JYVÄSKYLÄ STUDIES IN EDUCATION, PSYCHOLOGY AND SOCIAL RESEARCH
337

Pirjo Tikkanen

"Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin"

Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

JYVÄSKYLÄ STUDIES IN EDUCATION, PSYCHOLOGY AND SOCIAL RESEARCH 337

Pirjo Tikkanen

"Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin"

Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana

Esitetään Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan suostumuksella
julkisesti tarkastettavaksi yliopiston Villa Ranan Blomstedtin salissa
toukokuun 10. päivänä 2008 kello 12.

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

JYVÄSKYLÄ 2008

"Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin"

Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana

JYVÄSKYLÄ STUDIES IN EDUCATION, PSYCHOLOGY AND SOCIAL RESEARCH 337

Pirjo Tikkanen

"Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin"

Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

JYVÄSKYLÄ 2008

Editors
Pauli Kaikkonen
Department of Teacher Education, University of Jyväskylä
Irene Ylönen, Marja-Leena Tynkkynen
Publishing Unit, University Library of Jyväskylä

URN:ISBN:978-951-39-3247-3
ISBN 978-951-39-3247-3 (PDF)

ISBN 978-951-39-3214-5 (nid.)
ISSN 0075-4625

Jyväskylä University Printing House, Jyväskylä 2008

ABSTRACT

Tikkanen, Pirjo Marketta
”Easier and more fun than I thought” Mathematics experienced by fourth-graders in Finnish and Hungarian comprehensive schools.
Jyväskylä: University of Jyväskylä, 2008, 318 p.
(Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research
ISSN 0075-4625; 337)
ISBN 978-951-39-3247-3 (PDF), 978-951-39-3214-5 (nid.)
Summary
Diss.

The study compares the experienced mathematics curriculum of Finnish and Hungarian 4th grade comprehensive school pupils. The experienced mathematics curriculum comprises emotions, attitudes to and beliefs about mathematics, the learning and teaching of mathematics, and the mathematical self-concept. Three groups was compared. The first group consisted of 20 Finnish pupils, the second of 23 Hungarian pupils - both taught with the Hungarian Varga–Neményi method - and the third of 21 Finnish pupils taught using the Finnish approach. The data consisted of pupils' writings and drawings. A pedagogic hermeneutic-phenomenological approach was used. The writings were analyzed by theme while a three-stage method was developed for analysis of the drawings: 1) documenting the characteristics, 2) attaching characteristics to concepts and 3) holistic evaluation of the drawings. Three experience types were identified in the experienced curriculum according to mathematical contents and style of narration: The argumentative problem solver in the Finnish Varga–Neményi group, the contrasting equation solver in the Hungarian Varga–Neményi group and the stating calculator in the Finnish group. In the Finnish Varga–Neményi group the pupils' working method is student-centered, both in pairs and individually. Learning mathematics is understanding and discovering. In the Hungarian Varga-Neményi group teaching is teacher-directed questioning and individual working. Learning mathematics is understanding and discovering. In the Finnish group teaching is teacher-directed questioning and individual working. Learning mathematics is understanding basic calculations. Regardless of the teaching method most Finnish and Hungarian pupils have a positive attitude towards mathematics. They like mathematics. The pupils consider mathematics to be easy and important. Most Finnish and Hungarian pupils have a positive mathematical self-concept. The experienced mathematics curriculum revealed some prevalent beliefs about mathematics and mathematics teaching. It also revealed factors which shape the mathematical attitude and self-concept of young pupils. The experienced mathematics curriculum provides teachers with important feedback on how to develop mathematics teaching and curriculum.

Keywords: experienced mathematics curriculum, emotion, attitude, belief, self-concept, comprehensive school, pupil

Author's address Pirjo Tikkanen
Leppälahdentie 75
FIN-41450 LEPPÄLAHTI
pirjo.tikkanen@hirspek.fi

Supervisor Professor Eira Korpinen
Department of Teacher Education
University of Jyväskylä, Finland

Reviewers Professor Markku S. Hannula
Department of Mathematics
University of Tallinn, Estonia

Professor Erkki Pehkonen
Department of Applied Sciences of Education
University of Helsinki, Finland

Opponent Professor Erkki Pehkonen
Department of Applied Sciences of Education
University of Helsinki, Finland

ESIPUHE

Kiinnostukseni tutkia koettua matematiikan opetussuunnitelmaa virisi Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksen Tutkiva opettaja -verkoston kansainvälisessä asiantuntijavaihdossa. Se alkoi Matematiikkaa unkarilaisittain -hankkeena vuonna 2000 unkarilaisten opettajien ja opettajankouluttajien kanssa. Hankkeen täydennyskoulutuskursseilla perehdyin matematiikan unkarilaiseen pedagogiikkaan unkarilaisten opettajien johdolla. Täydennyskoulutuksen antia olen soveltanut matematiikan opetuksessa luokilla 1–4. Hankkeen aikana minulla oli tilaisuus matkustaa Unkariin seuraamaan matematiikan opetusta esiopetuksesta lukioon. Oppitunneilla Unkarissa kiinnitti huomiota oppilaiden runsas toiminnallisuus ja vilkas keskustelu. Unkarilaiset opettajat korostivat opetuksen toiminnallisuutta ja vuorovaikutusta oppilaiden mahdollisuutena hankkia kokemuksia matemaattisten käsitteiden muodostamiseksi. Näistä havainnoista virisi ajatus tutkia koulukokemuksia siitä, miten oppilaat kokevat koulussa matematiikan, sen oppimisen ja opetuksen.

Kiitän ohjaajaani professori Eira Korpista. Olen saanut nauttia taitavasta ja huolehtivasta ohjauksestasi. Pyyteettömästi olet ollut käytettävissä ohjaukseen erityisesti iltaisin ja viikonloppuina, jolloin tutkivalla opettajalla on vapaata päivittäisestä työstään.

Esitän kiitokset työni esitarkastajille professori Markku Hannulalle ja professori Erkki Pehkoselle. Te autoitte kannustavilla ja täydentävillä lausunnoillanne rikastamaan tutkimusta koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta.

Kiitän unkarilaisia opettajia, erityisesti Márta Sz. Oraveczia, Ágnes Kivovicsia, Eszter C. Neményitä ja Veronika Dobosné Bányainia. Kiitän myös yhteistyökoulun Fazekas Mihály Fövárosi Gyakorló Altalános Iskola és Gimnáziumin rehtoria ja opettajia siitä, että olen saanut vierailla koulussanne seuraamassa matematiikan oppitunteja ja keskustelemassa kanssanne. Lämpimän kiitoksen ansaitsevat Fazekasin koulun oppilaat, jotka ovat toimineet unkari-englanti -tulkkeina vierailujen aikana, ja oppilaat, joiden oppitunteja olen saanut seurata. Kiitän neuvonantaja Lilla Bogdánia Finnagorassa, Suomen kulttuurin, tieteen ja talouden keskuksessa, yhteistyöstä Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa -seminaarin järjestämisestä. Kiitän vieraanvaraisuudesta opettaja Zsuzsa Heroldia ja koulua Matra-vuoriston rinteellä. Tulkit Suomessa ja Unkarissa: Eszter Friedman, Anna Hajdu, Nina Ortju ja Anna-Maija Viljanen-Pihkala olette kärsivällisesti jaksaneet pohtia kanssani suomen ja unkarin sanojen merkityksiä. Kiitän arvokkaan kielitaitonne jakamisesta.

Jyväskylän normaalikoulun rehtorit Sari Keinonen ja Pekka Ruuskanen sekä päivittäinen työyhteisöni ovat kannustaneet paneutumaan matematiikkaan, sen oppimiseen ja opettamiseen. Kiitokset kannustuksestanne.

Kiitän erityisesti Jyväskylän yliopiston rehtoria Aino Sallista määrärahasta lehtorin tutkimustyöhön. Kasvatustieteiden tiedekunnan dekaani Helena

Rasku-Puttonen ansaitsee kiitokset mahdollisuudestani viimeistellä työni julkaisukelpoiseksi. Kiitän kansainvälisen vaihdon keskusta CIMO:a taloudellisesta tuesta. Ilman Kauko Sorjosen säätiön tukea ei olisi voitu järjestää opettajien täydennyskoulutusta ja hankkia opetusvälineitä. Kiitän hanketta ja tutkimusta tukeneita Magnus Ehrnrootin säätiötä, OKKA-säätiötä, Teknologiateollisuuden säätiötä, Opetushallitusta ja Wihurin rahastoa. Kustannusosakeyhtiöt, Otava, Tammi ja WSOY lahjoittivat matematiikan opettajan oppaita. Lehtori Glyn Hughes ja lehtori Marja-Leena Koppinen tarkistivat työni kieliasun. Graafikko Minna Hirvonen viimeisteli piirrokset. Kiitokset kustannusosakeyhtiöille, kielentarkastajille ja graafikolle.

Esitän kiitokset professori Pauli Kaikkoselle työni hyväksymisestä Jyväskylän yliopiston julkaisusarjaan. Kiitokset ansaitsevat kasvatustieteiden tohtori Kauko Hihnala, filosofian tohtori Jorma Joutsenlahti, filosofian tohtori Raimo Kaasila, filosofian tohtori Lauri Kahanpää, dosentti Pekka Kupari, kasvatustieteiden maisteri Anni Lampinen, kasvatustieteiden tohtori Henry Leppäaho, professori (emeritus) Paavo Malinen, professori George Malaty, professori Pekka Neittaanmäki, dosentti Marjatta Näätänen, kasvatustieteiden maisteri Anna-Maija Risku ja Varga–Neményi -rekisteröidyn yhdistyksen jäsenet. Te olette keskustelleet kanssani matematiikasta, oppimisesta, opetuksesta ja niiden tutkimisesta aikaa ja vaivaa säästämättä.

Kiitän koetun matematiikan opetussuunnitelman suomalaisia ja unkarilaisia perusopetuksen neljäsluokkalaisia ja opettajia. Ilman teitä tutkimusta koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta ei olisi. Lasten piirrosten ja kirjoitelmien avulla sain kurkistaa oppilaan maailmaan. Opin paljon teiltä oppimisenne parhailta asiantuntijoilta.

Matematiikkaa unkarilaisittain -hankkeessa ja tutkimuksessa koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta olen kasvanut tutkijana, opettajana ja ihmisenä. Hanke ja väitöskirjan kirjoittaminen on onnistunut perheeni tuen ansiosta. Kiitän aviomiestäni Raimoa ja poikaani Henrikiä kodin arkiaskareista ja tietokoneavusta. Kiitos äidilleni Liisalle virkistävistä puheluista. Kiitos isälleni Einolle autuaille lasku- ja mittausopin maille. Tyttäresi innostui matematiikasta, kuten aikoinaan ennustit.

Omistan työni *"Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin" Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana* lapsille, jotta innostus matematiikkaan ja sen oppimiseen säilyisi.

Jyväskylän maalaiskunnassa talvilomalla 2008

Pirjo Tikkanen

SISÄLLYS

KUVIOT, PIIRROKSET JA TAULUKOT LUVUITTAIN

KUVIOT

PIIRROKSET

TAULUKOT

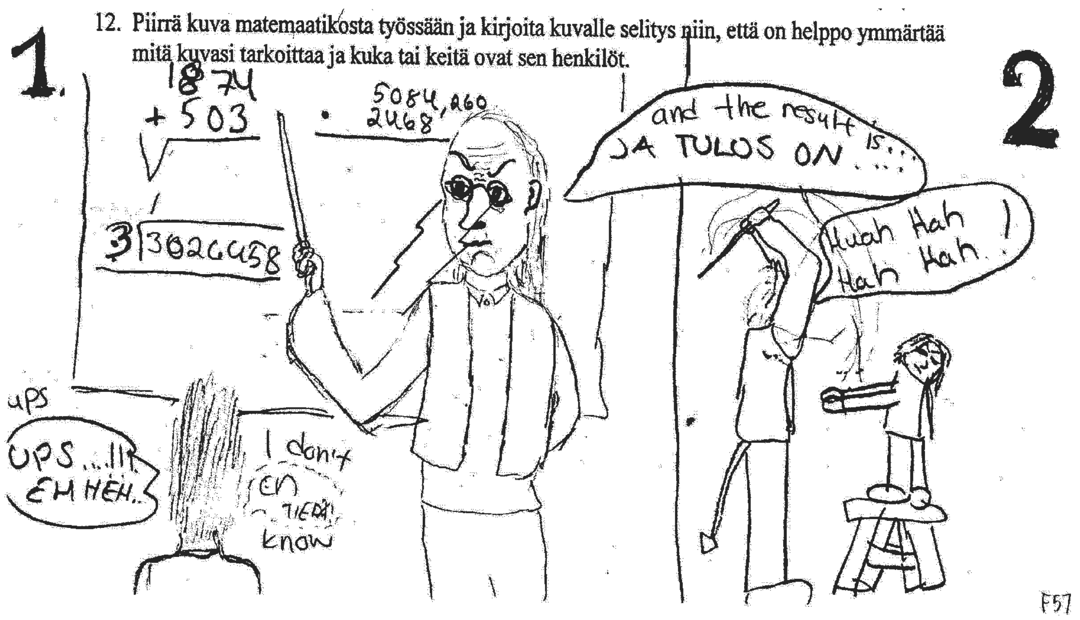
1 JOHDANTO

Hyvä lukija, aloittakaamme eläytymällä matematiikkaan pienen ongelman avulla.

Olet Unkarissa idyllisessä Szentendren käsityöläiskaupungissa, josta lähdet patikoimaan kohti Budapestia ystäväsi luokse kello 17. Kävelyvauhtisi on keskimäärin 4 kilometriä tunnissa. Ystäväsi lähtee Budapestista sinua vastaan puolta tuntia myöhemmin, mutta hän kävelee 6 kilometrin keskituntinopeudella. Szentendren ja Budapestin välimatka on 20 kilometriä. Kun kohtaatte, kumpi teistä on lähempänä Budapestia?

Mitä teit? Miltä tehtävä ja sen ratkaiseminen tuntui? Ihastutti vai vihastutti? Helppoa vai haasteellista? Koitko ahaa-elämyksen? Palautuiko koulumatematiikka mieleen? Tervetuloa jakamaan koulukokemuksia matematiikasta!

