

# Säätöteoria ja Hamilton-Jacobi-yhtälöt

Pro gradu -tutkielma  
Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Hermann Riikonen  
1.6.2008



# Säätöteoria ja Hamilton-Jacobi-yhtälöt

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Säätöteoria</b>	<b>4</b>
2.1	Säätösystemi . . . . .	4
2.2	Säätöongelma . . . . .	7
2.3	Bolzan ongelma . . . . .	11
2.4	Dynaaminen ohjelmointi . . . . .	18
2.5	Maksimiperiaate . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Hamilton-Jacobi-yhtälöt</b>	<b>25</b>
3.1	Karakterististen käyrien menetelmä . . . . .	25
3.2	Stationaariset yhtälöt . . . . .	28
3.3	Viskositeettiratkaisut . . . . .	32
3.4	Hamilton-Jacobi-yhtälöt ja säätöteoria . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Käytettyjä merkintöjä</b>	<b>39</b>

# 1 Johdanto

*Säätöteoria* on laajalti sovellettu matematiikan osa-alue. Maailma on väärällä dynaamisia systeemejä, joihin voi liittyä säätöä. Taloustieteet ovat tärkeä sovellusala; puhtaankin säätöteorian termistöön on vakiintunut esimerkiksi sana ”kustannukset” (cost), joka viittaa rahaan. Kaikki sovellukset eivät kuitenkaan liity rahatalouteen. Esimerkiksi ekologiassa, luonnontaloudessa, säätöteoria on hyödyllinen tutkimusmenetelmä (esim. [2]). Luonto tarjoaa lukuisia esimerkkejä optimaalisesti ratkaistuista säätöongelmista, ja säätöteoria on avain näiden matemaattiseen mallintamiseen. Ihmisen taloudenpidossa säätöteoria taas on keino löytää optimaalinen ratkaisu tietyn tyyppiselle ongelmalle lukuisten vaihtoehtojen joukosta.

Säätöteoriasta puhutaan paljon myös teknisissä tieteissä. Erityisesti sähkö- ja automaatiotekniikan opiskelijoille opetetaan säätöteoriaa paitsi yliopistoissa myös ammattikorkeakouluissa. Automaatiotekninen lähestymistapa säätöteoriaan on kuitenkin jossain määrin erilainen kuin se, johon tämä työ keskittyy. Säätötekniikasta voi lukea enemmän esimerkiksi teoksesta [3].

Nykyisin paljon tutkitaan ja sovelletaan stokastista säätöteoriaa. Ajankohtaisena esimerkkinä mainittakoon Urvashi Narainin ja Anthony Fisherin [13, s. 260] yksinkertainen malli, jolla voidaan arvioida optimaalista kasvihuonekaasutuotantoa. Satunnaistekijänä mallissa on ekokatastrofin todennäköisyys. Stokastisen säätöteorian matematiikkaan voi perehtyä esimerkiksi teoksen [4] kautta.

Hamilton-Jacobi-yhtälöt ovat osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, jotka ovat tulleet vastaan muun muassa teoreettisessa fysiikassa. Nykyisin Hamilton-Jacobi-yhtälöt työllistävät paljon myös matemaattisen analyysin asiantuntijoita. Säätöteoria on yksi Hamilton-Jacobi-yhtälöiden matemaattinen sovelluskohde. Toinen yhtä keskeinen on variaatiolaskenta [6, luku 6]. Alan uudehkoa tutkimusta edustaa viskositeettiratkaisujen teoria, jota raapaistaan tämän työn luvussa 3.3. Myös viskositeettiratkaisuja käsittelee laajemmin teos [4].

## 2 Säätöteoria

### 2.1 Säätösystemi

Säätöteoriassa tyypillisesti tarkastellaan tavallisten differentiaaliyhtälöiden autonomista systeemiä

$$y'(t) = f(y(t), u(t)) \quad , \quad t \in [t_0, +\infty[ \quad (1)$$

alkuarvolla  $y(t_0) = y_0$ . Suureiden  $y \in \mathbb{R}^n$  aikakehitys riippuu sekä niistä itsestään että jostakin niiden ulkopuolisesta tekijästä  $u \in U$  tietyn *dynamiikan*  $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  määräämällä tavalla, samalla tavalla jokaisella ajanhetkellä. Systeemin tilaan, suureiden  $y$  arvoihin, voidaan ulkoa päin siis vaikuttaa säätämällä parametrin  $u$  arvoa sopivasti eri ajanhetkillä. Niinpä  $u$ :ta on tapana kutsua *säädöksi* tai *ohjaukseksi* (engl. *control*). Joukkoa  $U$ , josta säätö kullakin ajanhetkellä valitaan, kutsutaan *säätöjoukoksi*. Säätöjoukko voi olla yksi- tai moniulotteinen, rajoitettu tai rajoittamaton. Sovellusten kannalta sitä on mielekästä pitää suljettuna joukkona, ja säätö oletetaan valituksi säätöjoukon mitallisten käyrien joukosta.

Differentiaaliyhtälösystemiä (1), tarkkaan ottaen paria  $(f, U)$ , kutsutaan *säätösystemiksi*. Sen dynamiikkafunktio  $f$  on tapana olettaa jatkuvaksi, vaikka toki on olemassa säätösystemejä, joiden dynamiikassa on epäjatkuvuutta - esimerkiksi pullataikina, jonka hiiva kuolee tietyssä lämpötilassa. Epäjatkuvien säätösystemien ratkaisujen olemassaolo ja yksikäsitteisyys ei kuitenkaan ole helposti todennettavissa, joten tässä yhteydessä on paras vaihtaa päätä vain jatkuvilla systeemeillä.

Säätösystemiin (1) liittyvä alkuarvo-ongelma kirjoitetaan usein integraalimuodossa

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), u(s)) ds. \quad (2)$$

Tällöin ei tarvitse olettaa, että ratkaisun  $y(t)$  derivaatta  $y'(t)$  olisi joka pisteessä olemassa.

Ennen kuin tutkitaan tarkemmin systeemin ratkaisujen olemassaoloa ja yksikäsitteisyyttä, kirjataan eräs tavallisten differentiaaliyhtälöiden teorian keskeinen aputuloksena, Grönwallin epäyhtälö.

**Lemma 2.1.1** (Grönwallin epäyhtälö.) *Olkoon  $I \subset \mathbb{R}$  väli ja  $t_0 \in I$ . Olkoon  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  aidosti kasvava, jatkuva funktio ja olkoot  $\beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_+$*

jatkuvia funktioita. Jos kaikilla  $t \in I$

$$\gamma(t) \leq \alpha(|t - t_0|) + \left| \int_{t_0}^t \beta(s)\gamma(s)ds \right|,$$

niin silloin kaikilla  $t \in I$

$$\gamma(t) \leq \alpha(|t - t_0|)e^{|\int_{t_0}^t \beta(s)ds|}. \quad (3)$$

*Todistus.* Esim. [1, s. 90].  $\square$

Tästä eteenpäin tarkastellaan säätösystemiä, jolle on melkein kaikilla  $t \in [t_0, +\infty[$  voimassa yhtälö (2) ja rajoitutaan siinä aikavälille  $[t_0, t_1]$ . Systemin dynamiikka  $f$  oletetaan  $x$ -argumentin suhteen Lipschitz-jatkuvaksi (niin, että Lipschitz-jatkuvuus  $x$ :n suhteen on tasaista myös  $u$ -argumentin suhteen) ja säätöjoukko  $U \subset \mathbb{R}^m$  suljetuksi. Osoittautuu, että yhtälöllä (2) on silloin aina yksikäsitteinen ratkaisu, olipa säätö  $u$  mikä hyvänsä.

**Oletus 2.1.2** *Oletetaan, että on sellainen luku  $K > 0$ , että*

$$|f(x_2, u) - f(x_1, u)| \leq K|x_2 - x_1|$$

*kaikilla  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, u \in U$ .*

**Lause 2.1.3** *Oletuksen 2.1.2 vallitessa yhtälöllä (2) on jokaisella  $u \in U$  jatkuva ratkaisu, ja tuo ratkaisu on yksikäsitteinen.*

*Todistus.* Ks. [4, s. 218-221].  $\square$

Yhtälön (2) ratkaisu on käyrä  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Siihen on monesti syytä merkitä näkyviin alkuehto  $y(t_0) = x_0$  ja käytetty säätö  $u$  notaatiolla

$$y(t) = y(t; x_0, t_0, u).$$

Ratkaisun ominaisuudet riippuvat systeemin dynamiikasta  $f$  ja säädöstä  $u$ . Jatkossa tarvitaan paria alkuehdon vaihteluun liittyvää piirrettä, jotka kirjataan ylös seuraavaksi.

**Lemma 2.1.4** *On olemassa sellainen  $c > 0$ , että*

$$|y(t; x_0, t_0, u) - y(t; x_1, t_0, u)| \leq c|x_0 - x_1| \quad (4)$$

*kaikilla  $u : [t_0, t_1] \rightarrow U, x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  ja kaikilla  $t \in [t_0, t_1]$ .*

*Todistus.* Merkitään  $y_0(t) = y(t; x_0, t_0, u)$  ja  $y_1(t) = y(t; x_1, t_0, u)$ . Päätellään, että

$$\begin{aligned} |y_0(t) - y_1(t)| &= |x_0 - x_1 + \int_{t_0}^t f(y_0(s), u(s)) - f(y_1(s), u(s)) ds| \\ &\leq |x_0 - x_1| + K \int_{t_0}^t |y_0(s) - y_1(s)| ds. \end{aligned}$$

Nyt Grönwallin epäyhtälön mukaan

$$|y(t; x_0, t_0, u) - y(t; x_1, t_0, u)| \leq |x_0 - x_1| e^{K(t-t_0)}$$

ja valinnalla  $c = e^{K(t_1-t_0)}$  väite on tosi.  $\square$

**Lemma 2.1.5** *Jos säätöjoukko  $U$  on rajoitettu, niin jokaiselle  $R > 0$  on olemassa  $S > 0$  niin, että*

$$|y(t; x, t_0, u)| \leq S \tag{5}$$

*kaikilla  $u : [t_0, t_1] \rightarrow U, x \in B(0, R)$  ja  $t \in [t_0, t_1]$ .*

*Todistus.* Koska  $U$  on suljettu ja rajoitettu ja  $f$  jatkuva, on olemassa luku  $M = \max_{u \in U} |f(0, u)|$ . Oletuksesta (2.1.2) seuraa tällöin, että

$$|f(x, u)| \leq M + K|x|.$$

Nyt

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq |x| + \int_{t_0}^t (M + K|y(s)|) ds \\ &= |x| + M(t - t_0) + K \int_{t_0}^t |y(s)| ds \\ &\leq |x| + M(t_1 - t_0) + K \int_{t_0}^t |y(s)| ds, \end{aligned}$$

ja Grönwallin epäyhtälön nojalla

$$|y(t)| \leq \left[ |x| + M(t_1 - t_0) \right] e^{K(t-t_0)}$$

kaikilla  $t \in [t_0, t_1]$ . Etsitty vakio  $S$  on epäyhtälön oikea puoli, jossa  $|x|$  on korvattu vapaaavalintaisella positiivisella luvulla  $R$ .  $\square$

Entäpä säädön  $u$  vaihtelu eri ajanhetkien välillä? Seuraava lause, *Filippovin lemma*, lupaa ettei mitallisuuden vaatimus rajoita ratkaisuja.



**Lause 2.1.6** (Filippovin lemma.) *Olkoon  $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absoluuttisesti jatkuva funktio, joka melkein kaikilla  $t \in [t_0, t_1]$  toteuttaa yhtälön*

$$y'(t) = f(y(t), u)$$

*jollakin  $u \in U$ . Tällöin on olemassa mitallinen kuvaus  $u : [t_0, t_1] \rightarrow U$ , joka melkein kaikilla  $t \in [t_0, t_1]$  toteuttaa yhtälön*

$$y'(t) = f(y(t), u(t)). \tag{6}$$

*Todistus.* Vaatii jonkin verran tuloksia joukkoarvoisista funktioista, ks. [6, s. 189].

Edellä valittiin säätö  $u(t)$  kompaktista joukosta ja saatiin siististi käytettyviä ratkaisuja. Kompaktissa säätöjoukossa myös *optimaalisen säädön* olemassaolo on varmempaa kuin ei-kompaktissa, kuten luvussa 2.3 nähdään.

## 2.2 Säätöongelma

Kun on saatu varmuus niistä säädöistä, joiden mukaan systeemiä voidaan säätää, voidaan siirtyä säätöteorian keskeiseen kysymykseen: mikä säätö on paras? Säätöteoriasta käytetään englannin kielessä monesti termiä ”optimal control”, optimaalinen säätö. Jotta voidaan puhua optimaalisuudesta, täytyy säätöjen paremmuuden määrittämiseksi olla jokin järkevä mittari. Jotta voidaan löytää optimaalinen säätö, täytyy osata löytää tämän mittarin ääriarvo.

