Kompaktien operaattoreiden spektraaliteoriasta

Lauri Horttanainen

Matematiikan Pro Gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2008

Sisältö

Johdanto

Symmetrisen lineaarikuvauksen ominaisarvo-ongelmia käsitellään ja ratkaistaan usein lineaarialgebran keinoin. Spektraaliteoria, jonka mukaan symmetrisen lineaarikuvauksen ominaisarvoja vastaavista ominaisvektoreista voidaan muodostaa lineaarikuvauksen operoimaan äärellisulotteiseen sisätuloavaruuteen ortonormaali kanta, voidaan johtaa myös lineaarialgebran tulosten avulla.

Tässä työssä esitetään separoituvan Hilbert-avaruuden spektraalilauseen johtaminen jatkuvan funktion ääriarvojen määrittämiseen perustuvalla menetelmällä. Johdantona toimii vastaavan teorian johtaminen äärellisulotteisessa sisätuloavaruudessa $\mathbb{R}^n$ differentiaalilaskennan tuloksia apuna käyttäen. Lisäksi työssä käsitellään muutamia johdetun teorian herättämiä kysymyksiä ja huomautuksia. Teorian johtamiseen ja teoreettisena määränpäänä olevaan spektraalilauseeseen liittyviä esimerkkejä on kirjoitettu sisällön selventämisen, mutta myös erottelun, sekä syventämisen tarkoituksessa. Työn viimeistelee erään spektraalilauseen sovelluksen esittäminen.

Työn eri vaiheissa esitetään johdettavaan teoriaan liittyviä käsitteitä ja tuloksia, jotta sisällön ymmärtäminen olisi helpompaa ilman lähdeteoksia. Nämä käsitteet ja tulokset esitetään tiivistetyssä muodossa, jotta työn varsinainen sisältö ei katoaisi lukijalta. Lukijan tulee näiden asioiden valossa hallita hyvin lineaarisen algebran ja geometrian, metristen avaruuksien, sekä differentiaalilaskennan perusteet.

Olen käyttänyt työni tekemisessä useita erilaisia lähteitä. Niistä tärkeimpinä pidän F. Riesz'n ja Béla SZ. -Nagy'n teosta [**8**], Ari Lehtosen kirjoittamaa luentoliitettä kompaktien operaattoreiden spektristä [**7**], sekä Lauri Kahanpään luentomonistetta [**6**]. Lisäksi suurena innoittajanani itse teorian sisällön lisäksi ovat toimineet opettajieni Pasi Mikkosen ja Kai Rajalan luennot lineaarisesta algebrasta ja geometriasta, sekä funktionaalianalyysistä.

Olen pyrkinyt muodostamaan ja kirjoittamaan työni oma-alotteisesti *ohjaajani lehtori Ari Lehtosen* ohjauksien avustuksella. Työn rakenteen suunnittelussa ja toteutuksessa olen toisaalla käyttänyt merkittävästi kirjallisia lähteitä, mutta suuri osa työstä on kirjoitettu ilman lähteitä. Erityisesti ensimmäinen luvun rakenne ja toteutus ovat kokonaisuutena itse tuotettuja. Olen käyttänyt lauseiden todistuksissa omien ratkaisujen lisäksi kirjoitettuja lähteitä ja suorittamieni kurssien luentomuistiinpanoja. Kuitenkin todistusten yksityiskohdat ja välivaiheet olen ratkaissut ja kirjoittanut itse. Työssä esitettävät esimerkit ovat ideoitu yhdessä Ari Lehtosen kanssa.

Työni valmistumisen ajankohdaksi muodostui kevät 2008. Haluan nyt kiittää kaikkia työni valmistumiseen vaikuttaneita ihmisiä, *ja heistä erityisesti Perhettäni, työni ohjaajaa Ari Lehtosta, lehtori Lauri Kahanpäätä, työnantajiani ja hyviä ystäviäni Mikko ja Teija Laurikaista, sekä vanhempiani.*

Jyväskylässä huhtikuussa 2008

Lauri Horttanainen

1. Sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ spektraaliteoriasta

Aloitetaan esittelemällä tiiviisti tarvittavia määritelmiä ja lauseita huomautuksineen, sekä seurauksineen.

Määritelmä 1.1. *Vektoriavaruus* V on joukko alkioita, joita voidaan laskea yhteen ja kertoa reaaliluvuilla luonnollisin määrittelyin seuraavien ehtojen ollessa voimassa kaikille u, v, $w \in V$ ja λ, $\eta \in \mathbb{R}$:

(1) $u + v = v + u$ (*vaihdannaisuus*)
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (*liitännäisyys*)
(3) $u + 0 = u$ (*nolla-alkio*)
(4) $u + (-u) = 0$ (*vasta-alkio*)
(5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ (*1. osittelulaki*)
(6) $(\lambda + \eta)u = \lambda u + \eta u$ (*2. osittelulaki*)
(7) $\lambda(\eta u) = (\lambda\eta)u$ (*skalaarilla kertominen*)
(8) $1 \cdot u = u$ (*skalaarilla kertomisen ykkösalkio*).

Avaruuden alkioita kutsutaan vektoreiksi, pisteiksi tai alkioiksi.

Määritelmä 1.2. Vektoriavaruuden V alkioiden $u_1, u_2, \ldots, u_n$ lineaarikombinaatioiksi sanotaan vektoreita

$$v = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \ \ldots \ + \eta_n u_n,$$

missä $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ovat reaalilukuja. Kaikkien lineaarikombinaatioiden joukkoa

$$\{\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \ \ldots \ + \eta_n u_n : u_i \in V, \eta_i \in \mathbb{R}\} := \langle u_1, \ \ldots \ , u_n \rangle$$

sanotaan lineaariseksi verhoksi.

Määritelmä 1.3. Vektoriavaruuden V vektorit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ovat lineaarisesti riippumattomat, jos niitä *ei voi* lausua muiden vektoreiden lineaarikombinaationa.

Määritelmä 1.4. Vektoriavaruuden V alkiot $u_1, u_2, \ldots, u_n$ muodostavat avaruuden *kannan*, jos

(1) $\langle u_1, \ \ldots \ , u_n \rangle = V$
(2) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ovat *lineaarisesti riippumattomia.*

Huomautus 1.5. Vektoriavaruuden V kannan määritelmän 1.4 ensimmäinen ehto on yhtä pitävä seuraavan ehdon kanssa: Vektoriavaruuden V jokainen alkio x voidaan esittää vektoreiden $u_1, u_2, \ldots, u_n$ lineaarikombinaationa

$$x = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u_i,$$

missä kertoimet η_i ovat reaalilukuja.

Määritelmä 1.6. Vektoriavaruuden V dimensioksi sanotaan sen kantavektoreiden lukumäärää.

Erityisesti vektoriavaruudella $\mathbb{R}^n$ on kanta, joka muodostuu vektoreista $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Tämän *standardin kannan* suhteen on voimassa esitys

$$x = (x_1, \ \ldots \ ,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Standardia kantaa kutsutaan usein myös *kanooniseksi kannaksi.*

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoot u ja v vektoriavaruuden V alkioita. Kuvausta $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ sanotaan *sisätuloksi*, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $(u|u) \geq 0$ ja $(u|u) = 0$, kun $u = 0$ (*positiividefiniittisyys*)
(2) $(u|v) = (v|u)$ (*symmetrisyys*)
(3) $(\lambda u + \mu v|w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w)$, kun $\lambda, \ \mu \in \mathbb{R}$ (*lineaarisuus*).

Vektoriavaruutta V, jossa on määritelty sisätulo, sanotaan *sisätuloavaruudeksi.*

Asetetaan nyt vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^n$ sisätulo

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (u|v) := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Jatkossa oletetaan, että käsiteltäviin sisätuloavaruuksiin on määriteltynä juuri edellä esitetty standardi, eli *euklidinen*, sisätulo ellei muuta ole mainittu.

HUOMAUTUS 1.8. Euklidinen sisätulo $(\cdot|\cdot)$ määrää vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^n$ *euklidisen normin*

$$\|u\| = \sqrt{(u|u)},$$

joka toteuttaa abstraktin normin kolme määrittelevää ehtoa. Normin tarkka määritelmä löytyy Veikko T. Purmosen luentomonisteesta [**2**, §1.4].

MÄÄRITELMÄ 1.9. Sisätuloavaruuden V vektorit $u_1, \ \ldots \ , u_n$ ovat ortonormaaleja, jos ne ovat keskenään kohtisuoria eli $(u_i|u_j) = 0$ aina, kun $i \neq j$, ja lisäksi jokaisen vektorin pituus eli normi on yksi.

Määritelmän 1.9 nojalla vektoriavaruuden V kanta on ortonormaali, jos kaikki avaruuden V kantavektorit ovat ortonormaaleja keskenään.

HUOMAUTUS 1.10. Standardi kanta $e_1, \ \ldots \ , e_n$ on euklidisen sisätulon suhteen ortonormaali.

MÄÄRITELMÄ 1.11. Sisätuloavaruuden V epätyhjä osajoukko $U \subset V$ on *aliavaruus*, jos kaikille osajoukon U alkioille u ja v, sekä reaaliluvuille η on voimassa

(1) $u + v \in U$
(2) $\eta u \in U$.

HUOMAUTUS 1.12. Vektoriavaruuden aliavaruus on myös vektoriavaruus, ja sisätuloavaruuden aliavaruus on sisätuloavaruus mikäli aliavaruuteen määritellään vastaava sisätulo, kuin alkuperäiseen avaruuteen.

Määritellään vielä sisätuloavaruuksien välinen lineaarikuvauksen käsite:

MÄÄRITELMÄ 1.13. Olkoot V ja $\widetilde{V}$ mielivaltaisia, äärellisulotteisia sisätuloavaruuksia. Kuvaus $A : V \to \widetilde{V}$ on lineaarikuvaus, jos

$$A\left(\eta x + \gamma y\right) = \eta Ax + \gamma Ay$$

on voimassa kaikille avaruuden V pisteille x ja y, sekä reaaliluvuille η ja γ.

Spektraalilauseessa esiintyvälle lineaarikuvaukselle tarvitaan vielä tärkeä määrittelevä ominaisuus. Määritellään tämä ominaisuus seuraavaksi.

MÄÄRITELMÄ 1.14. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ sisätuloavaruus. Lineaarikuvaus $A : V \to V$ on *symmetrinen*, jos $(Ax|y) = (x|Ay)$ kaikille avaruuden V pisteille x ja y.

LAUSE 1.15. *Olkoon $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen lineaarikuvaus $A^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, jolle on voimassa*

$$(Ax|y) = \left(x|A^T y\right)$$

kaikille avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteille x ja y.

TODISTUS. Olkoon y avaruuden $\mathbb{R}^n$ piste. Tällöin kuvaus

$$f_y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f_y\left(x\right) = (Ax|y)$$

on lineaarinen, joten on olemassa yksikäsitteinen avaruuden $\mathbb{R}^n$ piste z niin, että $f_y\left(x\right) = (Ax|y) = (x|z)$ kaikilla avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteillä x. Asetetaan nyt $A^T y := z$, ja tällöin

$$(Ax|y) = f_y\left(x\right) = (x|z) = \left(x|A^T y\right)$$

kaikilla avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteillä x ja y.

Kuvaus $A^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on yksikäsitteinen, sillä piste z on yksikäsitteinen. Lisäksi kuvaus A^T on lineaarikuvaus: Olkoot u sekä v avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteitä ja η ja γ reaalilukuja. Tällöin kaikille avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteille x on voimassa

$$\begin{aligned}
\left(x|A^T(\eta u + \gamma v)\right) &= (Ax|\eta u + \gamma v) \\
&= (\eta u + \gamma v|Ax) \\
&= \eta\left(u|Ax\right) + \gamma\left(v|Ax\right) \\
&= \eta\left(Ax|u\right) + \gamma\left(Ax|v\right) \\
&= \left(x|\eta A^T u\right) + \left(x|\gamma A^T v\right) \\
&= \left(x|\eta A^T u + \gamma A^T v\right),
\end{aligned}$$

ja näin väite on todistettu. $\square$

HUOMAUTUS 1.16. Esitetään lauseeseen 1.15 ja sen todistukseen liittyviä huomautuksia.

(1) Lineaarikuvausta $A^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kutsutaan lineaarikuvauksen A transpoosiksi.
(2) Transpoosia A^T vastaava matriisi saadaan lineaarikuvausta A vastaavasta matriisista vaihtamalla järjestyksessä rivit sarakkeiksi.

SEURAUS 1.17. *Sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ symmetriselle lineaarikuvaukselle $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on voimassa $A = A^T$.*

MÄÄRITELMÄ 1.18. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ sisätuloavaruus. Lineaarikuvauksen $A : V \to V$ sanotaan olevan *positiivinen*, jos $(Ax|x) \geq 0$ kaikille avaruuden V vektoreille x.

Oletetaan jatkossa, että lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on nollakuvauksesta poikkeava, positiivinen ja symmetrinen ellei toisin mainita.

Merkitään nyt yksikköpallon kuorta joukolla

$$S_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

ja tarkastellaan kuvauksen

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto (Ax|x)$$

ääriarvoja side-ehdolla $x \in S_1$. Kuvaus f on jatkuva ja joukko S_1 on Heine-Borelin lauseen nojalla kompakti, joten f saavuttaa suurimman arvonsa jossakin pisteessä $x \in S_1$. Ääriarvo-ongelma saadaan nyt ratkaistua Lagrangen kertojien menetelmää käyttäen:

LAUSE 1.19. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, ja olkoon $f : U \to \mathbb{R}$ ja $g : U \to \mathbb{R}^m$ jatkuvasti differentioituvia funktioita. Jos funktiolla f rajoitettuna joukkoon*

$$U_g(0) := g^{\{-1\}}(0) = \{x \in U : g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}$$

on lokaali ääriarvopiste a ja g:n derivaattamatriisin mat $Dg(a)$ *aste on m, niin tällöin on olemassa reaaliluvut $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(a).$$

Reaalilukuja $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sanotaan Lagrangen kertojiksi.

Lauseen todistusta ei ole tarpeellista tarkastella tässä yhteydessä tarkemmin. Lauseen todistuksen tarkat yksityiskohdat löytyvät Veikko T. Purmosen kirjoittamasta luentomonisteesta [**4**, §6.2].

Olkoon x nyt yksikköpallon kuoren S_1 piste, jossa f saavuttaa suurimman arvonsa. Funktio f on muotoa

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_k x_j \right).$$

Merkitään nyt neliömuodon derivaattaa merkinnöin

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \ldots, \partial_n f(x)).$$

Joukon S_1 määräämä side-ehtofunktio g on nyt muotoa

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

ja Lagrangen kertojien menetelmällä 1.19 saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 1, \end{cases}$$

joka sievenee komponenttitasoisesti laskemalla muotoon

$$\begin{cases} 2\sum_{k=1}^{n} a_{1,k}x_k = 2\lambda x_1 \\ 2\sum_{k=1}^{n} a_{2,k}x_k = 2\lambda x_2 \\ \vdots \\ 2\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}x_k = 2\lambda x_n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \end{cases}$$

Yhtälöryhmä saadaan sievennyksen jälkeen muotoon

$$\begin{cases} Ax = \lambda x \\ \|x\| = 1. \end{cases}$$

Nyt piste $x \neq 0$, koska x on yksikköpallon kuoren S_1 piste. Myös $\lambda \neq 0$, koska muuten lineaarikuvaus $A = 0$. Neliömuodon f ääriarvopiste x on siis lineaarikuvauksen A ominaisvektori ja $\lambda \neq 0$ on sitä vastaava ominaisarvo. Nyt neliömuodon f suurin arvo saadaan laskettua:

$$\max\{f(x) : x \in S_1\} = (Ax|x) = (\lambda x|x) = \lambda\,(x|x) = \lambda\|x\|^2 = \lambda.$$

Neliömuodon f suurin arvo side-ehdolla $\|x\| = 1$ on siis lineaarikuvauksen A ominaisarvo λ.