Oppilaiden koulukokemuksista viestivät matematiikkakuvat Suomesta, Yhdysvalloista, Englannista, Ruotsista ja Romaniasta Pickerin tutkimuksessa (2000; myös Picker & Berry 2000; 2001), jossa 12–13-vuotiaat, lähes viisi sataa 7. ja 8. luokan oppilasta piirsi matemaatikon työssään. Viidenneksessä piirustuksista matemaatikko kuvattiin koulun opettajana, joka pakottaa oppimaan pelottelemalla, uhkailemalla tai väkivallalla. Piirrokset opetustaidottomasta opettajasta osoittivat, ettei hän hallitse oppilasryhmää eikä opetettavia sisältöjä. Ylimielinen opettaja piirroksissa osoitti olevansa viisaampi ja parempi kuin oppilaansa. Häneltä puuttui tervettä järkeä, tyylitietoisuutta ja laskutaitoja. Ylirasittuneella ja väsyneellä opettajalla piirroksissa oli yliluonnollisia voimia, joten hän saattoi käyttää noituutta ja taikajuomia. Opettaja muistutti hiuksiltaan Albert Einsteinia, jonka lähiympäristössä oli kaava $E = mc^2$ matematiikan vaikeuden vertauskuvana. Picker (2000), Picker ja Berry (2000; 2001) päättelivät, että oppilaiden mielikuvat ovat syntyneet koulun matematiikan opetuksessa, median ja yhteiskunnallisten myyttien vaikutuksesta. Puhuttelevaa viestiä oppilaiden kuvaamasta matematiikan opetuksesta säestävät vielä puhuttelevammat kuvat, joista esimerkkinä on yksi alla olevassa piirroksessa.



PIIRROS 1.1 Ja tulos on … (Picker 2000, 142)

Millaista matematiikan opetuksen tulisi olla, jotta myönteisiä kokemuksia syntyisi? Nardi ja Steward (2003, 363–365) kertovat, että englantilaisoppilaat odottavat matematiikan opettajan selittävän opittavat asiat selvästi ja konkreettisesti. He pitävät tarkoituksenmukaisina tehtäviä, jotka tarjoavat mahdollisuuden tutkia, tehdä projektitöitä, pelata ja ratkaista ongelmia. Matematiikkaa tulisi liittää muihin aineisiin, kuten taiteisiin ja teknologiaan. Jotta opettajaan syntyisivät hyvät suhteet, häneen olisi voitava luottaa. On tärkeää englantilaisten oppilaiden mukaan, että opettaja pitää matematiikasta. Ilmapiirin oppitunneilla tulisi olla sellainen, ettei tarvitse pelätä, kokea nöyryytyksiä ja nolauksia. Opettaja ottaa huomioon oppilaiden aiemmat tiedot matematiikasta. Siitä voi pitää silloin, kun sitä osaa. Matematiikan opetuksen tulisi tarjota myös iloa, joka ei tarkoita kevyttä ja pintapuolista huvittelua, vaan sen tulisi olla oppimisen kannalta tarkoituksenmukaista, jännittävää ja vaihtelevaa. Miten matematiikan opetussuunnitelma ja opetusmenetelmä vastaavat haasteeseen?

Matematiikalla koulun oppiaineena on keskeinen ja arvostettu asema, mikä ilmenee sen monitasoisissa opetussuunnitelmissa ja niiden tutkimustuloksissa. Sen virallisessa opetussuunnitelmassa tarkoitettuja kognitiivisia ja affektiivisia oppimistuloksia on mitattu sekä kansallisesti että kansainvälisesti TIMSS- ja PISA-tutkimuksissa. Niitä uutisoidaan ja verrataan kansallista menestystä kansainväliseen tasoon. TIMSS 1999 -tutkimuksessa kansainvälisesti arvioituna suomalaisten seitsemäsluokkalaisten osaaminen oli hyvää, luottamus omiin taitoihin varsin vahvaa, mutta myönteisesti matematiikkaan asennoituvia oppilaita oli vähän (Kupari ym. 2001, 37–38, 126–127). Vuoden 2003 PISA-tutkimuksessa 15-vuotiaat suomalaisoppilaat olivat keskiarvotulosten mukaan kansainvälisten huippuosaajien joukossa, mutta he olivat vähemmän kiinnostuneita matematiikasta kuin oppilaat useimmista maista (Kupari ym. 2004, 7–8, 23–24). Jotta saavutettaisiin laadukkaita oppimistuloksia, panostetaan opettajankoulutuksessa toteutettavaan opetussuunnitelmaan matematiikan opetuksen uudistamiseksi (mm. Kaasila 2000; Kupari 1999; Pietilä 2002). Arvioidaan oppikirjoja mahdollisina opetussuunnitelmina matematiikan oppimisen edistämiseksi (mm. Kuusisto 1989; Niemi 2001; 2004; Perkkilä 2002; Törnroos 2004). Näiden opetussuunnitelmien lisäksi on myös koettu opetussuunnitelma, jonka fenomenologista selvittämistä Uusikylä ja Kansanen (1988, 5) aikoinaan korostivat. Onko tämä vanha ajatus koetusta opetussuunnitelmasta unohtunut vai jäänyt muiden opetussuunnitelmien varjoon?

Koetun matematiikan opetussuunnitelman nähdään sisältävän tunteita, asenteita, uskomuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta sekä käsityksiä itsestä matematiikan oppijana. Monien tutkijoiden mukaan niin tunteet, asenteet, uskomukset kuin käsitykset itsestä oppijana ovat yhteydessä matematiikan oppimiseen (mm. Abu-Hilal 2000; DeBellis 1996; 1998; Goldin 1998; 2002; Gómez-Chacón 2000; McLeod 1992; Schoenfeld 1983; 1987). Konstruktivistisen oppimisnäkemyksen mukaan oppilaiden tulkintoja matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta säätelevät tunteet, asenteet, uskomukset ja minäkäsitys. Furinghettin ja Pehkosen (2000, 8–9) sekä Pehkosen ja Törnerin (1996) mukaan esimerkiksi uskomukset säätelevät havaintoja, ajattelua ja toimintaa. Ne toimivat oppimisen ja opetuksen indikaattoreina. Uskomukset voivat toimia myös muutosta hidastavana voimana ja niillä on ennustava luonne.

Koettu matematiikan opetussuunnitelma liittyy koulutuksen affektiiviseen alueeseen. Goldin (1998, 155; 2002, 60–62) ja Gómez-Chacón (2000) arvioivat affektiivisen alueen perustavanlaatuisimmaksi yritettäessä ymmärtää oppilaiden ja aikuisten matemaattista toimintaa ja kykyrakennetta. Oppilaan affektiivisen alueen ominaisuudet ja toimintatavat ovat koulun kasvatuksellisia tavoitteita tiedollisten tavoitteiden ohella. Suomen Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004, 156, 159) matematiikan opetuksen tavoitteena vuosiluokilla 1–2 on, että oppilas saa tyydytystä ja iloa ongelmien ymmärtämisestä ja ratkaisemisesta, vuosiluokilla 3–5 tavoitellaan, että oppilas saa onnistumisen kokemuksia matematiikan parissa. Affektiivinen alue edustaa siis sekä tavoiteltuja oppimistuloksia että keinoja tiedollisten tavoitteiden saavuttamiseksi.

Koettua opetussuunnitelmaa on tutkittu muita opetussuunnitelmia huomattavasti vähemmän. Allen (1980) ja Hoffmann (2001) ovat tutkineet nuorten ja aikuisten kokemaa opetussuunnitelmaa. Kankaanranta ja Linnakylä (1993) ovat tutkineet Suomen peruskoulun kolmasluokkalaisten kokemuksia koulupäivästä. Kolmasluokkalaiset suhtautuivat matematiikkaan erittäin kaksijakoisesti: toisista se oli koulun mukavin oppiaine, toisista ikävin, jopa pelottava. Kolmasluokkalaisten asennoituminen oli yhteydessä edellytyksiin. Jos matematiikka koettiin helpoksi, se oli mukavaa, mutta jos matematiikka oli vaikeaa, sitä inhottiin (emt. 34–35). Yhdessäkään näistä kolmesta tutkimuksesta pääaiheena ei ole matematiikka, sen oppiminen ja opetus, vaikka ne sivuavat näitä aiheita.

Perusopetuksen alakoululaisten affektiivista aluettakin on tutkittu huomattavasti vähemmän kuin yläkoululaisten, lukiolaisten, opettajien ja opettajaopiskelijoiden. Tämä on havaittavissa esimerkiksi Euroopan neljännessä matematiikkakasvatuksen kongressissa vuonna 2005 (CERME 4). Kongressin

Affect and mathematical thinking -työryhmässä oli vain yksi yhdestätoista esityksestä perusopetuksen alakoululaisten affektiiviselta alueelta (http://ermeweb.free.fr/CERME4/). Kongressin työryhmä, mm. Kaasila (2000) ja Perkkilä (2002, 175) haastavat varhaisten matematiikkakokemusten tutkimiseen.

Kiinnostus tutkia koettua matematiikan opetussuunnitelmaa on virinnyt Tutkiva opettaja -verkoston kansainvälisessä asiantuntijavaihdossa. Se alkoi Matematiikkaa unkarilaisittain -hankkeena (http://www.jyu.fi/okl/tuope; http://www.math.helsinki.fi/Solmu) vuonna 2000 unkarilaisten opettajien ja opettajankouluttajien kanssa. Kansainvälisen opettajien koulutushankkeen tavoitteena on ollut kehittää matematiikan opetussuunnitelmaa, laatia oppimateriaaleja ja kokeilla niitä käytännössä. Opetussuunnitelman kehittämisen tavoitteena on ollut tarjota perusopetuksen oppilaille myönteisiä kokemuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta.

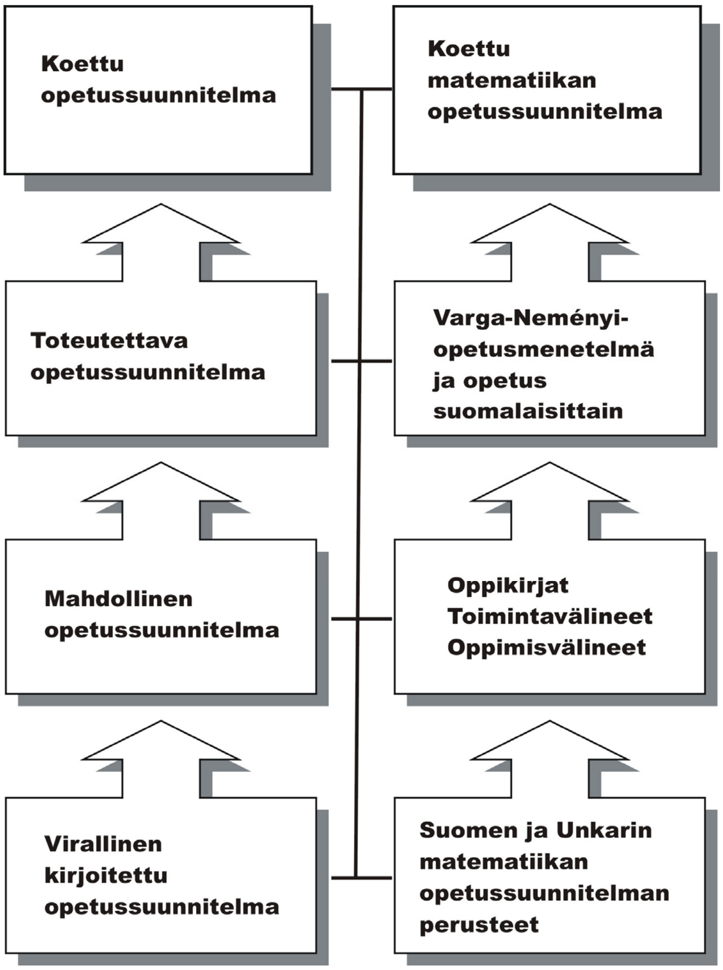
Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää ja verrata suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa. Koettua matematiikan opetussuunnitelmaa kuvataan ja verrataan yhteydessä Suomen matematiikan opetussuunnitelman perusteisiin 2004, Unkarin matematiikan opetussuunnitelman perusteisiin 2003, matematiikan unkarilaiseen Varga–Neményi -opetusmenetelmään ja opetukseen suomalaisittain: Miten oppilaat asennoituvat matematiikkaan? Millaisia uskomuksia heillä on matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta? Millaisia käsityksiä heillä on itsestään matematiikan oppijoina?

Suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten koetun matematiikan opetussuunnitelman tavoittamiseksi sovellettiin kanadalaisen van Manenin (1997, 30–31; 2002) pedagogista hermeneuttis-fenomenologista lähestymistapaa. Tutkimus on kuvattavissa pelkistetysti kuuden vaiheen dynaamisena vuorovaikutuksena:

1) Suuntautuminen kiinnostavaan koettuun matematiikan opetussuunnitelmaan edellytti pitkäkestoista kouluttautumista matematiikan unkarilaiseen Varga–Némenyi -opetusmenetelmään, sen soveltamista perusopetuksen vuosiluokilla 1–4 sekä tutkimus- ja opintomatkoja Unkariin (ks. liitettä 1).
2) Matematiikkaan liittyvien koulukokemusten kirjoitelma- ja piirrosaineisto on koottu Matematiikkaa unkarilaisittain -hankkeen yhteydessä kolmesta opetusryhmästä. Ensimmäisessä ryhmässä oli 20 suomalaista perusopetuksen neljäsluokkalaista ja toisessa 23 unkarilaista neljäsluokkalaista. Molempia opetusryhmiä oli opetettu matematiikan unkarilaisella Varga–Neményi -opetusmenetelmällä. Kolmannessa opetusryhmässä oli 21 suomalaista perusopetuksen neljäsluokkalaista, joille oli opetettu matematiikkaa suomalaisittain.
3) On pohdittu koetulle matematiikan opetussuunnitelmalle ominaisia teemoja, jotka ovat matematiikka, sen oppiminen, opetus ja oppilas oppijana.

4) Koulukokemuksia matematiikasta on kuvattu uudelleen kirjoittamisen avulla, jota edustaa tämä tutkimusraportti koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta.
5) Vahva pedagoginen suhde korostuu Varga–Neményi -opetusmenetelmän, suomalaisen matematiikan opetuksen ja opettajanäkökulman kautta.
6) Tutkimuskontekstia on tasapainotettu ottamalla huomioon osat ja kokonaisuus, mikä ilmenee opetussuunnitelman eri tasojen yhteytenä (ks. kuviota 1.1).

