Harnack-funktiot ja Picardin lause

Arja Rautiainen

Matematiikan Pro Gradu Tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Talvi 2008

Esipuhe

Pro Gradu- tutkielmassani syvennetään kompleksianalyysin perustietoja. Tutkielman alussa kerrataan joitakin kompleksianalyysin peruskäsitteitä, joita tarvitaan myöhemmin harmonisten funktioiden teoriaa rakennettaessa. Nämä peruskäsitteet on koottu ensimmäiseen osaan, jonka ylitse voi asiaan perehtynyt lukija hypätä.

Johdannossa perehdytään analyyttisiin funktioihin, kompleksiseen integrointiin ja Cauchyn lauseeseen, joka antaa lisää tietoa analyyttisen funktion rakenteesta. Lauseita ei todisteta, vaan niille annetaan viitteet, joiden avulla lukija voi halutessaan kerrata tietojaan kompleksianalyysistä.

Toisessa osassa kehitellään harmonisten funktioiden teoriaa ja tutkitaan niiden ominaisuuksia. Tässä osassa osoitetaan myös analyyttisten ja harmonisten funktioiden välillä vallitseva yhteys. Harmonisten funktioiden teoriasta kehitellään vielä Harnack-funktioiden teoriaa ja todistetaan myös tutkielman lopun kannalta oleellinen tulos; harmoniset funktiot ovat Harnack funktioita.

Viimeisessä osassa todistetaan tämän Pro Gradu- tutkielman päätulos, Picardin lause. Asiaa lähetytään esimerkin avulla ja pohditaan, mitä vaikutusta kuvajoukkoon on, jos funktio on kokonainen.

Kaikki tutkielman määritelmät ja todistukset on koottu soveltuvin osin lähdeluettelossa mainituista teoksista. Osissa todistuksista olen laskenut auki kohtia, jotka ovat alkuperäisessä teoksessa sivuutettu toteamalla *helposti nähdään* tai *selvästi*. Kokonaan omaa käsialaani on esimerkki 4.8 logaritmifunktion harmonisuudesta ja lause 6.5, jossa osoitetaan, että harmoniset funktiot ovat Harnack funktioita.

Arja Rautiainen
Nurmossa
14. toukokuuta 2008

SISÄLTÖ

Osa 1. Johdanto

Tässä osassa kerrataan kompleksianalyysin perusteita, jolloin lukija voi helposti kerrata kompleksianalyysin keskeistä terminologiaa. Syvällisempiä tietoja kaipaava lukija voi tutustua englannin kielisiin teoksiin [1] ja [12], sekä suomeksi kirjoitettuihin teoksiin [6], [7] ja [9]. Ensimmäiseksi määritellään kompleksinen differentioituvuus ja sen jälkeen määritellään kompleksinen integrointi. Vaikka ensisilmäyksellä näyttää, että kompleksinen differentioituvuus ei poikkea "tavallisesta"differentioituvuudesta, niin todellisuudessa erot ovat kuitenkin syvällisiä.

1. Analyyttiset funktiot

Määritelmä 1.1 (*Differentioituvuus kompleksitasossa*)**.** Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja $f : G \to \mathbb{C}$ funktio ja $z \in \mathbb{C}$. Funktiolla f on *derivaatta* (toisin sanoen, funktio f on *differentioituva*) pisteessä z, jos

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \tag{1.1}$$

on olemassa aina kun ξ lähestyy z :aa. Raja-arvoa kutsutaan funktion f *derivaataksi* pisteessä z ja merkitään $f'(z)$ tai $\frac{df(z)}{dz.}$

Jos funktiolla $f(z)$ on derivaatta pisteessä z_0 ja jokaisessa z_0 :n ympäristössä, niin sanotaan, että funktio on *analyyttinen* (tai holomorfinen, monogeeninen tai säännöllinen) pisteessä z_0.

Määritelmä 1.2 (Epäyhtenäinen joukko)**.** Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *epäyhtenäinen* jos on olemassa avoimet joukot U ja V siten, että seuraavat ehdot toteutuvat:

(i) joukot U ja V ovat erillisiä, ts. $U \cap V = \varnothing$;
(ii) $A \cap U \neq \varnothing$ ja $A \cap V \neq \varnothing$;
(iii) $A \subset U \cup V$.

Määritelmä 1.3 (Yhtenäinen joukko)**.** Joukko A on *yhtenäinen,* jos se ei ole epäyhtenäinen.

Määritelmä 1.4 (Alue)**.** Jos kompleksitasossa ei-tyhjä joukko Ω on sekä avoin, että yhtenäinen, niin sanotaan, että joukko Ω on *alue* $\mathbb{C}$:ssä.

Määritelmä 1.5 (Analyyttinen funktio)**.** Sanotaan, että funktio f on *analyyttinen alueessa* Ω, jos se on differentioituva jokaisessa alueen Ω pisteessä. Jos funktio on analyyttinen koko kompleksitasossa, sanotaan, että funktio on *kokonainen.*

Sanonta "analyyttinen U :ssa"olettaa aina, että U on kompleksitason avoin joukko. Funktiota, jonka määrittelyjoukko on avoin ja joka on analyyttinen tässä joukossa, sanotaan *analyyttiseksi funktioksi.*

Kompleksiarvoisen funktion derivaatalle pätevät seuraavat säännöt:

Määritelmä 1.6 (Differentioituvuussäännöt)**.** Jos funktiot $f : A \to \mathbb{C}$ ja $g : B \to \mathbb{C}$ ovat differentioituvia pisteessä z_0, niin ovat myös funktiot cf, jokaiselle kompleksiselle vakiolle c, $f+g$, fh ja f/g, kun $g(z_0) \neq 0$ differentioituvia pisteessä z_0. Tällöin myös seuraavat derivointisäännöt ovat voimassa:

$$\begin{cases} (cf)'(z_0) & = cf'(z_0), \\ (f+g)'(z_0) & = f'(z_0) + g'(z_0), \\ (fg)'(z_0) & = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \\ \frac{f}{g}'(z_0) & = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}. \end{cases} \tag{1.2}$$

1.1. **Cauchy-Riemannin yhtälöt.** Oletetaan, että funktio $f = u + iv$ on differentioituva pisteessä $z_0 = x_0 + iy_0$. Funktion f differentioituvuutta voidaan tutkia tarkastelemalla funktioiden u ja v reaalisia derivaattoja. Differentioituvuus vaatii, että sama raja-arvo $f'(z_0)$ saavutetaan aina, lähestyypä z pistettä z_0 mitä tahansa jonoa, käyrää tai joukkoa pitkin.

Annetaan ensin z :n lähestyä z_0 :aa $x-$akselin suuntaisesti asettamalla $z = x + iy$ ja antamalla $x \to x_0$. Jos funktiota f ajatellaan kahden reaaliarvoisen muuttujan funktiona, niin

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Täten osittaisderivaatat $u_x(z_0)$ ja $v_x(z_0)$ ovat olemassa ja siten osittaisderivaatta $f'_x(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$ on olemassa ja toteuttaa yhtälön

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = f_x(z_0). \tag{1.3}$$

Vastaavasti, asettamalla $z = x_0 + iy_0$ ja antamalla $y \to y_0$,, saadaan

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{i(y - y_0)} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Tällöin myös osittaisderivaatta $f_y(z_0) = u_y(z_0) + iv_y(z_0)$ on olemassa ja

$$f'(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0) = -if_y(z_0) \tag{1.4}$$

Vertaamalla yhtälöitä (1.3) ja (1.4) saadaan

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \quad , \quad u_y(z_0) = -v_x(z_0) \tag{1.5}$$

Määritelmä 1.7 (Cauchy-Riemannin yhtälöt)**.** Yhtälöitä (1.5) kutsutaan *Cauchy-Riemannin yhtälöiksi.*

Seuraavat kaksi tulosta osoittavat analyyttisen funktion ja Cauchy-Riemannin yhtälöiden välillä vallitsevan yhteyden.

Lause 1.8. *Olkoon funktio $f = u + iv$ analyyttinen alueessa Ω. Tällöin funktiot u ja v ovat analyyttisiä alueessa Ω ja ne toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt.*

Todistus. [9, Katso sivut 13-14] □

Lause 1.9. *Olkoot funktiot u ja v alueessa Ω analyyttisiä reaaliarvoisia funktioita, jotka toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt. Tällöin funktio $f = u + iv$ on analyyttinen Ω :ssa.*

Todistus. [9, Katso sivu 14] □

2. Kompleksinen integrointi

Tarkastellaan seuraavaksi kompleksista integrointia. Aluksi on tarpeen määritellä muutamia käsitteitä, joiden avulla voidaan myöhemmin tarkastella kompleksisen integraalin ominaisuuksia.

Määritelmä 2.1 (Polku). Jatkuvaa funktiota $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, missä $[a, b]$ on aidosti suljettu reaaliakselin väli, kutsutaan poluksi.

Määritelmä 2.2 (Polkujen γ_1 ja γ_2 summa). Oletetaan, että poluilla $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ ja $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ on ominaisuus $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Tällöin voidaan määritellä *summapolku* $\gamma_1 + \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$ asettamalla

$$[\gamma_1 + \gamma_2](t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{jos } a_1 \leq t \leq b_1, \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & \text{jos } b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2 jh \end{cases}.$$

Määritelmä 2.3 (Sileä- ja paloittain sileä polku). Polku $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ on *sileä,* jos sen derivaatta, $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$, parametrin t suhteen on olemassa jokaisella $t \in [a, b]$ ja jos funktio $\dot{\gamma}$ on jatkuva välillä $[a, b]$. Edelleen, polku $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ varustettuna välin $[a, b]$ osituksella P: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, on *paloittain sileä,* jos sen rajoittuma jokaisella välillä $[t_{k-1}, t_k], 1 \leq k \leq n$, on sileä polku.