Määritellään seuraavaksi tarkastelun jatkamiseksi ominaisarvoa λ vastaava ominaisavaruus, ja ominaisavaruuden ortogonaalinen komplementti:

Määritelmä 1.20. Ominaisarvoa λ vastaava ominaisavaruus on joukko

$$V_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\},$$

ja ominaisavaruuden V_λ ortogonaalinen komplementti on joukko

$$V_\lambda^\perp := \{y \in \mathbb{R}^n : (y|x) = 0 \ \forall\ x \in V_\lambda\}.$$

Seuraava lemma osoittaa, että symmetrien lineaarikuvaus A kuvaa ominaisavaruuden itselleen, ja erityisesti A kuvaa myös ominaisavaruuden ortogonaalisen komplementin itselleen:

LEMMA 1.21. *Olkoon $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ symmetrinen lineaarikuvaus ja $\lambda \in \mathbb{R}$ lineaarikuvauksen A ominaisarvo. Tällöin $A(V_\lambda) \subset V_\lambda$ ja $A\left(V_\lambda^\perp\right) \subset V_\lambda^\perp$.*

TODISTUS. Olkoon $z \in V_\lambda$. Tällöin $Az = \lambda z$, joten

$$A(Az) = A(\lambda z) = \lambda A(z).$$

Siis $Az \in V_\lambda$, kun $z \in V_\lambda$.
Olkoon nyt $z \in V_\lambda^\perp$ ja olkoon $x \in V_\lambda$. Tällöin

$$(Az|x) = (z|Ax) = (z|\lambda x) = \lambda \underbrace{(z|x)}_{=0} = 0.$$

Siis $Az \in V_\lambda^\perp$, kun $z \in V_\lambda^\perp$. □

Edellä olevan tarkastelun perusteella nolla-kuvauksesta poikkeavalla symmetrisellä lineaarikuvauksella $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on vähintään yksi nollasta eroava ominaisarvo λ. Lisäksi lemman 1.21 perusteella ominaisarvoa λ vastaava ominaisavaruus V_λ kuvautuu lineaarikuvauksessa A itselleen, kuten ominaisavaruuden V_λ ortogonaalinen komplementtikin $V_\lambda^\perp$.

Nyt herää kysymys, onko symmetrisellä lineaarikuvauksella A enemmänkin ominaisarvoja ja ominaisvektoreita. Vastausta ei suoraan voida ilmaista muodossa kyllä tai ei, sillä niiden olemassaolo riippuu merkittävästi lineaarikuvauksesta A. Kuitenkin lemma 1.21 motivoi tarkastelemaan ominaisarvojen olemassaoloa ominaisavaruuden V_λ ortogonaalisessa komplementissa $V_\lambda^\perp$.

Mikäli lineaarikuvauksella A kuitenkin on useampi erisuuri ominaisarvo, niin niitä vastaavista ominaisvektoreista ja ominaisavaruuksista voidaan sanoa seuraavaa:

LEMMA 1.22. *Olkoon $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ symmetrinen lineaarikuvaus ja olkoot λ ja μ lineaarikuvauksen A erisuuria ominaisarvoja. Olkoon vielä ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori e ja ominaisarvoa μ vastaava ominaisvektori h. Tällöin ominaisvektorit e ja h ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.*

TODISTUS. On siis osoitettava, että ominaisvektoreiden e ja h sisätulo on nolla. Lemman oletuksien nojalla $Ae = \lambda e$ ja $Ah = \mu h$. Tällöin $(Ae|h) = (\lambda e|h) = \lambda(e|h)$. Toisaalta $(Ae|h) = \left(e|A^T h\right) = (e|Ah) = (e|\mu h) = \mu(e|h)$, koska A on symmetrinen. Mutta nyt $\lambda(e|h) = \mu(e|h)$, joten $(e|h) = 0$, koska $\lambda \neq \mu$. □

Lemmasta 1.22 todistuksineen saadaan seurauksena myös ominaisavaruuksien keskenäinen kohtisuoruus:

SEURAUS 1.23. *Symmetrisen lineaarikuvauksen $A : V \to V$ erisuuria ominaisarvoja λ ja μ vastaavat ominaisavaruudet V_λ ja V_μ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.*

Edellä todettiin, että nolla-kuvauksesta eroavalla symmetrisellä lineaarikuvauksella A on ainakin yksi nollasta eroava ominaisarvo λ. Ominaisarvo löydettiin tutkimalla neliömuodon f suurinta arvoa side-ehdolla $\|x\| = 1$, ja se osoittautui neliömuodon f suurimmaksi arvoksi. Kiinnitetään nyt löydetty ominaisarvo λ merkitsemällä $\lambda := \lambda_1$. Lineaarikuvauksen A symmetrisyydestä seurasi erityisesti ominaisavaruuden V_{λ_1} ortogonaalisen komplementin $V_{\lambda_1}^{\perp}$ kuvautuminen itselleen. Jatketaan nyt lineaarikuvauksen A ominaisarvojen, ja neliömuodon f tarkastelua juuri joukossa $V_{\lambda_1}^{\perp}$. Merkitään nyt $V_{\lambda_1}^{\perp} := W_2$ ja $S_2 := S_1 \cap W_2 \subset W_2$. Nyt lineaarikuvaus A on symmetrinen edelleen joukossa W_2 ja joukko S_2 on suljettu ja rajoitettu, siis kompakti. Tarkastellaan nyt neliömuodon f ääriarvoja joukon S_2 määräämällä side-ehdolla $x \in S_2$.

Jotta ääriarvojen tarkastelu olisi mielekästä, on syytä tutkia aluksi joukon W_2 dimensiota:

Jos joukon W_2 dimensio on nolla, niin tällöin $W_2 = \{0\}$.

Jos W_2 dimensio on yksi, niin $W_2 = \langle x \rangle$, missä $x \neq 0$. Nyt voidaan olettaa, että $\|x\| = 1$. Nyt W_2 on lineaarikuvauksen ominaisavaruus, sillä lemman 1.21 nojalla lineaarikuvaukselle A on voimassa

$$A(W_2) \subset W_2,$$

joten $Ax = \lambda_2 x$ jollekin reaaliluvulle λ_2. Nyt vektori x on lineaarikuvauksen A ominaisvektori ja λ_2 sitä vastaava ominaisarvo. Koska $\dim(W_2) = 1$, ominaisavaruuden määritelmän nojalla

$$W_2 = V_{\lambda_2} = \{x \in W_2 : Ax = \lambda_2 x\}.$$

Merkitään nyt joukolla $V_{\lambda_2}^{\perp}$ ominaisavaruuden V_{λ_2} ortogonaalista kompelementtia joukon $W_2 = V_{\lambda_2}$ suhteen. Tällöin $\dim\big(V_{\lambda_2}^{\perp}\big) = 0$, ja tämä tilanne tarkasteltiin edellä.

Joukon W_2 dimension ollessa suurempi kuin yksi, funktion f ääriarvojen etsiminen palautuu ensimmäisen ääriarvon etsimiseen. Lagrangen menetelmä antaa nyt yhtälöryhmän

$$\begin{cases} Ax = \lambda_2 x \\ \|x\| = 1, \end{cases}$$

joten piste $x \in S_2$ on lineaarikuvauksen A ominaisvektori ja λ_2 sitä vastaava ominaisarvo. Lisäksi $\lambda_1 > \lambda_2$, sillä

$$\max\{f(x) : x \in S_1\} > \max\{f(x) : x \in S_2\}.$$

Määritelmän 1.20 mukaan ominaisarvoa λ_2 vastaava ominaisavaruus on nyt joukko

$$V_{\lambda_2} = \{x \in W_2 : Ax = \lambda_2 x\}$$

ja ominaisavaruuden V_{λ_2} ortogonaalinen komplementti on joukko

$$V_{\lambda_2}^{\perp} := \{y \in W_2 : (y|x) = 0 \ \forall \ x \in V_{\lambda_2}\}.$$

Nyt lemman 1.21 nojalla $A\left(V_{\lambda_2}^{\perp}\right) \subset V_{\lambda_2}^{\perp}$, kuten ominaisarvon λ_1 tapauksessa. Merkitään nyt $W_3 := V_{\lambda_2}^{\perp}$ ja $S_3 := S_2 \cap W_3$. Mikäli joukon W_3 dimensio on suurempi kuin yksi, niin jatketaan neliömuodon f suurimman arvon etsimistä kunnes tarkasteltavan joukon W_j dimensio on nolla.

Edellä oleva menetelmä todellakin päättyy, sillä lineaarikuvauksella $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on korkeintaan n kappaletta erisuuria ominaisarvoja. Siis kun joukon W_j dimensio on nolla, niin menetelmällä on ratkaistu kaikki lineaarikuvauksen A ominaisarvot λ_j ja niitä vastaavat ominaisavaruudet V_{λ_j}.

Jotta ominaisavaruuksien V_{λ_j} hyödyntäminen sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ kannan karakterisoinnissa onnistuisi, avuksi tarvitaan määritelmä 1.24 ja lause 1.25. Näiden perusteella sisätuloavaruus $\mathbb{R}^n$ saadaan esitettyä ominaisavaruuksien V_{λ_j} avulla.

Määritelmä 1.24. Olkoot U ja W vektoriavaruuden V osajoukkoja. Joukkojen U ja W suora summa on joukko

$$U \oplus W := \{x + y : x \in U \text{ ja } y \in W\}.$$

Lause 1.25 (Äärellisulotteinen projektiolause). *Olkoon W sisätuloavaruuden V äärellisulotteinen aliavaruus ja olkoon x avaruuden V vektori. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset vektorit $w_1 \in W$ ja $w_2 \in W^{\perp}$ siten, että*

$$x = w_1 + w_2.$$

Vektoria w_1 sanotaan vektorin x ortogonaaliseksi projektioksi aliavaruudelle W.

Todistus. On siis osoitettava vektoreiden w_1 ja w_2 olemassaolo ja yksikäsitteisyys niin, että vektori x voidaan lausua niiden summana.

Olkoon $\{e_i : i = 1, \ldots, n\}$ aliavaruuden W ortonormaali kanta. Määritellään nyt

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i \text{ ja} \\ w_2 &= x - w_1, \end{aligned}$$

joten $w_1 \in W$ ja $x = w_1 + w_2$. Lisäksi $w_2 \in W^{\perp}$, sillä

$$\begin{aligned} (w_2|e_i) &= (x - w_1|e_i) \\ &= (x|e_i) - (w_1|e_i) \\ &= (x|e_i) - ((x|e_1)\, e_1 + (x|e_2)\, e_2 + \ldots + (x|e_n)\, e_n|e_i) \\ &= (x|e_i) - (x|e_i)\, (e_i|e_i) \\ &= (x|e_i) - (x|e_i)\, \|e_i\|^2 \\ &= (x|e_i) - (x|e_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Siis w_2 on kohtisuorassa jokaista aliavaruuden W kantavektoria vastaan.

Osoitetaan vielä yksikäsitteisyys: Olkoon $w_1^{'} \in W$ ja $w_2^{'} \in W^{\perp}$ niin, että

$$x = w_1 + w_2 = w_1^{'} + w_2^{'}.$$

Tällöin $w_1 - w_1^{'} = w_2 - w_2^{'}$ ja

$$\begin{aligned} &w_1 + w_1^{'} \in W \text{ sekä} \\ &w_2 + w_2^{'} \in W^{\perp}. \end{aligned}$$

Siis $w_1 - w_1^{'} = w_2 - w_2^{'} \in W \cap W^{\perp} = \{0\}$, joten

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1^{'} \text{ ja} \\ w_2 &= w_2^{'}. \end{aligned}$$

Vektorit w_1 ja w_2 ovat siis yksikäsitteiset, ja tämä viimeistelee todistuksen. □

Projektiolauseen 1.25 perusteella sisätuloavaruus $\mathbb{R}^n$ voidaan esittää symmetrisen lineaarikuvauksen ominaisavaruuksien V_{λ_j} suorana summana. Oletetaan nyt, että tarkasteltavalla lineaarikuvauksella A on olemassa k kappaletta ominaisarvoja, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tällöin siis

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}.$$

Jokaista ominaisarvoa λ_j vastaavasta ominaisavaruudesta V_{λ_j} löytyy ominaisavaruuden dimension verran lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita. Näistä ominaisvektoreista voidaan muodostaa ortonormaali kanta jokaiseen ominaisavaruuteen V_{λ_j} Gram-Schmidtin ortonormeerausmenetelmällä:

Lause 1.26 (Gram-Schmidtin ortonormeerausmenetelmä). *Olkoon u_1, u_2, ... , $u_n \in V$ lineaarisesti riippumattomia vektoreita. Tällöin on olemassa ortogonaaliset vektorit v_1, v_2, ... , $v_k \in V$ siten, että $\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ kaikille $k = 1$, 2, ... , n.*

Todistus. Todistus perustuu jonon valintaan, jolle on voimassa lauseen mukaiset ominaisuudet. Lause todistetaan luvussa 2 yleisen sisätuloavaruuden tapauksessa, joten tässä yhteydessä todistuksen yksityiskohtia ei ole tarpeellista esittää. □

Nyt ensimmäisen luvun tuloksista saadaan koostettuna seurauksena sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ spektraalilause:

Lause 1.27 (Sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ spektraalilause). *Olkoon A sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ symmetrinen lineaarikuvaus. Tällöin lineaarikuvauksen A ominaisvektoreista voidaan muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaali kanta.*

Todistus. Soveltamalla Gram-Schmidtin ortonormeerausmenetelmää ominaisavaruuksien V_{λ_j} lineaarisesti riippumattomiin ominaisvektoreihin jokaiseen ominaisavaruuteen V_{λ_j} saadaan ortonormaali kanta. Seurauksen 1.23 perusteella ominaisavaruudet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten myös ominaisavaruuksien kannat ovat kohtisuorassa toisia vastaan. Tällöin yhdiste ominaisavaruuksien V_{λ_j} kantavektoreista on koko avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaali kanta. □

Huomautus 1.28. Kirjoitetaan vielä muutama sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ spektraalilauseen ja sen johtamiseen liittyvää huomautusta.

(1) Luvun 1 teorian johtaminen, sekä lauseet todistuksineen pätevät, jos sisätuloavaruus $\mathbb{R}^n$ korvataan äärellisulotteisella sisätuloavaruudella V.
(2) Lineaarikuvauksen A positiivisuusoletus *ei ole* teorian johdon kannalta olennainen. Oletus on asetettu merkintöjen yksinkertaistamiseksi.
(3) Edellä esitetty äärellisulotteisen spektraalilauseen johtamisen tuottamat menetelmät ominaisarvojen ratkaisemiseen ei ole välttämättä riittävän käyttökelpoinen. Ominaisarvojen ratkaisemiseen ja ominaisavaruuksien määrittämiseen voidaan myös käyttää lineaarisen algebran tarjoamia keinoja.

Huomautuksen 1.28 kohdan (1) sisällön perusteella sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ spektraalilause voidaan siis yleistää mielivaltaiseen äärellisulotteiseen sisätuloavaruuteen V. Muotoillaan tämä tärkeä yleistys vielä seuraukseksi 1.29. Seurausta tarvitaan merkittävästi luvun 2 teorian esittämisessä.

Lause 1.29 (Äärellisulotteinen spektraalilause). *Olkoon A sisätuloavaruuden V symmetrinen lineaarikuvaus. Tällöin lineaarikuvauksen A ominaisvektoreista voidaan muodostaa avaruuden V ortonormaali kanta.*

Tarkastellaan ensimmäisen luvun lopuksi vielä muutamia äärellisulotteiseen spektraalilauseeseen liittyviä esimerkkejä.

Esimerkki 1.30. Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = (3x_1, x_2)$. Tällöin g on symmetrinen lineaarikuvaus, ja kuvausta g vastaava matriisi on muotoa

$$A_g = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lineaarikuvauksen g ominaisarvot ovat matriisin A_g diagonaalialkiot $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = 1$. Nyt ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat $y_{\lambda_1} = (1, 0)$ ja $y_{\lambda_2} = (0, 1)$. Ominaisvektorit ovat tässä tapauksessa ortonormaalit ja ne muodostavat ortonormaalin kannan sisätuloavaruuteen $\mathbb{R}^2$.

Esimerkki 1.31. Olkoon $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$g(x) = (3x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 3x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 3x_3)\,.$$

Kuvaus g on myös tällöin on symmetrinen lineaarikuvaus, ja kuvausta g vastaava matriisi on nyt muotoa

$$A_g = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lineaarikuvauksen g ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_2 = 2$, joista ominaisarvon λ_2 kertaluku on kaksi. Ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$ ja $u_3 = (-1,0,1)$, ja ominaisavaruuksiksi saadaan joukot $V_5 = \langle (1,1,1) \rangle$ ja $V_2 = \langle (-1,1,0)\,, (-1,0,1) \rangle$. Nyt ominaisvektorit ovat lineaariseti riippumattomat ja soveltamalla Gram-Schmidtin ortonormeerausmenetelmää saadaan ortonormaalit ominaisvektorit $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ ja $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$. Tällöin vektorit v_1, v_2 ja v_3 muodostavat ortonormaalin kannan sisätuloavaruuteen $\mathbb{R}^3$.

