hallinnut lukumäärän säilyvyyttä, mutta silti hänen lukujonotaidot olivat heti kouluun tullessa toisluokkalaisen tasolla. Tämä yksittäinen tutkimustulos on siten melkoisessa ristiriidassa aiempien tutkimusten kanssa.

Kuitenkin Piaget’n teoriassa, jota esimerkiksi Hautamäki (1995, 228–230, 240) kuvailee, otetaan ratkaiseva askel esioperationaalisesta vaiheesta konkreettiseen vaiheeseen siirtymisessä juuri tämän yksi yhteen -vastaavuuden kiteytymisen kautta eli silloin, kun lapsi ei enää harhaannu luulemaan lukumäärän muuttuvan esineiden sijaintia muuttamalla. Tämän kriteerin mukaan puolet tutkimuksen lapsista olisi vielä esioperationaalisessa vaiheessa, eikä heiltä sen mukaan pitäisi onnistua luokittelu edes yhden ominaisuuden suhteen. Testissä ei ollut lainkaan luokittelutehtäviä, mutta epäilisin sitä, etteikö suurin osa olisi kyennyt luokittelemaan yhden ominaisuuden perusteella.

Hahmottamista mitattiin lukumäärän säilyvyyden lisäksi sillä, kuinka lapsi hahmotti kellonajat kellotaulusta. Seitsemän lasta ei hahmottanut kellonaikoja ollenkaan ja vastaavasti kolme lasta (A, G ja P) hallitsi myös kellonajat varttia vaille ja vartin yli. Kellotaulun hahmotus vaatinee paitsi hahmotuskykyä, myös omaehtoista kiinnostusta asiaan sekä ympäristön ohjausta. Siltä osin kellon osaaminen oli ehkä liian vaikea tapa mitata koulutulokkaan hahmottamiskykyä. Lapsista se oli kuitenkin mieluista, eikä se näyttänyt olevan sidottu lapsen taitotasoon. Siitä on osoituksena esimerkiksi seuraavat hyvin itsevarmat vastaukset kysytyistä kellonajoista.

9.30: *Kuutta vailla puoli yhdeksän.* (E)

8.00: *Kaksitoista ja kahdeksan. Siitä tulee kahdeksantoista!* (H)

Lapsi R ei tiennyt kumpaakaan kysymääni kellonaikaa, mutta tämän jälkeen hän otti kellotaulun, laittoi sen osoittamaan tasan kello kahtatoista ja sanoi hyvin itsevarmasti: *”Tän osaan. Tasan kahdeksan.”*

Kolmas hahmottamista mittaava tehtävätyyppi oli peilikuvatehtävä, jossa oli piirretty puolet suuraakkosesta ja lapsen tuli päätellä, mikä kirjain se olisi kokonaisena. Tämä symmetriatehtävä kirjaimilla osoittautui helpoksi. Jos lapsi ei sattunut muistamaan kyseistä kirjainta, hän osasi kuitenkin piirtää sen, mikäli ymmärsi peilikuvion idean.

TAULUKKO 15. Symmetrian hahmottaminen peilikuvan avulla (N=20)

Lasten lukumäärä, jotka onnistuivat 4-3 tehtävässä	Lasten lukumäärä, jotka onnistuivat 2-1 tehtävässä	Lasten lukumäärä, jotka eivät osanneet yhtään tehtävää
15 lasta	4 lasta	1 lapsi (R)

Transitiivisella päättelyllä tarkoitettiin siis kyvykkyyttä yhdistellä eri joukkoja koskevia tietoja ja tehdä niiden perusteella uusia päätelmiä ja näin ollen transitiivista päättelyä tarvitaan monentyylisten päättelytehtävien ratkaisemisessa. Kyseisessä testissä transitiivista päättelyä tarvittiin verbaalisen päättelyn tehtävässä sekä yhdessä loogisen päättelyn tehtävässä. Perkkilä (2002, 40) totesi koulutulokkailla kehittyneen yleensä lukumäärän säilyvyyden ymmärtämisen kanssa myös kyvyn transitiiviseen päättelyyn. Loogiseen päättelyyn kuuluvassa transitiivisen ajattelun tasapainovaakatehtävässä lapsen tuli päätellä, mikä eläimistä oli painavin. Selitin kuvasarjan siten, että näyttäessäni yhtä keinua, peitin muut. Kerroin, että kukko, hiiri, pupu ja tipu keinuvat vuorollaan toisensa kanssa. Totesimme lapsen kanssa, että tässä keinussa painavampi on alhaalla. Lapsen tuli miettiä, kuka keinujista oli kaikkein painavin. Oikea vastaus oli tipu ja oikealla perustelulla sen huomasi vain kolme lasta (A, B, I). Vain yhden lapsen (T) osalta tämä tehtävä ylitti täysin lapsen kapasiteetin eikä lapsi kyennyt edes yrittämään. Lisäksi yksi lapsi (S) ei suostunut huomioimaan kuin ensimmäisen keinuparin ja totesi sen perusteella kukon olevan painavin. Kaikki muut tutkivat kuvia innokkaasti ja tarjosivat vastauksensa mitä mukavimmilla syillä. Kun lapsella ei ole vielä valmiutta tämäntyyliseen päättelyyn, perustelut ovat esimerkiksi seuraavanlaisia:

- *Tipu. Se on lihavin. Se näyttää suurimmalta.* (M)
- *Pupu. Sen näkee kun se on kaikkein alimpana.* (C)
- *Pupu, koska sillä on porkkana. Ja koska kukko ja tipu on lintueläimiä. Pupu kävelee maassa.* (H)
- *Pupu. Koska sillä on ruohoa.* (J)
- *Pupu, kun se menee ylimmäksi.* (P)
- *Kukko. Se on isoin ja nokkelin ja vahvin.* (E)
- *Kukko. Ne on niin isoja* (R)
- *Hiiri varmaan, koska sillä on tynnyri.* (O)
- *Hiiri. Sillä on tuo* (tynnyri). (Q)

Verbaalisen transitiivipäättelyn tehtävässä lapsen tuli päätellä kirjoitettujen vihjeiden perusteella, kuka oli kukin kuvan lapsista. Tutkituista koulutulokkaista seitsemän lasta osasi lukea kouluuntulovaiheessa, joista viisi lasta luki sujuvasti. Minä luin tekstit kaikille, jotka tarvitsivat apua. Lukiessani huomasin, että kun minä luin, saatoin tulla auttaneeksi lapsia heidän päättelyprosesseissaan. Enhän voinut lukea vain yhtä kertaa ja jättää tilannetta siihen. Uskon siis, että toistaessani vihjeitä, lapsella oli enemmän tarttumapintaa tehtävän ratkaisemiseen, kuin lapsella, joka luki sen itsenäisesti. Kuusi lasta ei onnistunut tehtävän päättelyssä ja yksi oikein vastanneista lapsista (S) näytti vain arvaavan ne oikein. Jälleen lapsi B, joka aiemminkin ilahtui haastavista tehtävistä, naurahti tehtävän nähdessään: *"Tämä on hankala."* Hän paneutui tehtävään itsenäisesti ja lopuksi myös tarkisti sen. Tehtävä oli oikein.

Loogisen päättelyn tehtäviin kuului myös luokkainkluusiotehtävä, jossa arvioitiin luokan ja sen alaluokan suhteen ymmärtämistä ja sen oikeaa käyttöä lukumäärien vertailussa. Kinnunen ym. (1994, 63) arvioivat samaa ensimmäisen vuoden lopussa, mutta heidän tutkimusraportistaan ei käy ilmi kuinka lapset hallitsivat kyseisen taidon. Tässä testissä lapsilta kysyttiin, kumpia kuvassa oli enemmän; kirahveja vai eläimiä. Kuvassa oli kaksi leijonaa, kaksi seepraa ja viisi kirahvia. Lapsi G antoi kysymykseen selkeän vastauksen: *"Eläimiä. Koska kirahvikin on eläin."* Hänen tavoin kuusi muuta lasta huomasi kysymyksen idean, mutta 12 lasta totesi kirahveja olevan enemmän. Yksi lapsi (C) totesi molempia olevan yhtä paljon. Loogisen päättelyn tehtävistä kuviosarjan jatkaminen onnistui 13 lapselta, kun taas seitsemän ei huomannut kuvioiden muuttumisen logiikkaa.

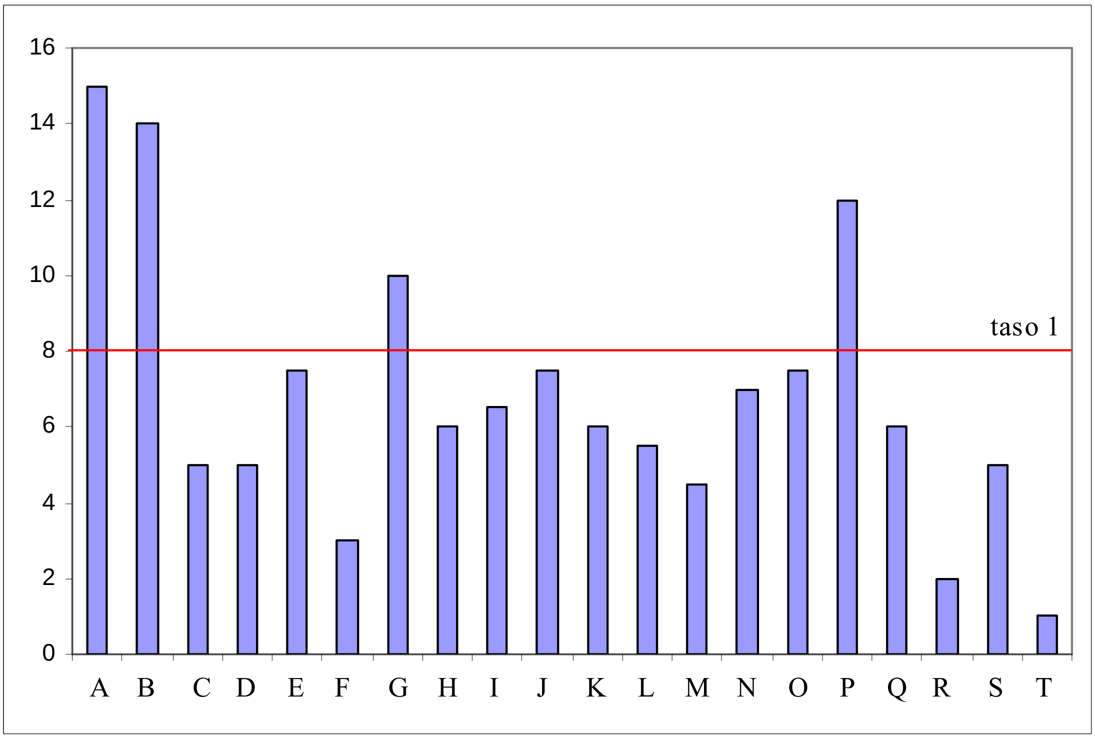
Luvullisen päättelyn tehtävässä lapsen tuli aluksi huomata, kuinka paljon poika oli tyttöä painavampi. Tämän jälkeen lapsen tuli keksiä, mitkä kaksi esinettä tytön tuli ottaa käsiinsä, jotta hän painaisi saman verran kuin poika. Tehtävässä onnistui vain viisi lasta (A, B, C, E ja P). Visuaalisen päättelyn tehtävä, joka vaati lapselta avaruudellista hahmottamiskykyä, osoittautui myös vaikeaksi. Kolmiulotteisesta piirroksesta osasi katsomalla laskea vain neljä lasta (A, B, G, K), että kuution rakentamiseen oli tarvittu kahdeksan palikkaa. Yksi lapsista (T) ei osannut rakentaa palikoilla samanlaista kuutiota ja kaksi lasta (D ja M) eivät onnistuneet rakentamaan mallikuvion näköistä, vaikkakin he näyttivät itse tyytyväisiltä suorituksiinsa. Muut lapset (13) onnistuivat tekemään samannäköisen rakennelman, mutta heistä vain seitsemän onnistui laskemaan oikein siihen käyttämiensä palikoiden määrän. Ylipäätään lapset laskivat rakennelmassa olevan palikoita neljästä kahteenkymmeneenneljään yleisimmän vastauksen ollessa kaksitoista.

Viitekehyksessä todettiin loogisen ajattelun tutkimista vaikeuttavan sen, ettei oppilas yleensä osaa kuvailla ajatuksiaan. Tämän testauksen osalta se ei muodostunut ongelmaksi, sillä tehtävissä oikea ratkaisu riitti osoittamaan lapsen ymmärryksen tason. Vain tasapainovaakatehtävässä kysyin perustelua lapsen vastaukselle, ja muutamaa lasta lukuun ottamatta he osasivat kielellistää ratkaisunsa. Yhtä matemaattisloogista tehtävää tehdessään yksi taidoissaan pisimmälle ehtineistä (lapsi A) selitti strategiaansa seuraavasti: *”Tää on vaikein. Kannattaa jättää vaikein viimeiseksi.”* Lopuksi hänellä ei ollut tälle vaikeimmalle kuin yksi vaihtoehto, eli strategia toimi hyvin.

Matemaattisloogista ajattelua ei voida jaotella yhtä selkeisiin vuosiluokittaisiin taitotasoihin kuin lukujonotaitoja ja aritmeettisia perustaitoja. Kuitenkin matemaattislooginen ajattelu on oleellinen osa lapsen matemaattista kykyprofiilia ja esimerkiksi Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa korostettiin alkuopetuksen osalta juuri matemaattisloogisen ajattelemisen kehittämistä. Tätä osa-aluetta ei voi siten jättää huomioimatta lapsen taitotasoa arvioitaessa vain sen vuoksi, että sille on vaikea asettaa vuosiluokittaisia pisterajoja. Vuosiluokkaisten rajojen sijaan osion maksimipistemäärästä voidaan erottaa ne tehtävät, jotka koulutulokkaalla tulisi kirjallisuuden mukaan olla hallinnassa ja näin ollen testin matemaattisloogisen ajattelun osuus on jaettavissa kahteen osaan.

Kun osiosta pystyi saamaan 16 pistettä, voitaneen koulutulokkaan odottaa saavan niistä puolet. Loogisen päättelyn tehtävistä luokkainkluusio ja haastavampi transitiivipäättelytehtävä ylittävät koulutulokastason, mutta ensimmäisen transitiivipäättelytehtävän ja kuviosarjan jatkamisen tulisi olla koulutulokkaalla jo hallinnassa, sillä nämä molemmat ovat lukukäsitettä edeltäviä taitoja. Hahmottamisen osiosta lapsen oletetaan koulutulokkaana hallitsevan lukumäärän säilyvyyden ja esiopetuskäytäntöjen perusteella heidän voisi olettaa hahmottavan kellonajoista täydet ja puolet tunnit. Esikoulun tehtäviin kuuluu myös tyypillisesti peilaamisen harjoituksia, joten symmetrian hahmottamisen osalta voitaisiin koulutulokkaan ajatella kykenevän puoleen näistä tehtävistä. Luvullisen ja verbaalisen päättelyn osiot ylittävät myös koulutulokastason, samoin kuin visuaalisen päättelyn tehtävistä tasokuvion tehtävät. Sen sijaan konkretian ja kolmiulotteisuuden tehtävät ovat jo koulutulokastasolla hallittavissa olevia taitoja.

Viitekehyksessä todettiin, että loogisen päättelyn taidoissa hajonta kunkin ikäluokan sisällä on laajaa. Sen osoittaa myös seuraava kuvio, jossa näkyy kunkin lapsen saamat pisteet matemaattisloogisen ajattelun tehtävissä. Kinnusen ym. (1994, 65) tutkimuksessa todettiin 67 % hallinneen koulutulokkaana arvioidut matemaattisloogiset tehtävät ja vastaavasti neljällä prosentilla olleen selviä puutteita matemaattisloogisessa ajattelussaan. Tässä testissä mukana oli vaihtelevampia tehtävätyyppejä ja tasoltaan pidän niitä huomattavasti Kinnusen ym. tutkimusta haastavampina. Näin ollen tulokset eivät ole vertailukelpoisia. Oheisesta kuviosta näkyy kuitenkin hyvin selvästi ajattelutaitojen erot. Kun lapsille (A ja B) matemaattislooginen ajattelu on hyvin selkeää, ovat samat tehtävät lapsille (R ja T) aivan liian haastavia.