Koetun matematiikan opetussuunnitelman nähdään syntyneen yhteydessä viralliseen kirjoitettuun, mahdolliseen ja toteutettavaan opetussuunnitelmaan. Seuraava kuvio 1.1 havainnollistaa tässä tutkimuksessa käytettyjä opetussuunnitelmallisia tasoja ja niiden välistä yhteyttä. Näin opetussuunnitelmaa pidetään monitasoisena rakennelmana.



KUVIO 1.1 Opetussuunnitelman eri tasot

Kukin taso esittää tiettyyn kontekstiin sijoittuvia koettuun opetussuunnitelmaan yhteydessä olevia tekijöitä. Opetussuunnitelmatasoista käytetään yleisessä didaktisessa kirjallisuudessa ja tutkimuksissa nimityksiä kirjoitettu (tarkoitettu, intended), mahdollinen (potentially, implemented) ja toteutettava (toteutettu, toimeenpantava, toimeenpantu, implemented) opetussuunnitelma (Kari 1994; Lahdes 1980; Saari 2004; Schmidt, McKnight, Valverde, Houang & Wiley 1997; Törnroos 2004; Uusikylä & Atjonen 2002). Virallisella opetussuunnitelmalla tässä yhteydessä tarkoitetaan Suomen perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelman perusteita 2004 ja Unkarin perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelman perusteita, Nemzeti Alaptanterv, 2003. Mahdollinen opetussuunnitelma sisältää matematiikan oppikirjoja, toiminta- ja oppimisvälineitä. Toteutettavalla matematiikan opetussuunnitelmalla tarkoitetaan matematiikan unkarilaista Varga–Neményi -opetusmenetelmää ja opetusta suomalaisittain. Opetussuunnitelman monitasoisuus on johtanut monitasoisten lähteiden käyttöön, mikä on havaittavissa lähdeluettelosta. Lähteet on ryhmitelty tieteellisten lähteiden jälkeen sähköisiin lähteisiin, oppikirjalähteisiin ja muihin lähteisiin.

Tutkimus koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta on ajankohtainen ja tärkeä. Luokanopettajien täydennyskoulutuksia matematiikan unkarilaisesta opetusmenetelmästä on toteutettu eri puolilla Suomea, Jyväskylässä, Polvijärvellä, Hämeenlinnassa, Joensuussa, Oulussa, Rovaniemellä ja pääkaupunkiseudulla. Luokanopettajat opettavat perusopetuksen nuorimpia oppilaita. Kun on kyse nuorista oppilaista, on kulttuurisen kontekstin huomioiminen erityisen tärkeää opetusmenetelmän siirtyessä maasta toiseen.

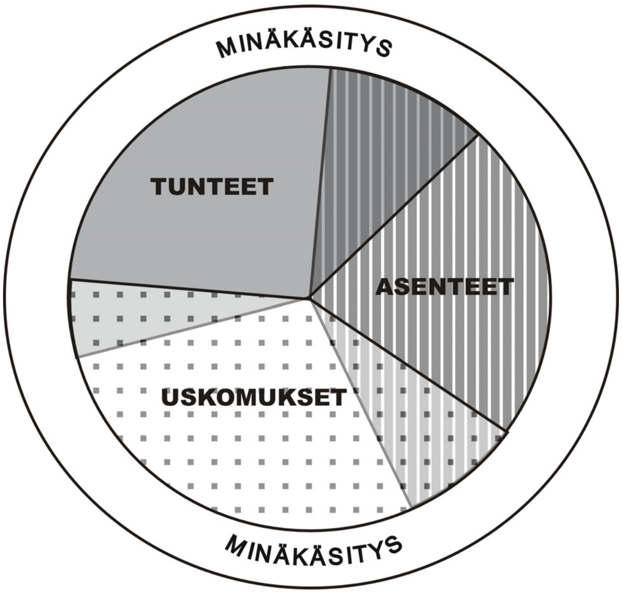
Tämän tutkimuksen tekijänä otin rohkeutta vaativan haasteen syventyä matematiikan unkarilaiseen opetusmenetelmään. Siihen suuntautuessani vuodesta 2000 koulutin syntyperäisten unkarilaisten opettajien kursseilla sekä opinto- ja tutkimusmatkoillani (liite 1). Näin tavoittelin mahdollisimman alkuperäistä näkemystä opetusmenetelmästä ja sen soveltamisesta. Pehkosen ja Rossin (2007, 152) mukaan unkarilainen matematiikan opetus Suomessa on täysin uusi suuntaus, joka on kiinnostanut opettajia, mutta vain pieni ryhmä alakoulun opettajia ihailee sitä. Ennakoin mahdollisia kulttuurisia eroja ja menetelmän soveltamishaasteita opettaessani ensimmäistä kertaa ensimmäisten kokeilijoiden joukossa. Tällöin heräsi olennainen kysymys, miten oppilaat kokevat matematiikan unkarilaisittain ja suomalaisittain opetettaessa. Kansallisia tai kansainvälisiä vertailevia tutkimuksia koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta on vaikea löytää. Aihe on harvinainen tutkimuskohde.

Koettu opetussuunnitelma tarjoaa mahdollisuuden tulkita oppilaan ominaisuuksia, toimintavalmiuksia ja toimintaa matematiikassa. Italialaiset Zan ja Poli (1999, 104) painottavat kuten monet muutkin tutkijat, että nuorten oppilaiden uskomuksia tulisi saada eksplisiittisiksi ja saada oppilaat itse pohtimaan niitä. Näin tutkimusta koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta toivotaan voitavan hyödyntää sekä perusopetuksessa että opettajankoulutuksessa. Tutkimus on myös ajankohtainen koulutuspoliittisesti, koska sen nähdään kytkeytyvän kansallisiin pyrkimyksiin edistää oppilaiden kiinnostusta hakeutua matemaattisille ja luonnontieteellisille aloille. Osaltaan tämä tutkimus paljastanee syitä menestykseemme matematiikan PISA-tutkimuksissa.

2 KOETTU MATEMATIIKAN OPETUSSUUNNITELMA

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta eli koettua matematiikan opetussuunnitelmaa. Käsitettä *koettu opetussuunnitelma* on käytetty yleisessä didaktisessa ja opetussuunnitelmakirjallisuudessa (Kari 1994; Lahdes 1980, 19–20; Uusikylä & Atjonen 2002, 48) sekä tutkimuksissa (Allen 1980, 6–7; Hoffmann 2001; Kangasniemi 1989, 47; Kankaanranta & Linnakylä 1993, 7–8; Lindenskov 1993; Lord 2001; 2002; 2003; Uusikylä & Kansanen 1988). Käsitettä koetusta opetussuunnitelmasta käytetään eri tavoin. Esimerkiksi Karin (1994, 87–89) mukaan koettu opetussuunnitelma tarkoittaa sitä, mitä oppilas on havainnut opetuksessa, minkä merkityksen ja sisällön hän on antanut havainnoilleen, miten hän on työskennellyt ja opiskellut. Hoffmannin (2001, 22–23) mukaan koetussa opetussuunnitelmassa tapahtuvat oppiminen itsestä ja maailmasta. Lindenskov (1993, 151–154) sisällyttää oppilaan omaan opetussuunnitelmaan uskomuksia ja arkitietoa matematiikasta ja koulusta, jolloin oppilaan oma opetussuunnitelma eroaa tarkoitetusta ja toteutettavasta opetussuunnitelmasta. Se on rakenteeltaan epäyhtenäinen, koska siihen vaikuttavat oppilaan kokemukset koulusta enemmän kuin muut yksittäiset tekijät.

Tässä tutkimuksessa peruskäsityksenä koetusta opetussuunnitelmasta on, että oppilas luo aktiivisesti omaa opetussuunnitelmaansa tulkiten virallista tarkoitettua, mahdollista opetussuunnitelmaa ja opettajan toteuttamaa matematiikan opetussuunnitelmaa eikä vain passiivisesti vastaanota niitä. Edelleen nähdään koetun matematiikan opetussuunnitelman muodostuvan matematiikkaan liittyvissä koulukokemuksissa affektiivisten, kognitiivisten ja konatiivisten tekijöiden vuorovaikutuksessa. Näistä tekijöistä tunteet, asenteet ja uskomukset ovat eräänlaisia sääteleviä mekanismeja. Ne säätelevät ja suodattavat, millaiseksi matematiikka, sen oppiminen ja opetus koetaan. Seuraavassa kuviossa 2.1 sääteleviä tekijöitä, suodattimia, havainnollistetaan visuaalisilla metaforilla, erilaisilla piste- ja viivakuvioinneilla.



KUVIO 2.1 Koetun matematiikan opetussuunnitelman säätelevät tekijät

Asenteet, minäkäsitys, tunteet ja uskomukset käsitteinä ovat osittain päällekkäisiä eikä niitä ole käytännössä mahdollista erottaa toisistaan (Furinghetti & Pehkonen 2002; Pietilä 2002, 21–23). Kuviossa säätelevät tekijät ja minäkäsitys mielletään samankeskeisinä ympyröinä, joilla ilmennetään sitä, että minäkäsitykseenkin sisältyy asenteita, tunteita ja uskomuksia. Uskomukset ja asenteet eroavat toisistaan tunnepainotuksen suhteen: asenteet ovat tunnepainotteisempia kuin kognitiivispainotteiset uskomukset (McLeod 1992, 578–579). Kuviossa 2.1 tunne ja asenne ovatkin enemmän päällekkäin kuin tunne ja uskomus. Oppilaan minäkäsitys, uskomukset itsestä matematiikan oppijana, on merkittävä koetun matematiikan opetussuunnitelman muodostumisessa. Matemaattinen minäkäsitys on keskeisin niistä affektiivisista tekijöistä, jotka vaikuttavat oppilaiden matematiikan oppimiseen ja saavutuksiin (Linnanmäki 1998, 289). Oppilaiden luottamus itseensä matematiikassa on suhteellisen korkea ensimmäisellä luokalla, mutta laskee kouluvuosien aikana, kuten myös kiinnostus matematiikan tehtäviin (Jacobs, Lanza, Osgood, Eccles & Wigfield 2002, 516, 519). Oppilaan kokemana matematiikan opetussuunnitelma suuntaa matematiikan opiskelua, josta saadut kokemukset vaikuttavat edelleen oppilaan käsitykseen itsestä matematiikassa. Koetun matematiikan opetussuunnitelman, tunteiden, asenteiden ja minäkäsityksen välinen yhteys mahdollistaa oppilaan kokeman matematiikan opetussuunnitelman arvioimisen myönteiseksi tai kielteiseksi. Se on yhteydessä laaja-alaisesti ymmärrettynä oppilaan toimintaan erilaisissa matematiikkaan liittyvissä tilanteissa niin koulussa kuin muuallakin elämässä.

Koettu matematiikan opetussuunnitelma määriteltynä asenteiden, tunteiden, minäkäsityksen ja uskomusten avulla liittyy oppilaan affektiiviseen alueeseen. Affektiivinen alue on nimike, joka voidaan antaa joukolle varsin moninaisia ilmiöitä (Saari 2004, 156). Tämän alueen määritelmiä on monia, koska eri tieteenalat ovat omista lähtökohdistaan määritelleet sen eri tavoin (Malmivuori 2001). Eräs tapa määritellä affektiivinen alue tai affekti on luetella siihen kuuluvia osa-alueita, joita on löydettävissä useita kymmeniä tarkastelunäkökulmasta riippuen (Saari 2004, 156–160). McLeod (1992, 578–579) liittää affektiiviseen alueeseen uskomukset, asenteet ja tunteet, kuten tässä tutkimuksessa oppilaan yksilöllisellä tasolla kokema matematiikan opetussuunnitelma minäkäsityksen lisäksi määritellään niiden avulla. Toisaalta koettu matematiikan opetussuunnitelma affektiivisen alueen ilmiönä myönteisesti määriteltynä ilmaisee sen, mitä se ei ole: se ei ole faktatietoja, kykyjä eikä taitoja, joita koulusaavutusten tutkimuksissa perinteisesti mitataan.

Koetussa matematiikan opetussuunnitelmassa on samoja piirteitä kuin Pietilän (nyk. Laine 2002) muodostamassa matematiikkakuvassa, joka koostuu objektiivisesta ja subjektiivisesta tiedosta, uskomuksista, asenteista ja tunteista. Koettu matematiikan opetussuunnitelma eroaa matematiikkakuvasta siten, että sen nähdään muodostuvan yhteydessä toteutettavaan, mahdolliseen ja tarkoitettuun opetussuunnitelmaan. Näiden neljän opetussuunnitelman yhteyden tarkastelu mahdollistaa 9–10-vuotiaan oppilaan kokeman matematiikan opetussuunnitelman ymmärtämisen ja sen muodostumisen, mikä vaikuttaa harvinaiselta tutkimuskohteelta. Koetussa matematiikan opetus-suunnitelmassa painotetaan matematiikkakuvan tavoin matemaattisen minäkäsityksen merkitystä, matematiikkakokemusten tulkitsijaa, metaforista ilmaisua käyttääksemme. Kun psykologiassa puhutaan minäkuvasta, tarkoittaa se juuri ihmisen käsitystä itsestään suhteessa maailmaan (Rauhala 2005, 161). Matemaattisen minäkäsityksen ymmärretään kuvastavan siten oppilaan suhdetta matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen koulussa. Nämä oppilas voi välittömästi kokea vain minänsä tulkitsemana. Sittemmin Pietilän (2002) muodostaman matematiikkakuvan rakenteesta havaittiin, että ydin matematiikkakuvassa muodostuu kolmesta komponentista: minäkuvasta, uskomuksista matematiikasta ja yksilön tunteista matematiikkaa kohtaan (Hannula, Kaasila, Laine & Pehkonen 2005, 60).