Tarkastellaan nyt lasketun esimerkin ratkaisua spektraalilauseen johtamisessa käytettyjen tulosten kannalta. Neliömuodon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x) = (A_g x | x)$ lauseke saadaan laskettua

$$(A_g x | x) = 3\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + 2\left(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3\right).$$

Laskettaessa neliömuodon f arvot pisteissä v_1, v_2 ja v_3 tuloksiksi todellakin saadaan ominaisarvot $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_2 = 2$.

2. Kompaktien operaattoreiden spektraaliteoriasta

Aloitetaan spektraalilauseen yleistyksen johtaminen esittämällä tiiviisti tarvittavia määritelmiä ja lauseita, kuten ensimmäisessäkin luvussa.

Edellisessä luvussa äärellisulotteiseen vektoriavaruuteen V asetettiin standardi sisätulo $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$. Olkoon nyt vastaava sisätulo määriteltynä avaruudessa H, mutta sallitaan vektoriavaruuden ääretönulotteisuus. Määritellään aluksi avaruuden täydellisyys.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Avaruuden V jono $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, jos jokaiselle positiiviselle ε löytyy indeksi n_ε niin, että jonon pisteiden etäisyys $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ aina, kun n ja m ovat suurempia kuin n_ε.

HUOMAUTUS 2.2. Cauchy-jonon määritelmä kertoo, että indeksistä n_ε lähtien kaikki jonon loppuosan pisteet ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan, olivatpa pisteet mitkä tahansa.

Sisätuloavaruus V on *täydellinen* mikäli avaruuden jokainen Cauchy-jono suppenee. Täydellistä sisätuloavaruutta sanotaan *Hilbertin avaruudeksi*. Edellä muotoiltu täydellisen sisätuloavaruuden määritelmä sisältää paljon tietoa avaruuden rakenteesta, joten esitetään vielä *yleinen* Hilbert-avaruuden määritelmä:

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoon H joukko alkioita. Joukko H on abstrakti *Hilbert-avaruus*, kun seuraavat kolme määrittelevää ehtoa toteutuvat:

(1) H on *lineaarinen vektoriavaruus*; avaruuden alkioiden summa $f + g$ ja reaaliluvulla kertominen λf ovat hyvin määriteltyjä. Laskennassa käytetään vektorilaskennasta tuttuja laskusääntöjä.
(2) H on *metrinen avaruus*, jonka metriikka on johdettu sisätulosta.
(3) Avaruuden H jokainen Cauchy-jono suppenee.

Yleisen sisätuloavaruuden kantateoriaan liittyy paljon samankaltaisia käsitteitä kuin äärellisulotteisessa kantateoriassakin. Esitetään seuraavaksi niistä tärkeimpiä:

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon U sisätuloavaruuden V osajoukko. Osajoukon U virittämä aliavaruus $\langle U \rangle$ on avaruuden V suppein aliavaruus, joka sisältää osajoukon U. Joukko $\langle U \rangle$ muodostuu kaikista joukon U alkioiden äärellisistä lineaarikombinaatioista.

MÄÄRITELMÄ 2.5. Olkoon U sisätuloavaruuden V ääretön vektorijoukko. Joukko U on *lineaarisesti riippumaton*, jos joukon U jokainen äärellinen osajoukko on lineaarisesti riippumaton eli mitään osajoukon vektoria ei voida lausua muiden osajoukon vektoreiden lineaarikombinaationa.

MÄÄRITELMÄ 2.6. Sisätuloavaruuden V vektorijoukko U on ortonormaali, jos $(x|y) = 0$ kaikille joukon U vektoreille x ja y, $x \neq y$, ja $\|x\| = 1$.

Äärellisulotteisen sisätuloavaruuden spektraaliteorian todistamisessa tarvittiin tunnettua *Gram-Schmidtin ortonormeerausmenetelmää.* Tämän lauseen yleisemmän muodon esittäminen ja todistaminen on luontevaa edellä esitettyjen määritelmien johdosta:

LAUSE 2.7 (Gram-Schmidt). *Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sisätuloavaruuden V lineaarisesti riippumaton jono. Tällöin on olemassa sisätuloavaruuden V ortonormaali jono $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jolle*

$$\langle x_1, \ \ldots, \ x_n \rangle = \langle y_1, \ \ldots, \ y_n \rangle$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

TODISTUS. Olkoon $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$,

$$u_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n|y_i)\, y_i,$$

ja määritetään $y_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Osoitetaan nyt induktiolla, että määritetyllä jonolla (y_n) on väitteen mukaiset ominaisuudet:

Väite on totta indeksillä $n = 1$, sillä $\|y_1\| = \frac{x_1}{\|x_1\|} = 1$ määrittelynsä perusteella, ja $y_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$, joten $\langle x_1 \rangle = \langle y_1 \rangle$.

Oletetaan, että väite on totta indeksillä $n = k$, missä $k \in \mathbb{N}$, ja osoitetaan tämän avulla, että väite on tosi, kun indeksi $n = k + 1$:

Olkoot $1 \leq j \leq k < k + 1$, ja olkoon

$$C = \frac{1}{\|u_{k+1}\|} = \frac{1}{\|x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|y_i)\, y_i\|}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
(y_j|y_{k+1}) &= C \left(y_j \;\middle|\; x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|y_i)\, y_i \right) \\
&= C \left((y_j|x_{k+1}) - \left(y_j \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|y_i)\, y_i \right) \right) \\
&= C \left((y_j|x_{k+1}) - (y_j| \left(x_{k+1}|y_j\right) y_j) \right) \\
&= C \left((y_j|x_{k+1}) - \underbrace{\|y_j\|^2}_{=1} (x_{k+1}|y_j) \right) \\
&= C \left((y_j|x_{k+1}) - (y_j|x_{k+1}) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nyt jonon (y_n) määrittelyn perusteella kaikilla indekseillä $n = 1, \dots, k$ normi $\|y_n\| = 1$, ja edellä olevan sisätulolaskun mukaan $(y_{k+1}|y_j) = 0$, joten vektori y_{k+1} on ortonormaali vektoreiden y_n kanssa.

Osoitetaan vielä, että $y_{k+1} \in \langle x_1, \dots, x_{k+1} \rangle$. Olkoon vakio C kuten edellä. Tällöin pisteelle y_{k+1} saadaan

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= C\left(x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|y_i)\, y_i\right) \\ &= C\left(x_{k+1} - \left((x_{k+1}|y_1)\, y_1 + (x_{k+1}|y_2)\, y_2 + \dots (x_{k+1}|y_k)\, y_k\right)\right) \\ &= C\left(x_{k+1} - (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots m_k y_k)\right). \end{aligned}$$

Induktio-oletuksen perusteella vektori $y_i \in \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ jokaisella indeksillä $i = 1, \dots, k$, joten

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= C\left(x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} a_{i,j} x_i\right) \\ &= C\left(x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\right) x_i\right) \\ &= C\left(x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} d_i x_i\right) \\ &= C \sum_{i=1}^{k+1} d_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} D_i x_i. \end{aligned}$$

Vektori y_{k+1} voidaan siis esittää vektoreiden $x_1, \dots, x_{k+1}$ lineaarikombinaationa, joten $y_{k+1} \in \langle x_1, \dots, x_{k+1} \rangle$. Tämä viimeistelee todistuksen. □

Määritellään seuraavaksi johdettavan teorian kannalta erittäin tärkeä Hilbert-kannan käsite, jotta johdettavan teorian päämäärä olisi havainnollisemmin esillä.

MÄÄRITELMÄ 2.8. Hilbert-avaruuden H ortonormaali osajoukko

$$E := \{e_i : i \in I\}$$

on Hilbert-kanta, jos jokainen avaruuden H piste x voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$x = \sum_{i \in I} (x|e_i)\, e_i.$$

Hilbert-kanta voidaan määritellä usealla eri tavalla. Määritelmä 2.8 on yhteneväinen äärellisulotteisen sisätuloavaruuden kannan karakterisoinnin kanssa. Luvussa 3 esitetään lause, jossa tarkastellaan muita Hilbert-kannan karakterisaatioita.

Äärellisulotteisen sisätuloavaruuden spektraalilauseen johtamisessa tarkasteltiin symmetrisiä lineaarikuvauksia. Yleisen Hilbert-avaruuden tapauksessa käytettävä terminologia eroaa hieman tästä, joten esitetään selvennyksen vuoksi operaattorin määritelmä:

Määritelmä 2.9. Olkoon H ja $\widetilde{H}$ mielivaltaisia sisätuloavaruuksia. Kuvaus $A : H \to \widetilde{H}$ on lineaarikuvaus, jos

$$A\,(\eta x + \gamma y) = \eta Ax + \gamma Ay$$

kaikille avaruuden H pisteille x ja y, sekä reaaliluvuille η ja γ. *Jatkuvaa, eli rajoitettua, lineaarikuvausta sanotaan operaattoriksi.*

Hilbert-avaruuden operaattorin A symmetrisyys ja positiivisuus määritellään täysin vastaavalla tavalla kuin luvun 1 äärellisulotteisessa sisätuloavaruudessa V, joten määritelmien uudelleen kirjoittaminen on tarpeetonta.

Seuraavaksi esitetään ja todistetaan tunnettu Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälö. Epäyhtälöä tarvitaan jatkossa useiden lauseiden todistamisessa.

Lause 2.10 (Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälö). *Yleisen sisätuloavaruuden V pisteille x ja y on voimassa*

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Yhtäsuuruus on voimassa täsmälleen, kun pisteet x ja y ovat lineaarisesti riippuvia.

Todistus. Jos $x = 0$ tai $y = 0$, niin väite pätee. Olkoot nyt $x \neq 0 \neq y$, ja määritellään $u = \frac{(x|y)}{\|y\|^2}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
0 &\leq (x - uy|x - uy) \\
&= (x|x) + (x| - uy) + (-uy|x) + (-uy| - uy) \\
&= \|x\|^2 - u\,(x|y) - u\,(y|x) + u^2\|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2u\,(x|y) + u^2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Nyt sijoittamalla $u = \frac{(x|y)}{\|y\|^2}$ saadaan

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x\|^2 - 2\frac{(x|y)}{\|y\|^2}(x|y) + \left(\frac{(x|y)}{\|y\|^2}\right)^2 \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} \\
&= \|x\|\|y\| - |(x|y)|,
\end{aligned}$$

josta ensimmäinen väite seuraa termejä siirtämällä.

Yhtäsuuruus on voimassa täsmälleen, kun

$$0 = (x - uy|x - uy) = \|x - uy\|^2,$$

toisin sanoen, kun $x = uy$, eli x ja y ovat lineaarisesti riippuvia. □

Koska tarkoituksena on yleistää luvun 1 spektraalilauseen johtamistapa, otetaan käyttöön Hilbert-avaruutta H määrittelevä lisäoletus.

Määritelmä 2.11. Hilbertin avaruus H on separoituva, jos se sisältää numeroituvan ja tiheän joukon: On olemassa numeroituva joukko $E \subset H$, jolle $\overline{E} = H$.

Oletetaan siis jatkossa, että avaruus H on reaalikertoiminen, separoituva Hilbert-avaruus, ja olkoon $A : H \to H$ positiivinen ja symmetrinen Hilbert-avaruuden H operaattori, ellei toisin mainita.

Ryhdytään tarkastelemaan operaattorin A ominaisarvoja ja niitä vastaavia ominaisvektoreita, eli yhtälön

$$Ax = \lambda x,$$

ratkaisuja $x \in H$ ja kertoimia $\lambda \in \mathbb{R}$. Geometrisesti operaattori A operoi yhtälön toteuttavia avaruuden H pisteitä x vain normin suhteen.

Tarkastellaan nyt funktiota $f : H \to \mathbb{R} : x \mapsto (Ax|x)$, kuten äärellisulotteisessa avaruudessa. Äärellisulotteisessa avaruudessa funktion f ääriarvojen olemassaolo perustuivat funktion f jatkuvuuteen ja joukon kompaktiuteen. Lisäksi ääriarvo saatiin ratkaistua differentiaalilaskennasta tutun Lagrangen menetelmän avulla. Nämä tulokset eivät kuitenkaan päde, jos avaruuden H dimensio on ääretön. Siis funktion f ääriarvon olemassaoloon ja ääriarvon määrittämiseen täytyy löytyä muita perusteluita, jotta äärellisulotteisen avaruuden spektraaliteorian johtamisen ideaa voitaisi hyödyntää.

Seuraava lause korostaa esimerkin tavoin joukon kompaktiuden merkitystä äärellisulotteisessa avaruudessa:

Lause 2.12 (Rieszin epäkompaktisuuslause). *Jos normiavaruuden V suljettu yksikköpallo $\overline{B}(0, 1)$ on kompakti, niin avaruus V on äärellisulotteinen.*

TODISTUS. Peitetään tarkasteltava yksikköpallo $\frac{1}{2}$-säteisillä avoimilla palloilla. Tällöin joukko

$$\left\{ B(x, \frac{1}{2}) \;\middle|\; x \in \overline{B}\,(0,1) \right\}$$

on suljetun yksikköpallon avoin peite. Oletuksen mukaan suljettu yksikköpallo $\overline{B}\,(0,1)$ on kompakti, joten avoimessa peitteessä on olemassa äärellinen alipeite, johon $\overline{B}\,(0,1)$ sisältyy. Olkoot nyt suljetun yksikköpallon äärellinen alipeite

$$\left\{ B(x_i, \frac{1}{2}) \;\middle|\; i = 1, \; \dots \; , n \right\}$$

Normiavaruuden V äärellisulotteisuus saadaan osoittamalla, että $\overline{B}\,(0,1)$ sisältyy pisteiden $x_1, \dots , x_n$ virittämään aliavaruuteen $\langle x_1, \; \dots, \; x_n \rangle$, joka on äärellisulotteinen. Tehdään tämä epäsuorasti ja johdetaan ristiriita.

Olkoon siis normiavaruus V on ääretönulotteinen. Tällöin on olemassa piste $x_0 \in \overline{B}\,(0,1)$, joka ei kuulu aliavaruuteen $\langle x_1, \; \dots, \; x_n \rangle$. Aliavaruus $\langle x_1, \; \dots, \; x_n \rangle$ on suljettu ja äärellisulotteinen, joten

$$\overline{B}\,(0,1) \cap \langle x_1, \; \dots, \; x_n \rangle =: U$$

on myös suljettu ja äärellisulotteinen. Lisäksi U on rajoitettu, joten se on kompakti. Nyt on olemassa piste $y \in U$, jolle

$$0 < \eta = \|x_0 - y\| = \min_{a \in U} \|x_0 - a\|,$$

sillä jatkuva funktio

$$g : V \to \mathbb{R} \;, \; g\,(y) = \|x_0 - y\|$$

saavuttaa minimin joukossa U. Nyt piste

$$\frac{x_0 - y}{\|x_0 - y\|} \in \overline{B}\,(0,1)\,,$$

joten on olemassa indeksi $j \in \{1, \; \dots \; ,n\}$, jolle $\frac{x_0 - y}{\|x_0 - y\|} \in B\left(x_j, \frac{1}{2}\right)$.

Merkitään nyt $w = \|x_0 - y\| x_j + y$. Tällöin w kuuluu aliavaruuteen $\langle x_1, \; \dots, \; x_n \rangle$, ja

$$\|x_0 - w\| = \|x_0 - \|x_0 - y\| x_j - y\| = \|x_0 - y\| \underbrace{\left\| \frac{x_0 - y}{\|x_0 - y\|} - x_j \right\|}_{< \frac{1}{2}} < \frac{1}{2}\eta.$$

On siis olemassa aliavaruuden $\langle x_1, \; \dots, \; x_n \rangle$ piste w, jonka etäisyys pisteestä x_0 on pienempää kuin pisteen y, joka on ristiriitaista. Normiavaruus V on siis äärellisulotteinen. $\square$

Lähdetään johtamaan neliömuodon f suurimman arvon olemassaoloa operaattorin A symmetrisyyden avulla. Tämä on luonnollista, sillä neliömuoto koostuu olennaisesti sisätulosta ja operaattorin A operoimasta pisteestä.

Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälön avulla neliömuodolle saadaan arvio

$$|\,(Ax|x)\,| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|\|x\|^2,$$

joka pätee kaikille avaruuden H pisteille x. Merkitään nyt luvulla N_A pienintä ylärajaa, joka toteuttaa epäyhtälön $|\,(Ax|x)\,| \leq N_A\|x\|^2$ kaikille avaruuden H pisteille x. Nyt edellä erääksi epäyhtälön toteuttavaksi ylärajaksi saatiin operaattorin A normi $\|A\|$, joten $N_A \leq \|A\|$. Tämä pätee avaruuden H operaattorille vaikka se ei olisi edes symmetrinen.

Osoitetaan seuraavaksi, että avaruuden H symmetriselle operaattorille A pienin edellä esitetyn epäyhtälön toteuttava yläraja on juuri operaattorin A normi $\|A\|$. Todistukseen tarvitaan avuksi yleinen suunnikassääntö:

Lause 2.13 (Yleinen suunnikassääntö). *Olkoot x ja y yleisen sisätuloavaruuden V pisteitä. Tällöin pisteille x ja y pätee yleinen suunnikassääntö*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Todistus. Olkoon x ja y sisätuloavaruuden V pisteitä. Jos $x = 0$ tai $y = 0$, niin väite on tosi. Oletetaan nyt, että $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y|x+y) + (x-y|x-y) \\
&= (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) + (x|x) \\
&\quad\; + (x|-y) + (-y|x) + (-y|-y) \\
&= 2\,(x|x) + 2\,(x|y) - (x|y) + 2\,(y|y) \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,
\end{aligned}$$

ja näin väite on todistettu. □

Lemma 2.14. *Olkoon $A : H \to H$ symmetrinen operaattori. Tällöin pienin vakio N_A, joka toteuttaa neliömuodolle $f : H \to \mathbb{R} : x \mapsto (Ax|x)$ epäyhtälön $|\,(Ax|x)\,| \leq N_A\|x\|^2$ on operaattorinormi $\|A\|$, toisin sanoen*

$$\inf\left\{N_A : |\,(Ax|x)\,| \leq N_A\|x\|^2 \textit{ kaikille } x \in H\right\} = \|A\|.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin operaattorinormin neliölle saadaan laskemalla

$$\|Ax\|^2 = \varepsilon\frac{1}{\varepsilon}\,(Ax|Ax) = \left(A\varepsilon x \;\middle|\; \frac{1}{\varepsilon}Ax\right) = \frac{1}{4}\left(4\left(A\varepsilon x \;\middle|\; \frac{1}{\varepsilon}Ax\right)\right).$$

Merkitään nyt $a := \varepsilon x$ ja $b := \frac{1}{\varepsilon}Ax$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \frac{1}{4}\left(4\left(Aa|b\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[(Aa|a) + 2\left(Aa|b\right) + (Ab|b) - (Aa|a) + 2\left(Aa|b\right) - (Ab|b)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(Aa|a) + 2\left(Aa|b\right) + (Ab|b) - \left[(Aa|a) - 2\left(Aa|b\right) + (Ab|b)\right]\right] \\
&= \frac{1}{4}[(Aa|a) + (Aa|b) + (Aa|b) + (Ab|b) \\
&\quad - [(Aa|a) - (Aa|b) - (Aa|b) + (Ab|b)]].
\end{aligned}$$

Operaattorin A symmetrisyyden nojalla $(Aa|b) = (a|Ab)$, joten yhtälö sievenee edelleen muotoon

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \frac{1}{4}[(Aa|a) + (Aa|b) + (Aa|b) + (Ab|b) \\
&\quad - [(Aa|a) - (Aa|b) - (Aa|b) + (Ab|b)]] \\
&= \frac{1}{4}\left[(A(a+b)|(a+b)) - (A(a-b)|(a-b))\right] \\
&= \frac{1}{4}\Bigg[\left(A\left(\varepsilon x + \frac{1}{\varepsilon}Ax\right) \,\middle|\, \left(\varepsilon x + \frac{1}{\varepsilon}Ax\right)\right) \\
&\quad - \left(A\left(\varepsilon x - \frac{1}{\varepsilon}Ax\right) \,\middle|\, \left(\varepsilon x - \frac{1}{\varepsilon}Ax\right)\right)\Bigg] \\
&\leq \frac{1}{4}\left(N_A\|\varepsilon x + \frac{1}{\varepsilon}Ax\|^2 + N_A\|\varepsilon x - \frac{1}{\varepsilon}Ax\|^2\right),
\end{aligned}$$

sillä $|\,(Ax|x)\,| \leq N_A\|x\|^2$, joten

$$\|Ax\|^2 \leq \frac{1}{4}N_A\left(\|\varepsilon x + \frac{1}{\varepsilon}Ax\|^2 + \|\varepsilon x - \frac{1}{\varepsilon}Ax\|^2\right).$$

Nyt yleistä suunnikassääntöä soveltamalla arvio saadaan muotoon

$$\|Ax\|^2 \leq \frac{1}{4}N_A\left(2\|\varepsilon x\|^2 + 2\|\frac{1}{\varepsilon}Ax\|^2\right) \quad = \frac{1}{2}N_A\left(\varepsilon^2\|x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|Ax\|^2\right).$$

Epäyhtälön oikea puoli on pienimmillään, kun lauseke

$$\varepsilon^2\|x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|Ax\|^2 =: g(\varepsilon)$$

on pienimmillään; g on pienimmillään, kun $\varepsilon = \sqrt{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$, joten

$$\|Ax\|^2 \leq \frac{1}{2}N_A\left(\|Ax\|\|x\| + \|x\|\|Ax\|\right) = N_A\|Ax\|\|x\|.$$

Jos $\|Ax\| = 0$, niin epäyhtälö on tosi. Jos taas $\|Ax\| \neq 0$, niin normille $\|Ax\|$ saadaan arvio

$$\|Ax\| \leq N_A\|x\|,$$

joten $\|A\| \leq N_A$.

Väite saadaan todistetuksi yhdistämällä nyt epäyhtälöt $N_A \leq \|A\|$ ja $\|A\| \leq N_A$, jolloin voidaan kirjoittaa $N_A = \|A\|$. $\square$

Olkoon piste x nyt Hilbert-avaruuden H yksikköpallon kuorella, ja olkoon symmetrinen ja positiivinen operaattori $A : H \to H$ mielivaltainen. Lemman 2.14 nojalla side-ehdolla $\|x\| = 1$ neliömuodon f ja operaattorinormin $\|Ax\|$ pienin yläraja on $\|A\|$, eli

$$\sup\{(Ax|x) : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} = \|A\|. \tag{2.1}$$

Äärellisulotteisessa tilanteessa neliömuodon f ääriarvo saatiin ratkaistua Lagrangen kertojien menetelmällä. Kuten aiemmin todettiin, menetelmä ei kuitenkaan toimi, jos avaruuden dimensio on ääretön.

Jotta spektraalilauseen johtaminen mukailisi äärellisulotteista tapausta, tavoitteena on osoittaa, että neliömuodon f suurin arvo saavutetaan Hilbert-avaruuden yksikköpallon kuoren pisteessä x, joka on operaattorin A ominaisvektori ja, että sitä vastaava ominaisarvo λ on neliömuodon suurin arvo. Operaattorin A symmetrisyys ei pelkästään riitä yleisemmän avaruuden tapauksessa takaamaan tätä, joten operaattorille on asetettava vahvempia oletuksia. Kysymyksessä on siis äärellisulotteisen joukon kompaktiuden, kompaktissa joukossa jatkuvan kuvauksen ja Lagrangen kertojien menetelmän korvaamista yleisemmillä oletuksilla ja tuloksilla. Otetaan nyt käyttöön kompaktin operaattorin käsite:

Määritelmä 2.15. Hilbert-avaruuden H operaattori $A : H \to H$ on kompakti, jos jokaisen avaruuden H rajoitetun jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ kuvajonolla $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ on suppeneva osajono.

Olkoon A edelleen positiivinen, symmetrinen operaattori Hilbert-avaruudessa H ja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jono yksikköpallon kuorella siten, että

$$(Ax_n|x_n) \to \|A\| := \lambda.$$

Jonon (x_n) valinta voidaan tehdä yhtälön 2.1 nojalla. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 \\ &= \|Ax_n\|^2 - 2\,(Ax_n|\lambda x_n) + \lambda^2\|x_n\| \\ &= \|Ax_n\|^2 - 2\lambda\,(Ax_n|x_n) + \lambda^2\|x_n\| \to 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kun indeksi n kasvaa rajatta, sillä

$$\|Ax_n\|^2 \leq (\underbrace{\|A\|}_{\lambda}\,\underbrace{\|x_n\|}_{1})^2 = \|\lambda\|^2,$$

ja oletuksen mukaan $(Ax_n|x_n) \to \|A\| = \lambda$ sekä $\lambda^2\|x_n\| = \lambda^2$, kun $\|x_n\| = 1$ kaikilla n. Siis jono $Ax_n - \lambda x_n$ suppenee kohti nollaa, kun n kasvaa. Valitulla jonolla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ voidaan siis approksimoida yhtälön $Ax = \lambda x$ ratkaisua x.

Oletetaan nyt, että positiivinen ja symmetrinen operaattori A on myös kompakti. Seuraavaksi pyritään näyttämään, että yhtälöllä $Ax = \lambda x$ on olemassa ratkaisu x. Väitteen todistus perustuu juuri operaattorin A kompaktiuteen:

Operaattorin A kompaktiuden nojalla jonolla $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ on suppeneva osajono $(Ax_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Olkoon nyt suppenevan osajonon raja-arvona piste $y \in H$, ja olkoon $\lambda \neq 0$. Tällöin myös jono $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ suppenee, sillä

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}\lambda x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}\left(\lambda x_{n_k} - Ax_{n_k}\right) + \frac{1}{\lambda}Ax_{n_k},$$

ja epäyhtälöarvion (2.2) mukaan $(\lambda x_{n_k} - Ax_{n_k}) \to 0$, joten $x_{n_k} \to \frac{1}{\lambda}y =: x$, kun k kasvaa mielivaltaisen suureksi. Nyt

$$\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = Ax \text{ ja } \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = 1,$$

joten $\lim_{k\to\infty}(Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}) = 0$, josta saadaan $Ax = \lambda x$.

Yhtälöllä $Ax = \lambda x$ on siis ratkaisu x Hilbert-avaruuden H yksikköpallon kuorella. Ratkaisupiste x on operaattorin A ominaisvektori ja λ on sitä vastaava ominaisarvo. Neliömuodon f arvo pisteessä x on

$$f(x) = (Ax|x) = (\lambda x|x) = \lambda(x|x) = \lambda = \|A\|,$$

joten neliömuodon f arvo yhtälön $Ax = \lambda x$ ratkaisupisteessä x on ominaisarvo λ, joka on neliömuodon suurin arvo side-ehdolla $\|x\| = 1$. Muotoillaan saatu tulos lauseeksi:

Lause 2.16. *Olkoon $A : H \to H$ positiivinen, symmetrinen ja kompakti operaattori. Tällöin side-ehdolla $\|x\| = 1$ neliömuoto $f : H \to \mathbb{R} : x \mapsto (Ax|x)$ saavuttaa suurimman arvonsa, ja piste x on operaattorin A ominaisvektori ja neliömuodon suurin arvo on tätä ominaisvektoria vastaava operaattorin A ominaisarvo λ.*

Seuraus 2.17. *Hilbert-avaruuden H positiivisella, symmetrisellä ja kompaktilla operaattorilla $A : H \to H$ on vähintään yksi nollasta eroava ominaisarvo λ, kun $A \neq 0$.*

Huomautus 2.18. Edellä olevat lemmat ja lauseet eivät riipu operaattorin A positiivisuudesta.

Luonnollisesti nyt herää kysymys, kuten luvussa 1, voidaanko operaattorille A löytää muita ominaisarvoja, jos operaattorille A asetetut oletukset pysyvät samoina. Kuten äärellisulotteisessa tapauksessakin vastausta ei voida suoraan sanoa, jos operaattorista A ei tiedetä enempää. Seuraavaksi pyritään löytämään operaattorille A lisää ominaisarvoja samankaltaisella menetelmällä kuin äärellisulotteisessa tapauksessa. Menetelmän käytössä avaruus H pyritään esittämään operaattorin A ominaisavaruuksien avulla suorana summana eri joukoista. Tämä vaatii yleisen projektiolauseen olemassaolon, joten sen esittäminen seuraavana on luontevaa.

Lause 2.19 (Projektiolause). *Olkoon $K \subset H$ Hilbert-avaruuden suljettu aliavaruus ja olkoon x Hilbert-avaruuden H piste. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi aliavaruuden K piste y, jolla on seuraavat keskenään yhtäpitävät ominaisuudet:*

(1) $x - y \in K^{\perp}$
(2) $\|x - y\| = \min_{a \in K} \|x - a\|$.

Piste y on pisteen x ortogonaalinen projektio aliavaruudelle K.

Todistus. Osoitetaan ensin ehtojen yhtäpitävyys.

Olkoon z suljetun aliavaruuden K mielivaltainen piste, ja määritellään funktio

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = \|x - y + tz\|^2.$$

Funktion f lauseke sievenee sisätulon laskusääntöjen ja perusominaisuuksien avulla muotoon

$$\begin{aligned} f(t) &= \|x - y + tz\|^2 \\ &= (x - y + tz | x - y + tz) \\ &= \|x - y\|^2 + t\,(x - y|z) + t\,(z|x - y) + t^2\|z\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + 2t\,(x - y|z) + t^2\|z\|^2, \end{aligned}$$

joten f on muuttujan t suhteen hyvin määritelty, ei-negatiivinen toisen asteen polynomi, joka on jatkuva ja derivoituva. Nyt

$$f'(t) = 2\,(x - y|z) + 2t\|z\|^2,$$

ja derivaattafunktion f' ainoana nollakohtana on piste

$$t = -\frac{(x - y|z)}{\|z\|^2}.$$

Jos ehto (1) on voimassa, niin $(x - y|z) = 0$ kaikilla $z \in K$. Tällöin $t = 0$ on funktion f minimikohta. Siis

$$\min \left\{ f(t) : x - y \in K^{\perp} \right\} = f(0) = \|x - y + 0 \cdot z\|^2 = \|x - y\|^2.$$

Koska z on suljetun aliavaruuden K mielivaltainen piste, niin ehto (2) pätee.

Olkoon nyt ehto (2) voimassa. Tällöin funktio f saa minimiarvonsa pisteessä $t = 0$ kaikilla avaruuden K pisteillä z, joten piste $t = 0$ on derivaattafunktion f' nollakohta. Nyt kaikille suljetun aliavaruuden K pisteille z saadaan

$$f'(0) = 2\,(x - y|z) = 0,$$

eli $(x - y|z) = 0$. Siis $x - y \in K^{\perp}$, eli ehto (1) on voimassa.