Määritelmä 2.4 (Polun jälki ja yksinkertainen polku). Polun γ *jälki,* $\mid \gamma \mid$, on $\mid \gamma \mid = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$. Polkua γ sanotaan *yksinkertaiseksi,* jos $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, kun $t \neq s$, mahdollisena poikkeuksena $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Määritellään vielä viimeiseksi kierrosluvun käsite.

Määritelmä 2.5 (Kierrosluku). Olkoon γ suljettu ja paloittain sileä polku kompleksitasossa ja piste $z \in \mathbb{C} \backslash |\gamma|$. *Tien γ kierrosluku pisteen z ympäri* on

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{2.1}$$

Seuraava lemma antaa joukon kierrosluvun ominaisuuksia, jotka voivat helpottaa integraalin laskemista.

Lemma 2.6. *Olkoon γ suljettu, paloittain sileä polku kompleksitasossa ja olkoon $U = \mathbb{C} \backslash |\gamma|$. Tällöin*
(i) $n(\gamma, z)$ on vakio kussakin joukon U komponentissa;
(ii) $n(\gamma, z) = 0$, jos piste z on joukon U rajoittamattomassa komponentissa;
(iii) kun polku γ on yksinkertainen, niin joko $n(\gamma, z) = 1$, tai $n(\gamma, z) = -1$, jos piste z on joukon U äärellisessä komponentissa.

Todistus. [12, Katso sivut 157-160] □

Ennen kuin voidaan määritellä kompleksiarvoisen funktion integraali, tarvitaan vielä tien määritelmä.

Määritelmä 2.7 (Tie). *Tie joukossa* $A \subset \mathbb{C}$ on paloittain jatkuvasti differentioituva polku $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, jolle $|\gamma| = \gamma([a, b]) \subset A$. Tie γ on suljettu, jos sillä on sama alku- ja loppupiste, toisin sanoen $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Määritelmä 2.8 (Funktion integraali). Olkoot $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ sileä polku ja f kompleksiarvoinen funktio, joka on määritelty ja jatkuva polun γ jäljessä. Tällöin fuktion f *integraali* yli *tien* γ on

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f[\gamma(t)]\dot{\gamma}(t)dt.$$

Edelleen, funktion f *integraali yli tien* γ *kaarenpituuden suhteen* on

$$\int_\gamma f(z) \mid dz \mid = \int_a^b f[\gamma(t)] \mid \dot{\gamma}(t) \mid dt.$$

Lemma 2.9 (Integraalin ominaisuudet). *Oletetaan, että* $f : A \to \mathbb{C}$ *ja* $g : A \to \mathbb{C}$ *ovat jatkuvia funktioita. Oletetaan lisäksi, että* γ *ja* β *ovat paloittain sileitä polkuja* A *:ssa. Tällöin kompleksisella integraalilla on seuraavat ominaisuudet:*

(i) $\int_\gamma (f(z) + g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$;

(ii) $\int_\gamma cf(z)dz = c \int f(z)dz$ *mille tahansa vakiolle* $c \in \mathbb{C}$;

(iii) $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$;

(iv) *jos polku* $\gamma + \beta$ *on määritelty, niin* $\int_{\gamma+\beta} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\beta f(z)dz$;

(v) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz|$.

Todistus. [12, Katso sivut 122-123] □

3. Cauchyn lause

Cauchyn lauseen keskeinen teema voidaan muotoilla kysymykseksi: Milloin analyyttisen funktion integraali suljettua polkua pitkin häviää? Cauchyn lause antaa yhteyden kompleksianalyysin ja tason topologian välille. Tämä lause syventää analyyttisen funktion lokaalin rakenteen ymmärtämystä.

Lause 3.1 (Lokaali Cauchyn lause)**.** *Oletetaan, että D on avoin kiekko kompleksitasossa ja että funktio f on analyyttinen kiekossa D (tai yleisemmin jatkuva kiekossa D ja analyyttinen kiekossa $D \backslash \{z_0\}$ jollakin pisteellä $z_0 \in D$). Tällöin $\int_\gamma f(z)dz = 0$ jokaiselle suljetulle, paloittain sileälle polulle $\gamma \in D$.*

Todistus. [12, Katso sivut 144-147] □

Lause 3.2. *Jos funktio f on analyyttinen avoimessa joukossa U, niin f' on myös analyyttinen U:ssä. Erityisesti, funktio f kuuluu luokkaan $C^1(U)$.*

Todistus. [12, Katso sivut 164-165] □

Seuraus 3.3. *Jos funktio f on analyyttinen avoimessa joukossa U, niin se voidaan differentioida mielivaltaisen monta kertaa U:ssa ja kaikki sen derivaatat ovat analyyttisiä. Erityisesti f kuuluu luokkaan $C^\infty(U)$.*

Lemma 3.4. *Olkoon γ paloittain sileä polku kompleksitasossa, olkoon h funktio, joka on jatkuva $|\gamma|$:ssa ja olkoon k positiivinen kokonaisluku. Avoimessa joukossa $U = \mathbb{C} \backslash |\gamma|$ määritelty funktio H,*

$$H(z) = \int_\gamma \frac{h(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^k},$$

on analyyttinen funktio, jonka derivaatta saadaan kaavasta

$$H'(z) = k \int_\gamma \frac{h(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Todistus. [12, Katso sivut 151-153] □

Lause 3.5 (Cauchyn integroimiskaavan lokaali versio)**.** *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen avoimessa kiekossa D ja että γ on suljettu, paloittain sileä polku kiekossa D. Tällöin*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

jokaiselle $z \in D \backslash |\gamma|$.

Todistus. [12, Katso sivut 161-162] □

Kompleksianalyysissä tarvitaan kuitenkin myös Cauchyn lauseen ja integroimiskaavan lokaalien versioiden lisäksi myös niiden globaaleja versioita, joita varten tarvitsee määritellä muutama käsite:

Määritelmä 3.6 (Sykli)**.** Äärellistä jonoa suljettuja, paloittain sileitä polkuja $\gamma_i,\ i = 1, \ldots, p,\ p \in \mathbb{N}$, kompleksitasossa kutsutaan *sykliksi* σ, jota merkitään $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$.

Määritelmä 3.7 (Nollahomologinen)**.** Olkoon U avoin joukko kompleksitasossa. Sykli σ on *nollahomologinen* joukossa U, jos $n(\sigma, z) = 0$ jokaisella $z \in \mathbb{C} \backslash U$.

Määritelmä 3.8 (Yhdesti yhtenäinen alue)**.** Alue Ω kompleksitasossa on *yhdesti yhtenäinen,* jos jokainen suljettu ja paloittain sileä polku Ω :ssa on nollahomologinen.

Lause 3.9 (Cauchyn lause)**.** *Olkoon* σ *sykli avoimessa tasojoukossa* U *Tällöin integraali* $\int\limits_{\sigma} f(z)dz = 0$ *jokaiselle joukossa* U *analyyttiselle funktiolle* f *jos, ja vain jos, sykli* σ *on nollahomologinen joukossa* U.

Todistus. [12, Katso sivut 188-191] □

Lopuksi vielä Cauchyn integroimiskaavan globaali versio:

Lause 3.10 (Cauchyn integroimiskaava)**.** *Oletetaan, että funktio* f *on analyyttinen avoimessa tasojoukossa* U *ja että* σ *on nollahomologinen sykli joukossa* U. *Tällöin*

$$n(\sigma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

jokaiselle pisteelle $z \in U \backslash |\sigma|$.

Todistus. [12, Katso sivu 192] □

Osa 2. **Harmoniset funktiot ja niiden ominaisuudet**

Tässä osassa tarkastellaan harmonisia funktioita ja niiden ominaisuuksia ja määritellään Harnack-funktiot. Lopuksi osoitetaan, että harmoniset funktiot ovat Harnack-funktioita, jolloin kaikki harmonisten funktioiden ominaisuudet pätevät myös Harnack-funktioille.

4. Harmoniset funktiot

Harmonisilla funktioilla on suuri rooli etenkin fysiikassa ja tekniikassa. Harmonisiin funktioihin törmätään mm. sähköstatistiikassa, virtausdynamiikassa, akustiikassa ja lämmön siirtymisessä. Harmonisten funktioiden sovelluksista voi lukea mm. teoksista [4] ja [5]. Myös kirjassa [2] on käsitelty harmonisten funktioiden sovelluksia fysiikassa.

Määritelmä 4.1 (Laplacen operaattori ja -yhtälö)**.** Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin tasojoukko ja funktio $f : U \to \mathbb{R}$ sellainen, että osittaisderivaatat f_{xx} ja f_{yy} ovat olemassa ja jatkuvia jokaisessa joukon U pisteessä. *Laplacen operaattori* määritellään asettamalla

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \tag{4.1}$$

Laplacen yhtälö määritellään asettamalla

$$\Delta f(z) = f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Määritelmä 4.2 (Harmoninen funktio ja harmoninen konjugaattifunktio)**.** Kompleksitason alueessa Ω määritelty reaaliarvoinen jatkuva funktio u on *harmoninen,* alueessa Ω, jos $\Delta u(z) = 0$ jokaisessa pisteessä $z \in \Omega$. Funktio $v : \Omega \to \mathbb{R}$ on harmonisen funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmoninen konjugaattifunktio, jos funktio $f = u + iv$ on analyyttinen alueessa Ω.