On huomattava, että - kuten ääriarvotehtävissä yleensä - on kaksi eri asiaa löytää ääriarvo ja piste, jossa se saavutetaan. Matemaattisessa säätöteoriassa usein tärkeämpää on optimaalisen säädön olemassaolo kuin se, miltä se näyttää. Sovelluksissa taas tyypillisesti keskeisempää on osata muodostaa optimaalinen säätö konkreettisesti. Käytännön ongelmissa joudutaan sitä varten useimmiten hyödyntämään tietokoneita ja numeerisia menetelmiä [10, luku 6],[11]. Nekin silti vaativat matemaattista taustatyötä; jos hölmöyttään lähdetään numeerisesti etsimään ratkaisua, jota ei oikeasti ole edes olemassa, voivat seuraukset olla kohtalokkaat.

Eräs matemaattinen tapa mitata säätöjä ja etsiä niistä optimaalisin esitetään luvussa 2.3, jossa syvennyttään *Bolzan ongelma* kutsuttuun säätöteorian tehtävätyyppiin, johon useat käytännön ongelmat voidaan palauttaa.

Ensiksi kuitenkin havainnollistetaan tähän asti esitettyä teoriaa soveltamalla sitä käytännön mallintamistilanteeseen.

**Esimerkki.**<sup>1</sup>Suuri vesihuolto-yhtiö on voittanut tarjouskilpailun Timbuktu<sup>2</sup> kaupungin vesihuollon järjestämisestä seuraavaksi kolmeksi vuodeksi. Yhtiö on kaivauttanut kaupunkiin hyvin syvän kaivon, josta se nostaa vettä myytäväksi haluamaansa hintaan. Veden kysyntä  $Q$  (montako litraa korkeintaan menee kaupaksi päivässä) määräytyy yksikäsitteisesti litrahinnasta  $p$  (Malin frangia /litra) paloittain lineaarisen, jatkuvan funktion mukaisesti:

$$Q(p) = \begin{cases} \rho_1 - \delta_1 p & , p \in [0, p_1] \\ \rho_2 - \delta_2 p & , p \in ]p_1, p_2] \\ \rho_3 - \delta_3 p & , p \in ]p_2, \frac{\rho_3}{\delta_3}] \\ 0 & , p > \frac{\rho_3}{\delta_3}. \end{cases}$$

Vakiot  $\rho_i, \delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sekä  $p_1$  ja  $p_2$  tunnetaan, ja kuvaajan muoto on kuvan 1 mukainen. Vettä siis ei voi kulua määrää  $\rho_1$  enempää, vaikka hinta laskettaisiin nolnaan. Toisaalta kaupungissa on vedelle tietty vähimmäistarve. Vettä ostetaan melkein hinnalla millä hyvänsä, minkä vuoksi kysyntä laskee nolnaan hyvin hitaasti hinnan noustessa. Aina hintaan  $\frac{\rho_3}{\delta_3}$  saakka ostajia löytyy, mutta sitä korkeammilla hinnoilla kaikki veden käyttäjät joko hankkivat vetensä muualta tai ovat muuttaneet pois.

Periaatteessa yhtiönkin kannattaisi ostaa vettä maailmanmarkkinoilta tai myydä niille. Maailmanmarkkinat ovat kuitenkin erittäin vaikeat mallintaa, joten yksinkertaisuuden vuoksi ne jätetään pois laskuista olettamalla, että kuljetuskustannukset Timbuktuun ovat hyvin suuret.

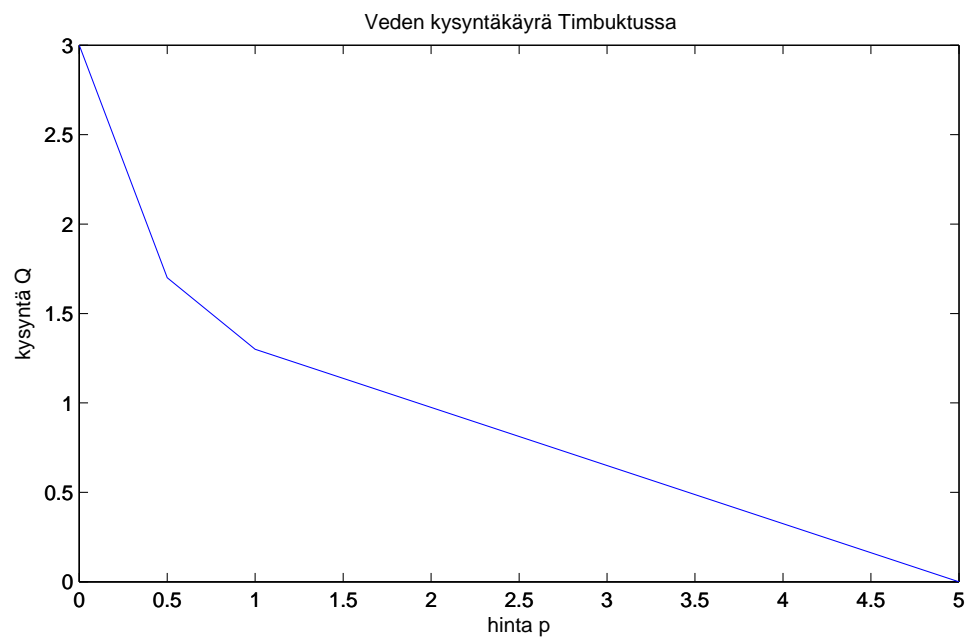
Veden korkeutta yhtiön kaivossa verrataan päivittäin kauempana sijaitsevan tutkimusaseman määrittämään luonnolliseen vedenkorkeuteen. Jos vettä nostetaan  $x(t)$  litraa päivänä  $t$ ,  $x(t) \leq \rho_1$  kaikilla  $t$ , niin tutkimusten mukaan kaivon vedenkorkeuden poikkeama vertailukorkeudesta noudattaa likimain differentiaaliyhtälöä

$$y'(t) = -\alpha y(t) - \beta x(t) + \gamma, \quad (7)$$

missä  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat kaivon kokoon ja ympäröivään maaperään liittyviä vakioita ja  $\gamma$  korjaustermi, jolla huomioidaan ennustettu vertailukorkeuden lasku

<sup>1</sup>Esimerkki on kokonaan tätä opinnäytetyötä varten keksitty. Tosielämän ongelmissa joudutaan huomioimaan vielä useampia yksityiskohtia kuin tässä, eikä puhtaan matemaattinen ratkaisutapa tule kyseeseen.

<sup>2</sup>Timbuktu on historiallinen kaupunki Saharan autiomaan etelälaidalla Malissa



Kuva 1: Veden kysyntäkäyrän muoto Timbuktussa. Kun hinta on alle indeksiarvon 1, vettä käytetään sitä tuhlaavaisemmin mitä alempi hinta on. Hinnan kallistuessa arvosta 1 laskee kysyntä melko hitaasti.

ilmastonmuutoksen takia. Nostetun veden määrä ei vaikuta vertailukorkeuteen merkittävästi. Alussa poikkeama on 0.

Malin valtio on säätänyt yhtiölle vesivarojen käyttöveron, jonka mukaan yhtiö maksaa  $\epsilon$  frangia päivässä jokaista metriä kohti, jonka kaivon vedenkorkeus keskimäärin sinä päivänä poikkeaa vertailukorkeudesta. Veron tarkoitus on pitää paikallinen pohjaveden korkeus sellaisella tasolla, etteivät ympäröivän maaseudun matalammat kaivot ehdy. Se myös motivoi yhtiötä tukemaan projekteja, joissa viljelijöille tajotaan vettä säästäviä kastelujärjestelmiä, etteivät heidän kaivonsa alentaisi yhtiön kaivon vedenkorkeutta.

Oletetaan, että muut yhtiön kulut ovat kiinteitä, eli nostetun veden määrä ei vaikuta niihin. Yhtiö haluaa selvittää optimaalisen liiketoimintastrategian, siis paljonko vettä pitäisi kunakin päivänä myydä ja mihin hintaan, jotta voitto olisi mahdollisimman suuri.

Muotoillaan ongelma säätöongelmaksi. Ensiksi todetaan, että vesilitran päivittäinen hinta  $p$  kannattaa valita niin suureksi, että haluttu määrä saadaan juuri ja juuri kaupaksi päivän aikana, toisin sanoen niin, että  $x = Q(p)$ . Silloin säädöksi riittää valita joko päivittäinen myynti  $x$  tai vesilitran hinta  $p$  - toinen riippuu toisesta menekifunktion kautta yksikäsitteisesti, koska  $Q(p)$  on bijektio välillä  $[0, \frac{\rho_3}{\delta_3}]$ , jolla se poikkeaa nolasta. Valitaan säätö  $u(t) = x(t)$  ja lasketaan hinnan lauseke,  $p(u)$  kääntämällä  $Q(p)$ .

$$p(u) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_3}(\rho_3 - q) & , q \in [0, q_1] \\ \frac{1}{\delta_2}(\rho_2 - q) & , q \in ]q_1, q_2] \\ \frac{1}{\delta_1}(\rho_1 - q) & , q \in ]q_2, \rho_1] \\ 0 & , q > \rho_1, \end{cases}$$

missä  $q_1 = \rho_2 - \delta_2 p_2$  ja  $q_2 = \rho_1 - \delta_1 p_1$ .

Säätöjoukko on nyt kompakti väli  $U = [0, \rho_1]$ ; korkeammat myyntimäärät voidaan unohtaa, koska niillä hinta on nolla, eikä myyntituottoa kerry lainkaan.

Päivästä päivään juokseva myyntituotto on nimittäin myyntimäärän ja hinnan tulo, josta on vähennetty vero (ja muut kulut, jotka kuitenkin tässä jätetään epäolennaisina huomiotta). Voiton maksimoinnin sijaan voidaan yhtä hyvin ajatella minimoitavan kustannuksia, jotka sisältävät myyntituoton ”negatiivisina kustannuksina”. Silloin päivittäiset kustannukset ovat myyntituoton vastaluku

$$\begin{aligned} r(y(t), u(t)) &= -(u(t)pu(t) - \epsilon|y(t)|) \\ &= -(u(t)\frac{1}{\delta_i}(\rho_i - u(t)) + \epsilon y(t)) \\ &= \frac{1}{\delta_i}u(t)^2 - \frac{\rho_i}{\delta_i}u(t) - \epsilon y(t), \end{aligned}$$

missä  $i = 1, 2$  tai  $3$  kulloisenkin myyntimäärän  $u$  mukaan. Kokonaiskustannukset kolmen vuoden aikana ovat tällöin integraali

$$C(u(t)) = \int_0^T r(y(t), u(t)) dt = \int_0^T \frac{1}{\delta_i} u(t)^2 - \frac{\rho_i}{\delta_i} u(t) - \epsilon y(t) dt,$$

indeksi  $i$  vaihdellen säädön  $u$  mukana<sup>3</sup>. Ajan yksikkönä käytetään päivää, joten integraalin yläraja on  $T = 3 \cdot 365 = 1095$ .

Viimein on saatu muotoiltua tehtävä matemaattisesti: on laskettava

$$\min_{u: [0, T] \rightarrow U} C(u(t))$$

missä säätö  $u$  valitaan kunakin päivänä  $t$  niiden mitallisten kuvausten joukosta, joiden maalijoukko  $U$  on väli  $[0, \rho_1]$ .

Tehtävä muistuttaa sidottuja ääriarvotehtäviä (ks. [12, luku 6]). Tiedetään, että jokaisena päivänä jatkuvalla funktiolla  $r(u) = r(y, u)$  on minimi suljetussa joukossa  $U$ . Voitaisiinko tehtävä ratkaista yksinkertaisesti laskeamalla ensiksi päivän yksi minimi, sitten laskemalla vedenkorkeuden muutos seuraavaan päivään, sitten laskemalla päivän kaksi minimi, ja niin edelleen? Kustannusfunktioista nähdään, että minimikohta on itse asiassa aina sama, olipa vedenkorkeus mikä hyvänsä. Onko optimiratkaisu siis vakiofunktio?

Osoittautuu, että näin ei ole, sillä vaikka minimikohta pysyy samana, minimiarvo kasvaa varsin nopeasti vakioratkaisulla. Tällainen ratkaisutapa ei otakaan huomioon, että vedenkorkeutta  $y$  optimoimalla voidaan pienentää *tulevia* kustannuksia. Järkevämpää olisi tarkastella säätöjen vaikutuksia mahdollisimman pitkälle tulevaisuuteen, tässä tapauksessa aina kolmivuotiskauden loppuun. Seuraavissa luvuissa löydetään keinot tähän.