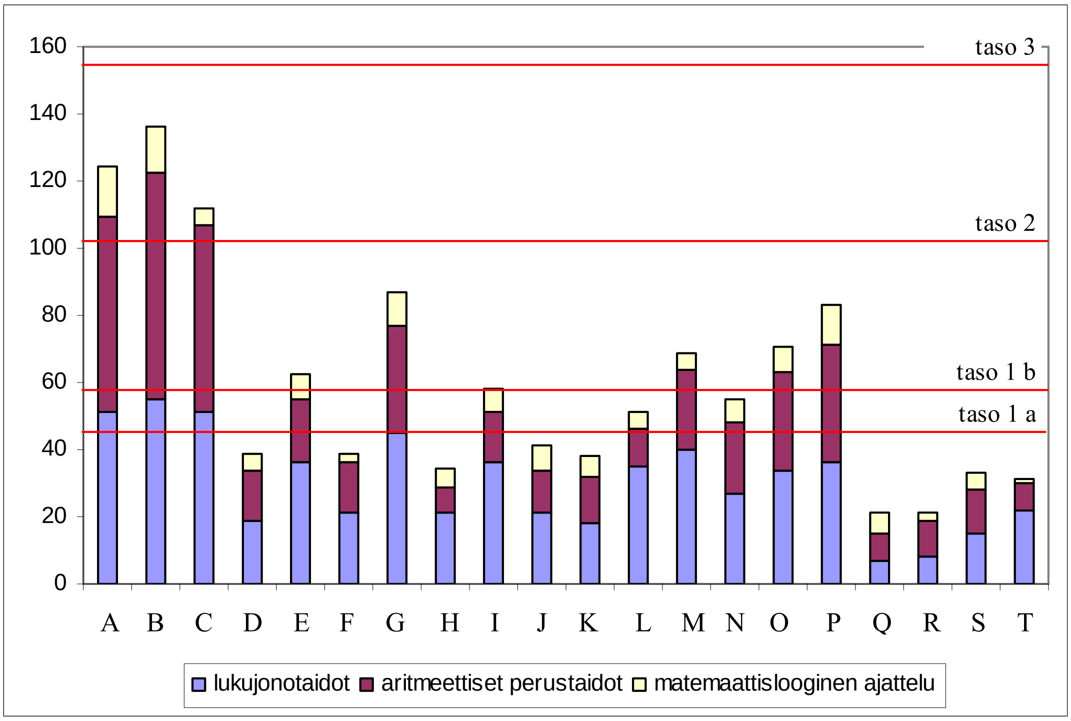


taso 1: koulutulokastaso

KUVIO 3. Lapsikohtaiset suorituserot matemaattisloogisessa ajattelussa

Kuviosta 3 näkyy selkeästi myös kolmen edistyneimmän lapsen joukon supistuminen kahdeksi lapseksi. Lapsi C oli kolmen kärjessä lukujono- ja aritmeettisilta taidoiltaan, mutta jää ajattelutaidoiltaan alle keskitason. Luvussa Matemaattisesti lahjakkaan tunnistamisen problematiikka (luku 4.2) todettiin, että selkein merkki lapsen älykkyydestä lienee hänen selviytyminen erilaisista matemaattisloogista ajattelua vaativista tehtävistä. Kun älykkyys on puolestaan yksi kolmesta lahjakkuuden osatekijästä, voidaan näin ollen nopeaa ja taitavaa laskijaa (lapsi C) pitää vain nopeana laskijana, sikäli kun hän ei osoittanut taitavuutta matemaattisloogista ajattelua vaativissa tehtävissä. Tämän testin perusteella voitaisiin siis todeta lapset (A ja B) matemaattisesti lahjakkaiksi, mutta kolmannen lapsen (C) osalta kyse on lukujonotaidoissaan ja aritmeettisissa taidoissaan pitkälle edenneestä lapsesta. Onkin mielenkiintoista selvittää, eroaako lapsi C ylöspäin eriyttävien lisätehtävien suorittamisessa lapsista A ja B. Tämän matemaattisen kykyprofiilin myötä voitaisiin olettaa, että hänelle erilaiset päättelytehtävät olisivat haasteellisempia kuin matemaattisloogisen ajattelun suhteen taitavilta lapsilta A ja B.

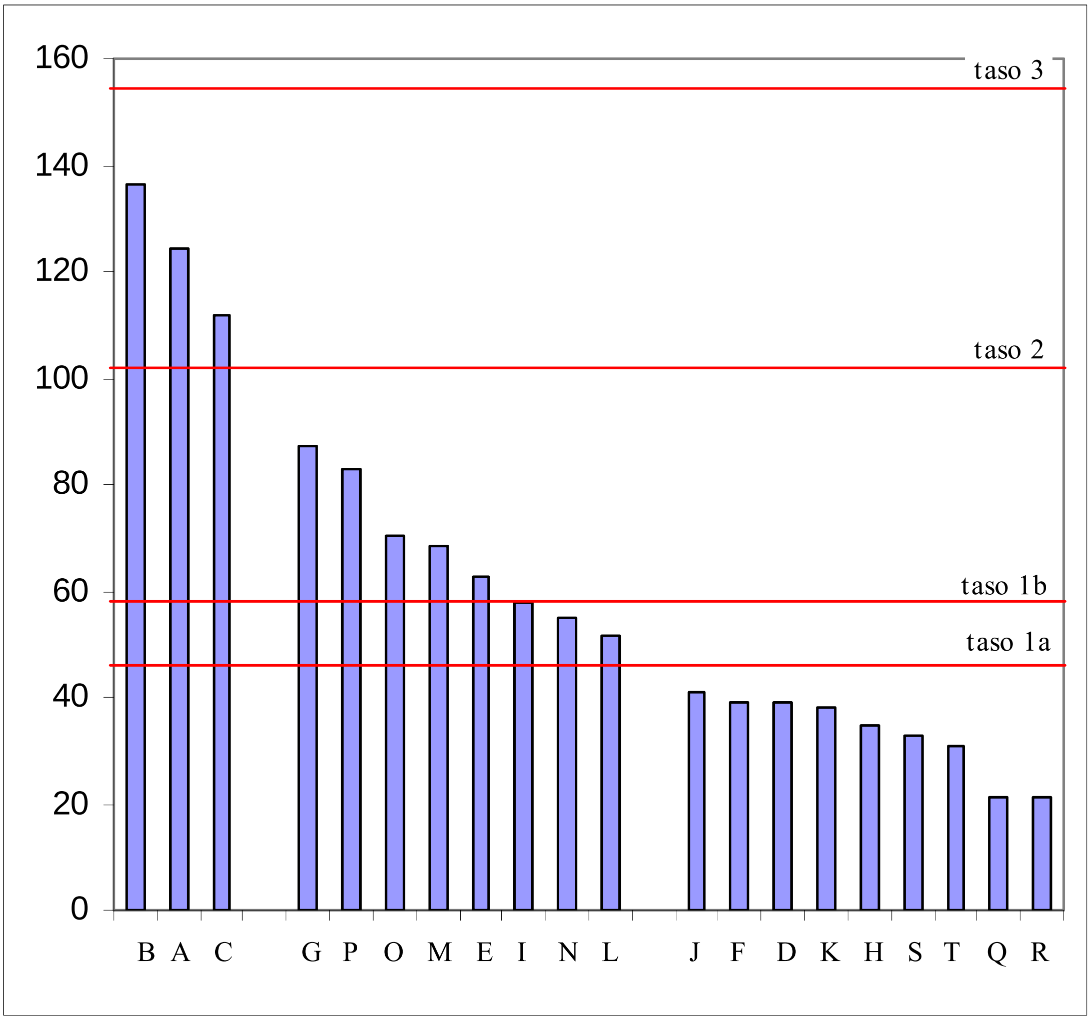
7.1.4 Yhteenveto lasten matemaattisista suorituseroista lapsikohtaisesti tarkasteltuna



taso 1a: koulutulokastaso konkreettisesti laskien
taso 1b: koulutulokastaso sisäisesti laskien
taso 2: 1. luokan lopputaso
taso 3: 2. luokan lopputaso

KUVIO 4. Koulutulokkaiden matemaattiset suorituserot lapsikohtaisesti tarkasteltuna

Kuvioon 4 on koottu yhteen jokaisen lapsen pisteet kullakin kolmella eri osa-alueella. Taitotasojen rajat on perusteltu kunkin alaosion tulosten yhteydessä. Yhteenvetokuviosta nähdään, että lapset ovat kouluun tullessaan matemaattisilta taidoiltaan aivan eri tasoilla eikä heistä voida puhua yhtenäisenä joukkona. Samoin keskiarvon laskeminen lasten taitotasosta olisi ajanhukkaa, sillä keskiarvotason ymmärtäminen ei palvelisi kuin sitä lasta, joka juuri sillä tasolla sattuisi olemaan. Sen sijaan ainoa lapsia palveleva tulosten tulkintatapa olisi nähdä lapset tasoryhminä, jotka mahdollistaisivat hyvin laadullisen eriyttämisen. Siihen kuitenkin suhtaudutaan yleisesti hyvin ennakkoluuloisesti ja epäilevästi. Tasoryhmien ajatellaan tyypillisesti luokittavan lapset ja siten jopa sinetöivän heidän tulevaisuutensa ja jatko-opintomahdollisuudet. Toki tällainen mahdollisuus olisi olemassa, jos lapset luokiteltaisiin vain kouluun tullessaan ja kutakin ryhmää ruokittaisiin ennakko-oletusten mukaisesti, sillä opetuksella on suuri vaikutus lapsen kehittymiseen. Kuitenkin opetuksen tulisi aina pohjautua lapsen tasoon ja vain lapsen lähikehityksen vyöhykkeelle kohdennettu opetus tarjoaa lapselle mahdollisuuksia oppia. Kuviossa 5 lapset ovat ryhmiteltyinä matemaattisten lähtötasovalmiuksien mukaisesti kolmeen ryhmään.



taso 1a: koulutulokastaso konkreettisesti laskien
taso 1b: koulutulokastaso sisäisesti laskien
taso 2: 1. luokan lopputaso
taso 3: 2. luokan lopputaso

KUVIO 5. Koulutulokkaat ryhmiteltynä matemaattisten lähtövalmiuksien mukaisesti

Ryhmittelykuviosta 5 nähdään, että lapset A, B ja C muodostavat oman taitotasoryhmänsä. He pystyisivät yhdessä toimien tukemaan toisiansa, koska ovat matemaattiselta kehitykseltään samalla tasolla. Kun heille suunnattaisiin haasteellisempia tehtäviä, he saisivat kokea muiden tavoin myös oppimisen iloa, joka heiltä jäänee muuten kokematta. Ovathan he jo kouluun tullessaan ylittäneet sen tason, johon ensimmäisen luokan opetuksella pyritään. Lapset G ja P voisivat hyvinkin pian saavuttaa pisimmälle edistyneimmän ryhmän eli lapsen alkuarviointi ei lukitse lasta mihinkään kategoriaan vaan antaa vain lähtökohdan lapsen ohjaukselle ja oppimisen arvioinnille.

Kahdeksan lasta eli lapset E, G, I, L, M, N, O ja P ovat sillä tasolla, johon koulun opetus tyypillisesti kohdentuu. Heidän suhteensa kysyntä ja tarjonta parhaiten kohtaavat eli kun opetus vastaa näiden lasten lähikehityksenvyöhykettä, voidaan heidän olettaa kokevan opetuksen mielekkäänä, ja tarjoavan siten lapsille ilon ja oivalluksen hetkiä. Sen sijaan yhtenäinen kirjasidonnainen opetus olettanee yhdeksän lapsen (D, F, H, J, K, Q, R, S ja T) lähtötason vahvemmaksi kuin mitä se on. Toisaalta opettajan erityishuomio kohdistuu tyypillisesti luokan heikoimpiin ja se voi hyvinkin riittää turvaamaan näiden lasten pysymisen opetuksessa mukana. Ainoastaan kaksi lähtötasotaidoiltaan heikointa lasta Q ja R näyttäisivät olevan todellisessa vaarassa pudota pois yhtenäisen opetuksen vauhdista erityisesti juuri olemattomien lukujonotaitojen vuoksi.

Tasoltaan heikoimman ryhmän lapsille oli yhtenäistä muita heikommat lukujonotaidot, ja jos heidän kanssaan lähdettäisiin heti niitä rakentamaan ja vahvistamaan, se voisi maksaa itsensä takaisin hyvinkin pian. Totesihan Kinnunenkin (2003, 17), että alkuopetuksessa tulisi painottaa juuri lasten lukujonotaitojen kehittymistä. Hän kuitenkin toteaa ongelmaksi muodostuvan sen, että koulutulokkaiden välillä on niin suuria eroja lukujen hallinnan ja tämän myötä heidän tarpeidensa mukaisen opetuksen suhteen. Lasten tason mukainen opetus poistaisi tämänkaltaiset ongelmat, kun kunkin ryhmän kanssa voitaisiin keskittyä juuri heidän kannaltaan olennaisimpiin asioihin. Kuitenkin eritasoisten lasten huomioiminen vaatisi sekä lisäresursseja alkuopetukseen että asian parempaa huomioimista opettajankoulutuksessa. Tall (2001, 35) tähdentää myös opettajankoulutuksen merkityksellisyyttä pienten lasten matematiikan opetuksessa. Opiskelijat tarvitsisivat selkeän käsityksen matematiikan kognitiivisesta kehityksestä eikä vain tietoa siitä, kuinka matematiikkaa tehdään. Näin opettajien olisi helpompaa ymmärtää miksi lapset tekevät matematiikkaa eri tavoilla ja miksi he kohtaavat siinä vaikeuksia.

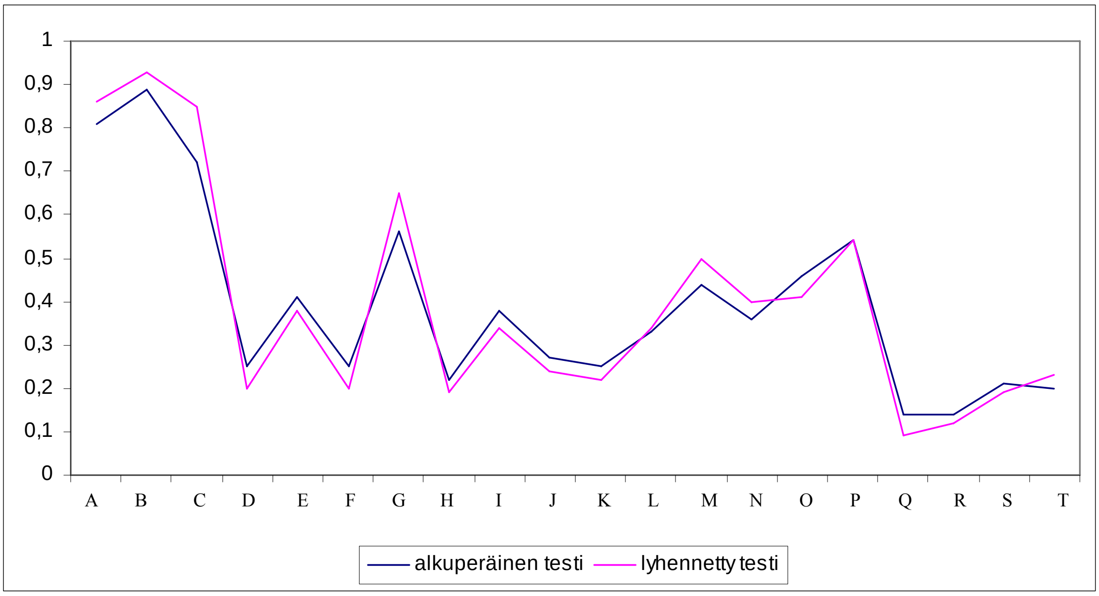
Kuten viitekehyksessä todettiin, esi- ja alkuopetuksen ei nähdä tukevan lähtökohdiltaan heikompien lasten matemaattisten taitojen kehitystä (Hannula & Lepola 2006b, 130–131). Näkisin tämän olevan seurausta siitä, että opetus lähtee suhteessa heikoimpiin lapsiin heti alun perin liian korkealta tasolta, jolloin he joutuvat vain räpistelemään muiden mukana. Mutta kuten aiemminkin on tullut ilmi, ei matemaattisesti edistyneistä ole juuri kukaan kirjoittanut juuri mitään. Olisikin mielenkiintoista tutkia, kuinka näiden lasten matemaattisen kehityksen käy, sikäli kun heidän tarpeisiin ei vastata.

7.2 Lähtötasotestistä ensiluokan opettajan työkalu matemaattisten lähtövalmiuksien kartoittamiseen

Toisena tutkimustehtävänä oli tiivistää tutkimusta varten luodusta lähtötasotestistä lyhyempi ja ytimekkäämpi versio, jota opettaja voisi käyttää työkaluna ensiluokkalaisten matemaattisen lähtötason mittaamisessa. Lyhyempään testiin poimittiin ne osiot, jotka korreloivat mahdollisimman voimakkaasti joko kyseisen osion tai koko testin maksimipistemääriin. Tämä korrelaatiotaulukko ja muut korrelaatio- ja faktorianalyysit ovat liitteessä 3. Taulukkoihin on tummennettu ne tunnusluvut, jotka osoittivat oleellisimmat osiot ja joiden avulla lyhyemmän testin kehittelyä jatkettiin. Näistä osioista osa muodostui yhdestä ja osa useammista kysymyspatteristoista. Samanlaisen korrelaatiovertailun avulla löydettiin jokaiselle osiolle sen keskeisimmät kysymykset. Liitteessä 4 on esiteltynä työkaluksi soveltuva lähtötasotesti pisteytysohjeineen ja liitteessä 5 on taulukkomallipohjat, joihin opettaja voi koota oppilaiden tulokset arvioidessaan luokan lähtötasoa.

Testi, jolla selvitin koulutulokkaiden matemaattista lähtötasoa, oli sekä teorian että käytännön materiaalien pohjalta rakennettu. Siitä muodostui siten melko kattava, monipuolinen ja työläs paketti. Korrelaatio- ja faktorianalyysien avulla testi tiivistyi siten, että osa-alueiden määrä putosi puoleen ja muutamista osa-alueista mukaan valikoituivat vain oleellisimmat kysymykset. Lopullisten testikysymysten valikoinnissa huomioitiin korrelaatio- ja faktorianalyysien tunnuslukujen lisäksi testi kokonaisuutena eli tehtävien monipuolisuus ja testin käytännöllisyys.