Seuraava lause osoittaa analyyttisten ja harmonisten funktioiden välisen yhteyden. Toisaalta harmonisten funktioiden teoria on johdannainen analyyttisten funktioiden teoriasta; Cauchyn integrointikaavaa soveltamalla saadaan muutamia harmonisten funktioiden oleellisia oimnaisuuksia. Mutta, harmonisia funktioita tutkimalla saadaan myös uusia ominaisuuksia analyyttisille funktioille.

Lause 4.3. *(i) Olkoon $f(z) = u(z) + iv(z)$ analyyttinen alueessa Ω. Tällöin molemmat reaaliarvoiset funktiot, $u(z)$ ja $v(z)$, ovat harmonisia alueessa Ω.*
(ii) Olkoon Ω kompleksitason alue. Tällöin jokaisella alueessa Ω

harmonisella funktiolla on harmoninen konjugaattifunktio tässä alueessa jos ja vain jos Ω on yhdesti yhtenäinen.

Todistus. (i) Jos funktio $f = u + iv$ on analyyttinen alueessa Ω, niin myös

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

on analyyttinen alueessa Ω (Seuraus 3.3 sivulla 9). Täten, funktioiden u ja v toiset derivaatat ovat jatkuvia ja $u_{xy} = u_{yx}$ ja $v_{xy} = v_{yx}$. Soveltamalla Cauchy-Riemannin yhtälöitä (1.5) saadaan

$$u_{xx} = (v_y)_x = (v_x)_y = -u_{yy} \qquad \text{ja} \qquad v_{xx} = (-u_y)_x = -v_{yy},$$

jolloin molemmat funktiot u ja v toteuttavat Laplacen yhtälön. $\square_i$

(ii) Oletetaan ensin, että alue Ω on yhdesti yhtenäinen ja osoitetaan, että Ω :ssä harmonisella funktiolla u on olemassa harmoninen konjugaattifunktio.

Olkoon $g := u_x - iu_y$ funktio. Koska $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$, niin $g \in \mathbb{C}^1(\Omega)$. Koska funktion g Laplacen yhtälö, $\Delta g(z) = 0$, niin g :n reaali- ja imaginaariosat toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt annetussa alueessa:

$$(u_x)_x = u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y \text{ ja } (u_x)_y = u_{xy} = u_{yx} = -(-u_y)_x.$$

Tällöin funktio g on analyyttinen Ω :ssa [12, s.72, Theorem III.2.2]. Edelleen, [12, s.196, Theorem V.6.1] funktiolla g voidaan valita primitiivi f alueessa Ω siten, että $f = \tilde{u} + iv$. Kiinnitetään seuraavaksi piste $z_0 \subset \Omega$ siten, että $f(z_0) = u(z_0)$ (tämä määrää f:n yksikäsitteisesti). Siten $\tilde{u}(z_0) = u(z_0)$. Nyt

$$\tilde{u}_x - i\tilde{u}_y = f' = g = u_x - iu_y$$

alueessa Ω, joten $(\tilde{u} - u)_x = (\tilde{u} - u)_y = 0$ kaikkialla alueessa Ω. Täten [12, s.73, Theorem III.2.3] $\tilde{u} - u$ on vakio. Koska $\tilde{u}(z_0) = u(z_0)$, niin $\tilde{u} - u = 0$, ts. $\tilde{u} = u$ D :ssä. Koska funktio f on määritelmänsä mukaan analyyttinen alueessa Ω, niin funktio v on funktion u haluttu konjugaatti.

Toisaalta, oletetaan, että jokaiselle alueessa Ω harmonisella funktiolla on harmoninen konjugaattifunktio. Täytyy osoittaa, että alue Ω on yhdesti yhtenäinen. Olkoon γ paloittain sileä, jatkuva tie alueessa Ω. Yritetään näyttää, että γ on nollahomologinen Ω :ssa, ts. halutaan osoittaa, että $n(\gamma, z_0) = 0$ mielivaltaiselle $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\Omega$. Määritellään funktio $u : \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ siten, että $u(z_0) = Log|z - z_0|$. Funktio u on harmoninen $u : \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$:ssa, -yksinkertainen lasku paljastaa, että u

on myös harmoninen Ω :ssa. Oletuksen mukaan voidaan valita u :lle harmoninen konjugaattifunktio v. Siten, funktio $f = u + iv$ on analyyttinen Ω :ssa. Myös funktio $h : \Omega \to \mathbb{C}, h(z) = (z - z_0)e^{-f(z)}$ on analyyttinen Ω :ssa.

Seuraavaksi huomataan, että

$$|h(z)| = |z - z_0|e^{-u(z)} = |z - z_0|e^{-Log|z-z_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1$$

jokaiselle $z \in \Omega$. Tällöin [12, s.74, Theorem III.2.5] funktion h täytyy olla vakio Ω :ssa. Tästä seuraa, että

$$0 = h'(z) = e^{-f(z)} - (z - z_0)e^{-f(z)}f'(z)$$

kaikkialla Ω :ssa, josta saadaan $f'(z) = (z - z_0)^{-1}$ $\forall z \in \Omega$. Täten [12, s.126 Theorem IV.2.2] voidaan kirjoitaa seuraava

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(\zeta)d\zeta = 0,$$

kuten haluttiin osoittaa. Siis, alue Ω on yhdesti yhtenäinen. □

Lause 4.4. *Olkoon u harmoninen funktio alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ ja olkoon joukon $\{z \in \mathbb{C} : u(z) = 0\}$ sisäpisteiden joukko epätyhjä. Tällöin $u \equiv 0$ alueessa Ω.*

Todistus. Olkoon $D = \mathrm{int}\{z \in \mathbb{C} : u(z) = 0\}$. Nyt joukko D on avoin, ei-tyhjä ja $D \subset \Omega$. Olkoon E joukon D sulkeuma alueessa Ω. Tällöin E on (relatiivi)suljettu alueessa Ω ja funktion u jatkuvuuden nojalla $u = 0$ joukossa E. Osoitetaan seuraavaksi, että joukko E on myös avoin alueessa Ω : Olkoon $z_0 \in E$. Koska Ω on avoin, niin kiekko $D(z_0, r) \subset \Omega$ jollakin luvulla $r > 0$. Olkoon funktio v funktion u konjugaattifunktio kiekossa $D(z_0, r)$ (lause 4.3(ii) sivulla 11), toisin sanoen, funktio $f = u + iv$ on analyyttinen kiekossa $D(z_0, r)$. Koska funktion u kaikki derivaatat ovat nollia joukossa D, niin Cauchy-Riemannin yhtälöiden (1.5) nojalla myös kaikki funktion v derivaatat ovat nollia joukossa $D(z_0, r) \cap D$. Täten, funktio f on vakio kiekossa $D(z_0, r)$, jolloin funktio $u(z) = 0$ kiekossa $D(z_0, r)$. Nyt $D(z_0, r) \subset E$, joten joukko E on avoin. Koska alue Ω on yhtenäinen, niin $E = \Omega$. Toisin sanoen, $u(z) = 0$ alueessa Ω. □

4.1. Keskiarvo-ominaisuus.

Yhtälön (4.3) perusteella voidaan esittää seuraava määritelmä:

Määritelmä 4.5 (Keskiarvo-ominaisuus)**.** Avoimessa joukossa $U \subset \mathbb{C}$ jatkuvalla reaaliarvoisella funktiolla w on *keskiarvo-ominaisuus* joukossa U, jos jokaista pistettä $z \in U$ vastaa luku $\rho = \rho(z)$ siten, että

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(z + re^{i\theta}) d\theta, \tag{4.2}$$

aina kun $0 < r < \rho$.

Tämä yhtälö antaa funktion u keskiarvon kiekossa $D(z, r)$. Tämä keskiarvo on sama jokaiselle luvulle r välillä $(0, \rho)$ ja on yhtäsuuri kuin funktion u arvo kiekon $D(z, r)$ keskipisteessä.

Lause 4.6. *Avoimessa joukossa U harmonisella funktiolla u on keskiarvo-ominaisuus tässä joukossa. Kun pisteellä z on edellä mainittu ominaisuus, niin mikä tahansa luku $\rho > 0$ voi olla tätä pistettä vastaava säde, kun $D(z, \rho) \subset U$.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että u on harmoninen funktio avoimessa tasojoukossa U, piste $z \in U$ ja, että $\rho > 0$ on niin pieni, että $D(z, \rho) \subset U$. Tällöin löydetään (lause 4.3(ii) sivulla 11) funktiolle u harmoninen konjugaattifunktio v kiekossa D. Kun $0 < r < \rho$, niin soveltamalla Cauchyn integroimiskaavaa 3.10 sivulla 10 saadaan

$$\begin{aligned} u(z) = Re[f(z)] &= Re\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}\right] \\ &= Re\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta\right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Täten on saatu yhtälö

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta \tag{4.3}$$

aina kun $0 < r < \rho$. □

4.2. **Maksimiperiaate.** Keskiarvo-ominaisuudesta saadaan harmonisten funktioiden ominaisuus:

Lause 4.7 (Maksimiperiaate). *Olkoon funktio u harmoninen ja reaaliarvoinen alueessa Ω. Jos funktiolla u on joko maksimi, tai minimi alueessa Ω, niin u on vakio.*

Todistus. Oletetaan, että funktiolla u on maksimi pisteessä $z \in \Omega$. Merkitään joukkoa, jossa u saavuttaa maksiminsa A :lla. Valitaan luku $r > 0$ siten, että suljettu kiekko $\overline{D}(z, r) \subset \Omega$. Jos olisi piste

$w \in D(z,r)$ siten, että $u(w) \leq u(z)$, niin funktion u jatkuvuuden vuoksi u :n keskiarvo kiekossa $D(z,r)$ olisi vähemmän kuin $u(a)$, mikä on ristiriidassa määritelmän 4.5 kanssa. Täten funktio u on vakio kiekossa $D(z,r)$, jolloin, joukko A avoin alueessa Ω. Edelleen, koska funktio u on jatkuva, niin joukko A on myös suljettu. Tällöin, koska alue Ω on yhtenäinen, täytyy olla $A = \Omega$. Täten funktio u on vakio alueessa Ω kuten haluttiin.