## 2.3 Bolzan ongelma

Edellisessä esimerkissä muodostettiin jo funktio  $r$ , joka laski systeemin muuttujista  $y$  ja  $u$  vertailukelpoisen luvun, joka toimi ratkaisun paremmuuden mittarina. Optimiratkaisun löytämiseksi olisi pitänyt optimoida tämä hetkellinen mittari niin, että kustannuskertymä  $C$  koko ajanjakson yli olisi ollut mahdollisimman pieni, mutta taidot eivät tähän vielä riittäneet.

---

<sup>3</sup>Tässä yhteydessä voi herätä epäily integraalin olemassaolosta. Se kuitenkin seuraa säädön  $u(t)$  mitallisuudesta, joka tässä esimerkissä on selvää, sillä hinta oletettiin vakioksi kunakin päivänä.

Esimerkissä ei kannettu huolta siitä, mitä tapahtuu tarkastelujakson loputtua. Tosielämässä näin ei yleensä voida menetellä, vaan erityistä painoarvoa on annettava sille, mikä on systeemin lopullinen tila. Jos esimerkiksi teollisuusyritys investoi uusiin laitteisiin tarkastelujakson kuluessa, on lopussa otettava lukuun niiden silloinen arvo; laitteet voidaan lopuksi myydä, tai niitä voidaan käyttää itse vielä tulevaisuudessakin.

Seuraavaksi esitettävä *Bolzan ongelma* on matematiikan tarjoama apuväline, jolla tuon kaltaisten säätöongelmat voidaan kirjoittaa matemaattiseen muotoon. Bolzan ongelmaan on myös olemassa ratkaisumenetelmiä, joita tulevaisuudessa käsitellään. Aloitetaan kuitenkin peruskäsitteiden määrittelyllä.

**Määritelmä 2.3.1** Tutkitaan määrättyjä systeemin dynamiikkaa  $f(x, u)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  ja säätöjoukkoa  $U \subset \mathbb{R}^m$  aikavälillä  $[t_0, T]$ . Olkoon  $r : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$  integroituva funktio ja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Niiden määräämä säädön  $u$  kustannusfunktio on

$$C_{x,t}(u) = \int_t^T r(y(s), u(s)) ds + g(y(T)),$$

missä  $y$  on ratkaisukäyrä  $y(s) = y(s; x, t, u)$ . Funktiota  $r$  kutsutaan juokseviksi kustannuksiksi ja funktiota  $g$  loppukustannuksiksi.

**Määritelmä 2.3.2** *Säätöteorian Bolzan ongelma on laskea minimi*

$$\min_{u: [t_0, T] \rightarrow U} C_{x,t}(u)$$

**Huomautus 2.3.3** Monesti kustannusten minimoiminen ajatellaan käänteisesti *tuoton* maksimoimiseksi. Matematiikan kannalta ero on vain miinusmerkin mittainen, ja soveltajalta sen huomaaminen vaatii tarkkuutta. Säätöteorian kirjallisuudessa molempia näkökulmia esiintyy.

Bolzan ongelman ratkaisemiseksi ei ole yleistä kaavaa, jota kaikissa tilanteissa voitaisiin soveltaa. Esimerkiksi kustannusfunktioiden epäjatkuvuus voi estää koko minimin olemassaolon. Riittävien oletusten vallitessa voidaan kuitenkin todistaa, että Bolzan ongelmalla on ratkaisu.

Ennen olemassaololausetta on todistettava kaksi varsin teknistä apu-  
lostaa ratkaisukäyrien topologiasta.

**Lause 2.3.4** Tarkastellaan systeemiä (2), jonka dynamiikka  $f$  noudattaa oletusta 2.1.2 ja jossa säätöjoukko  $U$  on kompakti. Lisäksi oletetaan, että joukko

$$f(x, U) := \{a \in \mathbb{R}^n : \exists u \in U : a = f(x, u)\}$$

on konvekksi jokaisella  $x \in \mathbb{R}^n$ . Olkoon  $(x_k)_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}^n$  pistejono,  $(u_k : [t_0, t_1] \rightarrow U)_{k=1,2,\dots}$  funktiojono ja  $(y_k = y(t; t_0, x_k, u_k))_{k=1,2,\dots}$  niitä vastaava yhtälön (2) ratkaisukäyrien jono. Jos nämä käyrät ovat tasaisesti rajoitetut, niin on olemassa osajono  $(y_{k_h})$ , joka suppenee kohti jotakin käyrää  $\bar{y}$ , joka myös on systeemin ratkaisukäyrä.

*Todistus.* Olkoon  $(y_k)$  tasaisesti rajoitettu ratkaisukäyrien jono. Koska  $U$  on kompakti, on olemassa luku  $C = \max_{u \in U} |f(0, u)|$ . Toisaalta dynamiikan Lipschitz-oletuksen mukaan on olemassa sellainen luku  $K > 0$ , että

$$|f(x, u) - f(0, u)| \leq K|x|$$

kaikilla  $x \in \mathbb{R}^n$  ja  $u \in U$ . Kaikilla  $k$  on siis  $|y'_k| = |f(y_k, u_k)| \leq C + K|y_k|$ , ja niinpä tasaisesti rajoitetut jonon käyrät ovat myös tasaisesti Lipschitz-jatkuvia.

Topologiassa tunnetun Ascolin-Arzelan lauseen [9, s. 368] nojalla jonosta  $(y_k)$  voidaan valita osajono  $(\bar{y}_k)$ , joka suppenee tasaisesti kohti jotakin Lipschitz-jatkuvaa käyrää  $\bar{y} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Filippovin lemmän 2.1.6 nojalla tämä käyrä on systeemin ratkaisukäyrä, jos melkein kaikilla  $t \in [t_0, t_1]$

$$\bar{y}'(t) = f(\bar{y}(t), u)$$

edes jollakin  $u \in U$ , säädön aikakehityksestä piittaamatta. Osoitetaan, että tilanne on tällainen.

Tasaisesti rajoitettujen käyrien tasaisen suppenemisen rajakäyrä on tunnetusti rajoitettu, joten voidaan valita luku  $M_f$  niin, että  $|f(x, u)| \leq M_f$  kaikilla  $u$  ja kaikilla  $x$ , jotka ovat käyrän  $\bar{y}$  pisteitä. Silloin, Rademacherin lauseen nojalla,  $\bar{y}(t)$  on välillä  $[t_0, t_1]$  melkein kaikkialla differentioituva. Olkoon  $t$  eräs differentioituvuushetki. Valitaan  $\epsilon > 0$  ja määritellään

$$\mathcal{F}_\epsilon(x) := f(x, U) + B(0, \epsilon)$$

yhdisteenä niistä pisteistä  $a$ , jotka  $f$  jollakin säädöllä  $u$  kuvaa  $x$ :lle sekä niiden  $\epsilon$ -säteisistä palloympäristöistä. Oletuksen nojalla  $f(x, U)$  on konvekksi kaikilla

$x$ , joten myös  $\mathcal{F}_\epsilon(x)$  on konvekksi kaikilla  $x$ . Dynamiikan Lipschitz-oletuksesta saadaan nyt epäyhtälö

$$\begin{aligned} |f(y_k(s), u_k(s)) - f(\bar{y}(t), u_k(s))| &\leq K|y_k(s) - \bar{y}(t)| \\ &\leq K(|y_k(s) - y_k(t)| + |y_k(t) - \bar{y}(t)|) \\ &\leq K(M_f|s - t| + \|y_k - \bar{y}\|_\infty). \end{aligned}$$

Viemällä hetki  $s$  riittävän lähelle hetkeä  $t$  ja kasvattamalla indeksiä  $k$  saadaan tämä luku niin pieneksi, että  $f(y_k(s), u_k(s)) \in \mathcal{F}_\epsilon(\bar{y}(t))$ . Konveksissa joukossa voidaan väliarvolausetta soveltaen havaita, että

$$\frac{1}{s - t} \int_t^s f(y_k(r), u_k(r)) dr \in \mathcal{F}_\epsilon(\bar{y}(t)).$$

Toisaalta

$$\frac{1}{s - t} \int_t^s f(y_k(r), u_k(r)) dr = \frac{y_k(s) - y_k(t)}{s - t},$$

josta rajalla  $k \rightarrow \infty$  saadaan

$$\frac{\bar{y}(s) - \bar{y}(t)}{s - t} \in \mathcal{F}_\epsilon(\bar{y}(t))$$

ja rajalla  $s \rightarrow t$

$$y'(t) \in \mathcal{F}_\epsilon(\bar{y}(t)).$$

Koska  $\epsilon$  oli mielivaltainen, on oltava  $y'(t) \in f(\bar{y}(t), U)$ .  $\square$

Rajakäyrää vastaa siis jokin säätö. Seuraavassa lauseessa otetaan mukaan säätöjono ja selvitetään sen yhteys rajakäyrää vastaavaan säätöön. Lause kuitenkin vaatii tietyt oletukset Bolzan ongelman juoksevista kustannuksista:

**Oletus 2.3.5** *Jokaiselle  $R > 0$  on olemassa sellainen luku  $\gamma_R$ , että*

$$|r(x_2, u) - r(x_1, u)| \leq \gamma_R |x_2 - x_1|$$

*kaikilla  $x_1, x_2 \in B(0, R)$  ja  $u \in U$ .*

**Oletus 2.3.6** *Jokaiselle  $x \in \mathbb{R}^n$  joukko*

$$L(x) := \{(\lambda, v) \in \mathbb{R}^{n+1} | u \in U : v = f(x, u), \lambda \geq r(x, u)\}$$

*on konvekksi, eli kaikilla  $(\lambda_1, v_1), (\lambda_2, v_2) \in L(x)$  myös näitä pisteitä yhdistävä jana on joukon  $L(x)$  osajoukko.*



**Lause 2.3.7** *Olkooot oletukset (2.3.6) ja (2.3.5) voimassa, olkoon dynamiikasta oletus (2.1.2) voimassa ja olkoon säätöjoukko  $U$  kompakti. Olkoon  $(x_k)_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}^n$  pistejono,  $(u_k : [t_0, t_1] \rightarrow U)_{k=1,2,\dots}$  funktiojono ja  $(y_k = y(t; t_0, x_k, u_k))_{k=1,2,\dots}$  niitä vastaava yhtälön (2) ratkaisukäyrien jono. Jos nämä käyrät ovat tasaisesti rajoitetut, niin on olemassa osajono  $(y_k)$ , joka suppenee kohti sellaista säätöä  $\bar{u}$  vastaavaa ratkaisukäyrää  $\bar{y}$ , että epäyhtälö*

$$\int_{t_0}^{t_1} r(\bar{y}(t), \bar{u}(t)) dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} r(y_k(t), u_k(t)) dt \quad (8)$$

*on voimassa.*

*Todistus.* Oletetaan, että käyrät  $y_k$  ovat tasaisesti rajoitetut (dynamiikan Lipschitz-jatkuvuuden ja säätöjoukon kompaktiuden ansiosta näin on myös silloin, jos oletetaan vain ratkaisukäyrien alkupisteiden jono  $(x_k)$  rajoitetuksi). Ratkaisukäyrät siis sisältyvät johonkin palloon  $\bar{B}(0, R)$ ,  $R > 0$ .

Kuvaus  $r$  on jatkuva, joten se on kompaktissa joukossa  $\bar{B}(0, R) \times U$  rajoitettu. Valitaan sellainen luku  $M > 0$ , että  $r(x, u) \leq M$  kaikilla  $(x, u) \in \bar{B}(0, R) \times U$ , ja laajennetaan säätösystemiä liittämällä sekä dynamiikkaan että säätöön yksi dimensio lisää: tarkastellaan pisteitä  $\hat{x} = (x, x_0) \in \bar{B}^n(0, R) \times \mathbb{R}$ , säätöjä  $\hat{u} = (u, u_0) \in \hat{U} = U \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{m+1}$  ja dynamiikkaa

$$\hat{f}(\hat{x}, \hat{u}) = (f(x, u), Mu_0 + (1 - u_0)r(x, u)). \quad (9)$$

Merkitään  $\hat{f}(\hat{x}, \hat{U}) = \{\hat{f}(\hat{x}, \hat{u}) : \hat{u} \in U \times [0, 1]\}$  ja päätellään, että

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{x}, \hat{U}) &= \{(f(x, u), Mu_0 + (1 - u_0)r(x, u)) : u \in U, u_0 \in [0, 1]\} \\ &= \{(f(x, u), z) : u \in U, r(x, u) \leq z \leq M\} \\ &= \{(y, y_0) \in L(x) : y_0 \leq M\}. \end{aligned}$$

Oletuksen (2.3.6) mukaan joukko  $L(x)$  on konvekksi. Niinpä kahden konveksin joukon leikkaus  $\hat{f}(\hat{x}, \hat{U})$  on konvekksi.