Lyhyemmällä testillä lasten pistemäärät luonnollisesti muuttuivat suhteessa maksimipistemäärään, sillä lapset olivat onnistuneet eri tavoin eri tehtävissä ja nyt noista tehtävistä huomioitiin vain osa. Kuitenkin keskimääräisesti lasten pistemäärät suhteessa maksimipisteisiin säilyi täysin samoina. Seuraavasta taulukosta näkyy lapsikohtaisesti kunkin saamien pisteiden ja maksimipistemäärien suhdeluku sekä alkuperäisen että lyhennetyn testin suhteen.



KUVIO 6. Tutkimuksessa käytetyn testin ja työkaluksi muotoillun testin pistemäärien suhdeluvut lapsikohtaisesti tarkasteltuna.

Osa lapsista olisi siis lyhyemmän testin mukaan menestynyt aavistuksen paremmin ja osa hieman huonommin kuin pitemmän testin perusteella. Kuvion perusteella näyttäisi siltä, että lyhyempi testi antaisi keskitasoa paremmin suoriutuville lapsille pienen etulyöntiaseman, mutta kokonaisuutena tuo ero on kuitenkin varsin pieni. Jokainen lapsi sijoittui molemmissa testeissä samoihin tasohaarukkoihin ja kuvioita vertaillessa ero näkyy selvästi vain muutaman lapsen kohdalla.

7.3 Ylöspäin eriyttävien lisätehtävien haasteellisuus ja mielekkyys matemaattisesti lahjakkaille lapsille

Kukin kolmesta pitkälle edistyneimmästä lapsesta suoritti kirjasarjoista valikoidut vaikeimmat monistettavat lisätehtävät, joita oli yhteensä 24 kappaletta. Näin tehtäväarviointeja tuli yhteensä 64 kappaletta. Tehtävät tarkistettiin siten, että kustakin tehtävästä annettiin pisteet nollasta yhteen. Lapsi A suoritti tehtävät 73 prosenttisesti oikein, lapsi B 79 prosenttisesti ja lapsi C 46 prosenttisesti. Näin ollen he suoriutuivat tehtävistä alkutestauksessa osoitetun järjestyksen mukaisesti. Tavallisessa luokkatilanteessa he olisivat oletettavasti pystyneet parempaan tulokseen, kun opettaja olisi ohjeistanut tai neuvonut tehtävän alkuun pääsemisessä. Täysin omatoimiseen ja -tahtiseen suorittamiseen nähden katson näiden lisätehtävien olleen lapsille melko lailla liian helppoja.

Seuraavissa ristiintaulukoinneissa muuttujat on luokiteltu kahteen kategoriaan seuraavalla tavalla: tehtävä oli oikein, jos lapsi sai siitä yli puolet eli 0,51-1 pistettä, lapsi oli varma ratkaisunsa oikeellisuudesta, jos hän oli valinnut kohdan erittäin varma, varma tai melko varma ja lapsi piti tehtävää helppona, jos hän oli valinnut vaihtoehdon erittäin helppo, helppo tai keskinkertainen. Tehtävän mukavuudesta lomakkeessa oli vain vaihtoehdot tehtävä oli mukava tai tehtävä ei ollut kiva.

On mielenkiintoista tarkastella, kuinka hyvin ensiluokkalaiset kykenevät arvioimaan osaamistaan. Taulukosta 16 nähdään, että 78 prosenttisesti lapset olivat varmoja siitä, että olivat laskeneet tehtävän oikein, vaikka lasten tehtävien oikeellisuuden keskiarvo oli 66 %. Lapset siis lievästi yliarvioivat osaamistaan. Oikein lasketuista tehtävistä lapset olivat selkeästi varmoja osaamisestaan. Itsetunnon kannalta lienee tärkeämpää, että lapset luottavat itseensä, vaikka he eivät olisikaan osanneet tehdä tehtävää tarkoitetulla tavalla, kuin että he olisivat epävarmoja osaamisestaan huolimatta. Silloin kun lapsi ei ollut suoriutunut tehtävästä odotetulla tavalla, varmuus ratkaisun oikeellisuudesta jakautui melko tasaisesti varmuudeksi ja epävarmuudeksi. Kun kyse on hallinnan tunteesta, tunne siitä, että on osannut tehtävän, on merkityksellisempää kuin se, onko tehtävä todellisuudessa oikein. Itsearvioinnin kannalta näyttäisi siis siltä, että koulutulokkaat pystyvät arvioimaan hyvin osaamistaan, mutta heikommin epäonnistumistaan.

TAULUKKO 16. Ensiluokkalaisten kyky arvioida osaamistaan

			varmuus oikeellisuudesta		Total
			varma	epävarma	
tehtävän oikeellisuus	väärin	Count	15	11	26
		%	58%	42%	100%
	oikein	Count	41	5	46
		%	89%	11%	100%
Total		Count	56	16	72
		%	78%	22%	100%

p = 0,002

Tehtävistä 42 % oli lasten mielestä mukavia. Sieppi ja Tuomi (194, 119) totesivat, että ilman motivaatiota oppimista ei tapahdu ja siksi opetettavaksi valittujen sisältöjen tulee olla mielekkäitä. Brunell (1993, 49–50) jatkoi, että lapsen kokiessa työniloa, hän itse tuskin huomaa, miten kovasti hän työskentelee. Lisäksi Yrjönsuuri ja Yrjönsuuri (2004, 124) totesivat, että ihminen tekee sitä, mitä hän pitää omalta kannaltaan mielekkäänä ja merkityksellisenä. Seuraavien taulukoiden avulla tarkastellaan sitä, onko tehtävän mukavuus yhteydessä siihen, kuinka varmasti lapsi koki ratkaisseensa sen oikein tai kuinka helpoksi hän koki tehtävän. Edellä mainittua hallinnan tunteen merkittävyyttä tukee myös taulukon 17 tulos, jonka mukaan varmuus tehtävän oikeasta ratkaisemisesta on täysin yhteneväinen tehtävän mukavuuden kanssa. Toisaalta varmuus tehtävän oikeasta suorittamisesta ei tarkoita sitä, että tehtävä tuntuisi automaattisesti myös mukavalta eli mukavuuden kokemukseen vaaditaan myös muita syitä kuin hallinnan tunne tehtävän oikeasta suorittamisesta.

TAULUKKO 17. Ensiluokkalaisten kokemus tehtävän mukavuudesta suhteessa varmuuteen tehtävän oikeellisuudesta

			varmuus oikeellisuudesta		Total
			varma	epävarma	
lapsen kokemus tehtävän mukavuudesta	mukava	Count	30	0	30
		%	100%	,0%	100%
	ei kiva	Count	26	16	42
		%	61%	38%	100%
Total		Count	56	16	72
		%	78%	22%	100%

p = 0,000

TAULUKKO 18. Ensiluokkalaisten kokemus tehtävän mukavuudesta suhteessa tehtävän helppouteen

			kokemus mukavuudesta		
			mukava	ei kiva	Total
lapsen kokemus tehtävän helppoudesta	helppo	Count	29	23	52
		%	56%	44%	100%
	vaikea	Count	1	19	20
		%	5%	95%	100%
Total		Count	30	42	72
		%	42%	58%	100%

p = 0,012

Tehtävistä 72 % oli lasten mielestä helppoja. Yllä oleva taulukko osoittaa, että vaikeaksi koettu tehtävä ei ole juuri ikinä (95 %) ensiluokkalaisen mielestä kiva. Tämä vastannee Malatyn (1993, 16) näkemystä siitä, että ymmärtäminen tuottaa lapsille oppimisen iloa ja sitä kautta korvaamatonta motivaatiota. Vaikuttaisi siis siltä, että tämän ikäiset lapset tarvitsevat ohjausta siihen, että vaikea tehtävä osattaisiin kohdata miellyttävänä haasteena. Eli niin kuin Kallonen-Rönkkö (1986, 42) ja Ilmavirta (1995, 37) totesivat, asennekasvatuksen avulla lapset saadaan oppimaan pitämään ajatteluponnistuksista. Tähän päästääkseen opettajan olisi luotava luokkaan kannustava, yrittämisen ja erehtymisen salliva ilmapiiri.

7.4 Tutkimustulosten luotettavuuden arviointia

Luotettavuus voidaan jakaa ulkoiseen ja sisäiseen validiteettiin, joista ulkoinen tarkastelee sitä, kuinka yleistettävä tutkimus on (esim. Metsämuuronen 2000c, 21). Tämän tutkimuksen aineisto koulutulokkaiden matemaattisen lähtötason tutkimiseen suoritettiin klusteriotannalla. Eli kun yhteen koululuokkaan perusjoukko on jaettu valmiisiin ryppäisiin, saadaan heterogeeninen tutkimusaineisto valitsemalla näistä yksi rypäs eli yksi koululuokka silloin, kun oppilaat eivät ole valikoituneet kyseiselle luokalle minkäänlaisen karsinnan kautta. Periaatteessa voitaisiin siis ajatella, että hajonta tämän tutkimuksen lasten kesken voisi olla tyypillisesti samantasoista kuin missä tahansa samansuuruisessa ensiluokassa. Myös Saarela-Kinnunen ja Eskola (2007, 188) toteavat, että yksi tapa valita tapaustutkimuksen tutkimuskohde on valita se niin, että tutkittava tapaus on mahdollisimman tyypillinen. Näin toimien tulokset ovat helpoimmin siirrettävissä toisiin samankaltaisiin tapauksiin. Tutkimuksen sovellusarvon arvioimisen vastuuta kantaa tosin yhtä lailla myös tutkimustulosten hyödyntäjä, jonka tulee arvioida miten samankaltaisia tutkittu ympäristö ja sovellusympäristö ovat (Tynjälä 1991, 390). Ylipäätään yleistettävyyden problematiikka koskenee aina kaikkia tutkimusasetelmia, joiden aineistoa ei ole koottu tilastollisen otannan logiikalla. Toisaalta tällä tutkimuksella ei lähdetty edes hakemaan yleistettävyyttä, vaan lähinnä tyypillisen koululuokan kautta tutkimustulosten sovellettavuutta.

Mittarin luotettavuudella on luonnollisesti suora yhteys tutkimuksen sisäiseen luotettavuuteen. Sisäistä validiteettia voidaan tarkastella niin sisällön validiteetilla, rakennevaliditeetilla kuin kriteerivaliditeetilla, joista sisällön validiteetti on tämän mittarin oleellisin sisäisen validiteetin osatekijä. Sisällön validiteetin tarkastelussa tutkitaan, ovatko mittarissa tai ylipäänsä tutkimuksessa käytetyt käsitteet teorian mukaiset, ovatko ne oikein operationalisoidut ja kattavatko käsitteet riittävän laajasti kyseisen ilmiön. Viimeiseen liittyen ilmiötä ei tarvitse tutkia kokonaisuudessaan, jos osa ilmiöstä poistetaan tietoisesti. (Metsämuuronen 2000c, 21–22.) Kuten luvussa Lähtötasotestin esittely (luku 6.2) totesin, tässä tutkimuksessa käytetystä testistä jätettiin tietoisesti ja perustellusti pois muun muassa allekkainlaskut.

Mittauksella, joka ei ole validi, ollaan siis mittaavinaan haluttua asiaa, mutta mitataankin siihen välillisesti yhteydessä olevaa tekijää (Metsämuuronen 2000c, 21). Tähän liittyen kyseisessä tutkimuksessa mitattiin järjestyslukuja tehtävällä, jossa lapsen tuli ympyröidä monisteesta ensimmäinen lapsi tai vaikkapa laittaa viimeinen lapsi kolmion sisään. Jokainen neljästä tehtävästä edellytti lapselta sekä käsitteiden hallintaa että työmuistin kuormittavuutta. Näin testin tekemiseen saatiin vaihtelua, mutta tehtävän arvioinnissa huomioitiin vain järjestysluvun oikeellisuus. Myös testitilanteessa, jos lapsi ei näyttänyt osaavan tehtävää, lasta pyydettiin edes osoittamaan kysytty hahmo. Tällä tavoin jokaisen kysymyksen päämäärätietoisuus oli koko ajan läsnä niin testiä rakentaessa, testejä tehtäessä kuin tulosten arvioinnissa.

Testin luotettavuuteen pyrittiin myös siten, että samaa taitoa mittaavia osioita tai yksittäisiä tehtäviä oli useita. Esimerkiksi lukujonotehtävissä pyrittiin mahdollisimman luotettaviin tuloksiin kysymällä saman osa-alueen hallintaa useamman luvun kautta. Testauksen luotettavuuteen vaikutti myös tavoitetietoisuus testitilanteissa, jonka mukaan tärkeintä oli saada selville lapsen oikea taitotaso. Tilanteen pääosassa oli siis lapsi eikä laadittu testilomake. Jos lapsi ei esimerkiksi osannut kysyttyä tehtävää, ehdotin lapselle laskemista sormien avulla. Lisäksi jos lapsi ei osannut tehtävää, saatoin silti yrittää vielä seuraavaa, jos epäilin että kyseessä saattoi olla inhimillinen virhe eikä lapsen taitotason pää. Osittain testin luotettavuudesta puhuu sekin, että testi oli riittävän vaikea ja näin kukaan lapsista ei saavuttanut maksimipistemäärää muuten kuin lukujonotaidoissa.

8 KOULUTULOKKAIDEN HAASTEET MATEMATIIKAN ALKUOPETUKSELLE

8.1 Matemaattisesti kirjavat koulutulokkaat

Kuten viitekehyksessä todettiin, käytännön koulutyössä osan koulutulokkaista on huomattu osaavan operoida lukualueella 0–100 samaan aikaan kun osalle tuottaa ongelmia lukualueella 1–5 työskentely. Tällä tutkimuksella tuo käytännössä tuttu tilanne todennettiin. Tutkimuksia lasten matemaattista taidoista ja niiden kehittymisestä on tehty suhteellisen vähän verrattuna lasten lukutaidon tutkimuksiin. Kuitenkin vain tutkimusten kautta saadaan herätettyä yleistä mielenkiintoa ja nostettua asian tärkeyttä esille. Mielestäni matemaattinen eriyttäminen on odottanut jo aikansa ja ansainnut nyt paikkansa nousta keskustelujen, pohdintojen ja toivottavasti myös toimintatapojen uudistamisen keskiöön. Tämä edellyttää tosin sitä, että luokanopettajat ottavat asian omakseen. Koulujärjestelmämme karu totuus lienee se, että erityisopettajan työn kentässä ensisija on kielellisillä heikkouksilla ja erityistä tukea tarvitsevien määrän jatkuvasti kasvaessa matemaattisesti lahjakkaat eivät todennäköisesti kuulu erityisopettajan priorisointilistan kärkeen.

Tutkituista koulutulokkaista osa aloitti koulunkäyntinsä todella vahvalla ja varmalla lukujonotaidolla. Kun nämä lapset kykenivät nimeämään esimerkiksi edellisen ja seuraavan luvun jopa satojen alueella, ei sama tehtävä onnistunut heikommilta lapsilta laisinkaan. Lasten matemaattiset lähtövalmiuserot olivat jokaisella osa-alueella suuria ja tulos-osiossa esittelyissä kuvioissa lasten taitojen kirjavuus näkyy todella selvästi. Tuntuukin melko erikoiselta ajatella taidoiltaan näin heterogeenistä joukkoa yhtenäisenä opetettavana ryhmänä. Lasten lähtötasotaidot jäänevät kuitenkin käytännössä usein huomioimatta, sillä koulutyö aloitetaan usein ilman lähtötasotestejä. Toisekseen matematiikan kirjasarjoihin kuuluvat lähtötasotestit ovat hyvin suppeita ja lisäksi niiden käytännön hyöty epäilyttää. Silloinkin kun testi tehdään, saatetaan sillä vain todentaa tilanne ilman, että tuloksia todella hyödynnetään opetuksen eriyttämiseen. Ehkä näiden testien tavoitteena onkin löytää vain taidoiltaan heikoimmat lapset, sillä näissä testeissä matemaattisesti pitkälle edistyneet lapset eivät pysty näyttämään taitojensa vahvuutta.

Lapsi voi ymmärtää aritmeettiset operaatiot vain hallitsemansa lukualueen sisällä ja tutkimusta tehdessäni minulle kristallisoitui lukujonotaitojen merkitys aritmeettisia operaatioita edeltävänä taitona. Näin ollen ajatus lapsesta, joka ei hallitse lukujonoa, mutta joutuu silti aloittamaan aritmeettisten operaatioiden opiskelun, tuntuu hyvin nurinkuriselta. Kuitenkaan meidän perinteinen kirjasidonnainen toimintakulttuuri ei anna tälle pohjatyölle aikaa eikä mahdollisuuksia. Yhtä hassulta tuntuu se, että lapset, jotka hallitsevat täysin sujuvasti niin lukujonotaidot satojen alueella kuin aritmeettiset operaatiot kymmenten lukualueella, aloittavat matematiikan opiskelun aivan alkeista. Äidinkielessä eriyttäminen on enemmän jo tätä päivää ja sujuvat lukijat ja kirjoittajat lähtevät heti liikkeelle omalta tasoltaan. Tämä eriyttäminen huomioidaan koko oppiaineessa eikä vain tunnin loppuun jäävien lisätehtävien kautta, niin kuin matematiikassa tyypillisesti tehdään. Matematiikassa sen ajatellaan ajattelematta riittävän ja suuremman eriyttämisen eriarvostavan lapsia.