Jos funktio u saavuttaa miniminsä alueessa Ω, niin sovelletaan yllä olevaa funktioon $-u$. □

Otetaan lopuksi vielä esimerkki harmonisesta funktiosta:

Esimerkki 4.8. Osoitetaan, että logaritmifunktio on harmoninen funktio: Olkoon funktio $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(z) = \log|f(z)|$, missä funktio f on analyyttinen.

Kun merkitään $f = u + iv$, niin funktiot u ja v ovat harmonisia. Siten

$$g(z) = \log|f(z)| = \log|u + iv| = \log(\sqrt{u^2 + v^2}).$$

Lasketaan seuraavaksi funktion g ensimmäiset ja toiset derivaatat:

$$g_x = \frac{uu_x + vv_x}{u^2 + v^2}, \qquad g_y = \frac{uu_y + vv_y}{u^2 + v^2},$$

josta

$$g_{xx} = \frac{(u^2 + v^2)(u_x^2 + v_x^2 + uu_{xx} + vv_{xx}) - 2(uu_x + vv_x)^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

ja

$$g_{yy} = \frac{(u^2 + v^2)(u_y^2 + v_y^2 + uu_{yy} + vv_{yy}) - 2(uu_y + vv_y)^2}{(u^2 + v^2)^2}.$$

Funktion g Laplacen operaattori on tällöin

$$\begin{aligned}
\Delta g(z) &= g_{xx} + g_{yy} \\
&= \frac{(u^2+v^2)(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}+vv_{xx}) - 2(uu_x+vv_x)^2}{(u^2+v^2)^2} \\
&+ \frac{(u^2+v^2)(u_y^2+v_y^2+uu_{yy}+vv_{yy}) - 2(uu_y+vv_y)^2}{(u^2+v^2)^2} \\
&= \frac{(u^2+v^2)(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}+vv_{xx}+u_y^2+v_y^2+uu_{yy}+vv_{yy})}{(u^2+v^2)^2} \\
&- \frac{2[(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2]}{(u^2+v^2)^2} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{(u^2+v^2)(u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2)}{(u^2+v^2)^2} \\
&- \frac{2[(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2]}{(u^2+v^2)^2} \\
&= \frac{(u^2+v^2)(u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2)}{(u^2+v^2)^2} \\
&- \frac{2[u^2u_x^2+2uvu_xv_x+v^2v_x^2+u^2u_y^2+2uvu_yv_y+v^2v_y^2]}{(u^2+v^2)^2} \\
&\overset{1.5}{=} \frac{(u^2+v^2)(u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2)}{(u^2+v^2)^2} \\
&- \frac{2[u^2u_x^2+v^2v_x^2+u^2u_y^2+v^2v_y^2]}{(u^2+v^2)^2} \\
&= \frac{u^2u_x^2+u^2v_x^2+u^2u_y^2+u^2v_y^2+v^2u_x^2+v^2v_x^2+v^2u_y^2+v^2v_y^2}{(u^2+v^2)^2} \\
&- \frac{2[u^2u_x^2+v^2v_x^2+u^2u_y^2+v^2v_y^2]}{(u^2+v^2)^2} \\
&= \frac{u^2v_x^2+u^2v_y^2+v^2u_x^2+v^2u_y^2-u^2u_x^2-v^2v_x^2-u^2u_y^2-v^2v_y^2}{(u^2+v^2)^2} \\
&\overset{1.5}{=} \frac{u^2u_y^2+u^2u_x^2+v^2v_x^2+v^2v_y^2-u^2u_x^2-v^2v_x^2-u^2u_y^2-v^2v_y^2}{(u^2+v^2)^2}.
\end{aligned}$$

Siis

$$\Delta g(z) = 0,$$

jolloin funktio g on harmoninen.

5. Dirichlet'n ongelma

Kiekon reunalla jatkuvan funktion avulla muodostettu Cauchyn integraali määrittelee kiekon sisällä analyyttisen funktion. Millaisilla funktioilla tämän funktion reuna-arvot yhtyvät annettuun reunafunktioon? Harmonisilla funktioilla tämä ehto toteutuu. Kiekossa harmonisten funktioiden reuna-arvotehtävä tunnetaan nimellä *Dirichlet'n ongelma,* jonka Poissonin integraali ratkaisee.

Esimerkki 5.1. Etsi funktio, joka on harmoninen kompleksitason ensimmäisessä neljänneksessä ja joka saa reuna-arvot 0 reaaliakselilla 100 imaginaariakselilla.

Funktio

$$w(z) = \frac{200}{\pi} Log\ z$$

kuvaa kompleksitason ensimmäisen neljänneksen nauhaksi $0 \le v \le 100$, kun $w = u + iv$. Tällöin positiivinen reaaliakseli kuvautuu suoralle $v = 0$, ja positiivinen y-akseli kuvautuu suoralle $v = 100$. Koska

$$u + iv = \frac{200}{\pi}(\log |z| + i\ \arg z),$$

funktio

$$v(z) = \frac{200}{\pi} \arg z$$

on harmoninen kompleksitason ensimmäisessä neljänneksessä ja se toteuttaa vaaditut reuna-arvot.

Määritelmä 5.2 (Poissonin ydin)**.** Määritellään funktio P kompleksisen tason jokaisessa pisteessä, $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2$, missä $z \neq \zeta$, asettamalla

$$P(z, \zeta) = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = Re\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right).$$

Tätä funktiota kutsutaan *Poissonin ytimeksi.*

Kun $\zeta \neq 0$ on kiinnitetty, niin Poissonin ytimestä $P(z, \zeta)$ tulee harmoninen funktio kiekossa $D(0, |\zeta|)$.

Lemma 5.3. *Jos* $r > 0$, *niin*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})\, d\theta = 1 \tag{5.1}$$

aina kun $|z| < r$.

Todistus. Huomataan ensin, että mille tahansa pisteelle $z \in \Delta(0,r)$ pätee (Lemma 2.6 sivulla 7)

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = n(\gamma, z) = 1,$$

missä $\gamma(\theta) = re^{i\theta}$ kun $0 < \theta < 2\pi$.

Osoitetaan seuraavaksi väite yksinkertaisella laskulla:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})\, d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re \left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \right) d\theta \\
&= Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}\, d\theta \right) = Re \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\
&= Re \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \left(\frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \right] = 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

□

Huomautus 5.4. Poissonin ydin määritellään kirjallisuudessa usein asettamalla

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

missä $0 \leq r < 1$ ja $-\infty < \theta < \infty$. Yksinkertaisella laskulla on helppo osoittaa, että $P_r(\theta) = P(re^{i\theta}, 1)$:

$$\begin{aligned}
P(re^{i\theta}, 1) &= \frac{|1|^2 - |re^{i\theta}|^2}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \frac{1 - |r|^2 |e^{i\theta}|^2}{|1 - r(\cos\theta + i\sin\theta)|^2} \\
&= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r} := P_r(\theta)
\end{aligned}$$

Määritelmä 5.5 (Poissonin integraali)**.** Oletetaan, että $D = D(z_0, r)$ ja $h : \partial D \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio. Funktion h *Poissonin integraali kiekossa* D määritellään asettamalla

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z - z_0, re^{i\theta}) h(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Lause 5.6 (Schwarzin lause)**.** *Olkoon D avoin kiekko kompleksitasossa, olkoon $h : \partial D \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja olhoon u funktion h Poissonin integraali kiekossa D. Tällöin u on harmoninen kiekossa D ja $\lim\limits_{z \to \zeta} u(z) = h(\zeta)$ jokaiselle $\zeta \in \partial D$.*

Todistus. Todistuksen yleisyyden kärsimättä, voidaan olettaa, että kiekon D keskipiste on origossa, toisin sanoen, $D = D(0, r)$. Todetaan ensin, että funktio u on harmoninen kiekossa D. Koska funktio $H : D \to \mathbb{C}$,

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{h(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

on analyyttinen (Lemma 3.4 sivulla 9). Kun $z \in D$, niin

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) h(re^{i\theta})\, d\theta = Re \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} h(re^{i\theta})\, d\theta \right] \\ &= Re \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) \frac{h(\zeta)\, d\zeta}{\zeta} \right] \\ &= Re \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \left(\frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) h(\zeta)\, d\zeta \right]. \end{aligned}$$

Kiekossa D analyyttisen funktion reaaliosana funktio u on harmoninen D :ssä.