Olkooot  $\hat{y}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  dynamiikan (9) määrittämän säätösystemin ratkaisukäyrät alkuehdoilla  $(x_k, 0)$  ja säädöillä  $(u_k, 0)$ . Kun juokseva kustannuskertymä alkuperäisiä  $\mathbb{R}^n$ :n ratkaisukäyriä pitkin merkitään

$$z_k(t) := \int_{t_0}^t r(y_k(s), u_k(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_1],$$

niin voidaan kirjoittaa  $\hat{y}_k = (y_k, z_k)$ .

Valitaan sellainen osajono  $(\hat{y}_h) \subset (y_k)$ , että

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_k(t_1) = \lim_{h \rightarrow \infty} \hat{y}_h(t_1).$$

Jonot  $(y_k)$  ja  $(z_k)$  ovat tasaisesti rajoitetut, joten jonoon  $(\hat{y}_h)$  voidaan soveltaa lausetta 2.3.4. Sen mukaan on olemassa käyrät  $\bar{y}$  ja  $\bar{z}$ , joita kohti jonojen  $(y_h)$  ja  $(z_h)$  eräät osajonot  $(y_g)$  ja  $(z_g)$  suppenevat tasaisesti välillä  $[t_0, t_1]$ . Lisäksi käyrä  $(\bar{y}, \bar{z})$  on systeemin

$$\begin{cases} y' &= f(y, u) \\ y'_0 &= u_0 M + (1 - u_0)r(y, u) \end{cases} \quad (10)$$

ratkaisukäyrä. On siis olemassa säädöt  $\bar{u} : [t_0, t_1] \rightarrow U$  ja  $\bar{u}_0 : [t_0, t_1] \rightarrow U$ , joilla

$$\begin{aligned} \bar{y}' &= f(\bar{y}, \bar{u}) \\ \bar{z}' &= \bar{u}_0 M + (1 - \bar{u}_0)r(\bar{y}, \bar{u}). \end{aligned}$$

Alemman yhtälön nojalla  $\bar{z}' \geq r(\bar{y}, \bar{u})$ . Siis

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} r(\bar{y}(t), \bar{u}(t))dt &\leq \int_{t_0}^{t_1} \bar{z}'(t)dt \\ &= \bar{z}(t_1) - \bar{z}(t_0) \\ &= \lim_{g \rightarrow \infty} [z_g(t_1) - z_g(t_0)] \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} [z_k(t_1) - z_k(t_0)] \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} r(y_k(t), u_k(t))dt. \end{aligned}$$

Lauseen väitteet on näin todistettu.  $\square$

Edellisten aputulosten avulla voidaan todistaa, että Bolzan ongelmalle on olemassa ratkaisu, olipa alkuehto mikä hyvänsä.

**Lause 2.3.8** (Olemassaololause.) *Lisätään edellisen lauseen oletuksiin vielä oletus, että loppukustannukset esittävä funktio  $g$  on jatkuva. Tällöin millä tahansa alkuehdolla  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]$  Bolzan ongelmalle on ratkaisu olemassa.*

*Todistus.* Valitaan mielivaltainen piste  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1[$  (hetki  $t_1$  on selvä, koska silloin kysymys on pelkästään jatkuvan funktion  $g$  minimoinnista joukossa, joka saadaan kuvaamalla kompaktia joukkoa  $U$  jatkuvilla kuvauksilla). Valitaan kaikista säädöistä  $u : [t, t_1] \rightarrow U$  jono  $(u_k)$  niin, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_{x,t}(u_k) = \inf_{u: [t, t_1] \rightarrow U} C_{x,t}(u). \quad (11)$$

Kaikilla käyrillä on yhteinen alkupiste  $x$ , ja Lemman 2.1.5 mukaan säätöjonoa  $(u_k)$  vastaava ratkaisukäyrien jono  $(y_k)$  on tasaisesti rajoitettu ajan käydessä  $t$ :stä  $t_1$ :een. Lauseen 2.3.7 nojalla käyräjonolla on osajono, joka suppenee tasaisesti kohti jotakin systeemin ratkaisukäyrää  $\bar{y} : [t, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , jolla

$$\int_t^{t_1} r(\bar{y}(s), \bar{u}(s)) ds \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_t^{t_1} r(y_k(s), u_k(s)) ds. \quad (12)$$

Tasainen suppeneminen edellyttää pisteittäistä suppenemistä, joten tämänkin käyrän alkupisteen on oltava  $(x, t)$ . Kun merkitään vastaavaa säätöä  $\bar{u}$ :lla, niin

$$\begin{aligned} C_{x,t}(\bar{u}) &= \int_t^{t_1} r(\bar{y}(s), \bar{u}(s)) ds + g(\bar{y}(t_1); x, t, \bar{u}) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_t^{t_1} r(y_k(s), u_k(s)) ds + \lim_{k \rightarrow \infty} g(y_k(t_1); x, t, u_k) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \int_t^{t_1} r(y_k(s), u_k(s)) ds + g(y_k(t_1); x, t, u_k) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} C_{x,t}(u_k) \\ &= \inf_{u: [t, t_1] \rightarrow U} C_{x,t}(u) \end{aligned}$$

yhtälön (11) perusteella, siis  $\bar{u}$  on optimaalinen säätö.  $\square$

On siis löydetty riittävät ehdot optimaalisen säädön olemassaololle. Välttämättä säätöjoukon  $U$  ei kuitenkaan tarvitse olla kompakti. Osoittautuu, että tällöinkin optimaalinen säätö voi olla olemassa - ainakin kun seuraavat oletukset täyttyvät:

**Oletus 2.3.9** *On olemassa sellainen luku  $K_0$ , että systeemin dynamiikka  $f$  noudattaa epäyhtälöä*

$$|f(x, u)| \leq K_0(1 + |x| + |u|) \quad (13)$$

*kaikilla  $x \in \mathbb{R}^n$  ja  $u \in U$ .*

**Oletus 2.3.10** *On olemassa sellainen funktio  $l : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  ja sellainen luku  $l_0 \leq 0$ , että*

$$\frac{l(t)}{t} \rightarrow +\infty,$$

*kun  $t \rightarrow +\infty$ , ja*

$$|r(x, u)| \geq l(|u|) - l_0 \tag{14}$$

*kaikilla  $x \in \mathbb{R}^n, u \in U$ .*

Näiden oletusten vallitessa voidaan lauseen 2.3.8 oletuksista poistaa säättöjoukon kompaktisuus [6, Seuraus 7.4.7].

## 2.4 Dynaaminen ohjelmointi

Bolzan ongelma on vain yksi ongelmatyyppi säättöteoriassa. Erilaista lähestymistapaa käytetään esimerkiksi lineaarisessa säädössä [3] tai säättöajan ollessa vapaa parametri [6, luku 8]. Siksi myös ratkaisumenetelmät optimaalisen säädön löytämiseksi ovat hyvin kirjavia. Yksi klassinen ratkaisumenetelmä, Richard Bellmanin 1950-luvun lopulla esittämä *dynaaminen ohjelmointi*, on kuitenkin oleellisenä perustana myöhemmin kehitetylle teorialle, jota raapastetaan syvemmin tulevilla luvuilla.

Ennen dynaamisen ohjelmoinnin periaatetta määritellään säättöteoriassa hyödyllinen *arvofunktion* (engl. *value function*) käsite Bolzan ongelman yhteyteen.

**Määritelmä 2.4.1** *Bolzan ongelman arvofunktio on funktio  $V : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$V(x, t) = \inf\{C_{x,t}(u) : u : [t, t_1] \rightarrow U \text{ on mitallinen}\}.$$

Arvofunktio kertoo suoraan, kuinka pienin kustannuksin systeemi optimaalisimmillaan voi selvitä aikavälin  $[t, t_1]$  aloitettaessa pisteestä  $x$ . Edellisessä luvussa haettiin riittäviä oletuksia sille, että optimaalinen ratkaisu on olemassa kaikille alkutilanteille  $(x, t)$ , ja näiden oletusten vallitessa arvofunktiokin on minimi eikä vain infimum.

Arvofunktio määriteltiin jokaiselle ajanhetkelle erikseen, mutta tuntuisi johdonmukaiselta, että aiempien ja myöhempien ajanhetkien välillä olisi jokin riippuvuus. Tähän riippuvuuteen dynaaminen ohjelmointi pohjautuu. Seuraavaksi todistettava *dynaamisen ohjelmoinnin periaate* kertoo, miten.

**Lause 2.4.2** (Dynaamisen ohjelmoinnin periaate.) *Olkoon*  $V : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  *Bolzan ongelman arvofunktio ja olkoon*  $(x, t_x) \in \mathbb{R}^n \times ]t_0, t_1[$ . *Tällöin kaikille*  $t \in [t_x, t_1]$  *pätee yhtälö*

$$V(x, t_x) = \inf_{u: [t_x, t] \rightarrow U} \left[ \int_{t_x}^t r(y(s), u(s)) ds + V(y(t), t) \right], \quad (15)$$

missä  $y(\cdot) = y(\cdot; x, t_x, u)$ .

*Todistus.* Valitaan mielivaltaisesti  $t \in [t_x, t_1]$ , mitallinen säätö  $u_1 : [t_x, t_1] \rightarrow U$  sekä  $\epsilon > 0$ . Merkitään  $x_1 = y(t; x, t_x, u_1)$ . Koska

$$V(x_1, t) = \inf_{u: [t_x, t_1] \rightarrow U} C_{x_1, t}(u),$$

niin on olemassa sellainen mitallinen säätö  $u_2 : [t_x, t_1] \rightarrow U$ , että

$$C_{x_1, t}(u_2) \leq V(x_1, t) + \epsilon. \quad (16)$$

Lyhyiden vuoksi käytetään säätöjä  $u_1$  ja  $u_2$  vastaaville ratkaisukäyrille merkintöjä  $y_1(\cdot) := y(\cdot; x, t_x, u_1)$  ja  $y_2(\cdot) := y(\cdot; x_1, t, u_2)$ . Määritellään ”yhdistetty” säätö  $w$

$$w(s) = \begin{cases} u_1(s) & s \in [t_x, t] \\ u_2(s) & s \in ]t, t_1]. \end{cases}$$

Silloin  $y(t_1; x, t_x, w) = y_2(t_1)$ . Arvofunktio toteuttaa nyt epäyhtälön

$$\begin{aligned} V(x, t_x) &\leq \int_{t_x}^{t_1} r(y(s; x, t_x, w), w(s)) ds + g(y(t_1; x, t_x, w)) \\ &= \int_{t_x}^t r(y_1(s), u_1(s)) ds + \int_t^{t_1} r(y_2(s), u_2(s)) ds + g(y_2(t_1)) \\ &= \int_{t_x}^t r(y_1(s), u_1(s)) ds + V(x_1, t) + \epsilon. \end{aligned}$$

Koska  $\epsilon$  ja  $u_1$  olivat mielivaltaisia, voidaan päätellä, että

$$V(x, t_x) \leq \inf_{u: [t_x, t] \rightarrow U} \int_{t_x}^t r(y(s), u(s)) ds + V(y(t), t), \quad (17)$$

missä  $y(\cdot) = y(\cdot; x, t_x, u)$ . Olkoon sitten  $u_3$  sellainen säätö, että

$$V(x, t_x) \geq C_{x, t_x}(u_3) - \epsilon \quad (18)$$

ja merkitään  $y_3(\cdot) = y(\cdot; x, t_x, u_3)$  ja  $x_3 = y_3(t)$ . Nyt

$$\begin{aligned} V(x_3, t) &\leq \int_t^{t_1} r(y_3(s), u_3(s))ds + g(y_3(t_1)) \\ &= C_{x, t_x}(u_3) - \int_{t_x}^t r(y_3(s), u_3(s))ds \\ &\leq V(x, t_x) + \epsilon - \int_{t_x}^t r(y_3(s), u_3(s))ds, \end{aligned}$$

josta jälleen  $\epsilon$ :n mielivaltaisuuden nojalla

$$\begin{aligned} V(x, t_x) &\geq \int_{t_x}^t r(y_3(s), u_3(s))ds + V(x_3, t) \\ &\geq \inf_{u: [t_x, t_1] \rightarrow U} \int_{t_x}^t r(y(s), u(s))ds + V(y(t), t), \end{aligned}$$

missä  $y(\cdot) = y(\cdot; x, t_x, u)$ . Tämä epäyhtälö ja epäyhtälö (17) todistavat väitteen.  $\square$

Dynaamisen ohjelmoinnin periaate on tärkeä, koska sen nojalla voidaan ratkaista ongelma ”pala kerrallaan”:

**Seuraus 2.4.3** *Olkoon  $(x, t_x) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]$ . Säättö  $u : [t, t_1] \rightarrow U$  on optimaalinen, jos ja vain jos kaikilla  $t \in [t_x, t_1]$*

$$V(x, t_x) = \int_{t_x}^t r(y(s), u(s))ds + V(y(t), t), \quad (19)$$

missä  $y(\cdot) = y(\cdot; x, t_x, u)$ .