Ainoa lapsia kunnioittava ja heidän oppimistaan palveleva tulosten tulkintatapa olisi nähdä lapset tasoryhminä, sillä opetuksen tulisi aina pohjautua lapsen tasoon ja vain lapsen lähikehityksen vyöhykkeelle kohdennettu opetus tarjoaa lapselle mahdollisuuksia oppia. Luonnollisesti, jos alkuopetusta eriytettäisiin ja yksilöllistettäisiin nykyistä enemmän, sitä ei olisi myöskään tarkoituksenmukaista mitata yhtäaikaisilla yhtenäisillä kokeilla. Kun pisimmälle edistyneille tarjottaisiin haasteellisempia tehtäviä ja annettaisiin mahdollisuus vertaistukeen, he pääsisivät myös kehittymään taidoissaan eteenpäin. Toinen ryhmä, joka tarvitsisi erityistoimenpiteitä, löytyy todella heikon lukujonotaitojen omaavista lapsista. Kaikki muut sijoittuivat joko sille tasolla, johon koulun opetus tyypillisesti kohdentuu tai jäivät sen alapuolelle, jolloin he saavat siten opettajan erityistä huomiota ja tukea. Näin ollen tämä tutkimus ei tue viitekehyksessä mainittuja tutkimuksia ja havaintoja, joiden mukaan esimerkiksi 95 % esikouluikäisistä hallitsi ensimmäisen luokan syyslukukauden matematiikan oppimäärän tai että matematiikan opetuksesta ensimmäisen luokan syyslukukaudella hyötyisi vain hyvin pieni osa.

Tämän tutkimuksen lapset suoriutuivat useissa yksittäisissä tehtävissä huomattavasti paremmin kuin aiempien tutkimusten lapset. Esimerkiksi Malisen (1980) tutkimista koulualokkaista 36 % (N: 25) osasi nimetä sekä yhtä suuremman että yhtä pienemmän luvun kuin kolme, mutta tämän tutkimuksen koulualokkaista 95 % pystyi samaan ja Kinnusen ym. (1994, 67) tutkimuksessa 17 % (N: 222) koulutulokkaista osasi helpon tehtävän alle viiden lukualueella lukujen osittamisen ja koonnin osiossa, mutta tässä tutkimuksessa peräti 85 % lapsista selviytyi siitä. Olisiko tällainen yleinen kehitys selitettävissä nykyisellä esikoulukulttuurilla, jota ei aiempien tutkimusten aikana vielä ollut?

Joukkojen vertailu oli useille, jopa keskitasoa paremmille lapsille, vaikeaa. Enemmän ja vähemmän kuin -käsitteiden hallinta auttaisi lasta yhteen- ja vähennyslaskujen ymmärtämisessä ja siksi näiden käsitteiden systemaattiseen harjoitteluun kannattaisi panostaa jo esikoulussa. Samoin lapsia tulisi jo ennen koulunkäynnin alkamista rohkaista luettelemaan lukuja pitkälle eteenpäin ja taaksepäin sekä liikkumaan tietyllä tavalla lukujonossa hypellen. Kaiken kaikkiaan esimerkiksi lukujonotaitojen merkityksellisyyttä, lukumäärän säilyvyyttä, luokittelua ja vertailua tulisi siis esikoulussa korostaa nykyistä enemmän. Samoin niin esikoulussa kuin koulussa tulisi huomioida se, että lapset oppivat ajattelemaan matematiikkaa kuullessaan toisten selittävän laskustrategioitaan ja sanallistaessaan niitä itse. Tällainen keskustelevampi ote matematiikan opetuksessa palvelisi varmasti nykykäytäntöä paremmin lasten oppimista.

Tutkituista koulutulokkaista kolme oli jo kouluun tullessaan ylittänyt taitotason, jonka lasten odotetaan saavuttavan ensimmäisen kouluvuoden jälkeen. Yhtenäisen opetuksen taso ei todennäköisesti tule haastamaan heitä kehityksessään eteenpäin muutoin kuin esimerkiksi geometrian alueella, joka rajattiin testistä pois sen vuoksi, että siihen liittyviä käsitteitä lapset eivät juuri kohtaa muualla kuin kouluopetuksen piirissä. Miltä lapsesta mahtaa tuntua se, että opetus ei haasta lasta kehittymään? Viekö se motivaation koko oppiaineelta, kun lapsi ei pääse kokemaan oppimisen iloa? Vai iloitseeko tämän ikäinen lapsi siitä hallinnan tunteesta, jota hän kokee osatessaan kaiken mitä opetetaan? Saadakseni tähän edes alkeellisen vastauksen, kysyin tutkimuksen lapsilta ensimmäisen kouluvuoden loppuessa mielipiteet eri oppiaineista. Mielipiteet jakautuivat niin, että matematiikka lukeutui kymmenellä lapsella mieliaineiden joukkoon ja kahdeksalla lapsella vastenmielisten aineiden joukkoon. Kaksi lasta ei ollut tuolloin paikalla. Huomionarvoista on se, että alkutestauksen mukaan kaksi lahjakkainta lasta pitivät matematiikasta ja kaksi heikointa eivät. Näin ollen tässä iässä hallinnan tunne näyttäisi olevan vahvempi tekijä motivaatiossa kuin mahdollinen turhautumisen tunne. Tämäkin asia olisi tarkempien tutkimusten arvoinen.

Teorian mukaan lapsi ei ymmärrä numeroiden merkitystä, jos häneltä puuttuu ymmärrys lukumäärän säilyvyydestä. Viitekehyksen mukaan koulutulokkaiden oletettiin yleisesti hallitsevan sen, mutta tämän tutkimuksen koulutulokkaista vain kolme hallitsi lukumäärän säilyvyyden. Tulos oli hyvin ristiriitainen teorian kanssa. Yllättävää oli, että lapsi C, joka oli taitava lukujono- ja aritmeettisilta taidoiltaan, ei ymmärtänyt lukumäärän säilyvän laskettavien yksiköiden sijaintia muuttamalla. Ylipäätään tämä lapsi oli lukujono- ja aritmeettisilta taidoiltaan kolmen edistyneimmän joukossa, mutta jäi ajattelutaidoiltaan alle keskitason. Hänen kauttaan tuli ymmärrettäväksi lahjakkaan ja nopean laskijan välinen ero. Melko yleisesti ne kuitenkin niputetaan yhteen miettimättä niiden eroavaisuuksia. Jos vain nopeutta pidetään mittatikkuna lahjakkaalle oppilaalle, jää temperamentiltaan rauhalliset matemaatikot huomioimatta ja vastaavasti nopeiden laskijoiden harteille lasketaan liian suuret odotukset.

Oli mielenkiintoista huomata, että vahva lukujonokäsitys ei välttämättä vähentänyt lasten riippuvuutta ulkoisesta tuesta. Lähtötasotestissä kahden parhaiten menestyneen lapsen laskutapa antoi itse asiassa viitteitä siitä, että taito käyttää erilaisia vaihtelevia strategioita voisikin kertoa lapsen kyvykkyydestä ajatella matematiikkaa. Asia olisi mielestäni tarkempien tutkimuksen arvoinen. Tulos viittaisi kuitenkin siihen, että välineiden avulla oppiminen kehittäisi lapsessa erilaisia strategioita laskea ja ennen kaikkea ymmärtää laskemansa.

Vaikka en suorittanut materiaaleista kaiken kattavaa lisätehtäväanalyysia, jäin ihmettelemään, onko matemaattisloogista ajattelua kehittävät tehtävät sijoitettu täysin näihin vaativampiin lisätehtäviin eli onkohan niitä juurikaan tarjolla lukujono- ja aritmeettisilta taidoiltaan heikoille lapsille? Lisäksi oppimateriaaleihin perehtyessäni huomioin sen, että aritmeettisilla taidoilla on kouluopetuksessa erittäin suuri painoarvo, ja opetus keskittyy paljolti juuri näiden operaatioiden ympärille. Sen sijaan lukujonotaitojen ja matemaattisloogisen ajattelun oletetaan ikään kuin olevan lapsessa valmiina. Lisäksi on mainittava, että lapset aloittivat numeroiden piirtämisen poikkeuksetta väärästä kohtaa eikä tämä ollut mitenkään sidoksissa lasten matemaattiseen tasoon. Numeroiden tuottamisen harjoittelulla tulee siis olla paikkansa ensimmäisen luokan matematiikan opetuksessa.

Hannula ym. (2004, 171, 175) kysyivät, millä tekijöillä voitaisiin selittää koulutulokkaiden matemaattisia suorituseroja. Tämä tutkimus ei vastannut tuohon kysymykseen, mutta teki nuo suoritusserot näkyviksi. Hannula ym. totesivat myös, että Suomessa on tutkittu matematiikan alkuopetusta varsin vähän. Tällä tutkimuksella ei tutkittu myöskään alkuopetusta, mutta luotiin sen kehittämiselle omalta osaltaan ajattelemisen aiheita. Kuten viitekehyksessä todettiin, meidän tulisi kehittää ja käyttää sellaisia oppimis- ja opetusmenetelmiä, jotka mahdollistaisivat lasten yksilöllisen etenemisen. Tämä edellyttäisi puolestaan tehokkaampia keinoja selvittää lapsen taso. Tähän uskon luomani lähtötasotestin osaltaan pystyvän vaikuttamaan. Vaikka pyrin tutkimuksessani löytämään luokasta matemaattisesti lahjakkaat lapset ja huomioimaan heidän tarpeensa, se ei poissulkenut oppimisvaikeuksisten lasten löytämisen tärkeyttä.

8.2 Pitkälle edistyneiden ensiluokkalaisten matemaattiset haasteet

Vastoin johdannossa esittämääni oletusta, lisätehtävät eivät olleet tunnilla opetetun toistoa, jota tarvitsisivat eniten taidoissaan heikot. Toisaalta, niitäkin tehtäviä näytti olevan tarjolla, mutta kun tarkasteluun otettiin vaativimmat eriyttävät tehtävät, painottuivat ne täysin matemaattisloogisen ajattelun osa-alueelle. Mutta kuten aluksi kysyin, oliko näitä tarpeeksi haastavia tehtäviä tarpeeksi paljon? Tutkimuksessa lapset suorittivat lisätehtäväpakettinsa kolmessa viikossa. He toki saivat käyttää niiden tekemiseen muitakin kuin matematiikan tuntien loppupuolia, mutta ne tuskin riittäisivät kovin pitkäksi aikaa, vaikka niitä säästeltäisiin vain matematiikan tunneille.

Lapset suorittivat ylöspäin eriyttävän lisätehtäväpaketin tehtävät täysin omatoimisesti ja melko lailla oikein. Näin ollen nämä vaikeimmat lisätehtävät eivät osoittautuneet näille lapsille kovin haastaviksi. Myös lasten itsensä mielestä 72 % tehtävistä oli helppoja. Jos lapsi koki tehtävän vaikeaksi, se ei ollut kiva. Tämä osoittaa sen, että ymmärtäminen tuottaa lapsille oppimisen ilon ja sitä kautta sisäisen motivaation. Vaikuttaisi siis siltä, että tämän ikäiset lapset tarvitsevat asennekasvatusta siihen, että vaikea tehtävä opitaan kohtaamaan miellyttävänä haasteena.

Kaikki vaativimmat lisätehtävät painottuivat siis täysin matemaattisloogiseen ajatteluun. Jatkuvasti käytettynä ne saattavat alkaa piankin puuduttamaan lasta ja pian kaikki lisätehtävät menettävät merkityksensä ja näin motivaatio saattaa alkaa kadota. Motivaatioon liittyen tehtävistä 42 % oli lasten mielestä mukavia. Näytti siis siltä, että hallinnan tunne on tässä ratkaisevaa, sillä varmuus tehtävän oikeasta ratkaisemisesta oli täysin yhteneväinen tehtävän mukavuuden kanssa.

Kun ensimmäisen luokan syyslukukauden kirjoissa edetään maksimissaan kahteenkymmeneen, ei myöskään lisätehtävissä kuljeta sitä suuremmalla lukualueella. Mutta jos lapsen mielenkiinto on satojen ja jopa sitä suuremmilla lukualueilla heti kouluun tullessaan, ja niiden oppiminen on hänen lähikehityksen vyöhykettä, mikä estäisi eriyttämästä lasta tällaisilla suurten lukualueiden lukujonotehtävillä. Ylöspäin eriyttävistä lisätehtävistä puuttui kokonaan myös aritmeettiset tehtävät. Ei kai se olisi keneltäkään pois, jos lapsi työstäisi aritmeettisia suorituksia hänen hallitsemallaan lukujonoalueella, vaikka ne eivät kuuluisi vielä vuosiluokan tavoitteisiin? Samoin matemaattisesti pitkälle ehtineellä ensiluokkalaisella saattaa olla jo kova innostus kertotaulujen oppimiseen, muttei niihin näytetä tukevan lasta millään tavoin.

Olisiko itse opetukseen löydettävissä jotain uutta, että satojen lukualueella suvereenisesti liikkuvien lasten ei tarvitsisi aloittaa matematiikan opiskelua luvun yksi käsittelemisestä? Yksi tapa uudistaa opetusta lapsilähtöisemmäksi olisi se, että opetusta alettaisiin suunnitella enemmän tasoryhmittäin. Tällöin kaikkien lasten olisi mahdollisuus saavuttaa yhtenäiset tavoitteet omilla menetelmillään ja aikataulullaan. Toinen eriyttämisen mahdollisuus voisi löytyä siitä, että opetus eriytettäisiin jakotuntien avulla alkeista aloittavien ja pitkälle ehtineiden opetukseen. Näiden lisäksi uskoisin vakaasti, että kehittämällä tietokoneavusteista opetusta voisi jokainen sen turvin edetä oman tahdin mukaisesti. Tietokoneohjelmiin olisi helppoa valita oppimisympäristö vaikkapa lempivärin ja lapsen tyylin mukaiseksi. Tällaisilla tuunauksilla oppimisympäristöstä saisi helposti lapselle mieluisan ja motivoivan. Ja ennen kaikkea lapsi saisi ohjelmalta välittömän palautteen ja mahdollisuuden edetä oman tasonsa mukaisesti.

Uskoisin, että kun alkuopetus rakennettaisiin uudella tavalla, lapsijoukko olisi vedettävissä nykyistä yhtenäisempänä joukkona vaikkapa kolmannesta luokasta eteenpäin. Nyt kun tasoeroihin ei puututa, erot luultavimmin vain kärjistyvät ainakin sen osalta, että heikot jäävät opetuksen eteenpäin menevästä junasta heikkojen pohjatöiden johdosta. Näin sekä he että taidoiltaan vahvat saattavat alkaa menettää mielenkiintonsa koulun matematiikan opetusta kohtaan. Teoriaosassahan viitattiin jatkuvien lisätehtävien vähentävän lahjakkaan lapsen oppimisen innokkuutta siinä vaiheessa, kun lapsi huomaa pääsevänsä vähemmällä työllä laskien perustehtävät hitaasti tai puuhaten välillä jotain muuta. Tästä syystä opettajan tulisi kiinnittää huomiota niiden monipuolisuuteen, haastavuuteen ja laatuun.

Viitekehyksessä käsitellyt tutkimustulokset matemaattisen lahjakkuuden sukupuolieroista vaikuttivat hyvin kirjavalta ja siksi en tämän tutkimuksen puitteissa korostanut lasten sukupuolta, ettei se osaltaan ohjaisi kasvattajaa asennoitumaan matematiikkaan sukupuolisidonnaisesti. Oleellisinta kun on kohdata lapsi yksilönä ja vastata hänen tarpeisiin hänen omista lähtökohdistaan käsin. Lisäksi kun tämän tutkimuksen aineisto oli hyvin pieni, ei löydetyillä sukupuolieroilla olisi ollut merkittävyyttä yleiseen lasten taitoeroista käytävään keskusteluun. Ylipäätään puhe lahjakkuudesta tuntuu kolahtavan poikkeuksetta ihmisten omanarvontuntoon, ikään kuin toisen lahjakkuus olisi uhka omalle egolle. Ehkä osittain senkin vuoksi käytännön keskustelu lahjakkaista ja lahjakkuudesta on yleensä aina kaavamaista ja yleistävää. Lahjakkuus tulisi nähdä luonnollisena osana lasta ilman, että sitä käytetään aseena, vähätellään tai nostetaan jalustalle.