Todetaan seuraavaksi, että funktiolla u on haluttu rajankäyntiominaisuus: Jokaiselle pisteelle $\zeta \in \partial D$, funktio $u(z) \to h(\zeta)$ kun $z \to \zeta$. Kiinnitetään piste ζ ja merkitään $\zeta = re^{i\psi}$, missä $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmä vaatii, että on löydettävä $\delta > 0$ siten, että

$$|u(z) - h(\zeta)| < \varepsilon \tag{5.2}$$

jokaiselle $z \in D$ kun $|z - \zeta| < \delta$. Tätä varten sovelletaan kaavaa (5.3) ja integrandin jaksollisuutta:

$$\begin{aligned} u(z) - h(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) h(re^{i\theta})\, d\theta - \frac{h(re^{i\psi})}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\pi \int\limits_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})[h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})]\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\psi-\pi}^{\psi+\pi} P(z, re^{i\theta})[h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})]\, d\theta. \end{aligned}$$

Kun $0 < t \leq \pi$ asetetaan

$$M(t) = \max \{|h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})| : \theta \in [\psi - t, \psi + t]\}.$$

Koska funktio, joka kuvaa θ :n $|h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})|$:ksi, on jatkuva reaaliakselilla, sen rajoittuma välille $[\psi - t, \psi + t]$ saavuttaa maksiminsa, joten $M(t)$ on hyvin määritelty. Selvästi, $M(t) \leq M(\pi)$. Koska $h(re^{i\theta}) \to h(re^{i\psi})$ kun $\theta \to \psi$, niin $M(t) \to 0$ kun $t \to 0$.

Olkoon $0 < t < \pi$. Arvioidaan funktioiden $u(z)$ ja $h(\zeta)$ erotusta kun $z \in$D:

$$
\begin{aligned}
|u(z) - h(\zeta)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\pi}^{\psi+\pi} P(z, re^{i\theta})[h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})]\, d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\pi}^{\psi+\pi} P(z, re^{i\theta})|h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})|\, d\theta \\
&\leq \frac{M(t)}{2\pi} \int_{|\theta-\psi|\leq t} P(z, re^{i\theta})\, d\theta + \frac{M(\pi)}{2\pi} \int_{t\leq|\theta-\psi|\leq\pi} P(z, re^{i\theta})\, d\theta \\
&\leq \frac{M(t)}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} P(z, re^{i\theta})\, d\theta + \frac{M(\pi)}{2\pi} \int_{t\leq|\theta-\psi|\leq\pi} P(z, re^{i\theta})\, d\theta \\
&\overset{(5.3)+\text{P:n määr.}}{\leq} M(t) + \frac{M(\pi)(r^2 - |z|^2}{2\pi} \int_{t\leq|\theta-\psi|\leq\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - z|^2}.
\end{aligned}
$$

Siis, jokaiselle $t \in (0, \pi)$ ja mille tahansa $z \in D$, saatiin arvio

$$
(5.3) \quad |u(z) - h(\zeta)| \leq M(t) + \frac{M(\pi)(r^2 - |z|^2)}{2\pi} \int_{t\leq|\theta-\psi|\leq\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - z|^2}.
$$

Osoitetaan seuraavaksi yllä olevassa yhtälössä esiintyvä integraali rajoitetuksi. Olkoon siis $t \leq |\theta - \psi| \leq \pi$. Koska $\sin x \geq 2x/\pi$ aina kun $0 \leq x \leq \pi/2$, niin

$$
\begin{aligned}
\left|e^{i\theta} - e^{i\psi}\right| &= \left|e^{i\psi}\left(e^{i(\theta-\psi)} - 1\right)\right| = \left|e^{i(\theta-\psi)} - 1\right| \\
&\geq 1 - \cos(\theta - \psi) \geq 1 - \cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq \frac{2t^2}{\pi^2}.
\end{aligned}
$$

Jokaiselle $z \in D$, joka toteuttaa ehdon $|z - \zeta| < rt^2/\pi^2$, voidaan siis todeta, että

$$
|re^{i\theta} - z| \overset{\triangle\text{-ey}}{\geq} |re^{i\theta} - \zeta| - |\zeta - z| = r|e^{i\theta} - e^{i\psi}| - |\zeta - z| \geq \frac{2rt^2}{\pi^2} - \frac{rt^2}{\pi^2} = \frac{rt^2}{\pi^2},
$$

kun $t \leq |\theta - \psi| \leq \pi$. Joten,

$$
\int_{t\leq|\theta-\psi|\leq\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - z|^2} \leq \frac{\pi^4}{r^2t^4} \int_{t\leq|\theta-\psi|\leq\pi} d\theta \leq \frac{\pi^4}{r^2t^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \frac{2\pi^5}{r^2t^4}.
$$

Yhtälö (5.3) saatiin siis sievennettyä muotoon

$$|u(z) - h(\zeta)| \leq M(t) + \frac{\pi^4 M(\pi)(r^2 - |z|^2)}{r^2 t^4} \tag{5.4}$$

jokaiselle $z \in D$, joka toteuttaa ehdon $|z - \zeta| < rt^2/\pi^2$.

Nyt voidaan määrittää $\delta > 0$ siten, että (5.2) toteuttuu jokaiselle $z \in D$ kun $|z - \zeta| < \delta$. Koska $M(t) \to 0$ kun $t \to 0$, niin voidaan valita sellainen t väliltä $(0, \pi)$, jolle $M(t) < \varepsilon/2$. Kun t on nyt kiinnitetty, niin yhtälössä (5.4) viimeinen termi lähestyy nollaa, kun $|z| \to r$. Itseasiassa, tämä tapahtuu kun $z \to \zeta$. Nyt voidaan valita $\delta > 0$ väliltä $(0, rt^2/\pi^2)$ siten, että viimeinen termi yhtälössä (5.4) on pienempi kuin $\varepsilon/2$ jokaiselle $z \in D$, joka toteuttaa ehdon $|z - \zeta| < \delta$. Rajoitus $0 < \delta < rt^2/\pi^2$ takaa sen, että $|u(z) - h(\zeta)| < \varepsilon$ kaikilla z, joille $|z - \zeta| < \delta$. Siis, $u(z) \to h(\zeta)$ kun $z \to \zeta$, joten väite on todistettu. □

6. Harnack-funktiot

Tässä luvussa esitellään Harnackin epäyhtälö ja sen yleistys, Harnackin epäyhtälön toinen versio. Jälkimmäisen käsitteen avulla määritellään vielä Harnack-funktiot ja lopuksi osoitetaan, että harmoniset funktiot ovat Harnack-funktioita.

Lause 6.1 (Harnackin epäyhtälöt). *Oletetaan, että funktio u on harmoninen ja ei-negatiivinen kiekossa $D = \Delta(z_0, r)$. Tällöin*

$$u(z_0)\frac{r-|z-z_0|}{r+|z-z_0|} \le u(z) \le u(z_0)\frac{r+|z-z_0|}{r-|z-z_0|} \tag{6.1}$$

jokaiselle $z \in D$.

Todistus. Kiinnitetään $z \in D$. Merkitään $D_0 = \Delta(z_0, s)$, missä luku s toteuttaa ehdon $|z-z_0| < s < r$, ja merkitään h :lla funktion u rajoittumaa ympyrän kehään ∂D_0. Dirichlet'n ongelman yksittäisratkaisu kiekolle D_0 reuna-arvoin h, on selvästikin u :n rajoittuma $\bar{D}_0$:aan. Toisaalta Schwatzin lauseen mukaan ratkaisu kiekossa D_0 saadaan h :n Poissonin integraalin avulla. Tämän vuoksi funktio $u(z)$ voidaan ilmaista muodossa

$$u(z) = \frac{s^2-|z-z_0|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(z_0+se^{i\theta})d\theta}{|se^{i\theta}-(z-z_0)|^2}. \tag{6.2}$$

Koska $s-|z-z_0| \overset{\triangle-\mathrm{ey}}{\le} |se^{i\theta}-(z-z_0)| \overset{\triangle-\mathrm{ey}}{\le} s+|z-z_0|$ mille tahansa reaaliluvulle θ, niin

$$(s-|z-z_0|)^2 \le |se^{i\theta}-(z-z_0)|^2 \le (s+|z-z_0)^2 \| : (s^2-|z-z_0|^2)$$

$$\frac{s-|z-z_0|}{s+|z-z_0|} \le \frac{|se^{i\theta}-(z-z_0)|^2}{s^2-|z-z_0|^2} \le \frac{s+|z-z_0|}{s-|z-z_0|} \Big\| ()^{-1}$$

$$\frac{s-|z-z_0|}{s+|z-z_0|} \le \frac{s^2-|z-z_0|^2}{|se^{i\theta}-(z-z_0)|^2} \le \frac{s+|z-z_0|}{s-|z-z_0|}. \tag{6.3}$$

Tarkastellaan yhtälön (6.3) vasemmanpuoleista epäyhtälöä:

$$\frac{s-|z-z_0|}{s+|z-z_0|} \le \frac{s^2-|z-z_0|^2}{|sei\theta-(z-z_0)|^2}.$$

Kun kerrotaan epäyhtälö ei-negatiivisella arvolla $u(z_0+se^{i\theta})/2\pi$, saadaan

$$\frac{s-|z-z_0|}{s+|z-z_0|}\cdot\frac{u(z_0+se^{\theta})}{2\pi} \le \frac{s^2-|z-z_0|^2}{|sei\theta-(z-z_0)|^2}\cdot\frac{u(z_0+se^{\theta})}{2\pi}.$$