## 2.5 Maksimiperiaate

Moniin Bolzan ongelman tyyppisiin säättöongelmiin soveltuu *Pontrjaginin maksimiperiaatteena* tunnettu klassinen ratkaisumenetelmä, jonka julkaisi venäläinen matemaatikko Lev Pontrjagin 1960-luvun alussa. Tässä luvussa maksimiperiaate esitetään ilman todistuksia (ne on esitetty esim. [6]:ssa), ja sitä sovelletaan luvun 2.2 esimerkkiin.

Aluksi määritellään kaksi yleistettyjen derivaattojen käsitettä.

**Määritelmä 2.5.1** Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$  avoin,  $w : A \rightarrow \mathbb{R}$  kuvaus ja  $x \in A$ . Joukkoa

$$D^+w(x) := \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \limsup_{y \rightarrow x} \frac{w(y) - w(x) - \langle p, y - x \rangle}{|y - x|} \leq 0 \right\}$$

kutsutaan kuvauksen  $w$  (Fréchet-) aladifferentiaaliksi  $x$ :ssä.

**Määritelmä 2.5.2** Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja  $v : A \times ]t_0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  kuvaus. Joukkoa

$$\nabla^+v(x, t) := \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + h, t) - v(x, t) - \langle p, h \rangle}{|h|} \leq 0 \right\}$$

kutsutaan kuvauksen  $v$  alaosittaisdifferentiaaliksi muuttujan  $x$  suhteen pisteessä  $(x, t)$ .

Vastaavasti määritellään ylädifferentiaali ja -osittaisdifferentiaali. Jos kuvaus sattuu olemaan differentioituva muuttujan  $x$  suhteen, niin ala- ja ylädifferentiaali ja -osittaisdifferentiaali ovat yhtä suuria kuin derivaatta tai osittaisderivaatta kussakin differentioituvuusasteessa.

Pontrjagin maksimiperiaatteen avaimena on *duaalikäyräksi* kutsuttu funktio, joka on tietyn alkuarvotehtävän ratkaisu:

**Määritelmä 2.5.3** Tarkastellaan säätösystemiä (2), jonka dynamiikkaa  $f$  koskee oletus 2.1.2 ja juoksevia kustannuksia  $r$  oletus 2.3.5. Oletetaan lisäksi, että osittaisderivaatat  $f_x$  ja  $r_x$  ovat olemassa ja jatkuvia  $x$ :n suhteen. Lopukustannusfunktio  $g$  oletetaan jatkuvaksi ja säätöjoukko  $U$  kompaktiksi.

Olkoon  $u : [t, T] \rightarrow U$  Bolzan ongelman optimaalinen säätö alkuehdolla  $x(t) = x \in \mathbb{R}^n$ , ja olkoon  $y : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y(\cdot) = y(\cdot; x, t, u)$  vastaava optimiratkaisukäyrä. Olkoon vielä vektori  $q \in D^+g(y(T))$ . Yhtälön (2) optimiratkaisun duaalikäyrä  $p : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  on alkuarvo-ongelman

$$\begin{cases} p'(s) &= -f_x(y(s), u(s)) \cdot p(s) - r_x(y(s), u(s)) & , \text{ m.k. } s \in [t, T] \\ p(T) &= q. \end{cases} \quad (20)$$

ratkaisu.

Duaalikäyrästä käytetään englanninkielisessä kirjallisuudessa myös termiä *co-state*. Oletus säättöjoukon kompaktiudesta voidaan poistaa, jos muuten taataan riittävät edellytykset optimaalisen säädön olemassaololle (ks. 2.3.9). Määritelmästä on syytä myös havaita, että duaalikäyrä ei välttämättä ole yksikäsitteinen, mikäli funktio  $g$  ei ole differentioituva  $y(T)$ :ssä. Seuraavaksi esitettävä maksimiperiaate on kuitenkin voimassa silloinkin.

**Lause 2.5.4** (Pontrjagin maksimiperiaate.) *Olkoot  $f, r, u, y$  ja  $p$  kuten määritelmässä 2.5.3 ja olkoon  $v \in U$ . Tällöin melkein kaikilla  $s \in [t, T]$  on voimassa epäyhtälö*

$$-f(y(s), u(s)) \cdot p(s) - r(y(s), u(s)) \geq -f(y(s), v) \cdot p(s) - r(y(s), v). \quad (21)$$

**Huomautus 2.5.5** Pontrjagin maksimiperiaatteen mukaan optimaalisen säädön löytämiseksi riittää maksimoida lauseke  $-f \cdot p - r$ . Tämä on monesti ilmaistu lyhyemmin käyttämällä Bolzan ongelman *Hamiltonin funktion* (engl. Hamiltonian) määritelmää  $H(x, u, p) = -f(x, u) \cdot p - r(x, u)$ .<sup>4</sup> Hamiltonin funktiosta puhutaan lisää luvussa 3.1, mutta tässä yhteydessä kannattaa huomata, että sen avulla voidaan muotoilla kaksi kätevää yhtälöä

$$y'(s) = -H_p(y(s), u(s), p(s)) \quad (22)$$

$$p'(s) = H_x(y(s), u(s), p(s)), \quad (23)$$

$s \in [t, T]$ . Yhtälöitä kutsutaan monesti *Hamiltonin yhtälöiksi*. Ensimmäinen niistä saadaan suoraan Hamiltonin funktion määritelmästä ja jälkimmäinen duaalikäyrän määritelmästä.

Pontrjagin maksimiperiaatteeseen liittyy olennaisesti myös seuraava inkluusio, joka luo yhteyden arvofunktioon.

**Lause 2.5.6** *Bolzan ongelman optimiratkaisun duaalikäyrälle on kaikilla  $s \in [t, T]$  voimassa inkluusio*

$$p(s) \in \nabla^+ V(y(s), s). \quad (24)$$

---

<sup>4</sup>Periaatteesta käytetään joskus myös nimitystä *minimiperiaate*, milloin minimoidaan Hamiltonin funktiota sellaisenaan.



Jälleen, jos arvofunkti on differentioituva, lauseen mukaan duaalikäyrä yhtyy sen gradienttivektoriin. Duaalikäyrä voidaan siis löytää seuraamalla arvofunktion gradienttia. Mutta kuinka löydetään arvofunkti? Siihen saadaan vastaus seuraavassa osiossa. Säättöteoriaosion päätökseksi valaistakoon kuitenkin esimerkin kautta Pontrjagin maksimiperiaatteen hyödyllisyyttä käytännön ongelmien ratkaisussa.

**Esimerkki.** Palautetaan mieleen luvun 2.2 esimerkki, jossa haluttiin maksimoida tuotto myytessä vettä kaivosta Timbukton asukkaille. Säättösystemi voitiin ilmoittaa muodossa

$$y'(t) = f(y, u) = -\alpha y(t) - \beta u(t) + \gamma,$$

missä  $\alpha, \beta$  ja  $\gamma$  ovat vakioita. Minimoitavaksi kustannusfunktionaaliksi saatiin

$$C_{0,0}(u(t)) = \int_0^T r(y(t), u(t)) dt = \int_0^T \frac{1}{\delta_i} u(t)^2 - \frac{\rho_i}{\delta_i} u(t) - \epsilon y(t) dt,$$

missä  $\epsilon$  on vakio ja  $\delta_i$  ja  $\rho_i$  ovat tunnettuja vakioita jokaisella  $i = 1, 2, 3$ .

Muodostetaan Hamiltonin funktio.

$$\begin{aligned} H(y, u, p) &= -f(y, u) \cdot p - r(y, u) \\ &= (\alpha y(t) + \beta u(t) - \gamma)p - \frac{1}{\delta_i} u(t)^2 + \frac{\rho_i}{\delta_i} u(t) + \epsilon y(t). \end{aligned}$$

Duaalikäyrä  $p(t)$  saadaan differentiaaliyhtälöstä (ks. (23), huomautus 2.5.5)

$$\begin{aligned} p'(t) &= H_y(y(t), u(t), p(t)) \\ &= \alpha p(t) + \epsilon \\ \Rightarrow p(t) &= D e^{\alpha t} - \frac{\epsilon}{\alpha}, \end{aligned}$$

missä  $D$  on vakio. Koska  $g \equiv 0$ , niin alidifferentiaali  $D^+g(y(T)) = 0$ , joten lauseen 2.5.6 nojalla  $p(T) = 0$ , siis

$$\begin{aligned} D e^{\alpha T} - \frac{\epsilon}{\alpha} &= 0 \\ \Rightarrow D &= \frac{\epsilon}{\alpha} e^{-\alpha T}. \end{aligned}$$

Näin ollaan saatu duaalikäyrälle lauseke

$$p(t) = \frac{\epsilon}{\alpha} (e^{\alpha(t-T)} - 1).$$

Sovelletaan sitten maksimiperiaatetta optimaalisen säädön määrittämiseksi. Jos  $\bar{u}$  on optimaalinen säätö ja  $\bar{y}$  sitä vastaava ratkaisukäyrä, niin

$$\begin{aligned} H(\bar{y}, \bar{u}, p) &= \max_{u: [0, T] \rightarrow [0, \rho_1]} H(y, u, p) \\ &= \max_{u: [0, t] \rightarrow [0, \rho_1]} \left[ -\frac{1}{\delta_i} u(t)^2 + (\beta p(t) + \frac{\rho_i}{\delta_i}) u(t) + p(t)(\alpha y(t) - \gamma) + \epsilon y(t) \right]. \end{aligned}$$

Maksimi löytyy joko käyrän kärkipisteistä  $u(t) \in 0, s_1, s_2, \rho_1$  tai Hamiltonin funktion derivaatan nollakohdista

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2}(\rho_i + \delta_i \beta p(t)) \\ &= \frac{1}{2}(\rho_i + \delta_i \epsilon \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha(t-T)} - 1)), \end{aligned}$$

mikäli ne sattuvat oikealle välille.

Jos kysyntä on kuvan 1 mallinen, niin maksimi saavutetaan kohdassa

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2}(\rho_3 + \delta_3 \epsilon \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha(t-T)} - 1)).$$

Tällä säädöllä vedenkorkeus ajan funktiona on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \bar{y}'(t) &= -\alpha \bar{y}(t) - \beta \bar{u}(t) + \gamma \\ \bar{y}(0) &= 0 \end{cases}$$

ratkaisu

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{4\alpha^2} \left[ (2\beta\rho_3\alpha + (e^{-\alpha T} - 2)\delta_3\epsilon\beta^2 - 4\gamma\alpha)e^{-\alpha t} - \delta_3\epsilon\beta^2 e^{\alpha(t-T)} + \Sigma \right]$$

missä  $\Sigma$  on vakio

$$\Sigma = -2\beta\delta_3\alpha + 2\delta_3\epsilon\beta^2 + 4\gamma\alpha.$$

## 3 Hamilton-Jacobi-yhtälöt

### 3.1 Karakterististen käyrien menetelmä

Edellisessä luvussa 2.5 Pontrjaginin maksimiperiaatteen yhteydessä esiintyi Hamiltonin funktio  $H$ . Tässä luvussa Hamiltonin funktio on yleistys, jonka avulla tutkitaan kerralla monta erilaista ongelmaa. Sille ei siten tarvita eksplisiittistä määritelmää. Aluksi kuitenkin määritellään Hamilton-Jacobi-yhtälöt.

**Määritelmä 3.1.1** *Olkoon  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  kahdesti jatkuvasti differentioituva funktio. Muotoa*

$$\partial_t u(x, t) + H(x, u(x, t), \nabla u(x, t), t) = 0 \quad (25)$$

*olevat ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöt ovat Hamilton-Jacobi-yhtälöitä muuttujan  $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  suhteen.*

Gradientti  $\nabla u$  kuvaa funktion  $u$  osittaisderivaattaa *tila-argumentin*  $x$  suhteen. Sitä voidaan merkitä myös alaindeksin avulla muodossa  $u_x$ . Samoin *aikaderivaatalle*  $\partial_t u$  käytetään monesti merkintää  $u_t$ .

Tyypillisesti Hamilton-Jacobi-yhtälöitä tarkastellaan osana alkuarvo-ongelmaa

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + H(x, u(x, t), \nabla u(x, t), t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (26)$$

missä  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

Ongelman (26) eräs klassinen ratkaisutapa on niin sanottu *karakterististen käyrien menetelmä*. Esitellään se ongelmalle, jonka Hamiltonin funktio  $H$  ei riipu parametrissa  $u$  suoraan, vaan ainoastaan sen gradientista:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + H(x, \nabla u(x, t), t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (27)$$

$u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Määritelmä 3.1.2** *Hamilton-Jacobi-yhtälön (27) ratkaisuun  $u$  liittyvä karakteristinen käyrä on kuvaus  $t \mapsto (X(t; z), t)$ , missä  $X(\cdot, z)$  on yhtälön*

$$\begin{aligned} \dot{X} &= H_p(X, \nabla u(X, t), t), \\ X(0) &= z \end{aligned} \quad (28)$$

ratkaisu (alaindeksi  $p$  merkitsee tässä differentiointia keskimmäisen argumentin suhteen).