Olisi ollut herkullista kysyä lapsilta heti syksyllä lasten mielipiteitä matematiikasta, sen helppoudesta ja mieluisuudesta, mutta en tahtonut nostaa asiaa lasten tietoisuuteen. Kyseessä oli kuitenkin lasten ainutlaatuinen koulunaloitus, johon sotkeuduin jo testauksieni kautta. En halunnut lasten alkavan ajatella suhdettaan tiettyyn oppiaineeseen ja tulemaan näin tietoisemmaksi omista ennakkokäsityksistään, niillä kun on mahdollisuus alkaa toteuttaa itseään. Siksi matematiikan testaukset olivat myös ikään kuin koulun normaalia toimintaa. En halunnut tehdä tutkimuksesta numeroa, jotta en olisi asettanut lapsille turhia ajatuksia heidän viattomaan ja luottavaiseen asenteeseensa koulua kohtaan. Tässä vaiheessa olisi myös ollut mahdotonta kerätä muuta tietoa kuin lasten ennakko-oletuksia matematiikan luonteesta.

Tässä tutkimuksessa kohdistettiin lahjakkaiden huomioiminen heille tarkoitetun lisämateriaalin tarkastelemiseen, sillä niitä pidetään tyypillisesti ratkaisuna lahjakkaiden riittävälle huomioimiselle. Nyt olisi mielestäni aika lähteä kehittämään lahjakkaiden tai pitkälle edistyneiden ensiluokkalaisten eriyttäviä toimintatapoja eli luoda rohkeasti uusia käytäntöjä luokan sisäiseen eriyttämiseen. Tutkimuksen lähtökohtana oli lapsen edun huomioiminen ja näin lopuksi haluan uskoa sen myös palvelevan lasten parasta. Tiedollinen mielenkiintoni ei näyttänyt vähentyvän tutkimuksen myötä ja monien tiedollisten intressien myötä haluaisin esimerkiksi saada tietää kuinka näiden lasten lähtötasoerot ajan kuluessa tasoittuvat ja onko lähtötasoeroilla osuutta aineen mielekkyyteen jatkossa.

LÄHTEET

Aarnos, E. 2007. Kouluun lapsia tutkimaan: havainnointi, haastattelu ja dokumentit. Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1. Metodin valinta ja aineistonkeruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle. 2. korjattu ja täydennetty painos. Jyväskylä: PS-kustannus.

Ahonen, T, Lamminmäki, T., Närhi, V & Räsänen, P. 1995. Koulun aloittaminen ja varhaiset oppimisvaikeudet. Teoksessa P. Lyytinen, M. Korkiakangas & H. Lyytinen (toim.) Näkökulmia kehityspsykologiaan. Kehitys kontekstissaan. Porvoo: WSOY, 168–187.

Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: Edita.

Alijoki, A. 2006. Erityistä tukea tarvitsevien lasten polut esiopetuksesta alkuopetukseen, tukitoimet ja suoriutuminen. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Anghileri, J. 2000. Teaching number sense. New York: Continuum.

Aunio, P. 2006. Number sense in young children: (inter)national group differences and an intervention programme for children with low and average performance. Helsingin yliopiston soveltavan kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia 269. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Aunio, P., Hannula M.M. & Räsänen, P. 2004. Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. uudistettu painos. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, 198–221.

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. 2004. Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. Journal of educational psychology 96, 699–713.

Baroody, A. 1987. Children’s mathematical thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers. New York: Teachers college press.

Berry, J. & Sahlberg, P. 1995. Matematiikka elämään. Juva: WSOY.

Brunell, V. 1993. Pitääkö koulun olla kaikille sama? Teoksessa E. Kangasniemi & R. Konttinen (toim.) Lue, etsi, tutki. Tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Opetus 2000. Juva: WSOY, 32–51.

Davis, G.A. & Rimm, S.B. 1989. Education of the gifted and talented. (2ND ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2000. Määräys 64/011/2000. Helsinki: Opetushallitus 19.12.2000.

Freese, H.-L. 1992. Lapset ovat filosofeja. Suom. E. Wiegand. Helsinki: Mannerheimin Lastensuojeluliitto.

Geary, D. 1996. Children's Mathematical Development. Research and Practical Applications. Washington, DC: American Psychological Association.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. 1978. The Child's Understanding of Number. Cambridge: Harvard College.

Haapasalo, L. 1998. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Kolmas tarkistettu painos. Joensuu: Medusa-Software.

Haapasalo, L. 2004. Ongelmanratkaisukulttuuri konstruktivismin peruselementtinä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, 84–99.

Hakkarainen, K., Lonka, K. & Lipponen, L. 1999. Tutkiva oppiminen. Älykkään toiminnan rajat ja niiden ylittäminen. 4. painos. Helsinki: Werner Söderström Osakeyhtiö.

Hannula M.M. 2005. Spontaneous Focusing on Numerosity in the Development of Early Mathematical Skills. Turun yliopiston julkaisuja. Sarja B. Osa 282. Turku: Turun yliopisto.

Hannula, M.M. & Lepola, J. 2006a. Huomio lasten taitoihin ennen kouluikää. Teoksessa J. Lepola & M.M. Hannula (toim.) Kohti koulua. Kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten valmiuksien kehitys. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja A:205. Turku: Turun yliopisto, 9–22.

Hannula, M.M. & Lepola, J. 2006b. Matemaattisten taitojen kehittyminen esi- ja alkuopetuksen aikana: Mitkä tekijät ennakoivat aritmeettisten taitojen kehitystä. Teoksessa J. Lepola & M.M. Hannula (toim.) Kohti koulua. Kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten valmiuksien kehitys. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja A:205. Turku: Turun yliopisto, 129–154.

Hannula, M.S., Kupari, P., Pehkonen, L., Räsänen, P. & Soro R. 2004. Matematiikka ja sukupuoli. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, 170–197.

Hautamäki, J. 1991. Kehitystasojen erot ja kehitettävät tehtävät. Teoksessa S. Paananen (toim.) Lumiukkoko tiedettä. Tiedeopiskelua koulussa 2. Helsinki: Valtion painatuskeskus, 17–32.

Hautamäki, J. 1995. Älyllinen kehitys ja koulutus. Teoksessa P. Lyytinen, M. Korkiakangas & H. Lyytinen (toim.) Näkökulmia kehityspsykologiaan. Kehitys kontekstissaan. 2. painos. Porvoo: WSOY, 219–247.

Hautamäki, J. & Kuusela, J. 2004. Diagnostisen päättelemisen pulmista ja keinoista – matemaattiset oppimisvaikeudet. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, 255–273.

Hautamäki, J., Scheinin, P. & Arinen, P. 1999. Päässälasku ja matikkapää. Matemaattinen osaaminen oppimistaitona. Teoksessa J. Hautamäki, P. Arinen, B. Bergholm, A. Hautamäki, S. Kupiainen, J. Kuusela, J. Lehto, M. Niemivirta & P. Scheinin Oppimaan oppiminen ala-asteilla. Oppimistulosten arviointi 3/1999. Helsinki: Opetushallitus.

Hihnala, K. 2005. Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 278. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Ikäheimo, H. 1994. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. 2. painos. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H., Aalto, A. & Puumalainen, K. 1998. Opi matematiikkaa leikkien esi- ja alkuopetuksessa. 2. painos. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H., Putkonen, H. & Voutilainen, E. 2002. MAKEKO. Matematiikan keskeisen oppiaineksen kokeet luokille 1–9. 2. uudistettu painos. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H. & Risku, A.-M. 2004. Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, 222–240.

Ilmavirta R. 1995. Ongelmanratkaisu – tie ajattelemisen taitojen kehittämiseen. Teoksessa Hakala, Ilmavirta, Muuronen, Suonperä Opetuksen yksilöinti 2. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 4. Tampere: Tampereen yliopisto, 33–50.

Kallonen-Rönkkö, M. 1986. Lapsen ajattelu ja sen kehityksen edistäminen peruskoulun alkuvaiheessa. Helsinki: Kouluhallitus.

Kallonen-Rönkkö, M. 1997. Matematiikan oppiminen ala-asteen uusiutuvissa oppimisympäristöissä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka. Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, Koulutuksen tutkimuslaitos, 251–268.

Kananoja, S. 1993. Luokan heterogeenisuus opettajan kokemana. Tapaustutkimus pääkaupunkiseudun kahdesta ensimmäisestä luokasta. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja A:165. Turku: Turun opettajankoulutuslaitos.

Kangasniemi, E. 1993. Opetuksen käsite ja käytäntö yleissivistävässä koulutuksessa. Teoksessa E. Kangasniemi & R. Konttinen (toim.) Lue, etsi, tutki. Tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Opetus 2000. Juva: WSOY, 52–69.

Keltikangas-Järvinen, L. 2004. Temperamentti. Ihmisen yksilöllisyys. Helsinki: WSOY.

Keltikangas-Järvinen, L. 2006. Temperamentti ja koulumenestys. Helsinki: WSOY.

Keranto, T. 1979. Lapsen lukukäsitteen kehittymisen ja kehittämisen matemaattisdidaktinen näkökulma. Tampereen yliopiston Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitos. Julkaisu no 2. Hämeenlinna: Tampereen yliopisto.

Keranto, T. 1984. Kysymyksiä, huomioita ja tuloksia suoritusprosesseista perustavissa sanallisissa kerto- ja jakolaskutehtävissä. Teoksessa J. Leino (toim.) Matematiikanopetuksen tutkiminen ja kehittäminen. Hämeenlinnan tutkijaseminaari 14.–15.9.1984. Tampereen yliopiston kasvatustieteen laitos. Julkaisusarja A: Tutkimusraportti N:o 33, 7–20. Tampere: Tampereen yliopisto.

Kinnunen, R. 2003. Miksi kertotauluun kompastuu? Lukujen hallinta oppimisen perustana. Turku: Turun yliopisto, Oppimistutkimuksen keskus.

Kinnunen, R. & Vauras, M. 1997. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka. Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, Koulutuksen tutkimuslaitos, 269–282.

Kinnunen, R., Lehtinen, E. & Vauras, M. 1994. Matemaattisen taidon arviointi. Teoksessa M. Vauras, E. Poskiparta & P. Niemi (toim.) Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla. Oppimistutkimuksen keskus, julkaisuja 3. Turku: Turun yliopisto, oppimistutkimuksen keskus, 55–76.

Kupari, P. 1993. Mistä rohkeus ja keinot koulumatematiikan uudistumiseen. Teoksessa E. Kangasniemi & R. Konttinen (toim.) Lue, etsi, tutki. Tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Opetus 2000. Juva: WSOY, 114–131.

Kupari, P. & Törnroos, J. 2004. Matematiikan osaaminen peruskoulussa kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, 138–169.

Kylmäoja, K. 2001. Matematiikan opetuksen eriyttäminen peruskoulun ensimmäisellä luokalla. Helsingin kaupungin opetusviraston julkaisusarja B13:2001. Helsinki: Helsingin kaupunki, opetusvirasto.

Laine, M., Bamberg, J. & Jokinen, P. 2007. Tapaustutkimuksen käytäntö ja teoria. Teoksessa M. Laine, J. Bamberg & P. Jokinen (toim.) Tapaustutkimuksen taito. Helsinki: Gaudeamus, 9–38.

Lampinen, A., Ikäheimo, H. & Dräger, M. 2007. MAVALKA 1 ja 2. Matematiikan valmiuksien kartoitus 1 ja 2. Opettajan opas. Helsinki: Opperi.

Lehtinen, E. & Kinnunen, R. 1993. Matemaattisista oppimisvaikeuksista. Teoksessa M. Vauras (toim.) Oppimisvaikeudet ja opetuksen kehittäminen: katsaus Turun yliopiston Oppimistutkimuksen keskuksen toimintaan ja tutkimukseen. Acta psychologica Fennica. Soveltavan psykologian monografioita 6. Helsinki: Suomen psykologinen seura, 37–56.

Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 298. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Linnanmäki, K. 2004. Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, 241–254.

Malaty, G. 1993. Geometrinen ajattelu. Didaktiikka. Espoo: Weilin+Göös.

Malaty, G. 1997. Lapsi matkalla matematiikan maailmaan. Teoksessa M. Siniharju (toim.) Esi- ja alkuopetuksen uusia tuulia. 3. painos. Helsinki: Opetushallitus, 51–90.

Malaty, G. 2008. Matemaattisesti lahjakkaat ja kulttuuri: Osa 1. Dimensio 1/2008, 50–53.

Malinen, P. 1980. Matemaattisen ajattelun kehittyminen peruskoulun ala-asteen oppilailla. Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 4/1980. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Malinen, P. 1992. Looginen ajattelu matematiikan opetuksessa. Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 49. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Matematiikan opetuksen kehittämisen suunnat: Matematiikan opetuksen kehittämistyöryhmän väliraportti 1991. Helsinki: Kouluhallitus.

Mattinen, A. 2006. Huomio lukumääriin: tutkimus 3-vuotiaiden lasten matemaattisten taitojen tukemisesta päiväkodissa. Turun yliopiston julkaisuja. Sarja C, Scripta lingua Fennica edita; osa 247. Turku: Turun yliopisto.

McLean, A. 2003. The motivated school. London: Paul Chapman.

Mehtäläinen, J. 1993. Oppimisympäristö ajattelun kehittämisessä. Teoksessa E. Kangasniemi & R. Konttinen (toim.) Lue, etsi, tutki. Tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Opetus 2000. Juva: WSOY, 94–113.

Metsämuuronen, J. 2000a. Tilastollisen kuvauksen perusteet. Metodologia-sarja 2. Helsinki: Methelp.

Metsämuuronen, J. 2000b. Tilastollisen päättelyn perusteet. Metodologia-sarja 3. Helsinki: Methelp.

Metsämuuronen, J. 2000c. Mittarin rakentaminen ja testiteorian perusteet. Metodologia-sarja 6. Helsinki: Methelp.

Metsämuuronen, J. 2003. Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä. 2. uudistettu painos. Helsinki: International Methelp.

Moberg, S. 1984. Poikkeavia lapsiako normaaliluokille? Peruskoulun ja lukion opettajien suhtautuminen poikkeavien oppilaiden sijoittamiseen yleisiin opetusryhmiin. Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 17. Jyväskylä.

Pehkonen, E. 1984. Matemaattisen ajattelun ja luovuuden kehittämisestä. Teoksessa J. Leino (toim.) Matematiikanopetuksen tutkiminen ja kehittäminen. Hämeenlinnan tutkijaseminaari 14.–15.9.1984. Tampereen yliopiston kasvatustieteen laitos. Julkaisusarja A: Tutkimusraportti N:o 33. Tampere: Tampereen yliopisto, 31–58.

Peltonen, M. & Ruohotie, P. 1992. Oppimismotivaatio. Teoriaa, tutkimuksia ja esimerkkejä oppimishalukkuudesta. Aavaranta-sarja n:o 29. Helsinki: Otava.

Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 195. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, 2004. Oppivelvollisille tarkoitetun perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Määräys 1/011/2004. Helsinki: Opetushallitus 16.1.2004.

Pietilä, K. 1997. Koulunkäynnin aloitus elämän taitekohtana. Tapaustutkimus Tervolassa vuonna 1996 esikoulusta kouluun siirtyneistä lapsista. Opinnäytetyö. Kemi: Kemi-Tornion ammattikorkeakoulun sosiaalialan koulutusyksikkö.

Ruohotie, P. 1998. Motivaatio, tahto ja oppiminen. Helsinki: Edita.

Ruokamo, H. 2000. Matemaattinen lahjakkuus ja matemaattisten sanallisten ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen teknologiaperusteisessa oppimisympäristössä. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 212. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Räsänen, P. 1999. Matematiikan oppimisvaikeudet. Teoksessa T. Ahonen & T. Aro (toim.) Oppimisvaikeudet. Kuntoutus ja opetus yksilöllisen kehityksen tukena. Jyväskylä: Atena, 332–359.

Räsänen, P. & Ahonen, T. 2002. Matemaattiset oppimisvaikeudet. Teoksessa H. Lyytinen, T. Ahonen, T. Korhonen, M. Korkman & T. Riita (toim.) Oppimisvaikeudet. Neuropsykologinen näkökulma. 2. uudistettu painos. Helsinki: WSOY, 191–234.

Saarela-Kinnunen, M. & Eskola, J. 2007. Tapaus ja tutkimus = tapaustutkimus? Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1. Metodin valinta ja aineistonkeruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle. 2. korjattu ja täydennetty painos. Jyväskylä: PS-kustannus.

Sahlberg, P., Meisalo, V., Lavonen, J. & Kolari, M. 1993. Luova ongelmanratkaisu koulussa. Helsinki: Painatuskeskus.

Salonen P., Lepola, J., Vauras, M., Rauhannummi, T., Lehtinen, E. & Kinnunen, R. 1994. Diagnostiset testit 3. Motivaatio, metakognitio ja matematiikka. Käsikirja 3 Oppimistutkimuksen keskuksen julkaisuun Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1.luokan oppilailla. Turku: Turun yliopisto, oppimistutkimuksen keskus.

Sieppi, H. & Tuomi, M. 1994. ”Lapsi on kyllin nuori ajatellakseen itse”. Teoksessa H. Lehtonen (toim.) Opetuksen yksilöinti. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 1. Tampere: Tampereen yliopisto, 109–150.

Snellman, L. & Räty, H. 1998. Tunne älysi, käy koulua. Teoksessa A. Malin & K. Männikkö (toim.) Älykkyys. Valoa ja varjoa. Opetus 2000. Jyväskylä: WSOY, 82–89.

Stenberg, R. 1996. What is mathematical thinking? Teoksessa R. Stenberg & T. Ben-Zeev (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Swartz, R. & Perkins, D. 1989. Teaching Thinking: Issues And Approaches. The practitioners’ guide to teaching thinking series. Midwest Publications.