Matematiikan opetus perusopetuksen alakoulussa on merkittävää, koska oppilaiden uskomukset matematiikasta muovautuvat voimakkaasti 10–12 vuoden iässä (Kelly & Oldham 1994). Ikävuosia 9–11 pidetään kriittisenä ajankohtana, jolloin lasten myönteiset asenteet ja emotionaaliset reaktiot matematiikkaan saattavat muuttua negatiivisemmiksi (McLeod 1992; Newstead 1998, 53). Niin ikään Sierpinska ja Viwegier (1989, 171) korostavat, että noin 10-vuotias on vielä joustava muuttamaan käsityksiään matematiikasta. On siis tärkeää tuntea 9–10-vuotiaiden koettua matematiikan opetussuunnitelmaa, jotta jatkossa olisi mahdollista havaita muutoksia, ennalta ehkäistä mahdollisia negatiivisia kokemuksia ja vahvistaa myönteisiä.

Seuraavaksi tarkastellaan lähemmin koettua matematiikan opetussuunnitelmaa säätelevia tekijöitä. Toisaalta niiden tarkastelulla pyritään yhtenäistämään mahdollisesti rakenteeltaan epäyhtenäisen koetun matematiikan opetussuunnitelman analysointia. Toisaalta määritellään osittain päällekkäiset säätelevät tekijät (tunteet, asenteet, minäkäsitys ja uskomukset) erillisiksi kohteittensa kautta, jotta voidaan käsitellä empiiristä aineistoa johdonmukaisesti. Koetun matematiikan tarkastelun tarkoituksena on siis toisaalta käsitteellisesti eriyttää ja toisaalta eheyttää laadullista empiirisen aineiston tarkastelua perusopetuksen neljäsluokkalaisten koulukokemuksista matematiikasta. Seuraavan jaotelman sarakkeissa kuvataan säätelevien tekijöiden tarkastelujärjestystä pääpiirteissään.

TUNTEET	**ASENTEET**	**MINÄKÄSITYS**	**USKOMUKSET**
Tunteet, asenteet, minäkäsitys ja uskomukset Suomen ja Unkarin perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelmassa, Varga–Neményi -opetusmenetelmässä ja matematiikan opetuksessa suomalaisittain			
Tunteita eri näkökulmista	Oppilaiden asenteita matematiikkaan	Minäkäsityksen kehityksestä ja sen tutkimisesta	Uskomuksia matematiikasta oppiaineena ja sen oppimisesta
Tunteita matematiikan oppimistilanteissa	Asenteiden moniulotteisuus arviointi-mahdollisuutena	Minäkäsityksen rakenne ja prosessi	Uskomuksia oppilaan ja opettajan rooleista työtapojen ilmentäjänä

2.1 Tunteet

Suomen perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelman 2004 ensimmäisenä, siis tärkeimpänä, tavoitteena on, että oppilas vuosiluokilla 1–2 saa tyydytystä ja iloa ongelmien ymmärtämisestä ja ratkaisemisesta, vuosiluokilla 3–5 onnistumisen kokemuksia (ks. lukua 4.2). Unkarin vastaavan asiakirjan 2003 yhtenä tehtävänä on kehittää oppilaan emotionaalisuutta matematiikan opetuksessa (ks. lukua 4.3). Myös matematiikan unkarilaisen Varga–Neményi -opetusmenetelmän yhtenä periaatteena on, että oppilaalla on *lupa erehtyä, väitellä ja iloita*, millä pyritään turvalliseen oppimisilmapiiriin (ks. lukua 3.1.5). Suomalaisten Laskutaito, Matikkamatka sekä Mieti ja laske –kirjasarjojen opettajan oppaat ohjaavat opettajaa oppilaiden itsearvioinneilla ottamaan huomioon matematiikan herättämiä tunteita (ks. lukua 3.2.1.1). Toiminnallinen matematiikka perustuu lapsen herkkyyskausiin, jolloin opitaan helposti ja iloisesti konkreettisen materiaalin avulla (ks. lukua 3.2.1.2). Suomessa käytetyt opetusmenetelmät ongelmanratkaisu, tosi-matematiikka ja tarinankerronta ottavat huomioon oppilaiden erilaisia tunteita pedagogisissa ratkaisuissaan (ks. lukua 3.2.2). Matematiikan opetuksessa pyritään siis tavoitteellisesti ottamaan huomioon ja kehittämään oppilaiden tunteita.

Kun tarkastellaan yksittäistä oppilaan suhdetta matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen, ajallisesti ensimmäiset kokemukset ovat laadultaan tunteita. Ne elävät nykyhetkessä, ne ovat kokemuksia, jotka ilmentävät ihmisen suhdetta aiheeseen, esimerkiksi matematiikkaan, niin välittömästi kuin se on ihmiselle mahdollista (Perttula 2005, 124). Tunne viriää tai syntyy, kun ihminen arvioi tietyn tilanteen koskevan hänelle tärkeää tavoitetta. Kun tilanne on tavoitteen suuntainen, sitä seuraava tunnekokemus on myönteinen. Kun tilanne arvioidaan vastakkaiseksi oman tavoitteen kanssa, syntyy kielteinen tunne. (Oatley & Jenkins 1996, 96). Myönteisyyden ja kielteisyyden lisäksi tunteita voidaan tarkastella naturalistisesta, kognitiivisesta tai konstruktiivisesta näkökulmasta tai niiden yhdistelmistä.

Tunteita eri näkökulmista

Tunteiden biologinen perusta on naturalistisessa näkökulmassa tutkimuksen kohteena. Naturalistinen näkökulma jakaa tunteet perustunteisiin ja sekoittuneisiin tunteisiin (Oatley & Jenkins 1996, 62–94). Perustunne viestii yksilön ja ympäristön välisestä tilanteesta tässä ja nyt ilman kognitiivisia arviointeja ja laskelmointeja. Naturalistista näkökulmaa voidaan kuvata lähestymis- ja välttämiskäyttäytymisen avulla. Epämiellyttävät asiat pyritään työntämään kauemmaksi ja miellyttäviä asioita lähestytään. (Varila 2004, 95). Matematiikan oppitunnilla oppilas saattaa kokea taululle laskemisen epämiellyttävänä, jolloin hän painaa katseensa tai kirjoittaa keskittyneen näköisenä vihkoonsa, jotta opettaja ei pyytäisi häntä taululle. Kun taas oppilas, joka kokee taululla olemisen miellyttävänä, viittaa innokkaasti takamus tuolilla pomppien ja ääntelee päästäkseen mielipuuhaansa.

Perustunteista ja niiden määrästä löytyy tutkimuksista erilaisia pohdintoja. Wager (1999) esittelee kahdeksan perustunnetta, jotka voidaan tunnistaa ihmisen kasvoilta ja olemuksesta ihmisestä riippumatta. Varilan (1999, 72) mukaan perustunteita saattaa olla jopa kymmenen. Damasio (1999, 54) jakaa tunteet kolmeen luokkaan: primaareja ja samalla universaaleja emootioita ovat ilo, surullisuus, pelko, viha, yllättyneisyys ja inho, sekundaareja eli sosiaalisia emootioita ovat nolous, mustasukkaisuus, syyllisyydentunne ja ylpeys sekä kolmanneksi taustaemootiot, joita ovat hyvänolontunne, pahanolontunne, tyyneys ja jännitys. Hannula (2004, 29) näkee perustunteita olevan ainakin viisi, mutta arvelee, ettei lista ole täydellinen, vaan perustunteisiin saattaisi kuulua myös joitakin itseohjautuvuuteen liittyviä tunteita, kuten kiinnostus, yllätys, ja sosiaalisia tunteita, kuten kiintymys, alistuminen ja halu. Goleman (1999, 341–342) ehdottaa perustunteiden määräksi kahdeksaa, mutta on päätynyt käsittelemään tunteita ryhminä tai ulottuvuuksina, jotka ovat maamerkkejä tunteiden loputtomalla kentällä. Kuhunkin kahdeksaan tunneryhmään kuuluu 4–15 tunnetta. Seuraavassa jaotelmassa rinnastetaan tutkijoiden näkemyksiä perustunteista.

Jaotelmasta on nähtävissä, että neljän tunteen kuulumisesta perustunteiden joukkoon tutkijat ovat täysin yksimielisiä. Näitä ovat ilo, yllätys, suru ja pelko, jotka Golemanin (1999, 342) mukaan tunnetaan ja tunnistetaan ympäri maailmaa, myös lukutaidottomien kansojen keskuudessa, joita media ei ole vielä tavoittanut. Goleman arvelee, että tunteiden yhteneväisyyden olisi ensimmäisenä huomioinut Darwin, jonka mukaan perustunteissa on kyse evoluution jäljistä keskushermostossa.

Damasio 1999	**Goleman 1999**	**Varila 1999**	**Wager 1999**	**Hannula 2004**
Ilo	Ilo, nautinto	Ilo	Ilo ja ekstaasi	Ilo
				Kiinnostus
				Halu
				Kiintymys
	Rakkaus			
			Hyväksyntä, luottamus	
			Ennakointi	
Yllätys	Yllätys	Yllätys	Yllätys	Yllätys
		Epäluulo		
		Ujous		
		Halveksunta		
		Ahdistus		
	Häpeä	Häpeä		
				Alistuminen
Inho	Inho		Inho	Inho
Pelko	Pelko	Pelko	Pelko	Pelko
			Suuttumus tai raivo	
Viha	Viha	Viha		Viha
Surullisuus	Suru	Surullisuus	Suru tai epätoivo	Surullisuus

Suomalaiset ja unkarilaiset oppilaat kokenevat matematiikkaa opiskellessaan universaaleja perustunteita, kuten iloa onnistuessaan, surua epäonnistuessaan. Matematiikan oppitunnilla sosiaalisessa tilanteessa oppilasta voi ujostuttaa esitellä tehtäväänsä luokkakavereille ja opettajalle. Hän voi myös kokea ylpeyttä ratkaistuaan haasteellisen ongelman. Tunteet ovat nopeita ja ne saattavat vaihtua hetkessä (Schutz & DeCuir 2002, 125). Oppitunnin 45 minuutin aikana oppilaat saattavat kokea monenlaisia tunteita.

Turkkilainen Sayõl (1996, 1998, 2001) havaitsi, että 4–10-vuotiaat lapset tunnistavat parhaiten kasvokuvista ilon, surun, vihan ja yllätyksen eli samat perustunteet, joista edellä mainitut tutkijat ovat yksimielisiä. Kyky havaita näitä tunteita on kulttuurista riippumatonta (Csikszentmihalyi 1997, 18). Sayõlin tutkimat 4–10-vuotiaat lapset myös tuottivat piirtäen vastaavat perustunteet tunnistettavimmin. Näistä neljästä tunteesta lasten kuvaama ilo oli helpointa tunnistaa, sitten viha, suru ja yllätys tässä järjestyksessä. Lasten kasvo-piirroksissa perustunteita parhaiten ilmentävät suu, silmät ja kulmakarvat.

Nämä kansalliset ja kansainväliset tutkimukset tunteista ja niistä lasten piirtäminä ovat merkittäviä, koska tässä tutkimuksessa tulkitaan tunteita ja kokemuksia suomalaisten ja unkarilaisten lasten kirjoitelmista ja piirroksista matematiikan opetussuunnitelmasta.

Kognitiivisen näkökulman mukainen määritelmä tunteelle on ihmisen itsensä havaitsema, tulkitsema ja nimeämä kokemus. Tiedolliset käsitykset sekä tilanteittaiset arviot vaikuttavat tunteen sisältöön ja kohteeseen. Tunteita ei nähdä yksioikoisina reaktioina ärsykkeeseen, sillä ihmisen tulkinta ärsykkeen ja kontekstin laadusta määrittelee tunteen laadun. Tunteiden kognitiiviseen paradigmaan liittyy myös tunteiden tutkimuksen haastavuus, eri ihmiset kokevat saman ärsykkeen eri lailla. (Varila 2004, 95–96). Esimerkiksi opettaja päättää lopettaa matematiikan oppitunnin ennakoitua aikaisemmin, suurin osa oppilaista lienee iloisia päästessään välitunnille. Oppilas, joka kokee olevansa yksinäinen välitunneilla, ei välttämättä iloitse opettajan päätöksestä yhtä paljon kuin muut oppilaat. Konstruktivistisen näkökulman mukaan kulttuuri säätelee tunnekokemuksia (Varila 2004, 95–97), jolloin kielen merkitys on suuri, sillä se toimii sekä tajunnan jäsentäjänä että oppimisen välittäjänä. Sen avulla määritellään tunteiden määrä ja laatu. Eri kulttuureissa on eri määrä tunteisiin liittyvää käsitteistöä, eroa on myös sukupuolten välillä. Tunteiden tutkimuksen kannalta konstruktivistisen näkemyksen etuna on kyky jäsentää monimutkaisia tunteita, jotka ovat osa sosiaalista kontekstia. Esimerkiksi väärin vastaaminen matematiikan oppitunnilla saattaa synnyttää oppilaassa häpeän tunteen, joka voi siirtyä myöhemmin kokijansa sisäiseksi ominaisuudeksi.

Tunteisiin liittyviä käsitteitä määritellään monin eri tavoin (mm. Do & Schallert 2004, 619; Hannula 2004, 27), mikä vaikeuttaa alan kirjallisuuden lukemista ja tutkimustulosten seuraamista, mutta käsiterikkaus tarjoaa uusia näkökulmia ymmärtää tunteiden merkityksiä. Do ja Schallert (2004) kuvaavat tunteita (emotions) voimakkaina ja lyhytaikaisina affektiivisina tiloina reagoida johonkin ärsykkeeseen. Mielentilat (moods) sitä vastoin ovat tunteita laajempia ja pitempikestoisia. Yksilön on vaikea kuvata erityistä syytä mielentilaansa. Termit affekti ja affektiivinen tila ovat edellisiä laajempia ja sisältävät tunteet, mielialat sekä joitakin motivaatiotekijöitä. (Emt. 619.) Peruskouluikäisten oppilaiden tunteita matematiikan oppitunneilla tutkinut Hannula (2004, 27–28) puolestaan erittelee englanninkielisten termien *feeling, affect, emotion* ja *mood* merkityksiä seuraavasti: Tuntemuksilla (feelings) viitataan tunteen (emotion) subjektiivisiin kokemuksiin, kun taas affektia käytetään yleisterminä, joka sisältää tunteen lisäksi kognitiivisia elementtejä. Tunne tarkoittaa tunnetilaa, joka viittaa tuntemusten yhdistelmään, ilmaisuun ja kehontilaan. Tunteet voivat olla intensiteetiltään laimeita tai voimakkaita, eivätkä ne ole aina kokijansa tai muiden havaitsemia. Tuntemuksilla ja tunteilla on erityinen kohde, kun taas mieliala (mood) on yleinen affektiivinen tila ilman erityiskohdetta. Mielialat ja tunnetilat voivat olla positiivisia tai negatiivisia. Ne eroavat toisistaan kestoltaan, mielialat ovat tunteita pitkäkestoisempia (Linnenbrink & Pintrich 2002, 71). Matematiikan oppimistilanteiden tutkimuksissa käytettyä tunnetermistöä (Hannula 2004, 27–28) sovelletaan tässä tutkimuksessa oppilaiden kokemasta matematiikan opetussuunnitelmasta.