Ehdot (1) ja (2) saatiin edellä osoitettua yhtäpitäviksi. Pyritään seuraavaksi osoittamaan pisteen y olemassaolo: Olkoon

$$\eta = \inf \left\{ \|x - z\| : z \in K \right\},$$

ja olkoon $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jono suljetussa aliavaruudessa K niin, että $\|x-y_n\| \to \eta$. Nyt soveltamalla yleistä suunnikassääntöä 2.13 saadaan

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|\,(y_n - x) - (y_m - x)\,\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|\,(y_n - x) + (y_m - x)\,\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\underbrace{\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\|^2}_{\geq \eta^2} \\
&\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\eta^2 \to 0,
\end{aligned}$$

kun indeksit n ja m kasvavat mielivaltaisesti. Jono (y_n) on siis Cauchy-jono aliavaruudessa K. Oletuksen mukaan aliavaruus K on suljettu, joten se on täydellisen metrisen avaruuden H suljettuna osajoukkona täydellinen. Jono (y_n) suppenee siis aliavaruuden K pisteeseen y. Nyt saadaan arvio

$$\|x - y\| = \|x - y_n + y_n - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| \to \eta,$$

kun indeksi n kasvaa mielivaltaisesti. On siis olemassa piste $y \in K$, jolle on voimassa arvio

$$0 \leq \|x - y\| \leq \eta = \inf \{\|x - z\| : z \in K\}.$$

Lauseen väitteen todistamiseen tarvitaan vielä pisteen y yksikäsitteisyyden perustelu. Olkoot nyt y ja $\tilde{y}$ aliavaruuden K pisteitä, joille on voimassa $x - y \in K^{\perp}$ ja $x - \tilde{y} \in K^{\perp}$. Tällöin $y - \tilde{y} = (x - \tilde{y}) - (x - y)$. Nyt $y - \tilde{y} \in K$ ja $(x - \tilde{y}) - (x - y) \in K^{\perp}$, joten $y - \tilde{y} \in K \cap K^{\perp} = \{0\}$. Siis $y = \tilde{y}$. □

Seuraus 2.20. *Olkoon $K \subset H$ Hilbert-avaruuden suljettu aliavaruus. Tällöin jokainen avaruuden H piste x voidaan esittää yksikäsitteisten pisteiden $y \in K$ ja $z \in K^{\perp}$ avulla muodossa $x = y + z$.*

Todistus. Todistus on täysin sama kuin projektiolauseenkin todistus seuraavilla pisteiden valinnalla: olkoon piste y kuten projektiolauseessa 2.19 ja valitaan $z = x - y$. □

Projektiolauseen perusteella alkuperäinen avaruus voidaan hajoittaa suoraksi summaksi ortogonaalisista joukoista siten, että joukkojen leikkaukseen kuuluu vain piste nolla. Avaruuden hajoittaminen suoraksi summaksi ominaisavaruuksista ja ominaisavaruuksien suoran summan ortogonaalikomplementista ei kerro vielä riittävästi avaruuden hajotelman rakenteesta, sillä suoraan summaan kuuluvien joukkojen dimensiosta ei osata vielä sanoa mitään. Esitetään seuraavaksi *äärellisulotteinen Pythagoraan lause*, jota tarvitaan muun muassa *Fredholmin lauseen* 2.22 todistamisessa, joka antaa merkittävästi tietoa kompaktien operaattoreiden ominaisarvoista ja niitä vastaavien ominaisavaruuksien rakenteesta.

LAUSE 2.21 (Äärellisulotteinen Pythagoraan lause). *Olkoot x_1, x_2, ... , x_n sisätuloavaruuden V vektoreita, joille $x_i \perp x_j$ kaikilla $i \neq j$. Tällöin*

$$\|\sum_{k=1}^{n} x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

TODISTUS. Lähdetään todistamaan väitettä tarkastelemalla yhtälön vasenta puolta:

$$\begin{aligned}\|\sum_{k=1}^{n} x_k\|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\\ &= (x_1 + x_2 + \ \ldots \ + x_n | x_1 + x_2 + \ \ldots \ + x_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_1|x_k) + \sum_{k=1}^{n} (x_2|x_k) + \ \ldots \ + \sum_{k=1}^{n} (x_n|x_k).\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $(x_i|x_j) = 0$, kun $i \neq j$, joten yhtälö sievenee muotoon

$$\begin{aligned}\|\sum_{k=1}^{n} x_k\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} (x_1|x_k) + \sum_{k=1}^{n} (x_2|x_k) + \ \ldots \ + \sum_{k=1}^{n} (x_n|x_k)\\ &= (x_1|x_1) + (x_2|x_2) + \ \ldots \ + (x_n|x_n)\\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ \ldots \ + \|x_n\|^2\\ &= \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.\end{aligned}$$

□

LAUSE 2.22 (Fredholmin lause). *Olkoon $A : H \to H$ kompakti operaattori Hilbert-avaruudessa H ja olkoon jokaiselle reaaliluvulle λ joukko $V_\lambda := \{x \in H : Ax = \lambda x\}$. Tällöin niiden reaalilukujen λ joukko Λ, joille $V_\lambda \neq \{0\}$, on äärellinen tai numeroituvasti ääretön. Jos joukko Λ on numeroituvasti ääretön, niin sen ainoa kasaantumispiste on nolla. Lisäksi joukon V_λ dimensio on äärellinen, kun $\lambda \neq 0$.*

TODISTUS. Lauseen väitteen todistamiseksi on siis osoitettava, että joukolla Λ ei ole muita kasautumispisteitä kuin nolla ja joukon V_λ dimensio on äärellinen kaikilla nollasta eroavilla reaaliluvuilla λ.

Pyritään osoittamaan lauseen väite epäsuorasti. Tarkastellaan aluksi kuitenkin vastaoletuksen muodostamista tarkemmin: Jos joukon V_λ dimensio $\dim(V_\lambda) = \infty$, niin tällöin on olemassa jono $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ lineaarisesti riippumattomia vektoreita, joille on voimassa

$$Ax_i = \lambda x_i$$

kaikilla indekseillä i. Jos taas joukolla Λ olisi nollasta eroava kasaantumispiste, niin tällöin olisi olemassa $\varepsilon > 0$ ja äärettömän monta lukua

$\lambda_i \in \Lambda$ niin, että $|\lambda_i| \geq \varepsilon$. Koska erisuuria omimaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat keskenään lineaarisesti riippumattomat, niin lauseen väite seuraa ristiriidan johtamisesta käyttämällä seuraavaa oletusta: *Olkoon $\varepsilon > 0$ ja jono $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita joita vastaaville ominaisarvoille λ_i on voimassa $|\lambda_i| \geq \varepsilon$.*

Vastaoletuksen nojalla $\|Ax_i\| = \|\lambda_i x_i\| = |\lambda_i| \, \|x_i\|$, joten $|\lambda_i| \leq \|A\|$. Jono $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ on rajoitettu, joten sillä on olemassa suppeneva osajono $\left(\lambda_{i_j}\right)_{j=1}^{\infty}$. Merkitään nyt osajonoa alkuperäisen jonon merkinnöin $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$.

Olkoon nyt X_m vektoreiden $x_1, x_2, \ldots, x_m$ lineaarinen verho. Olkoon vielä $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, ja valitaan jokaiselle $m > 1$ vektori $y_m \in X_m$ niin, että $\|y_m\| = 1$ ja $y_m \perp X_{m-1}$ toisin sanoen, jos $x \in X_{m-1}$, niin $(y_m|x) = 0$. Nyt vektori y_m voidaan esittää muodossa $y_m = \sum_{i=1}^{m} c_{mi} x_i$ joillekin vakioille c_{mi}. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\lambda_m^{-1} A y_m &= \lambda_m^{-1} A \sum_{i=1}^{m} c_{mi} x_i \\
&= \lambda_m^{-1} \sum_{i=1}^{m} c_{mi} A x_i \\
&= \lambda_m^{-1} \sum_{i=1}^{m} c_{mi} \lambda_i x_i \\
&= \lambda_m^{-1} \left(c_{mm} \lambda_m x_m + \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi} \lambda_i x_i \right) \\
&= c_{mm} x_m + \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi} \lambda_i \lambda_m^{-1} x_i \\
&= c_{mm} x_m + \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi} \lambda_i \lambda_m^{-1} x_i + \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi} x_i - \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi} x_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_{mi} x_i + \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi} \left(\lambda_i \lambda_m^{-1} - 1 \right) x_i \\
&= y_m + \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi} \left(\lambda_i \lambda_m^{-1} - 1 \right) x_i \\
&= y_m + z_{m-1},
\end{aligned}
$$

missä $z_{m-1} \in X_{m-1}$. Nyt siis $\lambda_m^{-1} A y_m = y_m + z_{m-1}$.

Jos $n < m$, niin $\lambda_m^{-1} A y_m - \lambda_n^{-1} A y_n = y_m + z_{m-1} - y_n - w_{n-1}$, missä $z_{m-1} - y_n - w_{n-1} \in X_{m-1}$. Vektorin y_m valintaoletuksen nojalla $y_m \perp X_{m-1}$, joten Pythagoraan lauseen nojalla $\|\lambda_m^{-1} A y_m - \lambda_n^{-1} A y_n\| \geq 1$.

Mutta tällöin

$$\begin{aligned}1 &\leq \|\lambda_m^{-1}Ay_m - \lambda_n^{-1}Ay_n\| \\ &= \|\lambda_m^{-1}Ay_m - \lambda_m^{-1}Ay_n + \lambda_m^{-1}Ay_n - \lambda_n^{-1}Ay_n\| \\ &\leq \|\lambda_m^{-1}Ay_m - \lambda_m^{-1}Ay_n\| + \|\lambda_m^{-1}Ay_n - \lambda_n^{-1}Ay_n\| \\ &= \left|\lambda_m^{-1}\right| \|Ay_m - Ay_n\| + \|Ay_n\| \left|\lambda_m^{-1} - \lambda_n^{-1}\right|,\end{aligned}$$

josta epäyhtälö saadaan edelleen muotoon

$$\|Ay_m - Ay_n\| \geq |\lambda_m| - \|Ay_n\| \left|1 - \lambda_m\lambda_n^{-1}\right|.$$

Epäyhtälön mukaan erään Hilbert-avaruuden H jonon (y_k) kuvajonon (Ay_k) pisteiden väliseksi etäisyydeksi on saatu arvio

$$\|Ay_m - Ay_n\| \geq |\lambda_m| - \|Ay_n\| \left|1 - \lambda_m\lambda_n^{-1}\right|.$$

Indeksien m ja n kasvaessa mielivaltaisen suuriksi lauseke $|1 - \lambda_m\lambda_n^{-1}|$ lähenee nollaa. Lisäksi $\|Ay_n\| \leq \|A\|\|y_n\| = \|A\|$, joten koko tulo lähestyy nollaa. Vastaoletuksen mukaan $|\lambda_m| \geq \varepsilon > 0$ kaikilla m, joten $\|Ay_m - Ay_n\| \geq \varepsilon$ kaikilla m ja n. Siis jonon (y_k) kuvajonolla (Ay_k) ei voi olla suppenevaa osajonoa, joten operaattori A ei voi olla kompakti, joka on ristiriitaista oletuksen kanssa. $\square$

Fredhomin lauseen perusteella jokaista kompaktin operaattorin A nollasta eroavaa ominaisarvoa λ vastaava ominaisavaruus V_λ on äärellisulotteinen, joten ominaisavaruuden ortonormaalin kannan olemassaolon perusteluun voidaan käyttää äärellisulotteista spektraalilausetta 1.29.

Fredholmin lause ei kuitenkaan anna mitään tietoa, jos $\lambda = 0$ on operaattorin A ominaisarvo. Tarkastellaan seuraavaksi juuri tätä tilannetta. Esitetään ensin kuitenkin lause, joka antaa tarkasteltavassa tilanteessa lisätietoa ominaisarvoa $\lambda = 0$ vastaavan ominaisavaruuden rakenteesta:

Lause 2.23. *Separoituvan Hilbert-avaruuden suljettu aliavaruus on separoituva.*

Todistus. Lauseen todistus perustuu separoituvan Hilbert-avaruuden tapauksessa avaruuden dimensioon tai paremminkin kannan mahtavuuteen. Lauseen todistus käsitellään luvussa 3 tarkemmin. $\square$

Olkoon nyt $\lambda = 0$ kompaktin operaattorin A ominaisarvo. Tällöin operaattorin A ydin

$$\ker(A) = \{x \in H : Ax = 0\} =: V_0$$

on määritelmän mukaan ominaisarvoa λ vastaava ominaisavaruus. Ydin V_0 on avaruuden H suljettu aliavaruus, joten lauseen 2.23 nojalla se on separoituva, koska avaruus H on separoituva.

Ytimen V_0 dimension ollessa äärellinen, sen ortonormaalin kannan olemassaolon perusteluun voidaan käyttää luvun 1 tuloksia, kuten edellä kirjoitettiin. Ytimen V_0 dimension ollessa ääretön, pyritään hyödyntämään avaruuden separoituvuutta kannan olemassaolon perustelussa.

Olkoon u_1 ja u_2 nyt numeroituvan, sekä tiheän, ominaisavaruuden V_0 osajoukon U vektoreita. Jos u_1 ja u_2 ovat lineaarisesti riippumattomia, niin ortonormitetaan ne Gram-Schmidtin menetelmällä 2.7. Jos u_1 ja u_2 ovat lineaarisesti riippuvia, niin valitaan muu joukon U vektori u_3, ja tarkastellaan lineaarista riippumattomuutta vektorin u_1 kanssa uudelleen. Lineaarisesti riippumattoman vektorin löytymisen ja ortonormeerauksen jälkeen on saatu kaksi ortonormaalia joukon U vektoria v_1 ja v_2. Jatketaan induktiivisesti ortonormaalin joukon laajentamista valitsemalla joukosta U seuraava vektori, tarkastelemalla lineaarista riippumattomuutta jo ortonormitettujen vektorien kanssa, ja käyttämällä tarvittaessa taas Gram-Schmidtin menetelmää ortonormittamiseen.

Jatketaan ortonormaalin joukon laajentamista numeroituvan monta kertaa, jolloin saadaan numeroituva ortonormaali joukko

$$U_0 = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Joukko U_0 on numeroituva ja aliavaruus $\langle U_0 \rangle$ tiheä joukossa V_0, koska joukko U on oletuksen mukaan tiheä joukossa V_0. Siis $\overline{\langle U_0 \rangle} = V_0$. Nyt ortonormaali joukko U_0 on ominaisavaruuden V_0 Hilbert-kanta: Luvussa 3 Hilbert-kannan eri karakterisaatioita käsittelevän lauseen mukaan edellä päätelty joukkojen yhtäsuuruus on yhtäpitävä ehto Hilbert-kannan määritelmän 2.8 kanssa. Näin Hilbert-kannan olemassaolo saadaan näennäisesti perusteltua operaattorin A ominaisarvoa $\lambda = 0$ vastaavassa ominaisavaruudessa V_0.

Projektiolauseen 2.19 perusteella Hilbert-avaruus H voidaan esittää operaattorin A ytimen V_0 ja ytimen ortogonaalisen komplementin $V_0^{\perp}$ suorana summana

$$H = V_0 \oplus V_0^{\perp},$$

joten on luonnollista jatkaa operaattorin A ominaisarvojen ja neliömuodon f tarkastelua ytimen ortogonaalisessa komplementissa $V_0^{\perp}$. Luvussa 1 osoitettiin, että äärellisulotteisen sisätuloavaruuden symmetrisen lineaarikuvauksen A erisuuria ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet ovat keskenään ortogonaalisia, ja erityisesti symmetrinen lineaarikuvaus A kuvaa ominaisarvoa vastaavan ominaisavaruuden ortogonaalisen komplementin itselleen. *Nämä tulokset yleistyvät myös äärettönulotteisen sisätuloavaruuden symmetrisille operaattoreille.* Nyt siis operaattorin A symmetrisyyden perusteella

$$A\left(V_0^{\perp}\right) \subset V_0^{\perp}.$$

Operaattori A on myös positiivinen, symmetrinen sekä kompakti, ja erityisesti injektio joukossa $V_0^{\perp}$. Operaattorin A injektiivisyyden perusteella nolla *ei ole* operaattorin A ominaisarvo joukossa $V_0^{\perp}$, ja nyt

Fredholmin lausetta päästään hyödyntämään juuri joukon $V_0^\perp$ osittelussa. Operaattorin A ytimen V_0 ortogonaalisen komplementin $V_0^\perp$ ollessa äärellisulotteinen, ortonormaalin kannan olemassaolo saadaan perusteltua luvun 1 tulosten avulla, kuten ytimen V_0 tarkastelussa. Joukon $V_0^\perp$ ollessa ääretönulotteinen, on tärkeää muistaa dimension tarjoamat haasteet: Äärellisulotteisen sisätuloavaruuden hajoittaminen ortogonaalisten joukkojen suoraksi summaksi päättyy varmuudella viimeistään, kun symmetriselle lineaarikuvaukselle A on löydetty korkeintaan alkuperäisen avaruuden dimension verran lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita. Ääretönulotteisen sisätuloavaruuden tilanteessa osittelun päättymistä ei voida ilmaista tarkasti.

Oletetaan nyt, että operaattorin A ytimen V_0 ortogonaalinen komplementti $V_0^\perp$ ei ole äärellisulotteinen, ja jatketaan operaattorin A ominaisarvojen ja neliömuodon f tarkastelua joukossa $V_0^\perp$. Lauseen 2.16 oletukset ovat edellä olevan tarkastelun perusteella voimassa, joten seurauksen 2.17 nojalla operaattorilla A on vähintään yksi nollasta eroava ominaisarvo $\lambda := \lambda_1$, joka on neliömuodon f suurin arvo side-ehdolla $\|x\| = 1$. Operaattorin A ominaisarvoa λ_1 vastaava ominaisavaruus

$$V_1 := \left\{x \in V_0^\perp : Ax = \lambda_1 x\right\}$$

on Fredhomin lauseen nojalla äärellisulotteinen, joten äärellisulotteisen spektraalilauseen 1.29 perusteella sillä on olemassa ortonormaali kanta. Merkitään nyt $\dim(V_1) = n_1$, ja ominaisavaruuden V_1 kantaa joukolla $\{\varphi_{1,k}\}_{1\leq k\leq n_1}$.