Integroidaan 0:sta 2π :hin

$$\left(\int_0^{2\pi}\frac{u(z_0+se^{i\theta})d\theta}{2\pi}\right)\frac{s-|z-z_0|}{s+|z-z_0|}\leq\frac{s^2-|z-z_0|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(z_0+se^{i\theta}d\theta)}{|sei\theta-(z-z_0)|^2}$$

ja verrataan yhtälöön (6.2), jolloin

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(z_0+se^{i\theta})d\theta}{2\pi}\right)\frac{s-|z-z_0|}{s+|z-z_0|}\overset{(6.2)}{\leq}u(z).$$

Vastaavasti tarkastelemalla oikeanpuoleista epäyhtälöä yhtälössä (6.2) saadaan

$$u(z)\leq\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+se^{i\theta})\,d\theta\right)\frac{s+|z-z_0|}{s-|z-z_0|}.$$

Lauseen 4.6 sivulla 14 perusteella, nämä yhtälöt sievenevät muotoon

$$u(z_0)\frac{s-|z-z_0|}{s+|z-z_0|}\leq u(z)\leq u(z_0)\frac{s+|z-z_0|}{s-|z-z_0|}.$$

Koska epäyhtälöt ovat voimassa aina kun $|z-z_0|<s<r$, niin väite (6.1) saadaan, kun $s\to r$. □

Määritelmä 6.2 (Harnackin epäyhtälön toinen versio). Olkoon $z\in\mathbb{C}$, $r>0$ ja kiekko D kompleksiavaruudessa siten, että $D=D(z,2r)=\{\omega\in\mathbb{C}:|\omega-z|<2r\}$. Edelleen, olkoon h ei-negatiivinen funktio, $h:D\to\mathbb{C}$, jolle pätee

(6.4)

$$M(r,h,z)=\sup\{h(\omega):\omega\in D(z,r)\}\leq\theta\inf\{h(\omega):\omega\in D(x,r)\},$$

jollakin $\theta\geq 1$. Yhtälöä (6.4) sanotaan *Harnack-tyyppiseksi epäyhtälöksi.*

Lause 6.3 (Harnackin periaate). *Olkoon u_n, $n=1,2,\dots$ nouseva jono alueessa Ω harmonisia funktioita. Tällöin $u_n(z)\to\infty$ jokaiselle pisteelle $z\in\Omega$, tai (u_n) suppenee tasaisesti alueen Ω kompakteissa osajoukoissa kohti alueessa Ω harmonista funktiota u.*

Todistus. Merkitään $v_n=u_n-u_1$.Tällöin funktiot v_n muodostavat nousevan jonon ei-negatiivisia funktioita. Olkoon $a\in\Omega$ sellainen piste, että $u(a)<\infty$. Jos kiekon $D(a,R)\subset\Omega$, niin epäyhtälön 6.1 sivulla 22 nojalla kiekossa $D(a,R/2)$ on

$$v_n(z)\leq v_n(a)\frac{R+R/2}{R-R/2}=3v_n(a)\leq 3\left(u(a)-u_1(a)\right).$$

Siis, $u(z)<\infty$ kiekossa $D(a,R/2)$, jolloin joukko $E=\{z\in\Omega:u(z)<\infty\}$ on avoin.

Jos taas $u(z)=\infty$ kiekossa $D(a,R/2)$, niin epäyhtälön 6.1 sivulla 22 nojalla kiekossa $D(a,R/2)$ on

$$v_n(z)\geq v_n(a)\frac{R-R/2}{R+R/2}\geq\frac{1}{3}v_n(a).$$

Tällöin $u(z)=\infty$ kiekossa $D(a,R/2)$, jolloin joukko $F=\{z\in\Omega: u(z)=\infty\}$ on avoin. Koska alue Ω on yhtenäinen, niin joko joukko E tai joukko F on tyhjä.

Edelleen, jos $z\in D(a,R/2)$, niin epäyhtälöstä 6.1 sivulla 22 saadaan

$$\frac{1}{3}(u_{n+p}(a)-u_n(a))\leq u_{n+p}(z)-u_n(z)\leq 3(u_{n+p}(a)-u_n(a)).$$

Tällöin $u_n(z)\to u(z)$ tasaisesti kiekossa $D(a,R/2)$, ja siis jokaisessa alueen Ω kompaktissa osajoukossa.

Osoitetaan seuraavaksi,että jos funktio u on äärellinen, niin se on harmoninen. Sovelletaan Schwarzin lausetta 5.6 sivulla 18 funktioon u_n kiekossa $D(a,R)$:

$$\begin{aligned}u_n(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(a+Re^{i\theta})\frac{|Re^{i\theta}|^2-|z-a|^2}{|Re^{i\theta}-z+a|^2}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(\zeta)\frac{R^2-|z-a|^2}{|\zeta-z|^2}d\theta,\end{aligned}$$

kun $\zeta=a+Re^{i\theta}$. Koska $u_n(z)\to u(z)$ tasaisesti ympyrällä $|\zeta-a|=R$, niin

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(\zeta)\frac{R^2-|z-a|^2}{|\zeta-z|^2}d\theta.$$

Schwarzin lauseen 5.6 sivulla 18 perusteella funktio u on harmoninen kiekossa $D(a,R)$, jolloin se on harmoninen kiekossa Ω. □

Määritelmä 6.4 (Harnack-funktio $\mathbb{R}^n$:ssä)**.** Jatkuvaa funktiota $u:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ sanotaan *Harnack-funktioksi* vakiolla θ, jos epäyhtälö (6.4) pätee funktiolle h aina kun funktio h on ei-negatiivinen kiekossa $D=D(z,2r)$ ja h on muotoa $h=\pm u+a$, jollakin luvulla $a\in\mathbb{R}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että harmoniset funktiot ovat Harnack-funktioita:

Lause 6.5. *Harmoniset funktiot ovat Harnack-funktioita.*

Todistus. Olkoon u jatkuva harmoninen funktio kompleksitasossa $\mathbb{C}$ ja olkoon h ei-negatiivinen funktio kiekossa $D=D(z_0,2r)$ siten, että funktio h on muotoa $h = \pm u + a$, jollakin luvulla $a \in \mathbb{R}$. Koska u on harmoninen funktio, on myös h harmoninen funktio. Tällöin h toteuttaa yhtälön (6.1) kiekossa $D' = D(z_0, r)$:

$$\frac{h(z_0)}{\theta} \leq h(z) \leq \theta h(z_0), \tag{6.5}$$

missä $\theta = (r + |z - z_0|)/(r - |z - z_0|)$. Tarkastellaan nyt yhtälön (6.5) vasempaa puolta: Koska yhtälö (6.5) pätee jokaiselle pisteelle $z \in D'$, niin se pätee erityisesti myös supremumille. Täten

$$\sup\{h(z) : z \in D'\} \leq \theta h(z_0). \tag{6.6}$$

Toisaalta, yhtälö (6.5) pätee myös infimumille, jolloin tarkastelemalla yhtälön (6.5) saadaan

$$\frac{h(z_0)}{\theta} \leq \inf\{h(z) : z \in D'\}. \tag{6.7}$$

Yhdistämällä yhtälöt (6.6) ja (6.7) saadaan:

$$\sup\{h(z) : z \in D'\} \leq \theta h(z_0) \leq \theta^2 \inf\{h(z) : z \in D'\}.$$

Täten jatkuva harmoninen funktio u kompleksitasossa $\mathbb{C}$ on siis Harnack-funktio vakiolla θ^2. □

Lemma 6.6. *Olkoon u Harnack-funktio vakiolla θ, $u(z_0) = 0$, ja $R > 0$. Tällöin on olemassa luku r, $0 < r < R$, $z_1 \in D(z_0, 2R)$ ja $c_1 = c_1(\theta) \geq 2$ siten, että $u(z_1) = 0$ ja*

$$(c_1)^{-1} M(R, u, z_0) \overset{(i)}{\leq} M(10r, u, z_1) \overset{(ii)}{\leq} c_1 M(r, u, z_1).$$

Lemma 6.6 on todistettu suppeammassa muodossa artikkeleissa [3] ja [13]. Kummassakin artikkelissa todistetaan lemma 6.6 osoittamalla ensin, että jos $u(y) = 0$, niin u :n maksimia $y-$keskisessä pallossa voidaan arvioida sekä ylä- että alapuolelta suuremman ja pienemmän $y-$keskisen pallon mitalla μ. Artikkelissa [13] mitta μ on laskentafunktion tietu keskiarvo annetulle kvasisäännöliselle funktiolle kun taas artikkelissa [3] μ on tietty positiivinen Rieszin mitta, johon liittyy $u^+ = \max\{u, 0\}$. Toisaalta kirjoittajat todistavat samankaltaisen tuloksen, missä $M(\cdot, u, \cdot)$ on korvattu mitalla μ. Lemman 6.6 molemmat todistukset hyödyntävät epälineaaristen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriaa.

Lemman 6.6 todistus. Todistetaan ensin oikeanpuoleinen epäyhtälö (ii).