Tunteita matematiikan oppimistilanteissa

Matematiikan oppitunneilla on tunteita tutkittu sekä fyysisistä ilmenemismuodoista että kielellisistä ilmaisuista. Kognitiivinen psykologia, kehitys- ja kasvatuspsykologit ovat siirtyneet laboratorioistaan luokkahuoneisiin tutkiakseen oppimista todellisissa tilanteissa (Pintrich 1991, 199). Oppimisen iloa alkuopetuksessa videoiden avulla tutkiessaan Rantala (2005, 174–176) havaitsi, että kertotaulua pelin avulla pareittain harjoitellessaan jotkut pikkuoppilaat olivat harmistuneita, vihaisia, ahdistuneita, hätääntyneitä ja päättäväisiä. Kertotaulut aiheuttivat yleensä lapsissa joko iloa tai ahdistusta. Niiden parissa lapset kokivat onnistumisen tai epäonnistumisen tunteita. Rantala (2005, 181–182) toteaa, että vaikka oppilaat saivat pelata, työskennellä pareittain, edetä omaan tahtiinsa ja välittömästi kaveriltaan palautetta, jotka yleensä motivoivat oppilaita, ei oppimisen iloa kertotaulujen harjoittelussa syntynyt. Opettajan kääntäessä selkänsä pikkuoppilaat vajosivat apaattiseen ja ilottomaan tilaan katsellakseen innostuneiden oppilaiden työskentelyä. Tutkiessaan perusopetuksen yläkoulun oppilaiden pitkäkestoista emotionaalista prosessia sekä havainnoiden, videoiden avulla että haastatellen ennen ja jälkeen matematiikan ongelmanratkaisutilanteen Hannula (2002a, 34–39) havaitsi oppilailla tilanteittaisia negatiivisia tunteita mm. turhautumista, vihaisuutta ja surua. Tämä viittasi siihen, etteivät oppilaat odottaneet saavuttavansa tavoitteitaan. Oppilaat kokivat myös positiivisia tunteita, kuten matematiikka on hauskaa ja innostavaa. Tämä ennakoi osaltaan myönteistä muutosta oppilaan asenteessa, mikä myöhemmin tapahtuikin.

Koetun matematiikan opetussuunnitelman nähdään muodostuvan affektiivisten, kognitiivisten ja konatiivisten tekijöiden vuorovaikutuksessa, jolloin siihen vaikuttavat oppilaan tunteet eräinä affektiivisina tekijöinä. Kognitiivisina tekijöinä vaikuttavat tunnistaminen, ymmärtäminen, arvioiminen tai päättely. Lisäksi koetun opetussuunnitelman muodostuminen edellyttää oppilaalta tietoista pyrkimystä toimia ja tähdätä johonkin. Matemaattisen ongelmanratkaisun yhteydessä on tutkittu näiden tekijöiden vuorovaikutusta (mm. DeBellis & Goldin 1993; DeBellis 1996; DeBellis 1998; Op ’t Eynde, de Corte ja Verschaffel 1999; Hannula 2001b).

Perusopetuksen alakoulun oppilaita videoitiin ja haastateltiin matemaattisissa ongelmaratkaisutilanteissa kahden vuoden ajan (DeBellis 1998). Ongelmaratkaisutilanteessa oppilaat erosivat toisaalta ratkaisuprosessin voimakkuuden ja toisaalta tehtäväläheisyyden suhteen. Voimakkaat ongelmanratkaisijat pyrkivät läheiseen suhteeseen millaiseen matemaattiseen tehtävään tahansa. He rakensivat matemaattisesti korkeatasoisemman ja henkilökohtaisemman merkityksen tehtävän sisällölle kuin ei-voimakkaat ongelmaratkaisijat. Voimakkaan ongelmanratkaisijan ratkaistessa tehtävää ilmeni monia tilanteittaisia tunteita kuten kiintymystä, uskollisuutta, sitoutumista, eristäytymistä, luottamusta, mieltymyksiä ja ylpeyttä. Näiden lisäksi oppilaat kokivat myös kielteisiä tunteita kuten pettymystä, epätoivoa, turhautumista ja vihaa.

Kuuden 14-vuotiaan oppilaan kokemuksia omista tunteistaan matemaattisen ongelmanratkaisun aikana tutkivat (Op 't Eynde, de Corte ja Verschaffel 1999, 101). Oppilaat täyttivät motivaatiokyselyn ennen ongelmanratkaisutilannetta, jossa heitä pyydettiin puhumaan ääneen tehtäviä ratkaistessaan. Tilanteet videoitiin. Tämän jälkeen oppilaat haastateltiin katsomalla samalla videota ongelmanratkaisusta. Oppilas sai kertoa, miten hän oli työskennellyt, millaisia tunteita hän oli kokenut työskentelyn eri vaiheissa. Oppilaan kertomusta täydennettiin esittämällä hänelle kysymyksiä. Oppilaat kertoivat kokeneensa erilaisia tunteita matemaattisia ongelmia ratkaistessaan. Oppilaat olivat

- harmistuneita – turhautuneita – vihaisia
- huolissaan – ahdistuneita
- huojentuneita
- iloisia
- hermostuneita
- surullisia.

Useimpia näistä negatiivisista tunteista oppilaat kokivat silloin, kun eivät kyenneet ratkaisemaan ongelmaa sujuvasti. Tämä kognitiivinen este on ilmeisesti yhteydessä emootioon. Kielteisen tunteen kokeminen sai jotkut oppilaat kokeilemaan vaihtoehtoisia kognitiivisia strategioita tai heuristiikkoja ratkaistakseen ongelman, jotkut luovuttivat. (Op 't Eynde ym. 1999, 101.)

Hannula (2001a, 2001b, 60–62) onkin havainnut tutkimuksissaan oppilaiden emootion ja kognition vuorovaikutuksesta eri alueita: 1) metakognitio, kognitio kognitiosta tarkoittaa oppilaan tietoa tiedostaan, 2) emotionaalinen kognitio, kognitio emootiosta tarkoittaa oppilaan tietoa tai tietoisuutta omista tunneprosesseista, 3) kognitiivinen emootio eli emootio kognitiosta tarkoittaa oppilaan tunnereaktioita, jotka liittyvät ajatteluprosesseihin ja 4) metaemootio eli emootio emootiosta tarkoittaa oppilaan tunteita tunteistaan (nelikenttä 2.1.1).

Metakognitio	**Metaemootio**
Emotionaalinen kognitio	**Kognitiivinen emootio**

NELIKENTTÄ 2.1.1 Emootion ja kognition vuorovaikutus

Oppilas saattaa turhautua jumiutuessaan matematiikan tehtävässä, koska ei muista opetettua laskujärjestystä (kognitiivinen emootio). Turhautuminen saa hänet kiukustumaan (metaemootio). Hän saattaa olla tietoinen kiukustumisestaan ja yrittää hillitä kiukkuaan (emotionaalinen kognitio). Oppilas voi kuitenkin yrittää kokeillen päätellä matematiikan tehtävässä tarvittavaa laskujärjestystä eli muuttaa ratkaisustrategiaansa muistamisesta kokeilevaan päättelyyn. Metakognitiota on kuvattavissa myös vanhalla arabialaisella lasten lorulla, jossa etsijä tietää oman tietämättömyytensä, kun taas mestari tietää tietävänsä. Narri ja nukkuja eivät tiedä tietämistään.

Se, joka ei tiedä, eikä tiedä, ettei tiedä,
on narri. Vältä häntä!

Se, joka ei tiedä, mutta tietää, ettei tiedä,
on etsijä. Auta häntä.

Se, joka tietää, mutta ei tiedä, että tietää,
nukkuu. Herätä hänet!

Se, joka tietää ja tietää, että tietää,
on mestari. Seuraa häntä.

Tunteilla (esimerkiksi ilolla, surulla, vihalla, pelolla, nautinnolla) tässä tutkimuksessa tarkoitetaan oppilaiden subjektiivisten tuntemusten kuvauksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta. Seuraavaksi tarkastellaan asennetta koetun matematiikan opetussuunnitelman säätelijänä. Asenteen muodostumisessa tunne on merkittävä tekijä.

2.2 Asenteet

Ei Suomen 2004, 1994 eikä Unkarin 2003, 1995 perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelman perusteissa ole tavoitetta oppilaan asenteen kehittämisestä, kuten Suomen Peruskoulun opetussuunnitelmassa (1970, 140) oli kehittää oppilaiden asenteita matematiikkaan niin, ettei pääse syntymään perusteettomia yli- tai aliarvostuksia. Myös runsaat 40 vuotta vanhassa matematiikan unkarilaisessa Varga–Neményi -opetusmenetelmässä tuetaan oppilaan myönteisen asenteen kehittymistä mm. toimintavälineitä käyttämällä (ks. lukua 3.1.3), mikä oli tavoitteena opetusmenetelmän kehittämistä ja kokeilua ohjanneessa vuonna 1978 virallistetussa Unkarin matematiikan opetussuunnitelmassa. Useimmissa suomalaisissa matematiikan opettajan oppaissa otetaan huomioon oppilaan asenteen kehittymisen seuranta itsearvioinneissa (ks. lukua 3.2.1.1). Suomessa ja Unkarissa oppilaan asenteen kehittäminen matematiikkaan opetussuunnitelman eksplisiittisenä tavoitteena on historiaa.

Oppilaiden asenteita matematiikkaan

Perusopetuksen oppilaiden asenteista matematiikkaan on tutkittu sen muutosta kouluvuosien aikana, verrattu tyttöjen ja poikien asenteita ja matematiikan mieluisuutta muihin oppiaineisiin sekä erilaisten opetuksellisten ratkaisujen vaikutusta matematiikka-asenteisiin.

Alimmilla luokilla oppilaiden asenteet matematiikkaan ovat myönteisemmät kuin ylemmillä luokilla Man ja Kishorin (1997) meta-analyysin mukaan 113 tutkimuksesta, jotka osoittivat, että asenteiden ja menestyksen välinen yhteys on heikko, mutta vahvistuu perusopetuksen yläkoulussa ja lukiossa ja syyseuraus-suhteen suunta on asenteesta menestykseen. Matematiikka-asenteiden ja menestyksen heikosta yhteydestä huolimatta asenne vaikuttaa menestykseen epäsuorasti: oppilaan tavoitteilla on suora vaikutus menestykseen, mikä toimii välittäjänä asenteiden ja menestyksen välillä (Abu-Hilal 2000). Mitä tärkeämpänä oppiaineena oppilas pitää matematiikkaa ja mitä korkeammat tavoitteet hänellä on, sitä paremmin hän menestyy matematiikassa. Matemaattisesti lahjakkaidenkin oppilaiden asenteet matematiikkaan muuttuvat kielteisemmiksi perusopetuksen 3–6-luokilla (Martin 2002). Matemaattisesti lahjakkailla pojilla on myönteisemmät asenteet kuin tytöillä luokilla 3–5, mutta kuudennen luokan tyttöjen asenteet ovat poikien asenteita myönteisemmät. Matemaattisesti lahjakkaiden asenne matematiikkaan on myönteisimmillään neljännellä luokalla. (Martin 2002, 83, 99). Perusopetuksen 2–4-luokkien aikana tyttöjen asenteet muuttuvat merkitsevästi kielteisemmiksi, kun taas poikien asenteet muuttuvat hieman myönteisemmiksi (Davies & Brember 1994).

Lukeminen näyttää olevan suositumpi oppiaine kuin matematiikka perusopetuksen ensimmäisellä luokalla (Tymms 2001, 165). Perusopetuksen kolmasluokkalaiset asennoituvat matematiikkaan kaksijakoisesti: toiset rakastavat, toiset vihaavat sitä (Hendley, Stables & Stables 1996). Draamaa opetuksessa käyttäneissä kouluissa oppilaiden asenteet matematiikkaan ovat merkitsevästi vähemmän positiivisia kuin kouluissa, joissa draamaa ei ole käytetty (Fleming, Merrell & Tymms 2004, 193). Yhteistoiminnallisen työskentelyn on havaittu edistävän oppilaiden myönteisiä asenteita matematiikkaan (Boaler 1997ab; 1998). Matikkatupakokeilussa (Lindgren 1990) perusopetuksen toisen vuosiluokan oppilaat kokivat matematiikan opiskelun iloisena asiana, kun saivat valita tehtävät ja toimintavälineet avoimessa oppimisympäristössä.

Asenteiden moniulotteisuus arviointimahdollisuutena

Sosiaalipsykologiasta lähtöisin olevaa asennetta mitataan useimmiten kyselyjen avulla matematiikan opetuksen tutkimuksen alueella, jolla on käytetty yksi- tai useampiulotteisia määritelmiä (Di Martino & Zan 2001a, 353; 2001b, 18–20; 2002, 23; Hannula 2002a, 26). Yksiulotteiset määritelmät kuvaavat sitä, missä määrin affekteja assosioidaan matematiikkaan. Näissä määritelmissä affekteja käsitellään kokonaisuutena, eikä eksplisiittisesti erotella emotionaalisia ja kognitiivisia tekijöitä, esimerkiksi tunteita uskomuksista (mm. Fleming ym.

2001; Pearce ym. 1999). Yksiulotteisiin määritelmiin pohjautuvissa tutkimuksissa käytetään kirjallisia kynäpaperi-testejä. Ne vaikeuttavat tunteiden ja uskomusten erottamista sekä myönteisen ja kielteisen asenteen syvempää tulkintaa.