Ominaisarvoa λ_1 vastaavan ominaisavaruuden V_1 ortogonaalinen komplementti on joukko

$$V_1^\perp := \left\{y \in V_0^\perp : (y|x) = 0 \text{ kaikilla } x \in V_1\right\}.$$

Jatketaan nyt operaattorin A ominaisarvojen ja neliömuodon f tarkastelua joukossa $V_1^\perp$. Operaattori A on positiivinen, symmetrinen ja kompakti myös joukossa $V_1^\perp$, joten lausetta 2.16 voidaan edelleen soveltaa seurauksineen. Näin operaattorille A löydetään toinen nollasta eroava ominaisarvo λ_2 niin, että $\lambda_1 > \lambda_2$, joka on neliömuodon f suurin arvo side-ehdolla $\|x\| = 1$. Ominaisarvoa λ_2 vastaava ominaisavaruus

$$V_2 := \left\{x \in V_1^\perp : Ax = \lambda_2 x\right\}$$

on äärellisulotteinen Fredholmin lauseen nojalla myös nyt, ja ortonormaalin kannan olemassaolon perustelu voidaan tehdä kuten ominaisavaruuden V_1 tapauksessakin. Merkitään nyt $\dim(V_2) = n_2$, ja ominaisavaruuden V_2 kantaa joukolla $\{\varphi_{2,k}\}_{1\leq k\leq n_2}$.

Ominaisarvojen etsimistä voidaan jatkaa taas määrittämällä neliömuodon f maksimiarvoja edellisen vaiheen ortogonaalisessa komplementissa side-ehdolla $\|x\| = 1$. Vaiheessa $l \in \mathbb{N}$ avaruudesta

$$V_{l-1}^\perp = \left\{y \in V_{l-2}^\perp : (y|x) = 0 \text{ kaikilla } x \in V_{l-1}\right\}$$

löydetään operaattorin A ominaisarvo λ_l niin, että

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{l-1} > \lambda_l,$$

joka on neliömuodon f suurin arvo side-ehdolla $\|x\| = 1$. Ominaisarvoa λ_l vastaavan ominaisavaruuden V_l ortonormaalin kannan olemassaolo voidaan perustella, kuten edellä. Merkitään merkintöjen yhtenäisyyden vuoksi $\dim(V_l) = n_l$, ja ominaisavaruuden V_l ortonormaalia kantaa joukolla $\{\varphi_{l,k}\}_{1\leq k\leq n_l}$.

Seuraavaksi pyritään osoittamaan, että ominaisavaruuksien V_1, V_2, $\ldots$, V_l, $\ldots$ ortonormaaleista kannoista saadaan tarkasteltavan joukon $V_0^\perp$ ortonormaali kanta, kun avaruuden paloittelua jatketaan. Siis pyritään osoittamaan, että joukko

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \{\varphi_{j,k} : 1 \leq k \leq n_j\}$$

on avaruuden $V_0^\perp$ ortonormaali kanta.

Muutetaan nyt edellä kirjoitettuja merkintöjä yksinkertaisemmiksi. Merkitään suoran summan $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$ dimensiota luvulla N_p asettamalla lisäehto $N_0 = 0$ ja kantavektoreita merkinnöillä $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$. Nyt ominaisavaruuksien V_1, V_2, $\ldots$, V_p kannat voidaan kirjoittaa uusilla merkinnöillä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\text{Ominaisavaruuden } V_1 \text{ kanta } \{\varphi_{1,k}\}_{1\leq k\leq n_1} &= \{\Phi_i\}_{1\leq i\leq N_1}, \\
\text{ominaisavaruuden } V_2 \text{ kanta } \{\varphi_{2,k}\}_{1\leq k\leq n_2} &= \{\Phi_i\}_{N_1+1\leq i\leq N_2}, \\
&\vdots \\
\text{ominaisavaruuden } V_p \text{ kanta } \{\varphi_{p,k}\}_{1\leq k\leq n_p} &= \{\Phi_i\}_{N_{p-1}+1\leq i\leq N_p}.
\end{aligned}$$

Nyt joukko $\{\Phi_i : 1 \leq i \leq N_p\}$ on suoran summan $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$ kanta, itse asiassa ortonormaali kanta, ja $A\Phi_i = \mu_i \Phi_i$, missä $\mu_i = \lambda_k$, kun $N_{k-1} < i \leq N_k$ ja $1 \leq k \leq p$. Lisäksi ominaisarvoille μ_i on voimassa järjestys

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \ldots$$

ominaisarvojen λ_n järjestyksen ja uusien merkintöjen perusteella, jolloin operaattorin A normille joukossa $V_p^\perp$ on voimassa

$$\|A\| = \mu_{N_p+1},$$

sillä operaattorinormi ja neliömuodon f suurin arvo on μ_{N_p+1}.

Merkintöjen muutoksilla pyritään tilanteeseen, jossa piste $x \in V_0^\perp$ voidaan esittää kantavektoreiden Φ_i äärettömänä lineaarikombinaationa jatkettaessa avaruuden osittelua mielivaltaisen pitkälle. Uudet merkinnät ottavat erityisesti myös jokaisen ominaisarvon kertaluvun huomioon.

Uusin merkinnöin pyritään siis osoittamaan, että jokainen joukon $V_0^\perp$ piste x voidaan esittää muodossa $x = \sum_{i\in I} \mu_i \Phi_i$. Todistukseen tarvitaan vielä seuraava lemma:

LEMMA 2.24. *Olkoon $A : H \to H$ Hilbert-avaruuden H positiivinen, symmetrinen ja kompakti operaattori, jolle jokainen ominaisarvo $\mu_i \neq 0$. Tällöin jokainen kuvajoukon $A(H)$ piste Ax voidaan esittää muodossa*

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax|\Phi_i)\,\Phi_i,$$

missä $\{\Phi_i : i = 1,\ 2,\ \ldots\}$ on operaattorin A ominaisarvoja μ_i vastaava ominaisvektoreiden joukko.

TODISTUS. Olkoon $x \in H$. Määritellään nyt piste

$$g_m = x - \sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)\,\Phi_i.$$

Tällöin pisteen g_m määrittelyssä esiintyvä summa $\sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)\,\Phi_i \in V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$, kun $m = N_p$, joten $g_m \in V_p^{\perp}$. Nyt g_m on ortogonaalinen joukon $\left\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{N_p}\right\}$ kanssa, joten

$$\|Ag_m\| \leq \underbrace{\|A\|}_{=\mu_{m+1}} \|g_m\| = \mu_{m+1}\|g_m\|.$$

Pisteen g_m normin neliölle saadaan laskemalla

$$\begin{aligned}
\|g_m\|^2 &= \|x - \sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)\,\Phi_i\|^2 \\
&= \left(x - \sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)\,\Phi_i \,\middle|\, x - \sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)\,\Phi_i \right) \\
&= (x|x) - 2\sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)\,\Phi_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)\,\Phi_i \right).
\end{aligned}$$

Nyt $(\Phi_i|\Phi_j) = 0$, kun $i \neq j$, joten

$$\begin{aligned}
\|g_m\|^2 &= (x|x) - 2\sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)\,\Phi_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)\,\Phi_i \right) \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)^2 + \sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)^2\,(\Phi_i|\Phi_i) \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)^2 + \sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)^2\,\underbrace{\|\Phi_i\|^2}_{=1} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)^2 \leq \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Pisteen Ag_m normille saadaan nyt arvio

$$\|Ag_m\| \leq \mu_{m+1}\|g_m\| \leq \mu_{m+1}\|x\|,$$

joten $Ag_m \to 0$, sillä Fredholmin lauseen perusteella μ_{m+1} lähestyy nollaa, kun indeksi m kasvaa mielivaltaisesti. Siis

$$Ag_m = Ax - \sum_{i=1}^{m} (x|\Phi_i)\, A\Phi_i \to 0,$$

kun m kasvaa mielivaltaisen suureksi. Tämä voidaan kirjoittaa yhtälönä

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax|\Phi_i)\, \Phi_i,$$

joten väite on todistettu. □

Separoituvan Hilbert-avaruuden spektraalilauseen todistamiseen, ja luvun 3 teorian esitettämiseen tarvitaan vielä Besselin epäyhtälö, sekä l^2-*lauseena* tunnettu tulos. Esitetään ja todistetaan nämä lauseet seuraavaksi.

LAUSE 2.25 (Besselin epäyhtälö). *Olkoon $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ ortonormaali jono sisätuloavaruudessa H. Tällöin jokaiselle sisätuloavaruuden H pisteelle x on voimassa epäyhtälö*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x|e_i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

TODISTUS. Koska normin neliölle on voimassa

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,(x|y) + \|y\|^2, \tag{2.3}$$

niin

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\left(x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i\right) + \|\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i\|^2. \end{aligned}$$

Pythagoraan lauseen 2.21 perusteella viimeiselle termille saadaan

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \|\,(x|e_i)\, e_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|\,(x|e_i)\,\|^2 \|e_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\,(x|e_i)\,|^2. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\left(x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i\right) = (x|\,(x|e_1)\, e_1 + \ \ldots\ + (x|e_2)\, e_2) = \sum_{i=1}^{n} |\,(x|e_i)\,|^2,$$

joten epäyhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x\|^2 - 2\left(x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i\right) + \|\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} |\,(x|e_i)\,|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\,(x|e_i)\,|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\,(x|e_i)\,|^2, \end{aligned}$$

josta saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} |\,(x|e_i)\,|^2 \leq \|x\|^2.$$

Lauseen väite seuraa, kun $n \to \infty$. □

HUOMAUTUS 2.26. Besselin epäyhtälön 2.25 todistuksessa esiintyvän yhtälön 2.3 nojalla pisteiden x ja y reaalinen sisätulo voidaan lausua pelkän norminsa avulla. Yhtälöä

$$(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

sanotaan reaaliseksi polaarikaavaksi.

LAUSE 2.27 (l^2-lause). *Olkoon $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ Hilbert-avaruuden H ortonormaali jono, ja olkoon $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ jono reaalilukuja. Tällöin summa*

$$x := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$$

suppenee aina ja vain, kun summa $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2$ suppenee.

TODISTUS. Olkoon nyt $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ suppeneva sarja. Tällöin

$$(x|e_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \middle| e_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\,(e_i|e_j)\,, \tag{2.4}$$

koska sisätulo on jatkuva kuvaus. Oletuksen nojalla $(e_i|e_j) = 0$, kun $i \neq j$, joten sisätulo 2.4 sievenee muotoon

$$(x|e_j) = \lambda_j.$$

Nyt Besselin epäyhtälön 2.25 perusteella

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\,(x|e_i)\,|^2 \leq \|x\|^2 < \infty.$$

Siis sarja $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2$ suppenee.

Olkoon nyt $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2$ suppeneva sarja. Tällöin sarjan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$$

osasummien jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, sillä Pythagoraan lauseen 2.21 perustella kaikille indekseille $n < m$ on voimassa

$$\begin{aligned}\|s_m - s_n\|^2 &= \|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|^2 \\ &= \|\sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i e_i\|^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} |\lambda_i|^2 \underbrace{\|e_i\|^2}_{=1} \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty.\end{aligned}$$

Nyt sarjan $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ suppeneminen seuraa Hilbert-avaruuden H täydellisyydestä. $\square$

Nyt spektraalilause saadaan osoitettua avaruudessa $V_0^{\perp}$: On siis osoitettava, että jokainen avaruuden $V_0^{\perp}$ piste x voidaan esittää nollasta eroavia ominaisarvoja vastaavien ortonormaaleiden ominaisvektoreiden avulla muodossa

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x|\Phi_i)\,\Phi_i.$$

Olkoon y mielivaltainen piste avaruudessa $V_0^{\perp}$. Tällöin summa

$$\sum_{i=1}^{\infty} (y|\Phi_i)\,\Phi_i$$

suppenee l^2-lauseen nojalla, sillä Besselin epäyhtälön mukaan summan kertoimien $(y|\Phi_i)$ neliöiden sarja

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(y|\Phi_i)|^2 \leq \|y\|^2 < \infty$$

suppenee.

Merkitään nyt $x := \sum_{i=1}^{\infty} (y|\Phi_i)\,\Phi_i$. Tällöin operaattorin A jatkuvuuden nojalla

$$\begin{aligned} Ax &= A\left(\sum_{i=1}^{\infty} (y|\Phi_i)\,\Phi_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (y|\Phi_i)\,A\Phi_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i. \end{aligned}$$

Lemman 2.24 perusteella avaruuden H mielivaltaisen pisteen kuvapiste voidaan esittää operaattorin A ortonormaaleiden ominaisvektoreiden äärettömänä lineaarikombinaationa. Soveltamalla tätä pisteeseen y, ja käyttämällä operaattorin A symmetrisyyttä saadaan

$$\begin{aligned} Ay &= \sum_{i=1}^{\infty} (Ay|\Phi_i)\,\Phi_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (y|A\Phi_i)\,\Phi_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i. \end{aligned}$$

Siis $Ax = Ay$, joten $x - y \in V_0$.

Toisaalta piste x kuuluu määritelmänsä mukaan ominaisvektoreiden muodostaman aliavaruuden sulkeumaan $\overline{\langle \Phi_i \rangle}$, joka on avaruuden $V_0^{\perp}$ osajoukko, joten $x \in V_0^{\perp}$. Oletuksen mukaan piste y kuuluu myös joukkoon $V_0^{\perp}$, joten piste $x - y \in V_0^{\perp}$. Siis piste $x - y \in V_0 \cap V_0^{\perp} = \{0\}$, joten $x = y$, ja näin väite on todistettu.

Nyt kokoamalla lukujen 1 ja 2 tulokset, separoituvan Hilbert-avaruuden spektraalilause saadaan todistettua koko avaruudessa H:

SEURAUS 2.28. *Olkoon A Hilbert-avaruuden H positiivinen, symmetrinen ja kompakti operaattori. Tällöin operaattorin A ominaisarvoja vastaavista ominaisvektoreista voidaan muodostaa avaruuden H ortonormaali kanta.*

TODISTUS. Edellä osoitettiin, että ominaisvektorit

$$\{\Phi_i : i = 1,\, 2,\, \ldots\}$$

muodostavat ortonormaalin kannan operaattorin A ytimen ortogonaaliseen komplementtiin $V_0^{\perp}$. Operaattorin A ytimen, eli ominaisarvoa $\lambda = 0$ vastaavan ominaisavaruuden V_0, ortonormaalia kantaa merkittiin ytimen käsittelyn kohdassa joukolla U_0. Tällöin kantojen yhdiste

$$\{\Phi_i : i = 1,\, 2,\, \ldots\} \cup U_0$$

on koko Hilbert-avaruuden H ortonormaali kanta. $\square$

3. Huomautuksia ja esimerkkejä

Kompaktien operaattoreiden spektraaliteorian johtaminen sepatoituvaan Hilbert-avaruuteen herättää kysymyksiä muun muassa Hilbert-kannan yleisestä olemassaolosta ja luonteesta. Tässä luvussa käsitellään muutamia heränneitä kysymyksiä lauseiden, huomautusten sekä esimerkkien avulla, joita edellisen luvun johdettu teoria herättää.