Olkoon $\delta(z) = 2R - |z - z_0|$ pisteen $z \in D(z_0, 2R)$ etäisyys joukosta $\mathbb{C} \setminus D(z_0, 2R)$. Olkoon joukko $E = \{z : u(z) = 0\} \cap D(z_0, 2R)$, ja olkoon F joukon $\cup_{z \in E} D(z, \frac{\delta(z)}{100})$ sulkeuma. Asetetaan

$$\gamma = \sup\{M(10^{-2}\delta(z), u, z) : z \in E\},$$

ja valitaan piste $z_1 \in E$ siten, että jos $r = \frac{\delta(z)}{100}$, niin

$$\gamma \leq 2M(r, u, z_1). \tag{6.8}$$

Osoitetaan, että väite pätee yllä määritellyille z_1 :lle ja r :lle. Nyt

$$\begin{aligned} |\delta(z) - \delta(\omega)| &= \Big||z - z_0| - |\omega - z_0|\Big| = \Big||z - z_0| - |-(\omega - z_0)|\Big| \\ &\overset{\triangle\text{-ey}}{\leq} \Big|(z - z_0) + (-(\omega - z_0))\Big| = \Big|(z - z_0) - (\omega - z_0)\Big| \\ &= \Big|z - z_0 - \omega + z_0\Big| = \Big|z - \omega\Big| \end{aligned}$$

kun $z, \omega \in D(z_0, 2R)$. Siis

$$\Big|\delta(z) - \delta(\omega)\Big| \leq \Big|z - \omega\Big|, \tag{6.9}$$

kun $z, \omega \in D(z_0, 2R)$. Kun $\omega \in D(z_0, 20r) \subset D(z_0, 2R)$, niin yllä olevan perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \delta(z_1) &= \Big|\delta(z_1) - \delta(\omega) + \delta(\omega)\Big| \overset{\triangle\text{-ey}}{\leq} \Big|\delta(z_1) - \delta(\omega)\Big| + \Big|\delta(\omega)\Big| \\ &= \Big|\delta(z_1) - \delta(\omega)\Big| + \delta(\omega) \overset{(6.9)}{\leq} \Big|z_1 - \omega\Big| + \delta(\omega) \\ &\overset{\omega \in D(z_1, 20r)}{\leq} \delta(\omega) + \delta(\omega) = 2\delta(\omega) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} 2\delta(\omega) &= 2\Big|\delta(\omega) - \delta(z_1) + \delta(z_1)\Big| \overset{\triangle\text{-ey}}{\leq} 2\Big|\delta(\omega) - \delta(z_1)\Big| + 2\Big|\delta(z_1)\Big| \\ &= 2\Big|\delta(\omega) - \delta(z_1)\Big| + 2\delta(z_1) \overset{(6.9)}{\leq} 2\Big|\omega - z_1\Big| + 2\delta(z_1) \\ &\overset{\omega \in D(z_1, 20r)}{\leq} 2\delta(z_1) + 2\delta(z_1) = 4\delta(\omega), \end{aligned}$$

siis

$$\delta(z_1) \leq 2\delta(\omega) \leq 4\delta(z_1). \tag{6.10}$$

Merkitään joukon K sulkeumaa $\overline{K}$:lla ja valitaan $z_2 \in \overline{D}(z_1, 10r)$ siten, että

$$M(10r, u, z_1) \leq 2u(z_2). \tag{6.11}$$

Tarkastellaan seuraavaksi kahta tapausta: Jos $z_2 \in F$, niin yhtälöistä (6.8), (6.11) ja u :n jatkuvuudesta seuraa, että

$$M(10r, u, z_1) \overset{(6.11)}{\leq} 2u(z_2) \overset{\gamma\text{:n määr.}}{\leq} 2\gamma \overset{(6.8)}{\leq} 4M(r, u, z_1). \tag{6.12}$$

Jos $z_2 \notin F$, niin merkitään kahta pistettä yhdistävää suoraa välimerkinnällä. Koska F on suljettu, niin on olemassa piste $\xi \in (z_1, z_2) \cap F$, missä $[z_2, \xi) \cap F = \varnothing$. Väitetään, että jokainen $\zeta \in [z_2, \xi)$ sisältää $\frac{r}{4}$−säteisen kiekon, jonka keskipiste on ζ ja jossa $u \geq 0$. Muutoin, u :n jatkuvuuden ja yhtälön (6.10) perusteella olisi $u(\omega) = 0$ jollakin ω kun

$$\left|\omega - \zeta\right| \overset{\omega \in D(\zeta, \frac{r}{4})}{\leq} \frac{r}{4} = \frac{\delta(z_1)}{400} \overset{(6.10)}{<} \frac{\delta(\omega)}{100}.$$

Tällöin olisi $\zeta \in F$, mikä olisi ristiriidassa pisteen ξ valinnan kanssa. Täten väite oli oikea. Koska välin $[z_2, \xi]$ pituus on korkeintaan $9r_{z_1} = \frac{9\delta(z_1)}{100}$, niin väli $[z_2, \xi]$ voidaan peittää korkeintaan 80 $\frac{r}{8}$−säteisellä kiekolla, joiden keskipisteet ovat välillä $[z_2, \xi)$, niin voidaan käyttää Harnackin epäyhtälön toista versiota (6.4) rekursiivisesti ja yhtälöä (6.11), jolloin

$$M(10r, u, z_1) \overset{(6.11)}{\leq} 2u(z_2) \overset{(6.4)}{\leq} 2\theta^{80} u(\xi) \underset{\xi \in F}{\overset{(6.12)}{\leq}} 4\theta^{80} M(r, u, z_1).$$

Tässä viimeinen yhtälö seuraa tiedosta $\xi \in F$ ja vastaavalla argumentilla kuin yhtälö (6.12). Täten, jos $c_1 = 4\theta^{80}$, niin joka tapauksessa saadaan

$$M(10r, u, z_1) \leq c_1 M(r, u, z_1),$$

mikä on lemman 6.6 oikeanpuoleinen epäyhtälö. $\square_{(ii)}$

Vasemmanpuoleisen epäyhtälön (i) todistaminen menee vastaavalla tavalla. Merkitään

$$\gamma' = \sup\{M(10r, u, z) : z \in E\},$$

ja valitaan piste $z_4 \in D(z_0, R)$ siten, että

$$\gamma' \leq 2M(10r, u, z_1). \tag{6.13}$$

Tällöin vastaavalla tavalla kuin aikaisemmin saadaan

$$\frac{1}{2} M(R, u, z_0) \leq u(z_4). \tag{6.14}$$

Tarkastellaan seuraavaksi kahta tapausta: Jos $z_2 \in F$, niin

$$\frac{1}{2} M(R, u, z_0) \leq u(z_4) \leq \gamma' \leq 2M(10r, u, z_1), \tag{6.15}$$

jolloin
$$\frac{1}{4}M(R,u,z_0) \leq M(10r,u,z_1).$$
Olkoon sitten $z_2 \notin F$. Koska F on suljettu, niin on olemassa piste $\xi' \in (z_1,z_4) \cap F$, missä $[z_4,\xi') \cap F = \varnothing$. Vastaavalla tavalla kuin edellä, jokainen $\zeta' \in [z_4,\xi')$ sisältää $\frac{r}{4}$–säteisen kiekon, jonka keskipiste on ζ' ja jossa $u \geq 0$.

Koska välin $[z_4,\xi']$ pituus on korkeintaan $9r_{z_1} = \frac{9\delta(z_1)}{100}$, niin jana $[z_4,\xi']$ voidaan peittää korkeintaan 80 $\frac{r}{8}$–säteisellä kiekolla, joiden keskipisteet ovat välillä $[z_4,\xi')$, niin voidaan käyttää Harnackin epäyhtälön toista versiota (6.4) rekursiivisesti ja yhtälöä (6.14), jolloin
$$\frac{1}{2}M(R,u,z_0) \leq u(z_4) \leq \theta^{80}u(\xi') \leq 2\theta^{80}M(r,u,z_1).$$
Täten, jos $c_1 = 4\theta^{80}$, niin jokatapauksessa saadaan
$$(c_1)^{-1}M(R,u,z_0) \leq M(10r,u,z_1),$$
mikä on lemman 6.6 vasemmanpuoleinen epäyhtälö. Täten väite on todistettu. $\square$

Osa 3. Picardin lause

7. Picardin lause

Tarkastellaan seuraavaksi kahden kompleksifunktion kuvajoukkoja:

Esimerkki 7.1. (a) Funktion $f(z) = e^z$ kuvajoukko on $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$: Osoitetaan ensin, että $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$: Olkoon $z = x + iy$ kompleksitason piste. Tällöin

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = (e^x \cos y + ie^x \sin y) \ \in \mathbb{C},$$

mutta ei ole olemassa pistettä $\in \mathbb{C}$ siten, että $e^z = 0$, koska $e^x > 0$ kaikilla luvuilla $x \in \mathbb{R}$ ja ei ole olemassa lukua $y \in \mathbb{R}$ siten, että $\cos y = \sin y = 0$.

Osoitetaan seuraavaksi yhtälön toinen suunta. Olkoon piste $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. On olemassa piste $z \in \mathbb{C}$ siten, että $e^z = w$:

$$z = \log w = ln|w| + i(Arg(w) + 2\pi k) \ \in \mathbb{C},$$

kun $k \in \mathbb{N}$.

Siis, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(b) Funktion $g : \mathbb{C} \to g : \mathbb{C}$, $g(z) = |z|$ kuvajoukko positiivinen reaaliakseli: Olkoon $z = x + iy$. Tällöin

$$g(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Selvästikin $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. Toisaalta, mikä tahansa reaaliluku $a \in \mathbb{R}$ voidaan esittää muodossa $\sqrt{x^2 + y^2}$. Siis, $g(\mathbb{C}) = \mathbb{R}_+$.

Onko sattumaa, että esimerkin 7.1 toisen funktion kuvajoukkoon ei kuulu yhtä kompleksitason pistettä ja toisen funktion kuvajoukko on positiivinen reaaliakseli? Ei ole, vaan kyseessä on eräs kompleksianalyysin syvimmistä tuloksista, kuten myöhemmin huomataan. Mikä sitten erottaa nämä esimerkin 7.1 funktiot toisistaan?