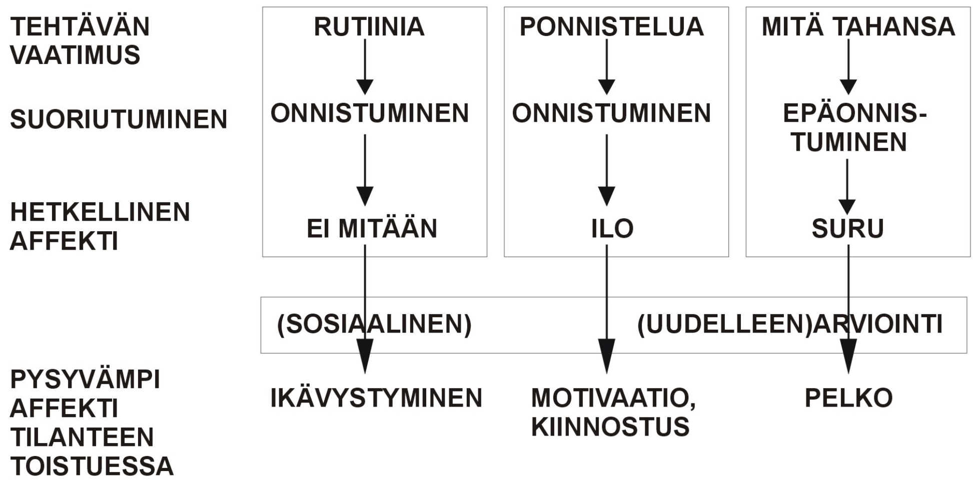
Kaksiulotteisessa määritelmässä asenteeseen matematiikkaan liitetään sekä tunteet että uskomukset affektiiviselta alueelta, josta esimerkkinä Di Martinon & Zanin (2002, 23) määritelmä. Di Martino ja Zan (2002) kyseenalaistavat aiheellisesti yksiulotteisen asenteen arvioinnin myönteiseksi pelkän positiivisen tunteen perusteella. On olennaista, millaiseen uskomukseen matematiikasta myönteinen tai kielteinen tunne liittyy.

Esimerkiksi oppilaskyselyssä on väite ”Matematiikassa perusteleminen on tärkeää (A+)”, ”Matematiikassa perusteleminen on turhaa (A-)” ja näihin liittyvät tunneväitteet ”Pidän (+)”, ”En pidä (-)” ja ”Yhdentekevää (0)”. Näistä väitteistä saadaan kuusi erilaista yhdistelmää: 1) A+ +, 2) A+ -, 3) A+ 0, 4) A- +, 5) A- - ja 6) A- 0. Mikä tai mitkä näistä kuudesta ovat myönteisiä asenteita? Kun tavoitteena oppimistilanteissa on matemaattisten väitteiden perusteleminen, on myös suotuisaa, että se on oppilaista mieleistä toimintaa, joten vain kaksi kuudesta yhdistelmästä kuvaa myönteistä asennetta A+ + ja A- -. Edellisen mukaan oppilas pitää perustelemisesta matematiikan opiskelussa, jälkimmäisen mukaan oppilas ei pidä siitä, että matematiikassa esitetään asioita perustelematta.

Moniulotteisessa määritelmässä erotetaan tunteet, uskomukset ja käyttäytyminen asenteen ulottuvuuksiksi, jolloin käyttäytymistä pidetään pysyvänä, pitkäkestoisena ja opittuna taipumuksena reagoida asioihin tietyllä tavalla. Moniulotteinen asenteen määritelmä on monien matematiikka-uskomusten tutkijoiden täysin tai osittain hyväksymä, mikä oli havaittavissa Oberwolfachissa järjestetyssä alan tutkijoiden paneelissa vuonna 1999 (Furinghetti & Pehkonen 2002, 47–49). Moniulotteiset määritelmät mahdollistavat asenteen ulottuvuuksien erottamisen vuoksi asenteen laadun tarkastelun.

Asenne on erilaisia arviointiprosesseja (Hannula 2002a, 26). Asenne useiden arviointiprosessien yhteen sulautumana tarjoaa laajan näkökulman oppilaan matematiikka-asenteen muodostumisen ymmärtämiseen ja erilaisia tutkimuksellisia lähestymistapoja. Näitä arviointiprosesseja ovat tilanteittaiset tunteet, assosioituneet tunteet, odotetut seuraamukset ja tavoitteiden arvot (Hannula 2002a, 29–30; 2004, 3–4): asenne arviointiprosessien yhteen sulautumana ei ole rakenteeltaan yhtenäinen, vaan erilaisten arviointi-prosessien tuloksena syntyvää käyttäytymistä tai käyttäytymisvalmiutta. Esimerkiksi oppilas saattaa pitää matematiikasta tai olla pitämättä siitä tunteiden, assosiaatioiden, odotusten tai tavoitteittensa arvojen vuoksi. Arviointiprosessit eroavat ajallisesti toisistaan: assosiaatiot edustavat menneisyyttä, tunteet nykyisyyttä, odotukset ja arvot suuntautuvat tulevaisuuteen.

Tunne tilanteittaisessa arvioinnissa on perustavanlaatuisin prosessi, johon arviointi perustuu. Kun oppilas osallistuu matemaattiseen toimintaan, hän jatkuvasti ja tiedostamattomasti arvioi tilannetta tavoitteidensa mukaisesti. Tämän arvioinnin hän ilmaisee tunteina: etenemisensä tavoitteeseensa oppilas ilmaisee myönteisinä tunteina, kun taas esteet tavoitteisiin etenemisessä saattavat synnyttää hänessä vihaa, pelkoa, surua tai muita epämiellyttäviä tunteita. Tässä arvioinnin ensimmäisessä lajissa, tilanteittaisessa arvioinnissa ei välttämättä tarvita aiempia kokemuksia. Uusissa tilanteissa ihmiset yleensä luottavat tilannearviointeihinsa. (Hannula 2002a, 29–30). Oppilas voi ilmaista ääneen subjektiivisen kokemuksensa matematiikan tehtävän ratkaisemisesta: onnistuessaan pikkuoppilas saattaa kiljahtaa ilosta: ”YES!” tai epäonnistuessaan nyyhkäistä: ”Voi ei!” Hannula (1999, 64) kuvaa kognitiivisen tehtävän vaatimusten ja siinä suoriutumisen aikaansaamia affektiivisia seurauksia (kuvio 2.2.1).



KUVIO 2.2.1 Kolme affektiivista seurausta kognitiivisesta haasteesta (Hannula 1999, 64)

Onnistuessaan rutiinitehtävässä oppilas ei koe mitään hetkellisiä affekteja, joten hän ikävystyy tällaisten toistuvien mekaanisten tehtävien parissa. Oppilas iloitsee onnistumisestaan ponnistelua vaatineessa tehtävässä. Onnistuessaan useasti haasteellisissa tehtävissä oppilas motivoituu, kiinnostuu ponnistelemaan jatkossakin. Epäonnistuessaan rutiinitehtävissä tai haasteissa, millaisissa tehtävissä tahansa, oppilas tulee surulliseksi. Tällaiset toistuvat tilanteet tekevät oppilaan pelokkaaksi. Toistuvat tunnekokemukset ovat merkittäviä, koska asenteiden muodostuminen McLeodin (1992, 579) mukaan voi tapahtua kahdella eri tavalla: joko usein toistuvan tunteenomaisen reaktion automatisoitumisena tai uuden tehtävän herättämän ennakkoasenteen vahvistumisen kautta.

Assosiaatioihin perustuvassa arvioinnissa psykologinen prosessi on erilainen kuin tilanteittaisessa arvioinnissa. Tällöin oppilas ei osallistu matemaattiseen toimintaan. Esimerkiksi täyttäessään kyselylomaketta oppilas reagoi emotionaalisesti assosiaatioittensa pohjalta. (Hannula 2002a, 29–30). Kyselylomakkeet perusopetuksen alakouluikäisten oppilaiden matematiikka-asenteista saattavat sisältää pitämistä, nauttimista, iloitsemista tai niiden vastakohtia (Kupari 1993b, 82–83; Pearce, Lundgren & Wince 1999, 85; Tymms 2001, 166; Vanayan, White, Yuen & Teper 1997, 347). Asennekyselyyn voi sisältyä myös oppilaan reaktioita matematiikan helppouteen tai vaikeuteen (Kupari 1993b, 82–83; Tymms 2001, 166) sekä hyödyllisyyteen ja tärkeyteen (Kupari 1993b, 82–83). Eskareista epuiksi –pitkittäistutkimushankkeessa (Aunola & Nurmi 2004, 10) lasten mieltymyksiä matematiikkaan kartoitettiin mm. kysymyksillä: Kuinka paljon pidät koulussa laskutehtävistä? Kuinka mielelläsi teet koulussa laskutehtäviä? Kuinka mielelläsi teet kotona laskutehtäviä? Kysymyksiin lapset vastasivat naamakuvataulujen avulla, jossa ilmeet etenivät hyvin iloisesta hyvin synkkään. Vastatessaan lapsi osoitti sitä naamaa, joka vastasi hänen mieltymyksiään. Australialainen McDonough (2002, 14) pyysi perusopetuksen kolmasluokkalaisia piirtämään tilanteita, joissa arvioivat oppineensa matematiikkaa hyvin. Uusseelantilainen Carr (2003, 2) kirjoitutti perusopetuksen 10–13-vuotiailla oppilailla luokkakavereilleen matematiikan tehtäviä, joita he pitivät tärkeinä. Tällaiset kyselyt, piirros- ja kirjoitustehtävät arvioinnin toisena lajina edellyttävät oppilaalta aiempia kokemuksia assosioitaviksi, toisaalta ne ilmentävät erilaisia tutkimuksellisia tapoja lähestyä nuorten oppilaiden asenteita kehityspsykologisista syistä. Ruffell, Mason ja Allen (1998) haastavat kehittämään nuorille oppilaille sopivia menetelmiä selvittää asenteita. Tässä kappaleessa mainituissa nuorten oppilaiden tutkimuksissa asenne nähdään yksi- tai moniulotteisena, joka sisältää affektiivisen, kognitiivisen ja konatiivisen komponentin, jonkin tai jotkin niistä.

Jos oppilas harkitsee pitempään kyselyyn vastaamista, kirjoitus- tai piirrostehtäväänsä, niin tämä kognitiivinen prosessi pakottaa arvioimaan. Tällöin oppilas kuvittelee mielessään matematiikkatilanteita, joiden odotetut seuraukset saattavat sisältää tunteita. Tämä odotus on arvioinnin kolmas laji, joka tyypillisesti aktivoituu tutuissa tilanteissa, joissa on kuitenkin jotain uutta. (Hannula 2002a, 29–30). Esimerkiksi oppilas voi mieltää koulussa järjestettävän matematiikan kerhon, tukiopetuksen tai erityisopetuksen pienluokassa samanlaiseksi tilanteeksi kuin matematiikan oppitunnin omassa luokassa. Oppilaan mennessä kerhoon, tukiopetukseen tai erityisopetukseen pienluokassa hänessä saattaa herätä vastaavia tunteita kuin matematiikan oppitunnilla omassa luokassa odotusten vuoksi.

Neljäs arvioinnin laji on holistinen, se perustuu koko elämän arviointiin ja arvoon, jonka oppilas antaa erilaisille tavoitteille elämässään (Hannula 2002a, 29). Esimerkiksi oppilaalla saattaa olla tavoitteena tulla kemistiksi. Varmistaakseen yliopistoon pääsyn hän valitsee laajan matematiikan ja haluaa saada hyvän arvosanan matematiikasta. Tällöin oppilas on ymmärtänyt matematiikan henkilökohtaisen arvon. Tämä arvioinnin laji perustuu aina kognitiiviseen analyysiin matematiikan roolista suhteessa muihin tavoitteisiin, mikä on usein tiedostamatonta, tällainen arviointi selittää usein parhaiten oppilaiden matematiikan kurssivalintoja (Hannula 2002a, 30). Toisaalta tämä arviointi perustuu erilaisten tavoitteiden arviointiin, toisaalta se perustuu odotuksiin erilaisista valinnoista, jotka puolestaan johtavat erilaisiin tavoitteisiin. Kaikkiin näihin neljään arviointiprosessiin, emootioihin, assosiaatioihin, odotuksiin ja arvoihin, vaikuttavat sosiaaliset tilanteet, joihin oppilas osallistuu ja oppilaan kognitiiviset tulkinnat niistä.

Vaikka asenteet nähdään useimmiten pysyvinä niiden muodostuttua, ne voivat muuttua suhteellisen lyhyessä ajassa ja ne voivat olla samaan aikaan sekä myönteisiä että kielteisiä, toteaa Hannula (2002a, 42–43) empiiristen tapaustutkimustensa perusteella. Gellert (2001, 33–39) ja Hannula (2002a) viittaavat metodologisiin vaateisiin tutkia asenteen eri tekijöitä ja muutosta relevantisti. Tilannekohtaisia tunteita voidaan tutkia relevantisti havainnoiden ja videonauhoitusten avulla, mutta näitä syvemmin fysiologisten mittausten avulla. Assosiaatiot, odotukset ja arvot ovat tutkittavissa sekä haastattelujen että kirjallisten ja/tai visuaalisten menetelmien avulla.

Asenne ymmärretään tunteiden, assosiaatioiden, odotusten ja arvojen, erilaisten arviointiprosessien yhteensulautumisen tuloksena syntyneeksi käyttäytymiseksi tai käyttäytymisvalmiudeksi. Näistä arviointiprosesseista tässä tutkimuksessa painottuu aiempien kokemuksien arviointi, jolloin perusopetuksen neljäsluokkalaiset, 9–10-vuotiaat lapset, palauttavat mieleensä matematiikan herättämiä tunteita, vaikeutta tai helppoutta, tärkeyttä ja käyttötarkoituksia.