Tall, D. 2001. What mathematics is needed by teachers of young children? Teoksessa J. Novotná & M. Hejný (toim.) SEMT ’01. International symposium elementary maths teaching. Prague: the Czech Republic Charles University, Faculty of Education, 26–36.

Tikkanen, T. 2007. Nousuvesi nostaa kaikki laivat. Lahjakkaiden oppilaiden tukemisesta kiinnostuneet opettajat kokoontuivat Helsingissä. Opettaja (20–21), 34–35.

Tynjälä, P. 1991. Kvalitatiivisten tutkimusmenetelmien luotettavuudesta. Kasvatus 22 (5–6), s. 387–398.

Uusikylä, K. 1989. Lahjakkaiden nuorten koulukokemukset, persoonallisuudenpiirteet ja harrastuspreferenssit. Joensuun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia N:o 22.

Uusikylä, K. 1994. Lahjakkaiden kasvatus. Uudistettu laitos. Opetus 2000. Juva: WSOY.

Uusikylä K. & Atjonen P. 2005. Didaktiikan perusteet. 3. uudistettu painos. Helsinki: WSOY.

Vainionpää T, Mononen, R. & Räsänen, P. 2004. Matemaattiset valmiudet. Teoksessa T. Siiskonen, T. Aro, T. Ahonen & R. Ketonen (toim.) Joko se puhuu? Kielenkehityksen vaikeudet varhaislapsuudessa. 2. painos. Opetus 2000. Jyväskylä: PS-kustannus, 292–301.

Valli, R. 2001. Johdatus tilastolliseen tutkimukseen. Jyväskylä: PS-kustannus.

Vuorio, J.-M. 2005. Esiopetusikäisen lapsen lukukäsitteen kehittyminen esiopetusvuoden aikana. Teoksessa J. Hytönen (toim.) Esiopetuksen prosessi ja vaikutukset. Esiopetuksen toimivuus ja vaikuttavuus Helsingin kaupungissa vuosina 2001–2003. Tutkimusraportti 3. Tutkimuksia 259. Helsinki: Helsingin yliopisto, 39–56.

Välijärvi, J. 1998. Lahjakkuus – koulun voimavara vai ratkaisematon ongelma? Teoksessa A. Malin & K. Männikkö (toim.) Älykkyys. Valoa ja varjoa. Opetus 2000. Jyväskylä: WSOY, 90–106.

Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. uudistettu painos. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, 111–122.

Yrjönsuuri, R. & Yrjönsuuri, Y. 2004. Matematiikan opiskelun ja opetuksen käsitteet. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. uudistettu painos. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, 123–137.

Oppikirjalähteet

Haapaniemi S., Mörsky S., Tikkanen A., Vehmas P. & Voima J. 2007a. Tuhattaituri 1a. Opettajan opas. Helsinki: Otava.

Haapaniemi S., Mörsky, S., Tikkanen, A. & Voima, J. 2007b. Tuhattaituri 1. Kokeet B. Helsinki: Otava.

Lilli, M., Putkonen, H. & Sinnemäki, J. 2002a. Matikkamatka. Opettajan opas 1 syksy. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Lilli, M., Putkonen, H. & Sinnemäki, J. 2002b. Matikkamatka. Opettajan opas 1 kevät. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Putkonen, H., Sinnemäki, J., Arhomaa, H. & Tikka, M. 2003. Matikkamatka. Opettajan opas 2 kevät. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Rikala, S., Sintonen, A.-M. & Uus-Leponiemi, T. 2005. Laskutaito 1 syysosan opettajan kirja. 8.–10. uudistettu painos. Helsinki: Werner Söderström Osakeyhtiö.

LIITTEET

LIITE 1:

TUTKIMUKSESSA KÄYTETTY TESTILOMAKE MATEMAATTISTEN LÄHTÖ-VALMIUKSIEN KARTOITTAMISEEN SISÄLTÄEN PISTEYTYKSEN KRITEERIT

Testin rakentuminen on kuvattu luvussa Lähtötasotestin esittely (luku 6.2).

LUKUJONOTAIDOT

LUKUJEN LUETTELUTAITO JA LUKUJONOSSA LIIKKUMINEN TIETYIN ASKELIN Osiosta pisteitä yhteensä 0–9	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Lukujonon luettelu 1. **Kuinka pitkälle osaat laskea? Laske niin minä kuuntelen.** Pisteitä 0–3	0 p: ei osaa luetella virheettömästi lukuun 10 asti 1 p: virheettömästi lukuun 10–20 asti	2 p: luettelee lukuja lähes 50 asti, mutta tulee joidenkin lukujen ylihyppyjä tai virheitä 3 p: virheettömästi lukuun 50 asti	
Lukujen takaperin luettelu 2. **Luettele nyt lukuja takaperin. Aloita luvusta 20.** (Jos liian vaikea, pyydetään aloittamaan luvusta 10.) Pisteitä 0–3	0 p: ei onnistu aloittamalla luvusta 10 1 p: luvusta 10 aloittaen muutamia virheitä 2 p: virheettömästi aloittaen luvusta 10 tai joitakin virheitä aloittaen luvusta 20	3 p: virheettömästi aloittaen luvusta 20	
Lukujen luettelu tietyin askelin Pisteitä 0–3	3a. **Luettele lukuja niin, että hyppäät joka toisen luvun yli.** 1 p: onnistuu virheettä lukuun 20 asti	3b. **Luettele lukuja niin, että sanot joka viidennen luvun. Aloitetaan luvusta 5.** 1 p: onnistuu virheettä lukuun 50 asti	3c. **Luettele lukuja niin, että sanot vain joka kolmannen luvun. Aloitetaan luvusta 3.** 1 p: onnistuu virheettä lukuun 30 asti

ESINEIDEN LUKUISUUDEN MÄÄRITTÄMINEN RYHMITTELEMÄLLÄ Osiosta pisteitä yhteensä 0, 2 tai 4	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0, 2 tai 4		**Kuinka monta…** 4a. **helmeä on helmitaulussa?** (32) 0 p: ei osaa tai laskee oikein yksitellen 2 p: laskee oikein ryhmittelemällä 4b. **sormea piirroksessa?** (piirroksessa 7 hansikasta eli 35 sormea) 0 p: ei osaa tai laskee oikein yksitellen 2 p: laskee oikein ryhmittelemällä	

MÄÄRÄN, LUKUSANAN JA NUMEROMERKIN VASTAAVUUS Osiosta pisteitä yhteensä 0-7	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Lukusanan ja määrän vastaavuus Pisteitä 0–1	5a. **Anna kuusi esinettä.** ½ p: oikein 5b. **Montako palloa tässä on ••••?** ½ p: oikein		
Määrän ja numeromerkin vastaavuus Pisteitä 0–1	6a. **Montako palloa tässä on •••••? Anna oikea numerokortti.** (Vaihtoehtoina numerokortit 2, 9, 5 ja 7.) ½ p: oikein 6b. **Piirrä näin monta (7) palloa.** ½ p: oikein		
Numeromerkin ja lukusanan vastaavuus Pisteitä 0–5	7a. **Mikä numero tämä (8) on?** ½ p: oikein 7b. **Piirrä numero kolme.** ½ p: oikein	7c. **Piirrä numerot 14, 27, 50 ja 69.** 0 p: ei osaa tai ainakin 2 väärin 1 p: 1 väärin 2 p: kaikki oikein	7d. **Piirrä numerot 111, 105, 501 ja 515.** 0 p: ei osaa tai ainakin 2 väärin 1 p: 1 väärin 2 p: kaikki oikein

LUKUJEN JÄR-JESTYKSEEN ASETTAMINEN ELI LUKUJEN VERTAILU Osiosta pisteitä yhteensä 0–6	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–6	8a. **Järjestä numerolaput** (0–9) **suuruusjärjestykseen.** 0 p: ei osaa tai ainakin 2 väärin 1 p: 1 väärin 2 p: sarja oikein	8b. **Kumpi näistä on suurempi luku?** (numerolaput) **14** vai **18** **59** vai **69** **38** vai **36** **27** vai **72** 0 p: ei osaa tai ainakin 2 väärin 1 p: 1 väärin 2 p: kaikki oikein	8c. **Kumpi näistä on suurempi luku?** (numerolaput) **161** vai **116** **203** vai **302** **600** vai **599** 0 p: ei osaa tai 2 väärin 1 p: 1 väärin 2 p: kaikki oikein

LUVUN HAJOT-TAMINEN ERI YKSIKKÖIHIN ELI PAIKKAJÄR-JESTYKSEN YMMÄRTÄMI-NEN Osiosta pisteitä yhteensä 0–3	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Lapsi nimeää luvun ja rakentaa sen käyttäen tuhatkuution ykkösiä, kymmensauvoja ja satatauluja Pisteitä 0–3	9a. **Anna minulle näitä osia siten, että minulla on yhteensä näin paljon.** (Numerolapuilla luvut **2**, **12** ja **20.**) 0 p: ei osaa tai virheitä 1 p: kaikki oikein	9b. **Anna minulle näitä osia siten, että minulla on yhteensä näin paljon.** (Numerolapuilla luvut **69**, **34** ja **80**.) 0 p: ei osaa tai virheitä 1 p: kaikki oikein	9c. **Anna minulle näitä osia siten, että minulla on yhteensä näin paljon.** (Numerolapuilla luvut **370** ja **605**.) 0 p: ei osaa tai virheitä 1 p: kaikki oikein

JÄRJESTYSLUVUT Osiosta pisteitä yhteensä 0–2	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–2	10 a. **Ympyröi tästä monisteesta 1. lapsi.** ½ p: oikea lapsi 10 b. **Vedä viiva 5. lapsen alapuolelle.** ½ p: oikea lapsi 10 c. **Laita viimeinen lapsi kolmion sisään.** ½ p: oikea lapsi 10 d. **Väritä jonossa toisena olevan lapsen pää.** ½ p: oikea lapsi		

<table>
<tr><td>LUKUJONOSSA LIIKKUMINEN
Osiosta pisteitä yhteensä 0–24</td><td>Taso 1</td><td>Taso 2</td><td>Taso 3</td></tr>
<tr><td>Seuraava ja edellinen luku

Pisteitä 0–6</td><td>11a. Mikä on seuraava luku luvusta 3 ja luvusta 9?
1 p: molemmat oikein

12a. Mikä on edellinen luku luvusta 3 ja 9?
1 p: molemmat oikein</td><td>11b. Mikä on seuraava luku luvusta 29 ja 55?
1 p: molemmat oikein

12b. Mikä on edellinen luku luvusta 20 ja 55?
1 p: molemmat oikein</td><td>11c. Mikä on seuraava luku luvusta 202 ja 999?
1 p: molemmat oikein

12c. Mikä on edellinen luku luvusta 100 ja 333?
1 p: molemmat oikein</td></tr>
<tr><td>Eteenpäin ja taaksepäin (4–5 lukua) annetusta luvusta

Pisteitä 0–6</td><td>13a. Jatka eteenpäin luvusta
3, 8 ja 12.
1 p: kaikki oikein

14a. Luettele taaksepäin luvusta 4, 8 ja 12
1 p: kaikki oikein</td><td>13b. Jatka eteenpäin luvusta 19 ja
jatka lukujonoa 95, 96, 97…
1 p: molemmat oikein

14b. Jatka lukujonoa 24, 23, 22…
1 p: oikein</td><td>13c. Jatka lukujonoa 196, 197, 198…
1 p: oikein

14c. Jatka lukujonoa 133, 132, 131…
1 p: oikein</td></tr>
<tr><td>Eteenpäin ja taaksepäin luvusta toiseen

Pisteitä 0–6</td><td>15. Luettele kaikki numerot…

a. luvusta 2 lukuun 7.
1 p: oikein

b. luvusta 6 lukuun 11.
1 p: oikein

16. Luettele kaikki numerot…

a. luvusta 6 lukuun 3.
1 p: oikein

b. luvusta 13 lukuun 8.
1 p: oikein</td><td>15c. Luettele kaikki numerot luvusta 18 lukuun 25.
1 p: oikein

16c. Luettele kaikki numerot luvusta 20 lukuun 17.
1 p: oikein</td><td></td></tr>
<tr><td>Eteenpäin ja taaksepäin luvun verran

Pisteitä 0–6</td><td>17. Mikä luku tulee...
a. kun mennään luvusta 3 kaksi lukua eteenpäin?
1 p: oikein

b. kun mennään luvusta 2 viisi lukua eteenpäin?
1 p: oikein

18. Mikä luku tulee...
a. kun mennään luvusta 4 kolme lukua taaksepäin?
1 p: oikein

b. kun mennään luvusta 9 viisi lukua taaksepäin?
1 p: oikein</td><td>17c. Mikä luku tulee kun mennään luvusta 7 neljä lukua eteenpäin?
1 p: oikein

18c. Mikä luku tulee kun mennään luvusta 13 neljä lukua taaksepäin?
1 p: oikein</td><td></td></tr>
</table>

JOUKKOJEN VERTAILU KÄSITTEILLÄ ENEMMÄN, VÄHEMMÄN JA YHTÄ MONTA Osiosta pisteitä yhteensä 0–6	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–6	19. Läjissä on esineitä 9 ja 7. **Paljonko toisessa on enemmän?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 20. Läjissä on esineitä 7 ja 4. **Kummassa läjässä on vähemmän?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 21. Läjissä on esineitä 7 ja 4. **Paljonko toiseen lisätään, että molemmissa olisi yhtä monta?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus		

YHTEENLASKUJA Osiosta pisteitä yhteensä 0–12	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–12	22 a. **Sinulla on 3 karkkia. Saat 3 lisää. Montako karkkia sinulla nyt on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 22 b. **Pihalla on 2 poikaa ja 3 tyttöä. Montako lasta pihalla on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	22 c. **Sinulla on 9 karkkia ja saat 5 lisää. Montako karkkia sinulla sitten on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 22 d. **Pihalla on 12 poikaa ja 13 tyttöä. Montako lasta pihalla on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	22 e. **Lompakossa 132 euroa, kukkarossa 25 euroa. Paljonko niissä on yhteensä rahaa?** (Luvut on näkyvillä kuvakortissa) 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 2 p: oikea vastaus työlään prosessin myötä 4 p: oikea vastaus selkeällä ja toimivalla strategialla

VÄHENNYSLASKUJA Osiosta pisteitä yhtensä 0–12	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–12	23 a. **Puun oksalla on 6 lintua. 4 lentää pois. Montako lintua jää oksalle?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 23 b. **Pihalla on 8 lasta. Niistä 3 on tyttöä. Montako poikaa pihalla on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	23 c. **Oksalla on 12 lintua. 4 lentää pois. Montako lintua jää oksalle?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 23 d. **Luokassa on 18 lasta. Niistä 3 on tyttöä. Paljonko luokassa on poikia?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	23 e. **Ville on 80 cm. Viivi on 5 cm lyhyempi kuin Ville. Kuinka pitkä Viivi on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 23 f. **Kalle on 98 cm ja Liisa on 92 cm. Kuinka paljon Kalle on pidempi kuin Liisa?** (Mitat näkyvissä kuvakortissa) 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta tai muuten hitaan ja työlään prosessin myötä 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus

OSITTAMINEN JA KOONTI Osiosta pisteitä yhteensä 0–4	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–4	24 a. **Täällä piilossa** (näköeste) **on neljä esinettä. Otan nämä** (3) **pois. Montako jää piiloon?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	24 b. **Täällä piilossa** (näköeste) **on 12 esinettä. Otan nämä** (5) **pois. Montako jää piiloon?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	

YHTEENLASKUN AUKKOTEHTÄVÄT Osiosta pisteitä yhteensä 0–6	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–6	25 a. **Pöydällä on 6 keksiä. Montako laitetaan lisää, että keksiä olisi 10?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	25 b. **Pöydällä on 6 keksiä. Montako laitetaan lisää, että niitä olisi 20?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	25 c. **Liisa on 92 cm. Paljonko hänen pitää kasvaa, jotta hän olisi metrin mittainen?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta tai muuten hitaan ja työlään prosessin myötä 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus

VÄHENNYSLASKUN AUKKOTEHTÄVÄT Osiosta pisteitä yhteensä 0–4	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–4	26 a. **Minkä luvun vähennät 10:stä, että jää vain 1?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	26 b. **Minkä luvun vähennät 23:sta, että jää 19?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	

KERTOLASKUJA Osiosta pisteitä yhteensä 0–12	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–12	27 a. **Pöydällä on 4 maljakkoa. Jokaisessa maljakossa on 2 kukkaa. Paljonko kukkia on yhteensä?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	27 b. **Saat joka päivä 2 euroa. Paljonko sinulla on rahaa viikon päästä?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 27 c. **Kun luokassa on 20 lasta, niin montako kenkää on käytävällä?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	27 d. **Jos on 50 koiraa, niin montako tassua niillä on yhteensä?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta tai muuten hitaan ja työlään prosessin myötä 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 27 e. **Sinulla on 3 suklaalevyä. Jokaisessa levyssä on 6 palaa. Montako suklaapalaa on yhteensä?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta tai muuten hitaan ja työlään prosessin myötä 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 27 f. **Mikä kertolasku ••••• ••••• •••••?** (pisteryhmät näkyvillä kuvakortilla) 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 2 p: osaa muodostaa oikean kertolaskun