Lemma 7.2. *Eksponenttifunktio e^z on kokonainen ja $g(z) = |z|$ ei ole kokonainen.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että eksponenttifunktio on kokonainen: Olkoon $z = x + iy$, jolloin

$$f(z)e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Merkitään $u(z) = e^x \cos y$ ja $v = e^x \sin y$, ja laskataan näiden funktioiden osittaisderivaatat:

$$\begin{cases} u_x = e^x \cos y = v_y & \text{ja} \\ u_y = -e^x \sin y = -v_x. \end{cases}$$

Osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja ne toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt (1.5), jolloin lauseen 1.9 sivulla 6 mukaan eksponenttifunktio on kokonainen.

Osoitetaan seuraavaksi, että funktio $g(z) = |z|$ ei ole kokonainen: Merkitään $z = x + iy$, jolloin $g(z) = g(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nyt funktio g voidaan esittää kahden funktion summana $f = u + iv$, missä $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $v = 0$. Lasketaan seuraavaksi näiden funktioiden osittaisderivaatat:

$$\begin{cases} u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ja} \\ v_x = v_y = 0 \end{cases}$$

Osittaisderivaatat eivät toteuta Cachy-Riemannin yhtälöitä (1.5), jolloin funktio g ei ole edes analyyttinen, saati kokonainen. $\square$

Näyttäisi siis siltä, että kokonaisen funktion kuvajoukossa on pahimmassa tapauksessa yhden pisteen reikä. Kyseessä on syvällinen tulos, joka tunnetaan nimellä *Picardin lause:*

Lause 7.3. *Kokonaisen, ei-vakion, kompleksitasossa analyyttisen funktion f kuvajoukon komplementti, $\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})$, sisältää korkeintaan yhden pisteen.*

Todistus. Todistetaan väite antiteesin avulla. Oletetaan, että funktio F on kokonainen, ei-vakio, analyyttinen funktio siten, että sen kuvajoukon komplementti sisältää kaksi kompleksitason erillistä pistettä. Toisin sanoen $\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C}) = \{a_1, a_2 : a_1 \neq a_2,\ a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$. Tällöin funktio $f := \frac{F-a_1}{a_2-a_1}$ on ei-vakio, kokonainen funktio kompleksitasossa siten, että $f \neq 0, 1$ aina. Määritellään funktiot u_1, u_2 asettamalla $u_1 = \log|f| - 2$ ja $u_2 = \log|f-1| - 2$. Tällöin funktiot u_1 ja u_2 ovat harmonisia koko tasossa (esimerkki 4.8 sivulla 15). Lauseen 6.5 perusteella funktiot u_1 ja u_2 ovat Harnack-funktioita jollakin vakiolla θ. Koska ei-vakiot harmoniset funktiot eivät ole rajoitettuja ylä- eikä alapuolelta (lause 4.7 sivulla 14), voidaan valita piste $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että $u_1(z_0) = 0$ ja soveltamalla lemmaa 6.6 kun $R = 2^j,\ j =, 2\ldots,$ jolloin saadaan jonot $\{z_j\}$, $\{r_j\}$ missä

$$(7.1) \qquad \begin{aligned} &(\alpha)\ \lim_{j\to\infty} M(r_j, u_1, z_j) = \infty, \\ &(\beta)\ M(10r_j, u_1, z_j) \leq c_1 M(r_j, u_1, z_j), \\ &(\gamma)\ u_1(z_j) = 0. \end{aligned}$$

Määritellään funktiot v_1, v_2, $j = 1, 2, \ldots,$ kiekossa $D(0, 1)$ asettamalla $v_{i,j}(z) = \frac{u_i(z_j+10r_jz)}{M(10r_j,u_1,z_j)}$ kun $i = 1, 2$ ja $z \in D(0, 1)$. Yhtälöistä (7.1) nähdään, että funktiot $v_{i,j}$ ovat nousevia harmonisia funktiojonoja, jolloin lauseen 6.3 sivulla 23 perusteella jonon $\{v_{i,j}\}$ osajono suppenee tasaisesti kiekon $D(0,1)$ kompakteissa osajoukoissa kohti kiekossa $D(0,1)$ harmonisia funktioita v_1 ja v_2, kun $i = 1,2$. Edelleen yhtälöistä (7.1) voidaan päätellä, että

$$
\begin{aligned}
&(*)\ v_i(0) = 0 \text{ kun } i = 1,2,\\
(7.2)\qquad &(**)\ v_1 = v_2 \text{ joukossa } \cup_{i=1}^{2} \{z : v_i(z) > 0\} \neq \varnothing,\\
&(***)\ \{z : v_1(z) < 0\} \cap \{z : v_2(z) < 0\} = \varnothing.
\end{aligned}
$$

Koska funktiot v_1 ja v_2 ovat harmonisia funktioita, niin yhtälöstä (7.2)(**) seuraa , että $v_1 \equiv v_2$ (lause 4.4 sivulla 13). Tällöin yhtälöstä (7.2)(***) seuraa, että $v_1 \geq 0$. Nyt Harnackin epäyhtälön toisen version (6.4) ja yhtälön (7.2)(*) avulla voidaan päätellä, että $v_1 \equiv 0$, mikä on ristiriidassa yhtälön (7.2)(**) kanssa. Täten antiteesi on väärä, joten väite on todistettu. $\square$

Todistuksesta on syytä huomata, että lemmaa 6.6 käytettiin vain takaamaan, että $v_1 \not\equiv 0$. Itseasiassa, yhtälöstä (7.1)(β) ja tasaisesta konvergenssista nähdään, että

$$M\left(\frac{1}{10}, v_1, 0\right) = \frac{M(1/10, u_1, 0)}{M(1, u_1, 0)} \geq \frac{M(1/10, u_1, 0)}{c_1 M(1/10, u_1, 0)} = \frac{1}{c_1}.$$

Huomautus 7.4. Lausetta 4.4 sovellettiin itse asiassa funktioon $f = v_1 - v_2$, jolloin $f \equiv 0$.

Tämä lause on saanut nimensä ranskalaisen *Émile Picard*in (1856-1941) mukaan, joka todisti tuloksen jo vuonna 1879. Picard oli myös Ranskan tiedeakatemian jäsen, johon hänet valittiin vuonna 1889 edeltäjänsä Charles de Freycinetin paikalle.

Tässä esitetty on John L. Lewisin [10] vuodelta 1994. Borelin todistus vuodelta 1887 löytyy kirjasta [8] ja kirjasta [14] löytyy vielä yksi todistus. Picardin lause tunnetaan myös nimellä Picardin pieni lause, koska on olemassa myös ns. Picardin suuri lause: Jos analyyttisellä funktiolla $f(z)$ on oleellinen singulariteetti pisteessä w, niin kaikissa pisteen w sisältävissä avoimissa joukoissa on voimassa, että funktion f kuvajoukko sisältää jokaisen kompleksiluvun yhtä lukuun ottamatta. Tämän lauseen todistus löytyy kirjasta [11].

Viitteet

[1] George F. Carrier, Max Krook, ja Carl E. Pearson. *Functions of a Complex Variable — Theory and Technique*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 University City Science Center, Philadelphia, PA 19104-2688, siam laitos, 2005.

[2] William R. Derric. *Complex Analysis and Applications*. Wadsworth, Wadsworth International Group, Belmont, California 94002, a division of Wadsworth, Inc., toinen laitos, 1984.

[3] A. Eremenko ja J. Lewis. Uniform limits of certain A-harmonic function with applicatios to quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. I Math.*, (16):361–375, 1991.

[4] L. L. Helms. *Introduction to Potential Tehory*. Krieger Publishing, Huntingdon, N.Y., 1975. Reprint of Wiley-Interscience, Pure and Applied Mathematics, Vol. 22, 1969.

[5] O. D. Kellog. *Foundations of Modern Potential Theory*. Springer-Verlag, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, reprint of 1929 edition laitos, 1967.

[6] Tero Kilpeläinen. Kompleksianalyysi, 2006. Luentomuistiinpanoja 2006. http://www.math.jyu.fi/ terok/opetus/kompleksi/kompleksi.pdf.

[7] Lassi Kurittu. Kompleksianalyysi, 2004. Luentomuistiinpanoja keväällle 2004. http://www.math.jyu.fi/ lkurittu/kompleksianalyysi.pdf.

[8] Serge Lang. *Complex Analysis*. Springer, Spriger-Verlag New York, Inc., 175 Fidth Avenue, New York, NY 10010, USA, neljäs laitos, 1999.

[9] Olli Lehto. *Funktioteoria I-II*. Limes Ry, Helsinki, 1982.

[10] John L Lewis. Picard's Theorem and Rickman's Theorem by Way of Harnack's Inequality. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 122(1):199–206, sep 1994.
http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9939%28199409%29122%3A1%3C199
%,APTARTB%3E2.0.CO%3B2-6.

[11] Raghavan Narasimhan. *Complex analysis in One Variable*. Birkhäuser, 1985.

[12] Bruce P. Palka. *An introduction to Complex Function Theory*. Springer-Verlag, Spriger-Verlag New York, Inc., 175 Fidth Avenue, New York, NY 10010, USA, 1991.

[13] S. Rickman. On the number of omitted values of entire quasiregular mappings. *J. Analyse Math*, (37):100–117.

[14] Walter Rudin. *Real & Comlex Analysis*. TaTa McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., New Delhi, 1978.