Luvussa 2 Hilbert-kanta määriteltiin ortonormaalina joukkona, jonka alkioiden avulla avaruuden H jokainen piste x voidaan esittää yksikäsitteisesti äärettömänä lineaarikombinaationa. Lauseessa 3.2 esitetään muita Hilbert-kannan karakterisaatioita. Otetaan lauseen esittämiseksi käyttöön seuraava määritelmä:

Määritelmä 3.1. Olkoon E Hilbert-avaruuden H ortonormaali joukko. Joukon E sanotaan olevan maksimaalinen ortonormaali joukko, jos kaikille avaruuden ortonormaaleille joukoille $F \supset E$ on voimassa $F = E$

Lause 3.2. *Olkoon $E := \{e_i : i \in I\}$ Hilbert-avaruuden H ortonormaali joukko. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *E on Hilbert-kanta, eli $x = \sum_{i\in I} (x|e_i)\, e_i$ kaikilla $x \in H$*
(2) *$(x|y) = \sum_{i\in I} (x|e_i)\,(y|e_i)$ kaikilla $x,\, y \in H$*
(3) *$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\,(x|e_i)\,|^2$ kaikilla $x \in H$*
(4) *E on maksimaalinen ortonormaali joukko*
(5) *$\overline{\langle E\rangle} = H$.*

Kirjoitetaan ennen lauseen 3.2 todistusta tärkeä huomautus:

Huomautus 3.3. Olkoon x avaruuden H piste. Tällöin Besselin epäyhtälön 2.25 nojalla pisteen x kantakonstruktiossa esiintyvä sisätulo $(x|e_i)$ eroaa nollasta korkeintaan numeroituvan monella joukon I indeksillä i. Merkitään nyt joukolla I_x niiden indeksien $i \in I$ joukkoa, joilla edellä oleva sisätulo $(x|e_i)$ eroaa nollasta. Indeksijoukko

$$I_x = \{i \in I : (x|e_i) \neq 0,\, e_i \in E\} \subset I$$

on siis numeroituva.

Lauseen 3.2 todistus: Osoitetaan aluksi lauseen ensimmäiset neljä ehdoa järjestyksessä yhtäpitäviksi: Olkoot x ja y avaruuden H pisteitä ja I_x sekä I_y pisteisiin x ja y liittyvät, huomatuksen 3.3 mukaiset indeksijoukot. Tällöin joukko $I_x \cup I_y$ on numeroituva numeroituvien joukkojen yhdisteenä. Olkoon nyt vielä $\{i_1,\, i_2,\, i_3,\, \ldots\}$ joukon $I_x \cup I_y$ numerointi sekä merkitään

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} \left(x|e_{i_j}\right) e_{i_j} \text{ ja } y_n = \sum_{i=1}^{n} \left(y|e_{i_j}\right) e_{i_j}.$$

Tällöin joukon E ortonormaalisuuden, kolmioepäyhtälön ja lauseen 2.10 perusteella saadaan

$$\left| (x|y) - \sum_{j=1}^{n} \left(x_{i_j}|e_{i_j}\right)\left(y_{i_j}|e_{i_j}\right) \right| = \left| (x|y) - (x_n|y_n) \right| \leq$$

$$\left| (x|y) - (x_n|y) \right| + \left| (x_n|y) - (x_n|y_n) \right| =$$

$$\left| (x - x_n|y) \right| + \left| (x_n|y - y_n) \right| \leq \|x - x_n\|\|y\| + \|x_n\|\|y - y_n\|.$$

Nyt oletuksen perusteella $x_n \to x$ ja $y_n \to y$, kun indeksi n kasvaa mielivaltaisen suureksi, ja erityisesti $\|x_n\|$ on rajoitettu, joten

$$\|x - x_n\|\|y\| + \|x_n\|\|y - y_n\| \to 0,$$

kun n lähestyy ääretöntä. Siis ehto (2) seuraa Hilbert-kannan määritelmästä.

Ehto (3) saadaan ehdosta (2) valitsemalla pisteeksi y piste x, jolloin

$$(x|x) = \|x\|^2 = \sum_{i\in I} (x|e_i)\,\overline{(x|e_i)} = \sum_{i\in I} |\,(x|e_i)\,|^2.$$

Neljäs ehto saadaan ehdosta (3) epäsuoralla päättelyllä. Tehdään antiteesi, jonka mukaan joukko E ei ole maksimaalinen ortonormaali joukko. Tällöin on olemassa avaruuden H alkio $y \neq 0$, jolle pätee $(e_i|y) = 0$ kaikilla indekseillä $i \in I_y$ ja $\|y\| = 1$. Mutta tällöin

$$1 = \|y\|^2 = \sum_{i\in I_y} |\,(y|e_i)\,|^2 = 0,$$

joka on ristiriita. Siis E on avaruuden H maksimaalinen ortonormaali joukko.

Osoitetaan nyt, että ehdosta (4) saadaan ensimmäinen. Olkoon x avaruuden H mielivaltainen piste. Nyt Besselin epäyhtälön 2.25 perusteella summa

$$\sum_{i\in I_x} |\,(x|e_i)\,|^2$$

suppenee, ja koska joukko E on ortonormaali joukko, niin l^2-lauseen 2.27 oletukset ovat voimassa, joten myös summa

$$\sum_{i\in I_x} (x|e_i)\, e_i$$

suppenee.

Olkoon e nyt joukon E alkio ja $\{i_1,\, i_2,\, i_3,\, \ldots\}$ joukon I_x numerointi. Tällöin $(x|e) \neq 0$ vain kun $e = e_{i_j}$ jollakin $j \in \mathbb{N}$. Koska sisätulo

$$\left(x - \sum_{j=1}^{n} \left(x|e_{i_j}\right) e_{i_j} \,\middle|\, e_{i_k} \right) = (x|e_{i_k}) - (x|e_{i_k}) = 0,$$

kun $k = 1, \dots, n$, niin sisätulon jatkuvuuden perusteella saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \left(x - \sum_{j=1}^{n} \left(x|e_{i_j}\right) e_{i_j} \,\middle|\, e \right) \\ &= \left(x - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(x|e_{i_j}\right) e_{i_j} \,\middle|\, e \right) \\ &= \left(x - \sum_{j=1}^{\infty} \left(x|e_{i_j}\right) e_{i_j} \,\middle|\, e \right). \end{aligned}$$

Siis $x - \sum_{j=1}^{\infty} \left(x|e_{i_j}\right) e_{i_j} \perp e$. Oletuksen mukaan joukko E on maksimaalinen ortonormaali joukko, joten

$$x - \sum_{j=1}^{\infty} \left(x|e_{i_j}\right) e_{i_j} = 0,$$

josta ehto (1) seuraa.

Osoitetaan seuraavaksi ehdon (5) seuraaminen ensimmäisestä: Olkoon joukko I_x numeroitu, kuten edellä. Oletuksen mukaan riittää osoittaa, että jokainen avaruuden H piste x kuuluu joukkoon $\overline{\langle E \rangle}$. Oletuksen ja huomautuksen 3.3 mukaan jokainen avaruuden H piste x on suppenevan sarjan summa

$$x = \sum_{i\in I} (x|e_i)\, e_i = \sum_{i\in I_x} (x|e_i)\, e_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left(x|e_{i_j}\right) e_{i_j}.$$

Tällöin sisätulon jatkuvuuden perusteella

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(x|e_{i_j}\right) e_{i_j} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(x|e_{i_j}\right) e_{i_j}. \end{aligned}$$

Nyt jokainen äärellisestä summasta koostuva alkio kuuluu joukkoon $\langle E \rangle$, joten piste x on joukon $\langle E \rangle$ kasaantumispiste. Tällöin piste x kuuluu joukkoon $\overline{\langle E \rangle}$ ja näin ehdon (5) seuraaminen ehdosta (1) saadaan todistetuksi.

Viimeistellään todistus osoittamalla vielä ehdon (4) seuraaminen viimeisestä ehdosta: Olkoon nyt x avaruuden H piste, jolle $(x|e_i) = 0$ kaikilla indeksijoukon I_x indekseillä i. Tällöin piste x kuuluu joukon $\langle E \rangle$ ortogonaaliseen komplementtiin, eli $x \in \langle E \rangle^{\perp}$. Toisaalta, oletuksen mukaan $\overline{\langle E \rangle} = H$, joten on olemassa joukon $\langle E \rangle$ jono (x_n), joka suppenee pisteeseen x. Tällöin sisätulon jatkuvuuden nojalla

$$\|x\|^2 = (x|x) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n | x \right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(x_n|x)}_{=0} = 0.$$

Siis piste $x = 0$, joten E on maksimaalinen ortonormaali joukko.

Näin Hilbert-kannan karakterisaatiolause on saatu todistettua kokonaan. $\square$

Lauseen 3.2 perusteella Hilbert-kannan määritelmä voidaan asettaa todellakin usealla eri tavalla. Kuitenkin määritelmän esittäminen ensimmäisen ehdon muodossa korostaa Hilbert-avaruuksien geometriaa, ja toisaalta se on yhteneväinen luvussa 1 esitettyjen määritelmien ja teorian kanssa. Lisäksi karakterisaatiolauseen esittäminen nostaa esille kysymyksen Hilbert-kannan yleisestä olemassaolosta. Voidaan osoittaa, että jokaisella Hilbert-avaruudella H on todellakin olemassa Hilbert-kanta. Kirjoitetaan tämä vahva tulos lauseeksi:

LAUSE 3.4. *Jokaisella Hilbert-avaruudella H on olemassa Hilbert-kanta.*

Lauseen todistaminen perustuu valinta-aksioman kanssa yhtäpitävään *Zornin lemmaan.* Lauseen todistuksen tarkasteluun tarvittavat määritelmät ja todistuksen yksityiskohdat löytyvät Lauri Kahanpään funktionaalianalyysin luentomonisteesta [**6**, §9].

Luvussa 2 rajoituttiin johtamaan kompaktien operaattoreiden spektraaliteoria separoituvaan Hilbert-avaruuteen H. Opetaattorille A asetettiin myös kompaktiuden lisäksi positiivisuusoletus, mikä tehtiin merkintöjen yksinkertaistamiseksi, kuten luvussa 1. Avaruuden valinta perustui separoituvan Hilbert-avaruuden ominaisuuksien yhdenmukaisuuksiin äärellisulotteisen sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ kanssa. Erityisesti jonoavaruus

$$l^2 = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

on ääretönulotteinen separoituva Hilbert-avaruus, kun määrittelyihin lisätään pisteittäiset laskutoimitukset ja sisätulo

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Tämä avaruus on luonnollinen yleistys äärellisulotteiselle sisätuloavaruudelle $\mathbb{R}^n$. Lisäksi separoituvuus-oletuksen käyttöönotto yksinkertaisti operaattorin A ytimen ortonormaalin kannan olemassaolon perustelua. Seuraavassa lauseessa osoitetaan vahva yhteys Hilbert-avaruuden separoituvuudelle ja Hilbert-kannan mahtavuudelle:

LAUSE 3.5. *Hilbert-avaruus H on separoituva täsmälleen silloin, kun avaruudella H on numeroituva Hilbert-kanta $E = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$.*

TODISTUS. Todistetaan lauseen väite kahdessa osassa. Osoitetaan ensin avaruuden H separoituvuus kannan numeroituvuudesta. Täytyy siis osoittaa, että avaruus H sisältää numeroituvan, tiheän joukon.

Olkoon $E = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ avaruuden H Hilbert-kanta ja määritellään joukko

$$U = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j : n \in \mathbb{N},\, \eta_j \in \mathbb{Q} \text{ ja } e_j \in E \right\}.$$

Nyt joukko U on avaruuden H osajoukko, ja erityisesti se on numeroituva. Koska oletuksen mukaan E on kanta, niin lauseen 3.2 perusteella joukon E virittämän aliavaruuden sulkeuma $\overline{\langle E \rangle}$ on koko avaruus H, joten joukon U tiheyden osoittamiseksi riittää näyttää, että $\langle E \rangle \subset \overline{U}$.

Olkoon $x \in \langle E \rangle$ ja $\varepsilon > 0$. Piste x on siis muotoa

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i,$$

missä kertoimet c_i ovat reaalilukuja. Tällöin jokaiselle indeksille i on olemassa rationaaliluku $\widetilde{c_i}$ jolle $|c_i - \widetilde{c_i}| < \frac{\varepsilon}{n}$. Nyt pisteelle $\widetilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{c_i} e_i$,

$$\|x - \widetilde{x}\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\left(c_i - \widetilde{c_i}\right) e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |c_i - \widetilde{c_i}| \|e_i\| < \frac{\varepsilon}{n} n = \varepsilon \ ,$$

joten piste x on joukon U kasaantumispiste. Siis $\langle E \rangle \subset \overline{U}$, joten U on tiheä avaruudessa H.

Oletetaan nyt avaruuden H separoituvuus ja todistetaan Hilbert-kanta numeroituvaksi epäsuorasti. Oletetaan siis, että avaruuden H kanta $E = \{e_i : i \in I\}$ on ylinumeroituva. Nyt pallot

$$B\left(e_i, \frac{1}{2}\right)$$

ovat pistevieraita: Olkoon $x \in B\left(e_i, \frac{1}{2}\right)$ ja olkoon $j \neq i$. Tällöin

$$\|x - e_j\| \geq \|e_j - e_i\| - \|x - e_i\| = \sqrt{2} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}.$$

Koska I on ylinumeroituva ja separoituvuusoletuksen mukaan avaruuden H sisältämä joukko U numeroituva, niin on olemassa indeksi $i_0 \in I$ jolle

$$B\left(e_{i_0}, \frac{1}{2}\right) \cap U = \emptyset.$$

Tämä on ristiriitaista joukon U tiheyden kanssa. Siis kanta E on numeroituva. $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi muutamaa teoriaa selventävää, mutta toisaalta syventävää esimerkkiä:

ESIMERKKI 3.6. Olkoon nyt $H = l^2$, ja määritellään operaattori $A : H \to H$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

missä $\lambda_i = \frac{1}{2^{i-1}}$, $i = 1, 2, \ldots$. Nyt operaattori A on kompakti ja sen ominaisarvoina ovat diagonaalialkiot λ_i. Jokainen ominaisarvo λ_i on aidosti positiivinen ja esiintyy täsmälleen yhden kerran, joten jokaista ominaisarvoa vastaava ominaisavaruus V_i on 1-ulotteinen. Koko avaruuden H Hilbert-kanta muodostuu ominaisarvoja vastaavista ortonormeeratuista ominaisvektoreista.

ESIMERKKI 3.7. Olkoon edelleen $H = l^2$ ja muutetaan esimerkin 3.6 operaattoria $A : H \to H$ seuraavasti:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Operaattori A on myöskin nyt kompakti, ja kuten esimerkissä 3.6, operaattorin A ominaisarvoina ovat diagonaalialkiot λ_i. Nyt jokainen ominaisarvo λ_i esiintyy i kertaa, joten ominaisarvoa λ_i vastaava ominaisavaruus V_i on i-ulotteinen. Siis indeksin i kasvaessa myös ominaisavaruuden V_i dimensio kasvaa. Kuitenkin Fredholmin lauseen 2.22 perusteella *jokainen ominaisavaruus* V_i *on äärellisulotteinen.*

Esimerkeissä tarkasteltiin Hilbert-avaruuden l^2 kompakteja operaattoreita ja niiden vaikutuksista ominaisavaruuksiin. Erityisesti esimerkin 3.7 perusteella Hilbert-kanta voi olla tietyssä mielessä hyvinkin suuri. Nyt nämä havainnot nostavat esille kysymyksen yleisen Hilbert-avaruuden kannan mahtavuudesta ja yksikäsitteisyydestä. Äärellisulotteisen sisätuloavaruuden tavoin yleisen Hilbert-avaruuden kanta ei ole yksikäsitteinen. Lisäksi voidaan konstruoida Hilbert-avaruus, jolla on ylinumeroituva kanta. Kirjoitetaan nämä esille nousseiden kysymyksien tärkeät vastaukset vielä huomautukseksi:

HUOMAUTUS 3.8. Olkoon H mielivaltainen Hilbert-avaruus.

(1) Hilbert-avaruuden H kanta voi olla ylinumeroituva.
(2) Hilbert-avaruuden H kanta ei ole yksikäsitteinen.