JAKOLASKUJA Osiosta pisteitä yhteensä 0–6	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–6	28 a. **Meillä on yhteensä 6 karkkia. Jos jaetaan ne tasan sinulle ja minulle, niin paljonko sinä saat?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	28 b. **Jos on 2 suklaapötköä ja 4 lasta, niin paljonko kukin lapsi saa?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	28 c. **Jos tassuja on yhteensä 100, niin montako kissaa siellä on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta tai muuten hitaan ja työlään prosessin myötä 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus

RAHALASKUJA Osiosta pisteitä yhteensä 0–12	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–12		29 a. **Paljonko tässä on rahaa** (leikkirahat) **10 e, 1 e, 1 e, 1 e** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 29 b. **Ostat näillä rahoilla 5 euron lelun. Paljonko rahaa jää?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 29 c. **Paljonko tässä on rahaa** (leikkirahat) **10 e, 10 e, 5 e, 2 e, 1 e** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 29 d. **Ostat näillä rahoilla 11 euron lelun. Paljonko rahaa jää?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	29 e. **Paljonko tässä on nyt rahaa** (leikkirahat) **200 e, 100 e, 50 e, 10 e, 10 e** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 29 f. **Ostat näillä rahoilla 5 euron lelun. Paljonko rahaa jää?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus

KIRJALLISET LASKUT Osiosta pisteitä yhteensä 0–9	Taso 1	Taso 2	Taso 3
Pisteitä 0–9	Laskut kynällä ja paperilla 30 a. **4+5=** ½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa 1p: heti oikea vastaus 30 b. **8-3=** ½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa 1p: heti oikea vastaus	Laskut kynällä ja paperilla 30 c. **7-6+3=** ½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa 1p: heti oikea vastaus 30 d. **32-5=** ½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa 1p: heti oikea vastaus 30 e. **6+4-9=** ½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa 1p: heti oikea vastaus	Laskut kynällä ja paperilla 30 f. **2·8=** 1 p: oikea vastaus 30 g. **8:2=** 1 p: oikea vastaus 30 h. **60-6-4=** ½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa 1p: heti oikea vastaus 30 i. **146+9=** ½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa 1p: heti oikea vastaus

MATEMAATTISLOOGINEN AJATTELU

LOOGINEN PÄÄTTELY Osiosta pisteitä yhteensä 0–4
Luokkainkluusio 31. **Kumpia on enemmän; kirahveja vai eläimiä?** (Kuvataulu) 1 p: oikea vastaus
Massojen transitiivipäättely 32. **Kuva tasapainovaaoista. Mikä on painavin?** (Kuvataulu) **Miksi?** 0 p: oikea vastaus väärällä perustelulla 1 p: oikea vastaus oikealla perustelulla 33. Kuva vaaoista. **Paljonko siili painaa?** 1 p: oikea vastaus
Kuvion päättely 34. Moniste kuvasarjasta. **Piirrä viimeinen kuva.** 1 p: oikea vastaus

HAHMOTTAMINEN Osiosta pisteitä yhteensä 0–6
Lukumäärän säilyvyys 35 a. Laitetaan lapsen nähden 20 esinettä parijonoon. Todetaan, että esineitä on jonoissa yhtä paljon. Toista jonoa venytetään välimatkoja pidentämällä. **Kummassa jonossa on enemmän?** 1 p: oikea vastaus 35 b. Asetetaan esineet taas parijonoon ja todetaan niitä olevan yhtä monta. Toinen jono kasataan tiiviiksi ryhmäksi ja toinen jono kasataan harvemmin. **Kummassa ryhmässä on enemmän?** 1 p: oikea vastaus
Kellon hahmottaminen 36 a. Kellotaulu asetetaan näyttämään tasan kello kahdeksan. **Paljonko kello on?** ½ p: oikea vastaus 36 b. Kellotaulu asetetaan näyttämään puoli kymmentä. **Paljonko kello on?** ½ p: oikea vastaus 37 a. Kellotaulu asetetaan näyttämään vartin yli kymmentä. **Paljonko kello on?** ½ p: oikea vastaus 37 b. Kellotaulu asetetaan näyttämään varttia vaille yhtätoista. **Paljonko kello on?** ½ p: oikea vastaus
Symmetrian hahmottaminen 38. **Jos keskelle asetettaisiin peili, näin** (näytetään kädellä), **niin mikä kirjain tästä tulisi? (**Kuvatauluissa puolikkaat A, V, H ja Ö -kirjaimet.) 0 p: ainakin 2 virhettä 1 p: 1 virhe 2 p: kaikki oikein

LUVULLINEN PÄÄTTELY Osiosta pisteitä yhteensä 0–1
39. Kuvataulu, jossa on kaksi lasta (25 kg ja 35 kg) ja tavaroita (4 kg, 7 kg, 5 kg ja 3 kg). Kaikkien massat on merkitty ylös. **Mitkä kaksi esinettä tytön pitää ottaa käsiinsä, jotta hän painaisi yhtä paljon kuin poika?** 1p: oikea vastaus

VISUAALINEN PÄÄTTELY Osiosta pisteitä yhteensä 0–4
Kolmiulotteinen hahmottaminen Kuvataulu palikkarakennelmasta. 40. **Montako palikkaa tässä kuutiossa on?** 1 p: oikea vastaus 41. **Rakenna samanlaisen näistä palikoista.** 1 p: oikein rakennettu 42. **Laske montako palikkaa siinä rakennelmassasi on.** 1 p: oikea vastaus 43. Moniste palikoista, joissa palikoita on kuvattu eri kuvakulmista. **Yhdistä samanlaiset palikat eli etsi kaikille parit.** 1 p: kaikki parit oikein yhdistetty

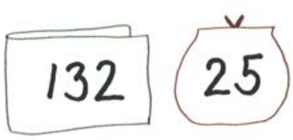
VERBAALINEN PÄÄTTELY Osiosta pisteitä yhteensä 0–1
Verbaalinen transitiivipäättely 44. Moniste, jossa on kuvattu kolme tyttöä ja heistä on kirjoitettu kolme väitelausetta. **Lue ja päättele, kuka tytöistä on kukin.** 1p: kaikki nimet oikein

LIITE 2:
TUTKIMUKSESSA KÄYTETYN TESTIN OHEISMATERIAALIT

- helmitaulu
- numerokortit 0–9
- kynä ja paperia
- numerolaput; 14, 18, 59, 69, 38, 36, 27, 72, 161, 116, 203, 302, 600, 599, 2, 12, 20, 69, 34, 80, 370, 605
- tuhatkuutio; ykköset, kymmensauvat ja satataulut
- 20 esinettä
- kuvakortti Kallesta, joka on 98 cm ja Liisasta, joka on 92 cm
- piirros kolmesta viiden pallon ryhmittymästä
- leikkirahoja 1 e (3 kpl), 2 e, 5 e, 10 e (2 kpl), 50 e, 100 e, 200 e
- näköeste, esimerkiksi tyhjä kansio
- opetuskello
- piirros, jossa 7 hansikasta eli 35 sormea

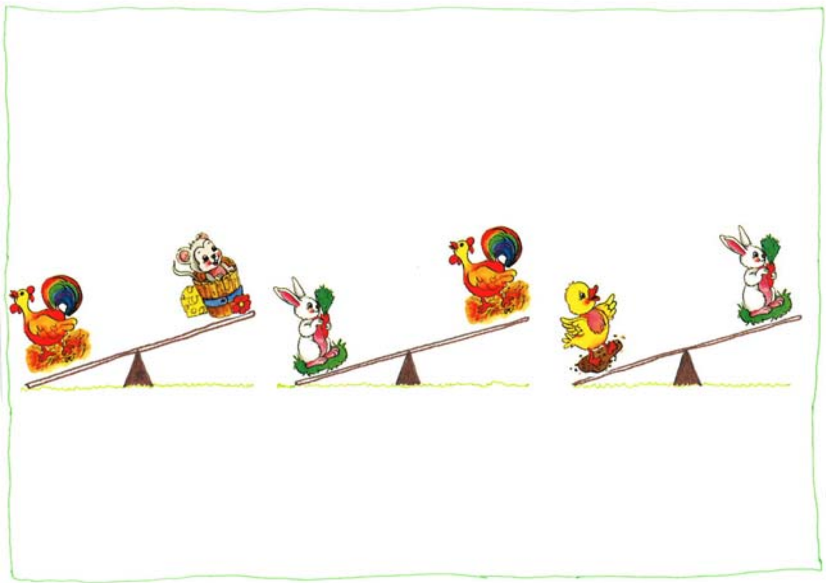
- moniste, jossa kuvattuna 7 lasta

- piirros lomapakosta, jossa 132 euroa ja kukkarosta, jossa 25 euroa



- kuvataulu eläimistä

- kuvataulu eläimistä tasapainovaa’alla

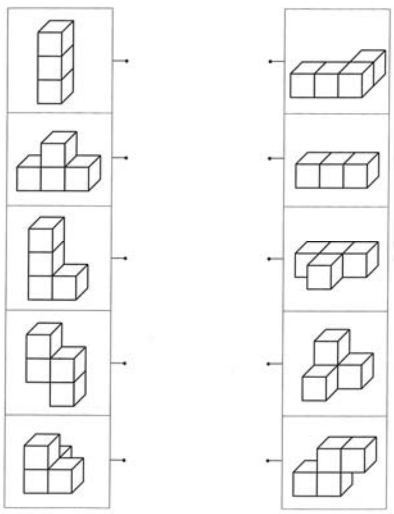


- kuvataulu, jossa tyttö painaa 25 kg ja poika 35 kg. Kuvassa myös tavaroita, joiden painot (4 kg, 7 kg, 5 kg ja 3 kg) myös näkyvillä

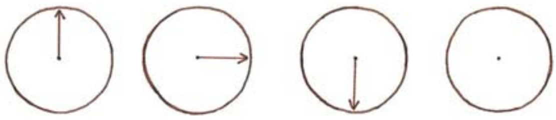
- kuvataulu palikkarakennelmasta

- monistetehtävä palikkarakennelmista, jossa parit on kuvattu eri kuvakulmista

Yhdistä samat rakennelmat toisiinsa.



- moniste loogisesti etenevästä kuvasarjasta

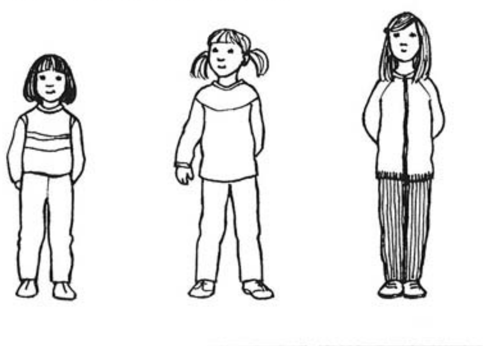


- kuvat puolikkaista A, H, V ja Ö kirjaimista

- monistetehtävä, jossa kuvattuna kolme tyttöä ja vihjelauseet siitä, kuka on kukin

3. Päättele, kuka on kukin. Tyttöjen nimet ovat Saana, Pihla ja Tuuli.

Tuuli on pidempi kuin Saana.
Pihla on lyhyempi kuin Tuuli.
Saana on pidempi kuin Pihla.



LIITE 3:

OLEELLISIMPIEN TEHTÄVÄKOKONAISUUKSIEN JA KYSYMYSTEN HAHMOTTAMINEN LÄHTÖTASOTESTISTÄ KORRELAATIOKERTOIMIEN JA FAKTORIANALYYSIEN AVULLA

	korrelaatiokerroin osa-alueen kokonaispistemäärään	korrelaatiokerroin testin kokonaispistemäärään
LUKUJONOTAIDOT		
lukujen luettelutaito	**0,964**	**0,870**
ryhmittelemällä laskeminen	0,666	0,745
määrä, lukusana ja numeromerkki	**0,881**	**0,914**
lukujen vertailu	**0,894**	**0,788**
luvun hajottaminen	0,800	0,854
järjestysluvut	0,406	0,364
lukujonossa liikkuminen	**0,960**	**0,870**
osio yhteensä	-	0,943
ARITMEETTISET PERUSTAIDOT		
joukkojen vertailu	0,519	0,461
yhteenlaskut	**0,959**	**0,959**
vähennyslaskut	**0,920**	**0,847**
osittaminen ja koonti	0,546	0,519
yhteenlaskun aukkotehtävät	0,847	0,835
vähennyslaskun aukkotehtävät	0,707	0,738
kertolaskut	0,836	0,781
jakolaskut	0,784	0,768
rahan hahmotus	**0,890**	**0,893**
ostoslaskut	**0,915**	**0,868**
kirjalliset laskut	**0,930**	**0,927**
osio yhteensä	-	0,968
MATEMAATTISLOOGINEN AJATTELU		
looginen päättely	0,861	0,579
hahmottaminen	**0,932**	**0,758**
luvullinen päättely	0,640	0,768
visuaalinen päättely	**0,855**	**0,606**
verbaalinen päättely	0,366	0,189
osio yhteensä	-	0,771

Taulukkoon on lihavoitu lyhyemmän testin kehittelyn kannalta oleellisimmat osiot.

TARKEMMAT TEHTÄVÄKOHTAISET KORRELAATIOT NIISTÄ MERKITTÄVIMMIKSI OSOITETUISTA OSIOISTA, JOISSA OLI USEAMPIA KYSYMYKSIÄ

LUKUJONOTAIDOT	
Lukujen luettelutaito	
tehtävän numero	korrelaatiokerroin
t. 1	**0,896**
t. 2	**0,869**
t. 3	**0,870**

LUKUJONOTAIDOT	
Lukujonossa liikkuminen	
tehtävän numero	korrelaatiokerroin
t. 11	**0,827**
t. 12	**0,844**
t. 13	**0,835**
t. 14	**0,919**
t. 15	0,473
t. 16	**0,860**
t. 17	0,666
t. 18	0,682

MATEMAATTIS-LOOGINEN AJATTELU	
Hahmottaminen	
tehtävän numero	korrelaatiokerroin
t. 35	**0,585**
t. 36	**0,746**
t. 37	**0,652**
t. 38	**0,605**

MATEMAATTISLOOGINEN AJATTELU	
Visuaalinen päättely	
tehtävän numero	korrelaatiokerroin
t. 40	**0,659**
t. 41	**0,724**
t. 42	**0,844**
t. 43	-0,140

Taulukkoihin on lihavoitu lyhyemmän testin kehittelyn kannalta oleellisimmat tehtävät.

FAKTORIANALYYSI LUKUJONOTAITOJEN OSIOSTA LYHYEMMÄN MITTARIN KEHITTELYÄ VARTEN

Component Matrix[a]

	Component
	1
l1	**,952**
l2	,713
l3	**,915**
l4	**,877**
l5	,851
l6	,492
l7	**,902**

Extraction Method: Principal Component Analysis.

a. 1 components extracted.

FAKTORIANALYYSI ARITMEETTISTEN PERUSTAITOJEN OSIOSTA LYHYEMMÄN MITTARIN KEHITTELYÄ VARTEN

Component Matrix[a]

	Component
	1
a1	,501
a2	**,956**
a3	**,902**
a4	,547
a5	,839
a6	,731
a7	,837
a8	,792
a9	**,896**
a10	**,920**
a11	**,939**

Extraction Method: Principal Component Analysis.

a. 1 components extracted.

FAKTORIANALYYSI MATEMAATTISLOOGISEN AJATTELUN OSIOSTA LYHYEMMÄN MITTARIN KEHITTELYÄ VARTEN

Component Matrix[a]

	Component 1
m1	,876
m2	**,911**
m3	,718
m4	**,846**
m5	,296

Extraction Method: Principal Component Analysis.

a. 1 components extracted.

FAKTORIANALYYSI LUKUJONOSSA LIIKKUMISEN TEHTÄVÄPATTERISTOSTA LYHYEMMÄN MITTARIN KEHITTELYÄ VARTEN

Component Matrix[a]

	Component 1
t. 11	**,857**
t. 12	**,862**
t. 13	**,873**
t. 14	**,918**
t. 15	,554
t. 16	**,846**
t .17	,637
t .18	,652

Extraction Method: Principal Component Analysis.

a. 1 components extracted.