2.3 Minäkäsitys

Suomen perusopetuksen opetussuunnitelmassa (2004, 12) eräänä tavoitteena on, että opetuksen on annettava mahdollisuus terveen itsetunnon kehittymiseen, jotta oppilas voi hankkia elämässä tarvitsemiaan tietoja ja taitoja, saada valmiudet jatko-opintoihin ja osallistuvana kansalaisena kehittää demokraattista yhteiskuntaa. Suomen opetussuunnitelmaa laajemmin ja korostaen Unkarin perusopetuksen opetussuunnitelman 2003 tavoitteena on kehittää oppilaiden **minäkuvaa** ja **itsetuntemusta** persoonallisuuden kehittymiseksi järjestämällä heille sellainen **opiskeluympäristö**, joka motivoi itsetuntemuksen omaksumiseen. Minäkuvan ja itsetuntemuksen rikastuttamiseksi tarkoituksenmukainen on opiskeluympäristö, joka **kasvattaa** oppilaita herkiksi ympärillä oleville ihmisille ja asioille, tosin sanoen luo heissä vastaanottavaisuuden **moraalisille** ja **eettisille perusnormeille**. Unkarin kansallisen opetussuunnitelman **kasvatukselliset arvot** rakentavat kehittyvää persoonallisuutta niin, että omaksuessaan opetussisällöt oppilaat **osallistuvat aktiivisesti** näiden arvojen tunnistamiseen ja nimeämiseen. Jotta oppilaat Unkarissa kykenisivät integroimaan uusia tietoja minäkuvaansa, huolehditaan jatkuvasti siitä, että he tuntevat itsensä **päteviksi** oman kasvatuksensa, henkilökohtaisen turvallisuutensa, kohtalonsa ja elämänuransa luomisessa. Tämän takia Unkarin kansallisen opetussuunnitelman määräämillä sivistysalueilla, kuten matematiikka, on lähestyttävä kasvatuksen ja opetuksen pedagogista järjestämistä **opiskelevan ihmisen näkökulmasta** sekä rakennettava jatkuvasti oppilaiden minä- ja maailmankuvaa. Näiden kahden maan 2000-luvun opetussuunnitelmien tavoitteet kootaan Rauhalan (2005, 135) sanoin: Ihmisen ainutlaatuinen identiteetti, itseys, minuus, persoona, eksistenssi – mitä moninaisia nimityksiä siitä käytetäänkin – on hyvin keskeisellä tavalla sitä, mistä se peilautuu. Siksi oppilaan minuuden kehittäminen matematiikan opetuksessa edellyttää oppimisympäristön laaja-alaista vaalimista.

Yksilön minän Mead (1962, 138–140) jakaa kahteen osaan: sekä subjekti- että objektiminään. Subjektiminä toimii arvaamattomasti ja tahtovasti, kun taas objektiminä tarkoittaa minän sosiaalista puolta. Edellinen päättää yksilön toiminnasta sosiaalisessa tilanteessa, jälkimmäinen on tietoinen sosiaalisen toiminnan säännöistä pyrkien ottamaan huomioon muut ihmiset. Sosiaalinen vuorovaikutus on merkittävää minän kehittymisessä (Mead 1962, 174): yksilö tulee itsensä objektiksi toisten ihmisten avulla. Minällä tässä tutkimuksessa koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta tarkoitetaan niitä ominaisuuksia, joita yksilö liittää itseensä. Yksilön matemaattinen minäkäsitys sisältää sen, mitä hän tietää ja uskoo itsestään matematiikassa. Amerikkalaiset Pajares ja Schunk (2002) näkevät, että 1970-luvulla matematiikan opetussuunnitelman ”back-to-basics” -kehitysvaiheen aikana ihmisen minän tutkimus syrjäytyi kognitiivisten ja informaatioprosessien tutkimisen vuoksi. Tällöin ei arvostettu affektiivisen alueen merkitystä oppimisessa, mutta kahden viime vuosikymmenen aikana sen ensiarvoinen asema matematiikan oppimisessa ja sen tutkimuksessa on jälleen korostunut.

Minäkäsityksen kehityksestä ja sen tutkimisesta

Minäkäsitys kehittyy vaiheittain (Allport 1961; Harter 1985, 75–80). Ikävuosien 0–3 aikana lapselle kehittyy ensisijaisesti käsitys fyysisestä minästään. Tällöin lapset määrittelevät itsensä ulkonäön, konkreettisen toiminnan tai konkreettisten esineiden omistamisen avulla. Heidän on vaikeaa erottaa eri alueita ja toimintaa toisistaan. Esimerkiksi jos nuorelta lapselta kysytään, oletko hyvä lukija, hän saattaa vastata myöntävästi, vaikka ei osaa vielä itse lukea. Lapsen saattaa olla vaikeaa erottaa väitteitä ”pidän lukemisesta” ja ”pidän siitä, että minulle luetaan”. Lapsella ei ole vielä moniulotteista käsitystä itsestään, vaan se on eriytymätön ja löyhästi järjestäytynyt (Pajares & Schunk 2001; Schunk 2004).

Vuosina 4–6 lapsen minä ja minäkäsitys laajentuvat, mitä edistää yleensä viiden vuoden ikäisenä kehittyvä itsetarkkailu (Goleman 1999, 325). Tässä päiväkoti-iässä lapsen sosiaalinen maailma laajentuu, mikä merkitsee myös aiempaa voimakkaampaa mahdollisuutta vertailla. Kyse ei tällöin ole vain ulkoisen ympäristön laajentuvasta muutoksesta, vaan myös kognitiivisten valmiuksien kehityksestä: taidosta vertailla omia ominaisuuksia muiden vastaaviin ominaisuuksiin. Vertailussa heräävät sosiaaliset tunteet, kuten epävarmuus, kateus, mustasukkaisuus, ylpeys ja itsevarmuus.

Vuosien 6–12 aikana lapset tulevat tietoisiksi kykyprofiileistaan ja kykenevät ratkaisemaan ongelmia älyllisesti. Heitä nuorempien lasten minäkäsitys muodostuu konkreettisten toimintojen ja ominaisuuksien pohjalta, kun taas 6–12-vuotiaana lasten minäkäsitys kohdistuu abstraktisempiin ominaisuuksiin (Harter 1990; Montemayor & Eisen 1977). Minäkäsitys alkaa myös eriytyä esimerkiksi oppiaineittain. Eccles, Wigfield, Harold ja Blumenfeld (1993) havaitsivat, että amerikkalaisilla 1–4-luokkalaisilla oppilailla oli eriytynyt minäkäsitys matematiikassa, lukemisessa, liikunnassa ja musiikissa. Jo ensimmäisen luokan oppilailla on eriytynyt minäkäsitys. Ensimmäisen luokan oppilailla näissä neljässä oppiaineessa on myönteisempi minäkäsitys kuin vanhemmilla oppilailla. Luokilla 1–4 pojilla on myönteisemmät uskomukset itsestään matematiikassa ja liikunnassa kuin tytöillä. Tytöillä on puolestaan poikia myönteisemmät uskomukset itsestään lukemisessa ja musiikissa. Niin ikään Burnett (1996) havaitsi, että perusopetuksen vuosiluokkien 3–7 aikana australialaiset pojat kuvaavat ja arvioivat itseään matematiikassa taitavampina kuin tytöt, mutta sekä tyttöjen että poikien minäkäsitys heikentyy matematiikassa näiden kouluvuosien aikana. Saman havainnon on tehnyt myös McLeod (1992), että pojilla on myönteisemmät uskomukset itsestään matematiikassa kuin tytöillä, mutta molempien uskomukset itsestä heikentyvät perusopetuksen alakoulun aikana.

Aiempaa abstraktimpi ja eriytyneempi minäkäsitys perustuu lasten havaintoihin ja heidän saamaansa palautteeseen vanhemmilta, opettajilta ja kavereilta (Hattie 1992; Hay, Ashman & van Kraayenoord 1998). Kehittyessään lapset kykenevät erottamaan piirteensä ja kykynsä. Minäkäsitys tulee organisoituneemmaksi ja moniulotteisemmaksi. Lapset pystyvät aiempaa paremmin sisällyttämään negatiivisia kokemuksia minäkäsitykseensä siirtämättä sitä muille minäkäsityksen alueille. Esimerkiksi huono koearvosana aritmetiikasta ei todennäköisesti vaikuta oppilaan minäkäsitykseen lukijana. Hän voi kompensoida matemaattista minäkäsitystään järkeilemällä, että olen huono laskija, mutta olen hyvä geometriassa.

Perusopetuksen alakoulussa lapsen minäkäsitys saattaa vaihdella tilanteittaisesti. Tilanneminäkäsitys (working self-concept) viittaa joustavaan, situationaaliseen minäkäsitykseen. Itsemäärittelyistä vain osa voi olla tietoisuudessa tiettynä hetkenä, ja juuri tämä osa muodostaa tilanneminäkäsityksen (Andersen, Reznik & Chen 1997, 236–237). Kulloinenkin konteksti ja ajankohta vaikuttavat minäkäsityksen sisältöön, ne nostavat tietoisuuteen niiden kannalta tarkoituksenmukaisia määrittelyjä itsestä (Demo 1992, 305). Sosiaalinen konteksti on merkittävä (Banaji & Prentice 1994). Esimerkiksi muiden oppilaiden sekä opettajan toiminta heijastuvat yksittäisen oppilaan minäkäsitykseen. Siksi nuoren oppilaan minäkäsitystä on syytä tutkia tilanteittaisesti ja yhteydessä kulloiseenkin oppiaineeseen ja sosiaaliseen kontekstiin. Vartuttuaan nuori alkaa asettaa pitkäkestoisia tavoitteita elämälleen. Nuoruudelle on tyypillistä identiteettikriisi, jolloin yleinen minäkäsitys muodostuu (Erikson 1962). Kuva omasta kehosta on merkittävä minäkäsityksen muodostumisessa. Tässä viimeisessä kehityksen vaiheessa saavutetaan tietoisuus yleisestä minästä.

Minäkäsitys on koottavissa seitsemän piirteen avulla (Shavelson & Bolus 1982; O'Mara, Craven & Marsh 2003; Sánchez & Sánchez Roda 2003, 98): 1) Se on järjestelmä, koska ihmiset luokittavat itseään koskevaa tietoa ja suhteuttavat näitä luokkia toisiinsa. 2) Se on moniulotteinen, jossa yksittäinen ulottuvuus heijastaa yksilön tai ryhmän omaksumaa luokkaa. 3) Hierarkkisena yleinen minä voidaan jakaa alaluokkiin, jotka sisältävät tietoa yksilöstä tietyllä alueella, esimerkiksi minä koulussa, minä matematiikassa tai sosiaalisissa suhteissa. Perustasolla ovat yksilön havainnot käyttäytymisestään. 4) Yleinen minäkäsitys on vakaa, mutta hierarkian alemmilla tasoilla minäkäsityksestä tulee epävakaampi ja tilannesidonnaisempi. 5) Vaikka yleinen minäkäsitys on vakaa, se muuttuu monimutkaisemmaksi järjestelmäksi lapsen kasvaessa aikuiseksi. 6) Minäkäsityksestä on mahdollista erottaa kuvaavat ja arvioivat ulottuvuudet, esimerkiksi ”olen onnellinen” ja ”työskentelen hyvin matematiikassa”. 7) Minäkäsitys on erotettavissa muista rakenteista kuten koulusaavutuksista.

Minäkäsitys ja minäpystyvyys (self-efficacy) -käsitteet eroavat toisistaan. Minäpystyvyydellä tarkoitetaan ihmisen uskomuksia omista kyvyistään (Pajares & Schunk 2002 Banduran sosiokognitiiviseen teoriaan viitaten). Niiden avulla voidaan ennakoida ihmisen käyttäytymistä paremmin kuin ihmisen aktuaalisten tietojen ja taitojen avulla. Minäpystyvyyden ja minäkäsityksen tutkimisessa on periaatteellinen ero (Pajares & Schunk 2002, 21): Minäpystyvyyttä selvitettäessä kysytään, osaatko kirjoittaa hyvin, osaatko ajaa autoa tai osaatko ratkaista tämän ongelman. Minäpystyvyyttä tutkittaessa oppilailla on havainnoitavana esimerkiksi todellinen matematiikan ongelma, jonka suhteen he arvioivat pystyvyyttään. Yksi esimerkki on australialaisen Farkotan (2003) tutkimus perusopetuksen seitsemäsluokkalaisten oppilaiden minäpystyvyydestä matematiikassa, jossa oppilaat arvioivat, miten he pystyvät ratkaisemaan annetun matematiikan tehtävän, heidän ei kuitenkaan tarvinnut ratkaista sitä. Kun taas minäkäsitystä tutkittaessa kysytään, kuka olen, pidänkö itsestäni tai millainen olen matematiikassa.

Minäkäsitystä tutkitaan usein kyselyillä, joissa vastaaja ilmaisee yksi- tai erimielisyytensä asteen esimerkiksi väitteeseen ”olen hyvä matematiikassa”. Lehtovaara (1994) kyseenalaistaa kyselyiden tarkoituksenmukaisuuden empiiristen havaintojensa perusteella tutkia lasten minäkäsitystä, koska lapset eivät välttämättä ymmärrä kyselyssä käytettyjä sanoja ja väitteitä tutkijan tarkoittamalla tavalla. Ihanteellista on, että tutkittavalla lapsella on mahdollisuus itse pukea sanoiksi käsityksensä itsestään. (Emt. 219–220.) Kyselyiden lisäksi käytetään myös semanttista differentiaalia ominaisuusparien vertailuna, jossa valitaan itseä parhaiten kuvaavat ominaisuudet. Lasten minäkäsityksen tutkimiseksi käytetään myös aloitetun lauseen täydentämistä (Rotter & Rafferty 1950; Grice, Burkley III, Burkley, Wright, Slaby 2004), tarinoita (mm. McAdams 1990, 1993), kuvia, jolloin lapset valitsevat sen kuvan, joka vastaa hänen käsitystään esitetystä väitteestä (mm. Linnanmäki 2002; Taube, Tornéus & Lundberg 1984). Lasten minäkäsityksen kehityksen eriytymisen perusteella on pääteltävissä, että on mahdollista tutkia 9–10-vuotiaiden suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden matemaattista minäkäsitystä lasten itsensä kuvaamana.