**Huomautus 3.1.3** Karakteristisen käyrän määritelmä edellyttää Hamilton-Jacobi-yhtälön ratkaisun olemassaoloa. Ratkaisun ei kuitenkaan tarvitse olla yksikäsitteinen, jolloin myöskään karakteristinen käyrä ei ole yksikäsitteinen.

Karakterististen käyrien menetelmä Hamilton-Jacobi-yhtälön ratkaisemiseksi perustuu seuraavaan päättelyyn. Oletetaan, että ratkaisu  $u$  on olemassa ja määritellään

$$\begin{aligned} U(t; z) &:= u(X(t; z), t), \\ P(t; z) &:= \nabla u(X(t; z), t). \end{aligned}$$

Kun näin määritellyt käyrät  $U$  ja  $P$  differentioidaan ajan  $t$  suhteen, saadaan

$$\begin{aligned} \dot{U} &= u_t(X, t) + \nabla u(X, t) \cdot \dot{X} \\ &= -H(X, P, t) + P \cdot H_p(X, P, t) \end{aligned}$$

ja

$$\dot{P} = \nabla u_t(X, t) + \nabla^2 u(X, t) \cdot H_p(X, \nabla u(X, t), t).$$

Laskemalla puolittain gradientit Hamilton-Jacobi-yhtälöstä (27) saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla u_t(x, t) + \nabla H(x, \nabla u(x, t), t) \\ &= \nabla u_t(x, t) + H_x(x, \nabla u(x, t), t) + \nabla^2 u(x, t) \cdot H_p(x, \nabla u(x, t), t). \end{aligned}$$

Havaitaan, että oikean puolen lausekkeen ensimmäinen ja viimeinen termi muodostavat  $\dot{P}$ :n lausekkeen. Siis

$$\dot{P} = -H_x(X, P, t). \quad (29)$$

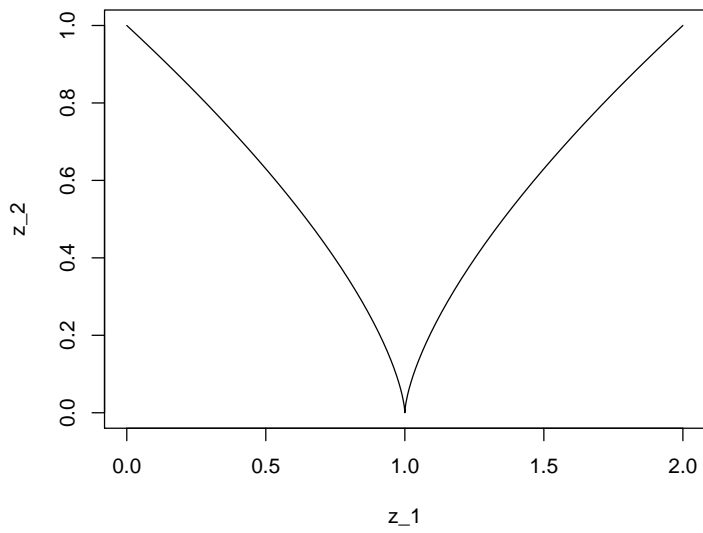
Nyt pari  $X, P$  ratkaisee tavallisten differentiaaliyhtälöiden systeemin

$$\begin{aligned} \dot{X} &= H_p(X, P, t), & X(0) &= z, \\ \dot{P} &= -H_x(X, P, t), & P(0) &= \nabla u_0(z) \end{aligned} \quad (30)$$

ja  $U$  toteuttaa yhtälön

$$\dot{U} = -H(X, P, t) + P \cdot H_p(X, P, t) \quad (31)$$

alkuarvolla  $U(0; z) = u_0(z)$ . Hamilton-Jacobi-yhtälön (27) ratkaisu  $u$  voidaan siis periaatteessa määrittää ratkaisemalla  $X$  ja  $P$  yhtälöiden (30) avulla ja sen jälkeen ratkaisemalla  $U$  yhtälöstä (31). Tämä muotoillaan lauseeksi seuraavassa luvussa stationaaristen yhtälöiden erikoistapauksessa. Yleisempi tulos on esimerkiksi teoksessa [6, s. 99].



Kuva 2: Karakteristinen käyrä  $X(t)$ , jolla ei ole pisteessä  $(1, 0)$  käännekuvausta.

**Huomautus 3.1.4** Karakterististen käyrien menetelmässä on olennaista, että karakteristisella käyrällä  $X(t)$  on käänteiskuvaus. Esimerkiksi kuvan 2 käyrällä on pisteessä  $(1, 0)$  niin sanottu kärkipiste, jossa gradientti häviää. Niinpä esimerkiksi alkuehdolla  $X(0) = (0, 1)$  ei Hamilton-Jacobi-yhtälöllä ole ratkaisua sitä ajanhetkeä pitemmälle, jolloin käyrä saavuttaa pisteen  $(1, 0)$ . Myöskään alkuehdolla  $X(0) = (1, 0)$  ei ratkaisua ole.

## 3.2 Stationaariset yhtälöt

Tutkitaan sitten toisen tyyppisiä erikoistapauksia Hamilton-Jacobi-yhtälöistä (26), nimittäin ajasta riippumattomia *stationaarisia* ongelmia. Olkoon  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olkoon  $\Gamma \subset \partial\Omega$  reunaton  $C^2$ -pinta, jonka dimensio on  $n - 1$ . Myös tutkittava Hamiltonin funktio oletetaan kahdesti jatkuvasti differentioituvaksi,  $H \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ . Lisäksi olkoon  $g \in C^2(\bar{\Omega})$  tunnettu funktio. On ratkaistava  $u$ , joka toteuttaa yhtälöt

$$\begin{cases} H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (32)$$

Karakterististen käyrien menetelmä ongelmalle (32) mukailee edellä esitettyä päättelyä. Ongelman topologia on kuitenkin monimutkaisempi, ja siten myös ratkaisu näyttää mutkikkaammalta.

Olkoon jälleen  $z \in \Gamma$  mielivaltainen. Olkoon  $\nu(z)$  pinnan  $\Gamma$  yksikkönormaali pisteessä  $z$ . Koska ratkaisun  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  on toteutettava yhtälö  $u = g$  koko joukossa  $\Gamma$ , voivat funktioiden  $u$  ja  $g$  derivaatat poiketa toisistaan vain pinnan normaalin suunnassa:

$$\nabla u(z) = \nabla g(z) + \lambda \nu(z) \quad (33)$$

jollakin  $\lambda = \lambda(z) \in \mathbb{R}$ . Hamilton-Jacobi-yhtälön (32) nojalla luvun  $\lambda$  täytyy kuulua joukkoon

$$\Lambda(z) := \{\lambda \in \mathbb{R} : H(z, g(z), \nabla g(z) + \lambda \nu(z)) = 0\}.$$

Muodostetaan jälleen karakteristinen käyrä  $X(\cdot; z)$  yhtälön

$$\dot{X} = H_p(X, u(X), \nabla u(X)), \quad X(0; z) = z \quad (34)$$

ratkaisuna (alaindeksi  $p$  viittaa nyt differentioimiseen viimeisen argumentin  $\nabla u$  suhteen). Asetetaan lisäksi

$$\begin{aligned} U(t; z) &:= u(X(t; z)), \\ P(t; z) &:= \nabla u(X(t; z)). \end{aligned}$$

Seuraava lemma tarjoaa systeemin, josta ratkaisu  $u$  voidaan karakterististen käyrien menetelmällä selvittää.

**Lemma 3.2.1** *Olkoon  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  yhtälön (32) ratkaisu ja olkoon  $z \in \Gamma$ . Kun  $X, U$  ja  $P$  määritellään kuten edellä, niin on olemassa sellainen  $\lambda \in \Lambda(z)$ , että*

$$\begin{cases} \dot{X} = H_p(X, U, P) & , X(0) = z \\ \dot{U} = P \cdot H_p(X, U, P) & , U(0) = g(z) \\ \dot{P} = -H_x(X, U, P) - P \cdot H_u(X, U, P) & , P(0) = \nabla g(z) + \lambda \nu(z). \end{cases} \quad (35)$$

*Todistus.* Ensimmäinen yhtälö on karakteristisen käyrän määritelmässä selaisenaan. Toinen yhtälö saadaan suoraan differentioimalla  $u(X(\cdot))$  ja alkuehto päättelystä  $u(X(0; z)) = u(z) = g(z)$ . Kolmas yhtälö voidaan johtaa differentioimalla Hamilton-Jacobi-yhtälö

$$\begin{aligned} 0 &= DH(X, u(X), \nabla u(X)) \\ &= H_x(X, u(X), \nabla u(X)) + H_u(X, u(X), \nabla u(X)) \cdot \nabla u(X) \\ &\quad + H_p(X, u(X), \nabla u(X)) \cdot \nabla^2 u(X) \\ &= H_x(X, U, P) + P \cdot H_u(X, U, P) + \dot{P} \cdot H_p(X, U, P), \end{aligned}$$

alkuehto puolestaan tulee yhtälöstä (33).  $\square$

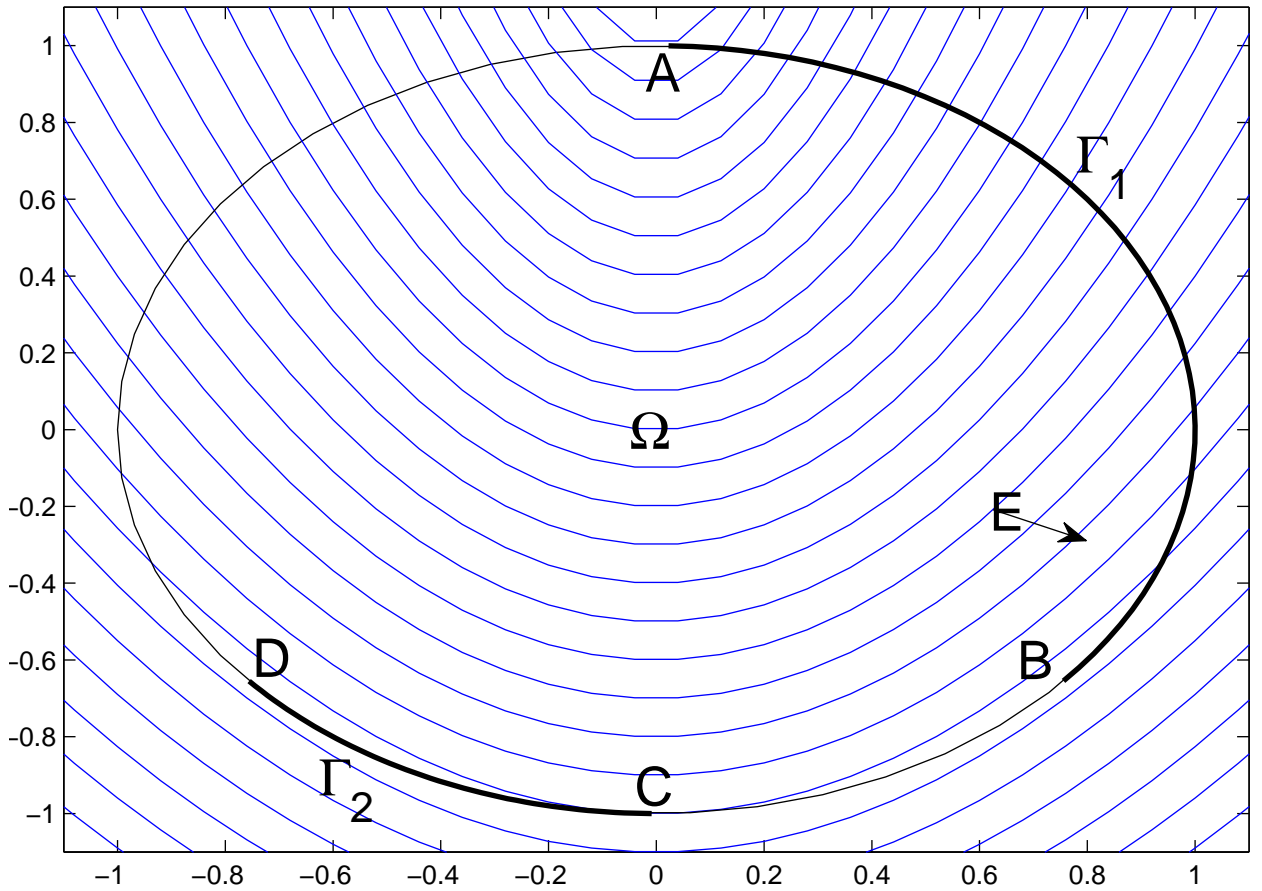
**Määritelmä 3.2.2** *Systeemi (35) on stationaarisen Hamilton-Jacobi-yhtälön (32) karakteristinen systeemi. Vektori  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  on yhtälön karakteristinen vektori pisteessä  $z_0 \in \Gamma$ , jos*

$$H_p(z_0, g(z_0), p_0) \cdot \nu(z_0) = 0 \quad (36)$$

Käytetään merkintää  $\Lambda^*(z_0)$  joukon  $\Lambda(z_0)$  osajoukosta, jonka alkiolla  $\lambda \in \Lambda^*(z_0)$  vektori

$$\nabla g(z_0) + \lambda \nu(z_0) \quad (37)$$

ei ole karakteristinen pisteessä  $z_0$ .