LIITE 4:

MATEMAATTISTEN TAITOJEN LÄHTÖTASOTESTI ENSILUOKKALAISILLE

LUKUJONOTAIDOT

LUKUJEN LUETTELUTAITO JA LUKUJONOSSA LIIKKUMINEN TIETYIN ASKELIN Osiosta pisteitä yhteensä 0–9			
Lukujonon luettelu 1. **Kuinka pitkälle osaat laskea? Laske niin minä kuuntelen.** Pisteitä 0–3	0 p: ei osaa luetella virheettömästi lukuun 10 asti 1 p: virheettömästi lukuun 10–20 asti	2 p: luettelee lukuja lähes 50 asti, mutta tulee joidenkin lukujen ylihyppyjä tai virheitä 3 p: virheettömästi lukuun 50 asti	
Lukujen takaperin luettelu 2. **Luettele nyt lukuja takaperin. Aloita luvusta 20.** (Jos liian vaikea, pyydetään aloittamaan luvusta 10.) Pisteitä 0–3	0 p: ei onnistu aloittamalla luvusta 10 1 p: luvusta 10 aloittaen muutamia virheitä 2 p: virheettömästi aloittaen luvusta 10 tai joitakin virheitä aloittaen luvusta 20	3 p: virheettömästi aloittaen luvusta 20	
Lukujen luettelu tietyin askelin Pisteitä 0–3	3a. **Luettele lukuja niin, että hyppäät joka toisen luvun yli.** 1 p: onnistuu virheettä lukuun 20 asti	b. **Luettele lukuja niin, että sanot joka viidennen luvun. Aloitetaan luvusta 5.** 1 p: onnistuu virheettä lukuun 50 asti	c. **Luettele lukuja niin, että sanot vain joka kolmannen luvun. Aloitetaan luvusta 3.** 1 p: onnistuu virheettä lukuun 30 asti
MÄÄRÄN, LUKUSANAN JA NUMEROMERKIN VASTAAVUUS Osiosta pisteitä yhteensä 0-5			
Numeromerkin ja lukusanan vastaavuus Pisteitä 0–5	4a. **Mikä numero tämä (8) on?** ½ p: oikein b. **Piirrä numero kolme.** ½ p: oikein	c. **Piirrä numerot 14, 27, 50 ja 69.** 0 p: ei osaa tai ainakin 2 väärin 1 p: 1 väärin 2 p: kaikki oikein	d. **Piirrä numerot 111, 105, 501 ja 515.** 0 p: ei osaa tai ainakin 2 väärin 1 p: 1 väärin 2 p: kaikki oikein

LUKUJEN JÄRJESTYKSEEN ASETTAMINEN ELI LUKUJEN VERTAILU Osiosta pisteitä yhteensä 0–6			
Pisteitä 0–6	5a. **Järjestä numero-laput** (0–9) **suuruus-järjestykseen.** 0 p: ei osaa tai ainakin 2 väärin 1 p: 1 väärin 2 p: sarja oikein	b. **Kumpi näistä on suurempi luku?** (nu-merolaput) **14** vai **18** **59** vai **69** **38** vai **36** **27** vai **72** 0 p: ei osaa tai ainakin 2 väärin 1 p: 1 väärin 2 p: kaikki oikein	c. **Kumpi näistä on suurempi luku?** (nu-merolaput) **161** vai **116** **203** vai **302** **600** vai **599** 0 p: ei osaa tai 2 väärin 1 p: 1 väärin 2 p: kaikki oikein
LUKUJONOSSA LIIKKUMINEN Osiosta pisteitä yhteensä 0–15			
Seuraava ja edellinen luku Pisteitä 0–6	6a. **Mikä on seuraava luku luvusta 3 ja lu-vusta 9?** 1 p: molemmat oikein 7a. **Mikä on edellinen luku luvusta 3 ja 9?** 1 p: molemmat oikein	6b. **Mikä on seuraava luku luvusta 29 ja 55?** 1 p: molemmat oikein 7b. **Mikä on edellinen luku luvusta 20 ja 55?** 1 p: molemmat oikein	6c. **Mikä on seuraava luku luvusta 202 ja 999?** 1 p: molemmat oikein 7c. **Mikä on edellinen luku luvusta 100 ja 333?** 1 p: molemmat oikein
Eteenpäin ja taaksepäin (4–5 lukua) annetusta luvusta Pisteitä 0–6	8a. **Jatka eteenpäin luvusta** **3, 8 ja 12.** 1 p: kaikki oikein 9a. **Luettele taakse-päin luvusta 4, 8 ja 12** 1 p: kaikki oikein	8b. **Jatka eteenpäin luvusta 19 ja** **jatka lukujonoa 95, 96, 97…** 1 p: molemmat oikein 9b. **Jatka lukujonoa 24, 23, 22…** 1 p: oikein	8c. **Jatka lukujonoa 196, 197, 198…** 1 p: oikein 9c. **Jatka lukujonoa 133, 132, 131…** 1 p: oikein
Eteenpäin ja taaksepäin luvusta toiseen Pisteitä 0–3	10. **Luettele kaikki numerot…** a. **luvusta 6 lukuun 3.** 1 p: oikein b. **luvusta 13 lukuun 8.** 1 p: oikein	c. **Luettele kaikki numerot luvusta 20 lukuun 17.** 1 p: oikein	

ARITMEETTISET PERUSTAIDOT

YHTEENLASKUJA Osiosta pisteitä yhteensä 0–12			
Pisteitä 0–12	22 a. **Sinulla on 3 karkkia. Saat 3 lisää. Montako karkkia sinulla nyt on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 22 b. **Pihalla on 2 poikaa ja 3 tyttöä. Montako lasta pihalla on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	22 c. **Sinulla on 9 karkkia ja saat 5 lisää. Montako karkkia sinulla sitten on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 22 d. **Pihalla on 12 poikaa ja 13 tyttöä. Montako lasta pihalla on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	22 e. **Lompakossa 132 euroa, kukkarossa 25 euroa. Paljonko niissä on yhteensä rahaa?** (Luvut on näkyvillä kuvakortissa) 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 2 p: oikea vastaus työlään prosessin myötä 4 p: oikea vastaus selkeällä ja toimivalla strategialla
VÄHENNYSLASKUJA Osiosta pisteitä yhtensä 0–12			
Pisteitä 0–12	23 a. **Puun oksalla on 6 lintua. 4 lentää pois. Montako lintua jää oksalle?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 23 b. **Pihalla on 8 lasta. Niistä 3 on tyttöä. Montako poikaa pihalla on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	23 c. **Oksalla on 12 lintua. 4 lentää pois. Montako lintua jää oksalle?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 23 d. **Luokassa on 18 lasta. Niistä 3 on tyttöä. Paljonko luokassa on poikia?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus	23 e. **Ville on 80 cm. Viivi on 5 cm lyhyempi kuin Ville. Kuinka pitkä Viivi on?** 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus 23 f. **Kalle on 98 cm ja Liisa on 92 cm. Kuinka paljon Kalle on pidempi kuin Liisa?** (Mitat näkyvissä kuvakortissa) 0 p: ei vastausta tai väärä vastaus 1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta tai muuten hitaan ja työlään prosessin myötä 2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus

<table>
<tr><td colspan="4">RAHALASKUJA
Osiosta pisteitä yhteensä 0–12</td></tr>
<tr>
<td>Pisteitä 0–12</td>
<td></td>
<td>29 a. Paljonko tässä on rahaa (leikkirahat) 10 e, 1 e, 1 e, 1 e

0 p: ei vastausta tai väärä vastaus
1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta
2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus

29 b. Ostat näillä rahoilla 5 euron lelun. Paljonko rahaa jää?

0 p: ei vastausta tai väärä vastaus
1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta
2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus

29 c. Paljonko tässä on rahaa (leikkirahat) 10 e, 10 e, 5 e, 2 e, 1 e

0 p: ei vastausta tai väärä vastaus
1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta
2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus

29 d. Ostat näillä rahoilla 11 euron lelun. Paljonko rahaa jää?

0 p: ei vastausta tai väärä vastaus
1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta
2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus</td>
<td>29 e. Paljonko tässä on nyt rahaa (leikkirahat)
200 e, 100 e, 50 e, 10 e, 10 e

0 p: ei vastausta tai väärä vastaus
1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta
2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus

29 f. Ostat näillä rahoilla 5 euron lelun. Paljonko rahaa jää?

0 p: ei vastausta tai väärä vastaus
1 p: oikea vastaus konkretian tai suullisen laskemisen kautta
2 p: sisäisesti laskettu oikea vastaus</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">KIRJALLISET LASKUT
Osiosta pisteitä yhteensä 0–9</td></tr>
<tr><td>Pisteitä 0–9</td><td>Laskut kynällä ja paperilla

30 a. 4+5=
½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa
1p: heti oikea vastaus

30 b. 8-3=
½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa
1p: heti oikea vastaus</td><td>Laskut kynällä ja paperilla

30 c. 7-6+3=
½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa
1p: heti oikea vastaus

30 d. 32-5=
½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa
1p: heti oikea vastaus

30 e. 6+4-9=
½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa
1p: heti oikea vastaus</td><td>Laskut kynällä ja paperilla

30 f. 2·8=
1 p: oikea vastaus

30 g. 8:2=
1 p: oikea vastaus

30 h. 60-6-4=
½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa
1p: heti oikea vastaus

30 i. 146+9=
½ p: jos merkki huomioitu ensin väärin, mutta osaa korjata tarkistettaessa
1p: heti oikea vastaus</td></tr>
</table>

MATEMAATTISLOOGINEN AJATTELU

HAHMOTTAMINEN
Osiosta pisteitä yhteensä 0–6

Lukumäärän säilyvyys

35 a. Laitetaan lapsen nähden 20 esinettä parijonoon. Todetaan, että esineitä on jonoissa yhtä paljon. Toista jonoa venytetään välimatkoja pidentämällä. **Kummassa jonossa on enemmän?**
1 p: oikea vastaus

35 b. Asetetaan esineet taas parijonoon ja todetaan niitä olevan yhtä monta. Toinen jono kasataan tiiviiksi ryhmäksi ja toinen jono kasataan harvemmin. **Kummassa ryhmässä on enemmän?**
1 p: oikea vastaus

Kellon hahmottaminen

36 a. Kellotaulu asetetaan näyttämään tasan kello kahdeksan. **Paljonko kello on?**
½ p: oikea vastaus

36 b. Kellotaulu asetetaan näyttämään puoli kymmentä. **Paljonko kello on?**
½ p: oikea vastaus

37 a. Kellotaulu asetetaan näyttämään vartin yli kymmentä. **Paljonko kello on?**
½ p: oikea vastaus

37 b. Kellotaulu asetetaan näyttämään varttia vaille yhtätoista. **Paljonko kello on?**
½ p: oikea vastaus

Symmetrian hahmottaminen

38. **Jos keskelle asetettaisiin peili, näin** (näytetään kädellä), **niin mikä kirjain tästä tulisi? (**Kuvatauluissa puolikkaat A, V, H ja Ö -kirjaimet.)
0 p: ainakin 2 virhettä
1 p: 1 virhe
2 p: kaikki oikein

VISUAALINEN PÄÄTTELY
Osiosta pisteitä yhteensä 0–3

Kolmiulotteinen hahmottaminen

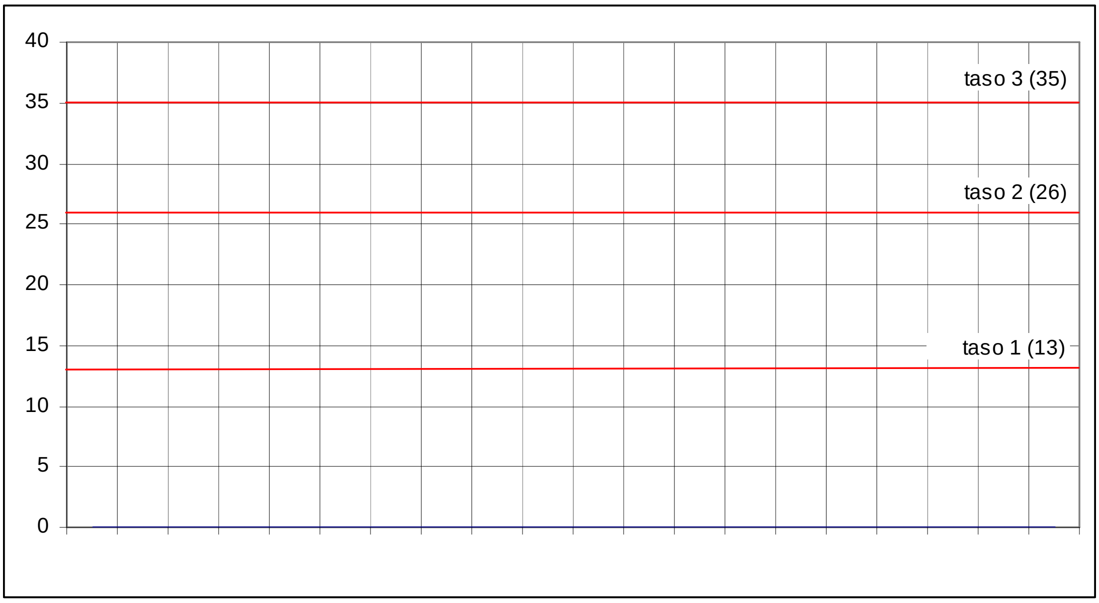
Kuvataulu palikkarakennelmasta.
40. **Montako palikkaa tässä kuutiossa on?**
1 p: oikea vastaus

41. **Rakenna samanlaisen näistä palikoista.**
1 p: oikein rakennettu

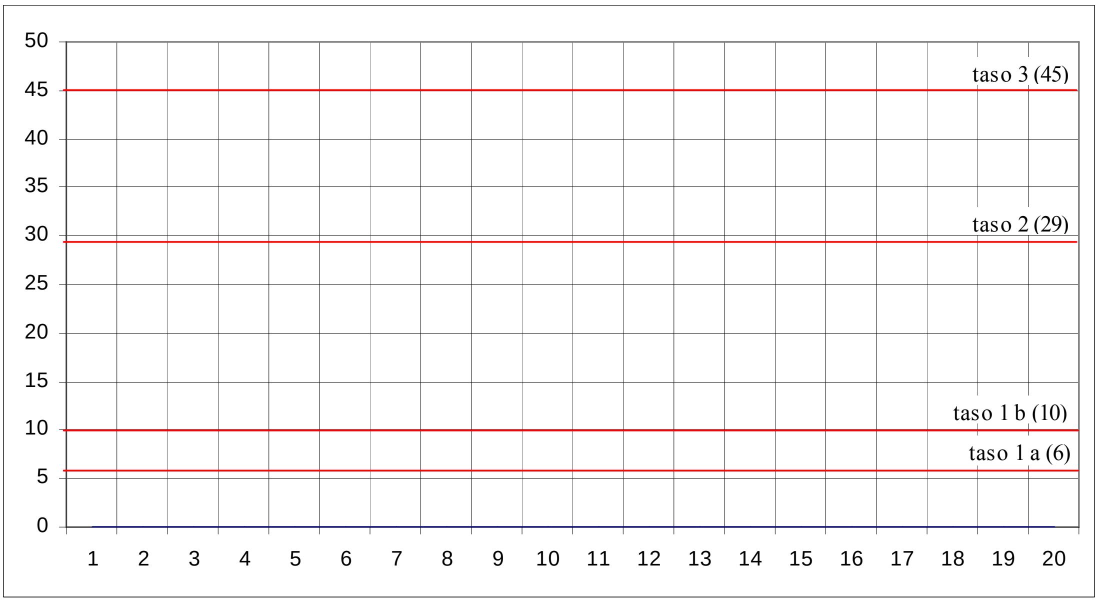
42. **Laske montako palikkaa siinä rakennelmassasi on.**
1 p: oikea vastaus

LIITE 5:
TAULUKKOPOHJAMALLIT LASTEN TULOSTEN KOONTIA VARTEN

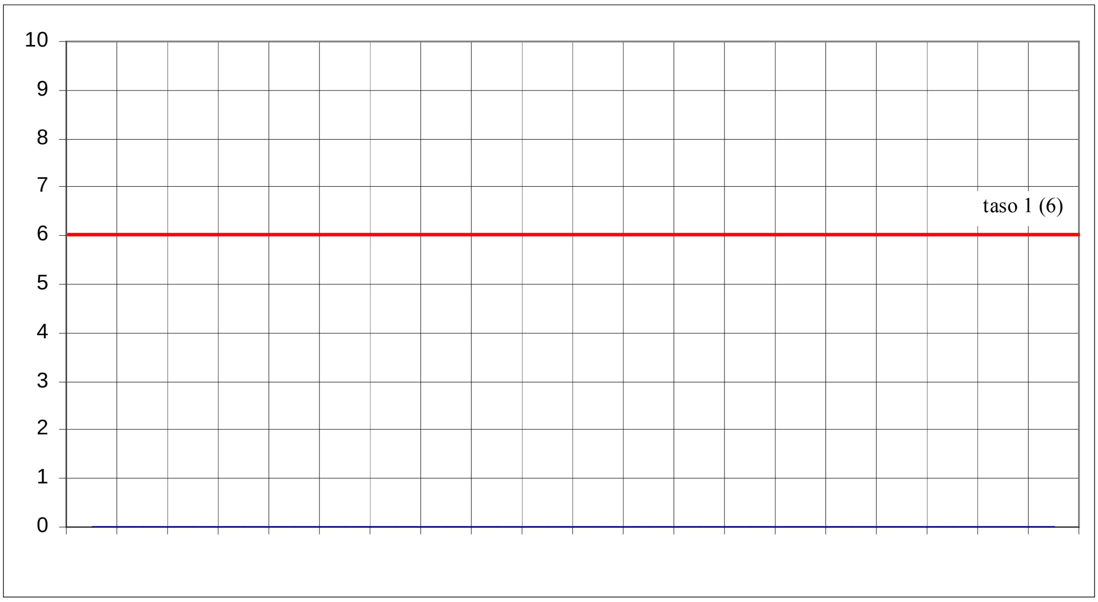
LUKUJONOTAIDOT



ARITMEETTISET PERUSTAIDOT



MATEMAATTISLOOGINEN AJATTELU



KOKONAISPISTEMÄÄRÄ