Palataan vielä tarkastelemaan kompaktin operaattorin A ytimen kannan käsittelyä hieman tarkemmin edellä esitettyjen esimerkkien pohjalta: Kummassakaan edellä esitetyssä esimerkissä nolla *ei ole* operaattorin A ominaisarvo, ja molemmissa tapauksissa operaattorin A ytimeksi saadaan joukko

$$ker\,(A) = \{x \in H : Ax = 0\} = \{0\} =: V_0.$$

Tämän perusteella molemmissa esimerkeissä Hilbert-avaruus H voidaan esittää ominaisavaruuksien V_i avulla muodossa

$$H = V_1 \oplus V_2 \oplus \ \ldots .$$

Tämä osoittaa erityisesti Fredholmin lauseen vahvuuden separoituvan Hilbert-avaruuden spektraalilauseen johtamisessa, koska operaattorin A ydin on ainut ominaisavaruus, jonka kannan olemassaolon perusteluun se ei tuo apua kuin erikoistapauksissa. Kuitenkaan operaattorin A ytimen ominaisuuksia ja luonnetta ei saa unohtaa tai aliarvostaa:

Esimerkki 3.9. Olkoon avaruus $H = l^2$ myös tässä esimerkissä, ja muutetaan esimerkin 3.6 operaattoria $A : H \to H$ seuraavasti:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Operaattori A on selvästi kompakti myös nyt, ja operaattorin A ominaisarvoina ovat diagonaalialkio λ_1 ja nolla. Ominaisarvoa nolla vastaava ominaisavaruus on siis operaattorin A ydin $ker\,(A) := V_0$, ja merkitään ominaisarvoa λ_1 vastaavaa ominaisavaruutta joukolla V_1. Nyt ominaisavaruus V_1 on operaattorin A ytimen ortogonaalinen kompelementti, eli $V_1 = V_0^{\perp}$. Kuten aiemmin on todettu, yleisen projektiolauseen 2.19 nojalla avaruus H voidaan esittää ominaisavaruuksien suorana summana

$$H = V_0 \oplus V_0^{\perp} = V_0 \oplus V_1.$$

Nyt ominaisarvoa λ_1 *vastaava ominaisavaruus* V_1 *on* 1*-ulotteinen, joten ytimen* V_0 *Hilbert-kanta on numeroituvasti ääretön.*

Esimerkki 3.10. Olkoon H separoituva ja $\widetilde{H}$ mielivaltainen Hilbert-avaruus, jonka kanta on ylinumeroituva. Olkoot vielä $\hat{A} : H \to H$ operaattori, kuten esimerkissä 3.6 jolloin $\hat{A}$ on injektio, ja määritellään operaattori

$$A : H \oplus \widetilde{H} \to H \oplus \widetilde{H}\ ,\ A\,(x, y) = \hat{A}x.$$

Nyt operaattoria A vastaava matriisi voidaan esittää muodossa

$$A = \begin{pmatrix} \hat{A} & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

missä $B : \widetilde{H} \to H$, $C : H \to \widetilde{H}$ ja $D : \widetilde{H} \to \widetilde{H}$ ovat määriteltyjen Hilbert-avaruuksien välisiä operaattoreita. Operaattori A on myös kompakti, kuten operaattori $\hat{A}$. Lisäksi operaattorin A ominaisarvona esimerkin 3.6 lukujen λ_i lisäksi on luku $\lambda_0 = 0$. Erityisesti ominaisarvo $\lambda_0 = 0$ esiintyy ylinumeroituvan monta kertaa. Ominaisarvoa $\lambda_0 = 0$ vastaava ominaisavaruus saadaan määritettyä

$$\begin{aligned} ker\,(A) &= \left\{(x, y) \in H \oplus \widetilde{H} : A\,(x, y) = 0\right\} \\ &= \left\{(0, y) : y \in \widetilde{H}\right\}. \end{aligned}$$

Nyt Hilbert-avaruuden $H \oplus \widetilde{H}$ Hilbert-kanta on ylinumeroituva, koska Hilbert-avaruuden $\widetilde{H}$ kanta on ylinumeroituva.

Luvussa 2 operaattorin A ytimen todettiin olevan alkuperäisen Hilbert-avaruuden H suljettu aliavaruus ja sen kannan olemassaolon perustelussa käytettiin apuna lausetta 2.23, jonka mukaan separoituvan Hilbert-avaruuden suljettu aliavaruus on myöskin separoituva. Esitetään nyt vielä lauseen 2.23 todistus, joka perustuu avaruuden Hilbert-kannan mahtavuuteen:

Lauseen 2.23 todistus: Olkoon U separoituvan Hilbert-avaruuden H suljettu aliavaruus. Nyt suljettu aliavaruus U on myöskin Hilbert-avaruus täydellisen metrisen avaruuden suljettuna osajoukkona, ja tällöin lauseen 3.4 perusteella aliavaruudella U on Hilbert-kanta E_U.

Nyt aliavaruus U on separoituva, sillä sen kanta E_u voidaan laajentaa koko avaruuden H kannaksi E, joka lauseen 3.5 mukaan on numeroituva, jolloin E_U on numeroituvan joukon osajoukkona numeroituva. □

Kolmannen luvun teoria ja esimerkit herättävät edelleen kysymyksiä niin separoituvien kuin mielivaltaistenkin Hilbert-avaruuksien kantateoriasta. Teorian janoisten kannattaa tutustua ehdottomasti lähteenä käytettyyn teokseen [**8**].

4. Yhtälön $y = x - \lambda Ax$ ratkaiseminen

Luvussa 2 yleinen spektraalilause johdettiin separoituvaan Hilbert-avaruuteen H. Tässä luvussa esitetään eräs spektraalilauseen sovellus yhtälön

$$y = x - \lambda Ax \tag{4.1}$$

ratkaisuna seuraavin oletuksin: Olkoot avaruuden H pisteen y ja luvun λ lisäksi tunnettuna symmetrinen, kompakti operaattori $A : H \to H$ ominaisarvoineen μ_i ja ominaisvektoreineen Φ_i. Olkoon vielä ominaisarvot $\mu_i \neq 0$ kaikilla i. Yhtälö 4.1 voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = y + \lambda Ax = y + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \left(x|\Phi_i\right) \Phi_i.$$

Tällöin kaikille $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} (x|\Phi_k) &= \left(y + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \left(x|\Phi_i\right) \Phi_i \;\middle|\; \Phi_k \right) \\ &= (y|\Phi_k) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \left(x|\Phi_i\right) \Phi_i \;\middle|\; \Phi_k \right) \\ &= (y|\Phi_k) + \lambda\mu_k \left(x|\Phi_k\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

sillä $\Phi_i \perp \Phi_j$, kun $i \neq j$. Nyt yhdistämällä tulontekijät yhtälö 4.2 saadaan muotoon

$$(1 - \lambda\mu_k)\left(x|\Phi_k\right) = (y|\Phi_k). \tag{4.3}$$

Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa luku λ ei ole yhdenkään ominaisarvon μ_i käänteisluku, eli $\lambda\mu_i \neq 1$ kaikilla indekseillä $i = 1, 2, \ldots$. Tällöin yhtälö 4.3 saadaan muotoon

$$(x|\Phi_k) = \frac{1}{1 - \lambda\mu_k} (y|\Phi_k),$$

ja piste x voidaan esittää muodossa

$$x = y + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} (y|\Phi_i) \Phi_i. \tag{4.4}$$

Jos nyt pisteen x lausekkeessa 4.1 esiintyvä summa

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} (y|\Phi_i) \Phi_i =: S$$

suppenee, niin piste x on alkuperäisen yhtälön 4.1 ratkaisu, sillä operaattorin A jatkuvuutta, sekä ominaisarvojen ominaisuuksia soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
x - \lambda Ax &= y + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} (y|\Phi_i)\,\Phi_i \\
&\quad - \lambda A \left(y + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} (y|\Phi_i)\,\Phi_i \right) \\
&= y - \lambda Ay + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} (y|\Phi_i)\,(\Phi_i - \lambda A\Phi_i) \\
&= y - \lambda Ay + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} (y|\Phi_i)\,(1 - \lambda\mu_i)\,\Phi_i \\
&= y - \lambda Ay + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i \\
&= y - \lambda Ay + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (y|\Phi_i)\,A\Phi_i \\
&= y - \lambda Ay + \lambda A \sum_{i=1}^{\infty} (y|\Phi_i)\,\Phi_i \\
&= y - \lambda Ay + \lambda Ay \\
&= y.
\end{aligned}$$

Pyritään seuraavaksi osoittamaan osasummien jono $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ *Cauchy-jonoksi*, jolloin summan S suppeneminen seuraa avaruuden H täydellisyydestä: Olkoot n ja m indeksejä niin, että $n > m$. Tällöin osasummien jonolle (S_n) saadaan

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_m\|^2 &= \| \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} (y|\Phi_i)\,\Phi_i \|^2 \\
&= \left(\sum_{i=m+1}^{n} \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} (y|\Phi_i)\,\Phi_i \;\middle|\; \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} (y|\Phi_i)\,\Phi_i \right) \\
&= \sum_{i=m+1}^{n} \left| \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} (y|\Phi_i) \right|^2 \\
&\leq l^2 \sum_{i=m+1}^{n} |\,(y|\Phi_i)\,|^2,
\end{aligned}$$

missä l on lukujen

$$\left| \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i} \right|$$

muodostaman joukon pienin yläraja. Pienin yläraja on olemassa, koska oletuksen perusteella $\lambda\mu_i \neq 1$, ja operaattorin A kompaktiuden nojalla ominaisarvot muodostavat nollaan suppenevan jonon indeksin i kasvaessa mielivaltaisen suureksi.

Olkoon λ nyt operaattorin A ominaisarvon *r-kertainen* käänteisluku. Tällöin $\lambda\mu_i = 1$ indeksin i arvoilla s, $s+1$, $\ldots$, $s+r-1$. Nyt yhtälön

$$(1 - \lambda\mu_i)\,(x|\Phi_i) = (y|\Phi_i)$$

nojalla $(y|\Phi_i) = 0$, joten piste y on ortogonaalinen ominaisvektoreiden Φ_s, $\Phi_{s+1}, \ldots, \Phi_{s+r-1}$ ja muiden ominaisarvoa $\frac{1}{\lambda}$ vastaavien ominaisvektoreiden kanssa.

Merkitään nyt luvulla c_i sisätuloa $(x|\Phi_i)$, kun $i < s$ tai $i > s+r-1$. Indeksin i arvoilla s, $s+1$, $\ldots$, $s+r-1$ valitaan luku c_i mielivaltaisesti. Tällöin sarja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda\mu_i}{1-\lambda\mu_i}\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i$$

suppenee, kuten ensimmäisessä tapauksessa on osoitettu, ja piste

$$x = y + \sum_{i=1}^{\infty} c_i\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i$$

on näin alkuperäisen yhtälön 4.1 ratkaisu.

Yhtälön $y = x - \lambda Ax$ ratkaisun olemassaolon perustelussa käytettiin avaruuden H täydellisyyttä. Tarkastellaan seuraavaksi vielä yhtälön 4.1 ratkaisua mielivaltaisessa sisätuloavaruudessa:

Olkoon siis avaruus H mielivaltainen sisätuloavaruus, ja tarkastellaan yhtälön ratkaisua tapauksessa, jossa λ ei ole yhdenkään kompaktin operaattorin A ominaisarvon μ_i käänteisluku. Tällöin indeksillä k sisätuloyhtälö 4.3 saa muodon

$$(x|\Phi_k) = \frac{1}{1-\lambda\mu_k}\,(y|\Phi_k)\,,$$

ja tätä soveltamalla operaattorin A jatkuvuuden kanssa yhtälön ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$x = y + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{1-\lambda\mu_i}\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i = y + \lambda A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda\mu_i}\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i.$$

Tarkastellaan nyt yhtälön ratkaisussa esiintyvän sarjan muodostamaa osasummien jonoa $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, missä

$$T_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda\mu_i}\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i.$$

Nyt jono (T_n) on rajoitettu, sillä

$$\begin{aligned}
\|T_n\|^2 &= \|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda\mu_i}\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i\|^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda\mu_i}\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda\mu_i}\,(y|\Phi_i)\,\Phi_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{1-\lambda\mu_i}\,(y|\Phi_i) \right|^2 (\Phi_i|\Phi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{1-\lambda\mu_i}\,(y|\Phi_i) \right|^2 \\
&\le p^2 \sum_{i=1}^{n} |\,(y|\Phi_i)\,|^2 \\
&\le p^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\,(y|\Phi_i)\,|^2 \\
&\le p^2 \|y\|^2,
\end{aligned}$$

missä p on lukujen

$$\left| \frac{1}{1-\lambda\mu_i} \right|$$

muodostaman joukon pienin yläraja, joka on olemassa reaalilukujen täydellisyysaksiooman nojalla. Jono (T_n) on lisäksi Cauchy-jono, kuten jono (S_n) Hilbert-avaruuden tapauksessa. Nyt operaattorin A kompaktiuden nojalla jonolla

$$(u_n = y + \lambda AT_n)_{n=1}^{\infty}$$

on avaruudessa H suppeneva osajono $(u_{n_m})_{m=1}^{\infty}$ rajapisteenä avaruuden H piste u. Tällöin myös alkuperäinen jono (u_n) suppenee myös pisteeseen u, sillä

$$\|u - u_m\| \le \|u - u_{n_m}\| + \|u_{n_m} - u_m\| \to 0,$$

kun indeksi m kasvaa mielivaltaisesti. Osoitetaan nyt, että piste u on alkuperäisen yhtälön 4.1 ratkaisu: Jono (T_n) ei välttämättä suppene avaruudessa H, koska avaruus H on mielivaltainen sisätuloavaruus. Avaruus H voidaan kuitenkin *täydellistää* Hilbert-avaruudeksi $\widetilde{H}$, jolloin jono (T_n) suppenee avaruudessa $\widetilde{H}$ rajapisteenään avaruuden $\widetilde{H}$ piste T. Nyt myös jono (u_n) suppenee avaruudessa $\widetilde{H}$ rajapisteenä $u = y + \lambda AT$. Tällöin u on myös alkuperäisen yhtälön 4.1 ratkaisu avaruudessa H, sillä laskemalla vastaavin perustein kuin ensimmäisessä Hilbert-avaruuden tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned}
u - \lambda Au &= y + \lambda AT - \lambda A\left(y + \lambda AT\right) \\
&= y + \lambda A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda\mu_i} \left(y|\Phi_i\right) \Phi_i \\
&\quad - \lambda A \left(y + \lambda A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda\mu_i} \left(y|\Phi_i\right) \Phi_i \right) \\
&= y - \lambda Ay + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda\mu_i} \left(y|\Phi_i\right) \left(A\Phi_i - \lambda A^2 \Phi_i\right) \\
&= y - \lambda Ay + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda\mu_i} \left(y|\Phi_i\right) \mu_i \left(1 - \lambda\mu_i\right) \Phi_i \\
&= y - \lambda Ay + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \left(y|\Phi_i\right) \mu_i \Phi_i \\
&= y - \lambda Ay + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \left(y|\Phi_i\right) A\Phi_i \\
&= y - \lambda Ay + \lambda A \sum_{i=1}^{\infty} \left(y|\Phi_i\right) \Phi_i \\
&= y - \lambda Ay + \lambda Ay \\
&= y.
\end{aligned}$$

HUOMAUTUS 4.1. Esitetään vielä muutama luvun 4 teorian tarkasteluun liittyvä huomautus.

(1) Yleisen sisätuloavaruuden tapauksessa tarvitaan avaruuden täydellistämisen, jotta piste u voidaan osoittaa viimeisellä laskulla yhtälön 4.1 ratkaisuksi.
(2) Lisätietoja normiavaruuden täydellistämisestä löytyy teoksesta [**6**, §22.8]

Viitteet

[1] LAURI KAHANPÄÄ, MATTI HANNUKAINEN, *Lineaarinen algebra ja geometria*, Suoraviivaista ajattelua - osa I, Luentomoniste 43. Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos, 1999.

[2] VEIKKO T. PURMONEN, *Euklidiset avaruudet*, Luentomoniste 49. Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja Tilastotieteen laitos, 2002.

[3] VEIKKO T. PURMONEN, *Differentiaali- ja integraalilaskentaa*, I osa, Luentomoniste 45. Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos, 2000.

[4] VEIKKO T. PURMONEN, *Differentiaali- ja integraalilaskentaa*, II osa, Luentomoniste 48. Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos, 2000.

[5] TOM M. APOSTOL, *Mathematical analysis*, 2nd edition, 5th printing, Addison Wesley, 1981.

[6] LAURI KAHANPÄÄ, *Funktionaalianalyysi*, Suoraviivaista ajattelua - osa II, Luentomoniste 51. Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja Tilastotieteen laitos, 2006.

[7] ARI LEHTONEN, *Kompaktien operaattorien spektri*, elektroninen dokumentti osoitteessa
http://users.jyu.fi/~lehtonen/opetus/FAn2005/Kompaktit_operaattorit.pdf.
Luettu 1.4.2008. Jyväskylä, 2005.

[8] FRIGYES RIESZ, BÉLA SZ. -NAGY, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing Company, 1955.

[9] MIKE REED, BARRY SIMON, *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis*, Academic Press, 1972.

[10] GERALD B. FOLLAND, *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press and University Of Tokyo Press, 1976.