Kuva 3: Esimerkkejä karakteristisista käyristä  $\mathbb{R}^2$ -avaruudessa.

**Lause 3.2.3**  $\Lambda^*(z_0)$  on diskreetti joukko.

*Todistus.* Tarkastellaan kuvausta  $f(\lambda) = H(z_0, g(z_0), \nabla g(z_0) + \lambda\nu(z_0))$ . Kun  $\lambda \in \Lambda^*(z_0)$ , niin  $f(\lambda) = 0$  (koska  $\lambda \in \Lambda(z_0)$ ), mutta  $f'(\lambda) \neq 0$  koska vektori (37) ei ole karakteristinen. Koska funktiot  $H$  ja  $g$  ovat kahdesti jatkuvasti derivoituvia, on Bolzanon lauseen nojalla olemassa sellainen  $r > 0$ , että  $\lambda$  on funktion  $f$  ainut nollakohta välillä  $]\lambda - r, \lambda + r[$ . Siis kaikki joukon  $\Lambda^*(z_0)$  alkioit ovat erillisiä pisteitä, toisin sanoen  $\Lambda^*(z_0)$  on diskreetti joukko.  $\square$

**Esimerkki.** Kuvassa 3 on karakteristisia käyriä lineaarisessa tapauksessa,  $H_p(x, u, p) = b(x)$ . Käyrät leikkaavat yksikköympyrän kehää avaruudessa  $\mathbb{R}^2$ .



Joukko  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  on se osa yksikköympyrästä, jossa

$$b(z) \cdot \nu(z) < 0.$$

Tässä tapauksessa millä tahansa  $z \in \Gamma$  Hamilton-Jacobi-yhtälön (32) ratkaisun  $u(x)$  tasa-arvokäyrät myötäilevät karakteristisia käyriä.

Pisteissä A, B, C ja D  $b(z) \cdot \nu(z) = 0$ , mikä tarkoittaa, että näissä pisteissä  $\Lambda^*(z) = \emptyset$  eikä ole olemassa lokaalia ratkaisua  $u$ , joka ulottuisi joukkoon  $\Omega$ . Huomattava kuitenkin on, että ympyräkehällä pisteestä  $E$  alkava karakteristinen käyrä sivuaa joukon  $\Omega$  reunaa pisteessä  $C$  joukon  $\Omega$  sisäpuolelta. Tällöin ratkaisufunktio  $u$  on epäjatkuva, mikäli  $g(E) \neq g(C)$ .

**Lause 3.2.4** *Olkkoon  $\mu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  sellainen jatkuva funktio, että  $\mu(z) \in \Lambda^*(z)$  kaikilla  $z \in \Gamma$ . Tällöin on olemassa joukon  $\Gamma$  ympäristö  $\Gamma' \subset \Omega$  ja joukossa  $\Gamma'$  Hamilton-Jacobi-yhtälön (32) yksikäsitteinen  $C^2$ -ratkaisu  $u$ , joka toteuttaa yhtälön*

$$\nabla u(z) = \nabla g(z) + \mu(z)\nu(z) \quad (38)$$

kaikilla  $z \in \Gamma$ .

*Todistus.* [6][s. 102].

**Esimerkki.** Geometrisessa optiikassa ja akustiikassa sovellettava *eikonaali-yhtälö* on Hamilton-Jacobi-yhtälö, jonka Hamiltonin funktio  $H$  on

$$H(\nabla u(x)) = |\nabla u(x)|^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Tutkitaan eikonaaliyhtälöä

$$|\nabla u(x)|^2 - 1 = 0 \quad (39)$$

$\mathbb{R}^n$ :n yksikköpallossa,  $\Omega = \bar{B}^n(0, 1)$ , jonka reunalla  $\Gamma := \{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$  on voimassa yhtälö

$$u(z) = 0. \quad (40)$$

Jotta yhtälö (39) olisi voimassa, täytyy olla

$$|\nabla u(z)| = 1,$$

erityisesti kaikilla  $z : |z| = 1$ . Koska reunaehdon (40) funktio  $g$  on vakiofunktio  $g \equiv 0$ , on ratkaisun  $u$  derivaatan oltava reunalla reunan normaalin suuntainen. Niinpä

$$\Lambda(z) = \Lambda^*(z) = \{-1, +1\}$$

kaikilla  $z \in \Gamma$ . Näitä vastaavat karakteristiset käyrät saadaan nyt laskettua systeemistä

$$\begin{cases} \dot{X}(t; z) = \pm 2P(t; z) & , X(0; z) = z \\ \dot{U}(t; z) = \pm P(t; z) \cdot 2P(t; z) & , U(0; z) = 0 \\ \dot{P}(t; z) = 0 & , P(0; z) = \pm \nu(z) = \pm z. \end{cases}$$

Käyriksi saadaan

$$\begin{cases} X(t; z) = (1 \pm 2t)z \\ U(t; z) = 2|z|^2 t = 2t \\ P(t; z) = \pm z. \end{cases}$$

Käyrät  $X$  kääntämällä (ehdolla  $1 \pm 2t > 0$ ) saadaan

$$z(x) = \frac{x}{|x|}$$

ja

$$t(x) = \pm \frac{|x| - 1}{2}.$$

Niinpä on löydetty kaksi vaihtoehtoista ratkaisua

$$u(x) = U(t(x); z(x)) = 2t(x) = \pm(|x| - 1).$$

Lokaaleja Hamilton-Jacobi-yhtälön ratkaisuja on monesti siis mahdollista löytää karakterististen käyrien menetelmällä, ja yhtälön ja tutkittavan joukon ollessa riittävän siistit kelpaavat ratkaisut globaalistikin. Jotkin joukon pisteet voivat kuitenkin jäädä edelleen vaille yksikäsitteistä ratkaisua; karakteristiset käyrät saattavat leikata toisensa. Edellisessä esimerkissä origo oli tällainen piste.

Nykyaikaisemmat menetelmät Hamilton-Jacobi-yhtälöiden ratkaisemiseksi yleistävät *ratkaisun* käsitettä niin, että useammin saadaan globaalisti yksikäsitteisiä niin sanottuja *heikkoja ratkaisuja*. Eräs näistä menetelmistä esitellään seuraavassa luvussa.

### 3.3 Viskositeettiratkaisut

Palataan stationaarisista Hamilton-Jacobi-yhtälöistä ajasta riippuviin, määritelmän 3.1.1 mukaisesti Hamilton-Jacobi-yhtälöihin. Ne ovat stationaarisia yhtälöjä keskeisempiä monessa sovelluskohteessa, kuten säätöteoriassa,

vaikkakin monesti määritelmää 3.1.1 suppeampikin määrittely on riittävä. Luvussa 3.4 esimerkiksi tutkitaan erikoistapauksia, jotka ovat muotoa

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + H(x, \nabla u(x, t)) &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{cases} \quad (41)$$

Tämä luku aloitetaan kuitenkin Hamilton-Jacobi-yhtälön viskositeettiratkaisun yleispätevällä määritelmällä.

**Määritelmä 3.3.1** *Funktio  $u \in C(\Omega \times [0, \infty[)$  on alkuarvo-ongelman (26) viskositeettialaratkaisu, mikäli  $u(x, 0) = u_0(x)$  ja kaikki funktiot  $v \in C^\infty(\Omega \times ]0, \infty[)$  noudattavat implikaatiota*

$$\begin{aligned} &\text{jos funktiolla } u - v \text{ on lokaali maksimi pisteessä } (x, t) \in \Omega \times ]0, \infty[, \\ &\text{niin silloin } \partial_t v(x, t) + H(x, v(x, t), \nabla v(x, t), t) \leq 0. \end{aligned}$$

*Vastaavasti funktio  $u \in C(\Omega \times [0, \infty[)$  on yhtälön (41) viskositeettiyläratkaisu, mikäli  $u(x, 0) = u_0(x)$  ja kaikki funktiot  $v \in C^\infty(\Omega \times ]0, \infty[)$  noudattavat implikaatiota*

$$\begin{aligned} &\text{jos funktiolla } u - v \text{ on lokaali minimi pisteessä } (x, t) \in \Omega \times ]0, \infty[, \\ &\text{niin silloin } \partial_t v(x, t) + H(x, v(x, t), \nabla v(x, t), t) \geq 0. \end{aligned}$$

*Funktio, joka on saman yhtälön viskositeettiala- ja viskositeettiyläratkaisu, on yhtälön viskositeettiratkaisu.*

Määritelmä voidaan yhtäpitävästi muodostaa myös ala- ja ylädifferentiaalimääritelmiä ja käyttäen. Osoittautuu esimerkiksi, että  $u$  on viskositeettialaratkaisu täsmälleen silloin, kun kaikille  $x \in \Omega$  epäyhtälö

$$p_t + H(x, p_x) \leq 0 \quad (42)$$

on voimassa kaikilla  $(p_t, p_x) \in D^+u(x, t)$  [6, Lause 3.1.7 c]. Viskositeettiyläratkaisu määrittyy vastaavasti ylädifferentiaalimäärittelyllä avulla käänteisen epäyhtälön kautta.

Pisteissä, joissa  $u$  on differentioituva, sekä ala- että ylädifferentiaali sisältävät vain funktion derivaatan. Niinpä myös viskositeettiratkaisu on tällöin yhtäpitävä klassisen ratkaisun kanssa.

Viskositeettiratkaisujen löytämiseksi eräs tunnetuimmista menetelmistä on niin sanottu *häviävän viskositeetin menetelmä* (engl. *vanishing viscosity*). Menetelmä perustuu seuraavaan tulokseen.

**Lause 3.3.2** Olkoon  $\epsilon_k \subset ]0, \infty[$  jono, joka suppenee kohti raja-arvoa 0, ja olkoon  $u_k \in C^2(\Omega \times [0, \infty[)$  yhtälön

$$\partial_t u_k(x) + H(x, u_k(x), \nabla u_k(x)) = \epsilon_k \Delta u_k(x), \quad x \in \Omega \quad (43)$$

ratkaisu. Jos funktiojono  $(u_k)$  suppenee lokaalisti tasaisesti kohti rajafunktiota  $u$ , niin  $u$  on Hamilton-Jacobi-yhtälön (25) viskositeettiratkaisu.

*Todistus.* [7, s. 38 (Lause VI.1)].

Lause 3.3.2 ei takaa, että kaikille Hamilton-Jacobi-yhtälöille viskositeettiratkaisu olisi olemassa, tai että mahdollinen ratkaisu olisi yksikäsitteinen. Muutamin oletuksin olemassaolo voidaan todistaa (ks. esim. [14], luku 8). Yksikäsitteisyys puolestaan voidaan johtaa seuraavaksi esitettävän *vertailuperiaatteen* avulla.

**Lause 3.3.3** (Vertailuperiaate.) Olkoon  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva siten, että epäyhtälö

$$|H(x, p) - H(x, q)| \leq K(|x| + 1)|p - q| \quad (44)$$

on jollakin  $K > 0$  voimassa kaikilla  $x, p, q \in \mathbb{R}^n$ . Oletetaan lisäksi, että kaikille  $R > 0$  on olemassa sellainen jatkuva ja kasvava kuvaus  $\omega_R : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ , että  $\omega_R(0) = 0$  ja epäyhtälö

$$|H(x, p) - H(y, p)| \leq \omega_R(|x - y|) + \omega_R(|x - y||p|) \quad (45)$$

on voimassa kaikilla  $x, y \in B(0, R)$  ja  $p \in \mathbb{R}^n$ . Jos  $u_1$  on Hamilton-Jacobi-yhtälön (41) viskositeettialaratkaisu joukossa  $\mathbb{R}^n \times ]0, T[$  ja  $u_2$  vastaava viskositeettiyläratkaisu ja jos kaikilla  $x \in \mathbb{R}^n$

$$u_1(x, 0) \leq u_2(x, 0),$$

niin

$$u_1 \leq u_2$$

kaikkiällä joukossa  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

*Todistus.* [4, osa III, Lause 3.15 ja Huomautus 3.18]

**Huomautus 3.3.4** Vertailuperiaate todistaa käytännössä, että Hamilton-Jacobi-yhtälön viskositeettiratkaisu on yksikäsitteinen. Jos nimittäin  $\acute{u}$  ja  $\grave{u}$  ovat saman Hamilton-Jacobi-yhtälön viskositeettiratkaisuja, ne ovat sekä viskositeettiyläratkaisuja ja viskositeettialaratkaisuja. Vertailuperiaatteen nojalla yhtäältä  $\acute{u} \leq \grave{u}$ , toisaalta  $\grave{u} \leq \acute{u}$ . Kyseessä on siis sama ratkaisu.

### 3.4 Hamilton-Jacobi-yhtälöt ja säätöteoria

Otetaan vielä kerran tarkasteluun luvun 2.3 Bolzan ongelma. Siinä etsittiin *optimaalista säätöä*  $u$ , jolla *kustannusfunktionaali*

$$C_{x,t}(u) = \int_t^T r(y(s), u(s)) ds + g(y(T))$$

olisi pienin mahdollinen. Ongelman ratkaisuksi löytyi *Pontrjagin maksimi-periaate* (luku 2.5), jonka mukaan optimaalinen säätö  $u$  on se säätö, joka maksimoi Bolzan ongelman *Hamiltonin funktion*

$$H(x, u, p) = -f(x, u) \cdot p - r(x, u).$$

Se voitiin löytää ratkaisemalla *Hamiltonin yhtälöt*

$$y'(s) = -H_p(y(s), u(s), p(s)) \quad (46)$$

$$p'(s) = H_x(y(s), u(s), p(s)). \quad (47)$$

Lisäksi Bolzan ongelman *arvofunktio*

$$V(x, t) = \inf\{C_{x,t}(u) : u : [t, T] \rightarrow U \text{ on mitallinen}\}$$

kytkeytyi duaalikäyrään  $p$  inklusion

$$p(s) \in \nabla^+ V(y(s), s) \quad (48)$$

kautta.

Luvussa 3.2 tehtiin jotakin hyvin samankaltaista ratkaistaessa stationaarisia Hamilton-Jacobi-yhtälöitä karakterististen käyrien menetelmällä. Onko säätöteorialla jonkinlainen yhteys Hamilton-Jacobi-yhtälöihin?

Yhteys todellakin on. Nimittäin arvofunktio  $V$  toteuttaa Hamilton-Jacobi-yhtälön, jossa Hamiltonin funktiona on Bolzan ongelman Hamiltonin funktion optimi

$$\hat{H}(x, p) = \max_{u \in U} H(x, u, p).$$

Sovelluksissa tätä tietoa harvoin hyödynnetään, mutta säätöteorian tutkimuksessa tulos on merkittävä. Sen todistaminen kruunatkoon kaiken edellisissä luvuissa esitetyn teorian.

**Lause 3.4.1** Olkoon  $(f, U)$  säätösystemi, jonka säätöjoukko  $U$  on kompakti ja dynamiikka  $f$  Lipschitz-jatkuva oletuksen 2.1.2 mukaisesti. Tarkastellaan Bolzan ongelmaa, jonka juoksevat kustannukset  $r$  noudattavat Lipschitz-oletusta 2.3.5 ja loppukustannukset  $g$  ovat kaikkialla lokaalisti Lipschitz-jatkuvat. Tällöin ongelman arvofunktiio  $V$  on Hamilton-Jacobi-yhtälön

$$\begin{cases} -\partial_t V(x, t) + \hat{H}(x, \nabla V(x, t)) = 0, & (x, t) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^n \\ V(x, T) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (49)$$

yksikäsitteinen viskositeettiratkaisu.

*Todistus.* Osoitetaan ensin, että loppuarvottehtävä (49) on hyvin asetettu. Merkitään  $U(x, t) = V(x, T - t)$ . Ala- ja ylädifferentiaaleille pätee tällöin, että

$$\begin{aligned} (p_x, p_t) \in D^+U(x, t) &\Leftrightarrow (p_x, -p_t) \in D^+V(x, T - t) \\ (p_x, p_t) \in D^-U(x, t) &\Leftrightarrow (p_x, -p_t) \in D^-V(x, T - t). \end{aligned}$$

Nyt, kun tehtävällä

$$\begin{cases} \partial_t U(x, t) + \hat{H}(x, \nabla U(x, t)) = 0, & (x, t) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^n \\ U(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (50)$$

on ratkaisu, joka vertailuperiaatteen (Lause 3.3.3) nojalla on yksikäsitteinen, niin yksikäsitteinen ratkaisu on olemassa myös tehtävällä (49).

On todistettava, että Bolzan ongelman arvofunktiio on sekä viskositeettiala-että viskositeettiyläratkaisu. Sitä varten valitaan ensin  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, T[$  ja  $(p_x, p_t) \in D^+V(x, t)$ . Lemman 2.1.5 nojalla valitaan sellainen luku  $R > 0$ , että säätöongelman kaikki mahdolliset ratkaisukäyrät  $y(\cdot; x, t, u)$  sisältyvät joukkoon  $B(x, R)$ . Olkoon

$$M_f := \sup_{B(x, R) \times U} |f(z, u)|.$$

Nyt kaikilla säädöillä  $u : [t, T] \rightarrow U$

$$|y(s; x, t, u) - x| \leq M_f(s - t), \quad s > t. \quad (51)$$

Valitaan sitten mielivaltainen  $v \in U$  ja tarkastellaan vakiosäätöä  $v(t) \equiv v$  vastaavaa ratkaisua  $y(\cdot; x, t, v)$ . Oletuksesta 2.1.2 ja epäyhtälöstä (51) päätellään, että

$$\begin{aligned} y(s) &= x + \int_t^s f(y(\sigma), v) d\sigma \\ &= x + f(x, v)(s - t) + \int_t^s [f(y(\sigma), v) - f(x, v)] d\sigma \\ &= x + f(x, v)(s - t) + o(s - t), \end{aligned} \quad (52)$$

kun  $s$  lähestyy ylhäältäpäin hetkeä  $t$ .

Arvofunktion aladifferentiaali pisteessä  $a = (x, t)$  määriteltiin

$$D^+V(a) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \limsup_{b \rightarrow a} \frac{V(b) - V(a) - \langle p, b - a \rangle}{|b - a|} \leq 0 \right\}.$$

Erityisesti

$$\limsup_{s \rightarrow t} \frac{V(y(s), s) - V(x, t) - \langle (p_x, p_t), (y(s), s) - (x, t) \rangle}{|s - t|} \leq 0, \quad (53)$$

ja siis yhtälön (52) nojalla

$$V(y(s), s) \leq V(x, t) + (p_x \cdot f(x, v) + p_t)(s - t) + o(s - t). \quad (54)$$

Toisaalta, koska  $s > t$ , dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen (Lause 2.4.2) nojalla  $V(x, t) \leq \int_t^s r(y(\sigma), v) d\sigma + V(y(s), s)$ . Siis

$$\begin{aligned} 0 &\leq (p_t + p_x \cdot f(x, v))(s - t) + \int_t^s r(y(\sigma), v) d\sigma + o(s - t), \\ &= (p_t + p_x \cdot f(x, v))(s - t) + r(x, v)(s - t) + o(s - t). \end{aligned} \quad (55)$$

Nyt

$$-p_t - p_x \cdot f(x, v) - r(x, v) \leq 0, \quad (56)$$

ja alkion  $v \in U$  mielivaltaisuuden nojalla

$$-p_t + \hat{H}(x, p_x) \leq 0, \quad (57)$$

siis arvofunktio  $V$  on Hamilton-Jacobi-loppuarvot tehtävän (49) viskositeettialaratkaisu.

Valitaan sitten  $(p_t, p_x) \in D^-V(x, t)$  sekä  $\epsilon > 0$ . Yladifferentiaalimääritelmän nojalla

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{V(y(t + \delta), t + \delta) - V(x, t) - p_t \delta - p_x (y(t + \delta) - x)}{\delta} \geq 0, \quad (58)$$

olipa  $y$  mitä tahansa säätöä  $u$  vastaava ratkaisukäyrä  $y(\cdot) = y(\cdot; x, t, u)$ .

Epäyhtälön (51) ja dynamiikan Lipschitz-ehdon nojalla saadaan asetettua  $\delta$  niin pieneksi, että

$$\begin{aligned} p_x \cdot (y(t + \delta) - x) &= \int_t^{t+\delta} p_x \cdot f(y(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \\ &\geq \int_t^{t+\delta} p_x \cdot f(x, u(\sigma)) d\sigma - \delta^2 |p_x| M_f K \end{aligned} \quad (59)$$

missä  $K > 0$ . Yhdistämällä epäyhtälöt (58) ja (59) saadaan

$$\frac{V(y(t+\delta), t+\delta) - V(x, t)}{\delta} \geq p_t + \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} p_x \cdot f(x, u(\sigma)) d\sigma - o(\delta) \quad (60)$$

Nojautuen dynaamisen ohjelmoinnin periaatteeseen ja funktion  $r$  integroitavuuteen koko välillä  $[t, T]$  voidaan asettaa luku  $\delta$  niin pieneksi, että

$$V(y(t+\delta), t+\delta) - V(x, t) + \int_t^{t+\delta} r(x, v(\sigma)) d\sigma \leq \delta^2.$$

Yhdistäen epäyhtälöt saadaan epäyhtälö

$$p_t + \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} p_x \cdot f(x, u(\sigma)) + r(x, v(\sigma)) d\sigma \leq o(1)$$

Toisaalta

$$\int_t^{t+\delta} p_x \cdot f(x, u(\sigma)) + r(x, v(\sigma)) d\sigma \geq -\delta \hat{H}(x, p_x)$$

Riittävän pienellä  $\delta$  nyt

$$p_t - \hat{H}(x, p_x) \leq \epsilon.$$

Koska  $\epsilon$  oli mielivaltainen, saadaan lopulta

$$-p_t + \hat{H}(x, p_x) \geq 0, \quad (61)$$

mikä todistaa, että arvofunktiio  $V$  on myös viskositeettiyläratkaisu.  $\square$



## 4 Käytettyjä merkintöjä

$\bar{B}(0, R)$	Origokeskinen $R$ -säteinen suljettu pallo
$\bar{B}^n(0, R)$	Origokeskinen $R$ -säteinen suljettu pallo $\mathbb{R}^n$ :ssä
$C^2(U)$	Joukossa $U$ kahdesti jatkuvasti derivoituvien funktioiden joukko
$o$	Landaun symboli
$\mathbb{R}_+$	Reaaliakselin väli $(0, \infty)$
$\dot{X}$	$X$ :n differentiointi aikaparametrin $t$ suhteen

## Viitteet

- [1] Herbert **Amann**: Ordinary Differential Equations. An Introduction to Nonlinear Analysis. Walter de Gryter 1990.
- [2] Applications of Control Theory in Ecology, toim. Yosif **Cohen**. Springer-Verlag 1986.
- [3] Stephen **Banks**: Control Systems Engineering. Prentice-Hall 1986.
- [4] Martino **Bardi**, Italo **Capuzzo-Dolcetta**: Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. Birkhäuser 1997.
- [5] Garrett **Birkhoff**, Gian-Carlo **Rota**: Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons 1969.
- [6] Piermarco **Cannarsa**, Carlo **Sinestrari**: Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and Optimal Control. Birkhäuser 2004.
- [7] Michael G. **Crandall**, Pierre-Louis **Lions**: Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. Transactions of the American Mathematical Society 277. American Mathematical Society 1983.
- [8] Lawrence C. **Evans**: Partial Differential Equations. American Mathematical Society 1998.
- [9] Norman **Howes**: Modern Analysis and Topology. Springer-Verlag 1995.
- [10] Donald **Kirk**: Optimal Control Theory, an Introduction. Prentice-Hall 1970.
- [11] Pekka **Neittaanmäki**, Dan **Tiba**: Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Theory, Algorithms, and Applications. Marcel Dekker 1994.
- [12] Veikko T. **Purmonen**: Differentiaali- ja Integraalilaskentaa usean reaali-  
muuttujan funktioille, II osa. Jyväskylän yliopisto 2003.
- [13] The Theory and Practice of Environmental and Resource Economics,  
toim. Thomas **Aronsson**, Roger **Axelsson**, Runar **Brännlund**. Edward  
Elgar 2006.

- [14] Andrei I. **Subbotin**: Generalized Solutions of First-Order PDEs, the Dynamical Optimization Perspective. Birkhäuser 1995.