Minäkäsityksen rakenne ja prosessi

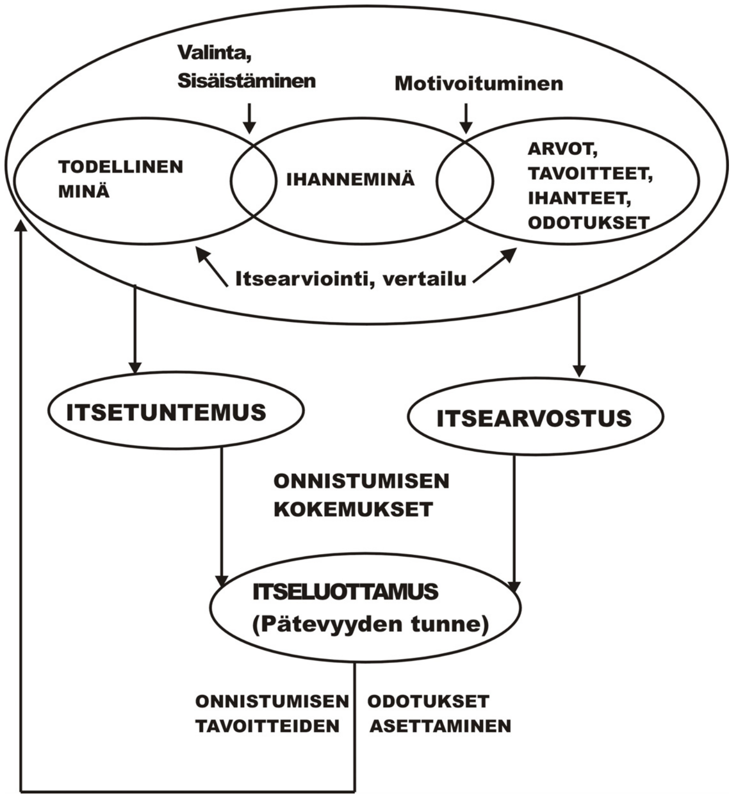
Minän kehittyminen nähdään sekä rakenteena että prosessina (Korpinen, Jokiaho & Tikkanen 2003, 67). Tässä tutkimuksessa sovelletaan Peruskoululaisen minäkäsityksen (Korpinen 1990) osa-alueiden termejä, joita on käytetty myös luku- ja kirjoitusvaikeuksissa olevien oppilaiden (Korpinen 1993, 5–26), luokanopettajaksi opiskelevien (Korpinen 1996, 141–154; 1998, 71–75), suomalaisten ja virolaisten peruskoulun oppilaiden (Korpinen 2000) minäkäsitystutkimuksissa sekä unkarilaisten koululaisten matematiikan oppituntien havainnointiin perustuvassa itsetuntotutkimuksessa (Korpinen 2005, 152–172).

Itsearvostus on yksilön positiivinen, neutraali tai negatiivinen asennoituminen itseensä, niihin piirteisiin, ominaisuuksiin, omaksumiinsa tietoihin ja taitoihin, jotka hän liittää itseensä. Oppilas saattaa olla tyytyväinen itseensä, koska on saanut matematiikan tehtävänsä oikein. Oppilas saattaa hävetä itseään, jos ei koe osaavansa kertotaulua. *Itsetuntemuksella* tarkoitetaan yksilön käsitystä siitä, millainen hän on ja oppimiseen liittyen erityisesti sitä, mitä hän osaa, mitkä ovat hänen heikot ja vahvat puolensa. Tällöin oppilas tuntee oman suorituksensa laadun ja riittävyyden suhteessa tavoitteeseen. Oppilas voi kokea olevansa hyvä sanallisissa tehtävissä, mutta voi kokea olevansa huono geometrian tehtävissä. Koska matematiikassa on monia sisältöalueita, oppilaan itsetuntemus ja -luottamus voivat vaihdella eri sisältöalueilla. *Itseluottamus*, pätevyyden tunne viittaa oppilaan käsitykseen siitä, miten hän selviää tehtävistään ja onnistuu niissä. Itseluottamus koskee onnistumisen odotuksia, se on seurausta onnistumisen kokemuksista, vaikka se viittaa tulevaisuuteen ja onnistumisen odotuksiin. Esimerkiksi oppilas luottaa siihen, että oppii jakolaskut, koska on oppinut muutkin peruslaskutoimitukset.

Minäkäsityksen muodostumista voidaan kuvata mm. seuraavien prosessien avulla (kuvio 2.3.1 nuolineen): *Valinta ja sisäistäminen* (Korpinen 1990, 13; 1993, 8): Yksilö valitsee uutta informaatiota ja kokemuksia sekä sisäistää arvoja, ihanteita, tavoitteita ja odotuksia, joita ympäristö hänelle tarjoaa. Sisäistetty informaatio integroituu osaksi ihanneminää, jossa se edustaa uusia ulottuvuuksia ihanneminän entisten ulottuvuuksien joukossa. Aiempi minäkäsitys määrää, mitä informaatiota valitaan, sisäistetään ja integroidaan. Uusi informaatio sisäistetään todennäköisimmin silloin, kun se tukee ja vahvistaa minän nykyistä rakennetta.

Motivoituminen (Korpinen 1990, 13; 1993, 8): Ihanneminään sisäistetyt arvot, ihanteet, tavoitteet ja odotukset toimivat motivoivina voimina, jotka määräävät niiden kokemusten sisällön, joihin yksilö toiminnassaan tähtää. Jotta kehitystä tapahtuisi ja motivaatio olisi jatkuvaa, kokemusten tulisi sopivassa määrin sekä tukea entistä minärakennetta (aktuaalista minää) että tuoda toisaalta siihen jotain uutta. Jotta yksilö kokisi oppimiskokemukset merkityksellisiksi, niiden olisi liityttävä yksilön sisäistämiin arvoihin. Oppimistavoitteiden tulisi olla optimaalisessa suhteessa edellytyksiin, ei liian vaativia eikä vaikeita, jolloin yksilö kokee voimattomuutta, mutta ei myöskään liian helppoja, jolloin yksilö saattaa turhautua.

Itsearviointi ja vertailu (Korpinen 1990, 15; 1993, 8): Yksilö arvioi jatkuvasti aktuaalista, todelliseksi kokemaansa minää, sen eri piirteitä ja sen rakennetta sekä ihanneminäänsä. Tämän vertailun ja arvioinnin tuloksena muodostuu itsearvostus – minän tärkein osa-alue. Itsearvostuksen kehittyminen on aina sisäinen prosessi, vaikka ympäristö, erityisesti yksilön itselleen tärkeäksi kokemien henkilöiden palaute, on tärkeä itsearvostuksen muodostumisessa. Itsearvostus on minäkäsityksen arvioiva näkökulma. Se on yksilön käsitys siitä, millainen hän on, miten hyvä hän on ja miten arvostettu hän on. Itsearvostus on yksilön arvio siitä, missä määrin minäkäsitys vastaa hänen arvojaan. Ihanneminä on itsearvostuksen kriteeri.

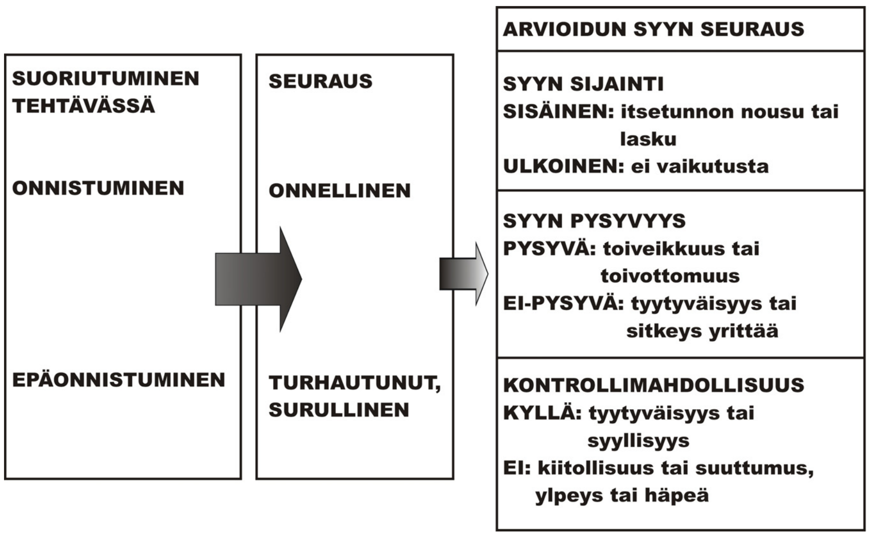


KUVIO 2.3.1 Minäkäsityksen osa-alueet ja muodostumisprosessi (Korpinen 1990, 14; 1993, 9; 2000, 27–30)

Matematiikan oppimistilanteissa pikkuoppilaat saattavat keskustella ääneen itsensä kanssa minäkäsityksestään. Minäpuhe on sisäistä vuoropuhelua, jota jokainen käy itsensä kanssa (Korpinen 2000, 29). Australialainen Burnett (1999) tutki 3–7-luokkalaisten minäpuheen ja minäkäsityksen yhteyttä oppilaiden käsityksiin opettajan antamasta palautteesta. Oppitunneilla nauhoitettiin oppilaiden minäpuhetta. Myönteistä minäpuhetta olivat esimerkiksi: Pysy rauhallisena. Kaikki on hyvin. Kaikki järjestyy. Minä onnistun. Kielteistä minäpuhetta olivat esimerkiksi: Kaikki pitävät minua toivottomana. Tästä tulee kauheaa. Minä epäonnistun. Olen toivoton. Pojilla, jotka saivat opettajalta negatiivista palautetta, oli tunneilla paljon kielteistä minäpuhetta. Heillä oli myös heikko minäkäsitys matematiikassa. Tytöillä, jotka saivat opettajalta kielteistä palautetta, ei tunneilla esiintynyt negatiivista minäpuhetta, mutta heillä oli heikko minäkäsitys matematiikassa. Burnett näkee, että opettajan negatiivisella palautteella on suora vaikutus tyttöjen minäkäsitykseen. Hannula (1996, 324) havaitsi tutkimuksessaan suomalaisen peruskoulun päättävien oppilaiden itseluottamuksesta matematiikassa, että opetuksella on voimakkaampi yhteys tyttöjen kuin poikien itseluottamukseen ja koemenestykseen. Erilaiset ryhmätyömenetelmät opetuksessa ovat yhteydessä tyttöjen itseluottamuksen ja matematiikan suoritustason nousuun.

Suomen matematiikan opetussuunnitelman (2004, 156) tavoitteena on vuosiluokilla 1–2, että oppilas saa tyydytystä ja iloa ongelmien ymmärtämisestä ja ratkaisemisesta ja vuosiluokilla 3–5 saa onnistumisen kokemuksia matematiikan parissa. Myös Unkarin matematiikan opetussuunnitelman (2003) tavoitteena on, että oppilaat kokisivat matematiikan myönteisesti ja tunneilla kajahtaisivat huudahdukset: Minäkin osaan! Minä keksin! Joten suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten matematiikan oppituntipiirroksissa saattaa esiintyä oppilaiden käsityksiä omasta ja toistensa minäpuheesta sekä opettajan antamasta palautteesta puhekuplissa, koska tässä tutkimuksessa koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta käytetään aineistona piirroksia.

Attribuutioteoriassaan Weiner (1992, 861) yhdistää oppilaan saavutukset niihin käsityksiin, joita hänellä on itsestään (ks. kuviota 2.3.2).



KUVIO 2.3.2 Kognitiivis-emotionaaliset prosessit syyseuraus-suhteineen

Oppilaan käsitys tehtävässä suoriutumisen syyn sijainnista, pysyvyydestä tai mahdollisuudesta kontrolloida tehtävässä onnistumista vaikuttaa itsetunnon ja itseluottamuksen muutokseen. Syy voi olla sisäinen tai ulkoinen. Kun oppilas kokee onnistuneensa sisäisistä syistä, hänen itsetuntonsa ja itseluottamuksensa kohoaa. Jos hän kokee onnistuneensa ulkoisista syistä, ei sillä ole vaikutusta hänen itsetuntoonsa. Esimerkiksi kyky on tällainen sisäinen, pysyvä ja kontrolloimaton syy, kun taas onni on tyypillisesti ulkoinen, muuttuva syy, jota pidetään sattumanvaraisena, jolloin sitä ei ole mahdollisuus kontrolloida. Oppilaan käsitys syyn pysyvyydestä vaikuttaa tehtävässä onnistumisen odotuksiin. Jos oppilas uskoo onnistuvansa pysyvän syyn, kuten kykyjensä vuoksi, niin hän odottaa onnistuvansa tulevaisuudessakin. Vastaavasti epäonnistuminen pysyvistä syistä saa oppilaan päättelemään, ettei hän tule onnistumaan vastaisuudessakaan.

Ei-pysyvien syiden, kuten vähäisestä panostuksesta tehtävään tai huonosta onnesta johtuva epäonnistuminen lisää sitkeyttä yrittää. Oppilas on tyytyväinen, kun hän kokee onnistuneensa panostuksensa vuoksi. Oppilaan käsitykseen mahdollisuudestaan kontrolloida tehtävässä suoriutumisen syitä liittyy erilaisia tunnereaktioita, kuten suuttumusta, häpeää tai syyllisyyttä. Jos hän epäonnistuu kontrolloitavien syiden, kuten laiskuuden tai piittaamattomuuden vuoksi, hän kokee syyllisyyttä. Vastaavasti hän on tyytyväinen, jos onnistuu kontrolloitavien syiden, esimerkiksi ahkeruuden vuoksi. Oppilas suuttuu, jos hän epäonnistuu syiden vuoksi, joita hän ei voi kontrolloida kuten toisten meluamisen vuoksi. Oppilas on kiitollinen, jos hän onnistuu toisten autettua häntä. Epäonnistuminen kontrolloimattomien syiden, kuten kyvyttömyyden vuoksi, saa oppilaan häpeämään itseään. Sitä vastoin hän on ylpeä, jos kokee onnistuneensa lahjakkuutensa ansiosta. Weinerin (1992, 861) attribuutio-teoriassa ja Hannulan mallissa (1999, 64, ks. lukua 2.2 asenteista) kognitiivisen haasteen affektiivisista seurauksista ovat yhteisinä piirteinä affektiiviset seuraukset ja suoriutuminen. Hannulan malli ilmentää tehtävän vaatimuksia ja hetkellisiä affekteja korostetummin kuin Weinerin attribuutioteoria, joka painottaa syiden sijaintia, pysyvyyttä ja kontrollimahdollisuutta. On huomattava, että Hannulan malli kognitiivisen haasteen affektiivisista seurauksista perustuu nimenomaan empiirisiin tutkimuksiin matematiikan oppimistilanteista.

2.4 Uskomukset

Ei Suomen perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelmassa 2004 eikä matematiikan unkarilaisessa Varga–Neményi -opetusmenetelmässä viitata siihen, millaiset uskomukset matematiikasta ovat opetuksen tavoitteena. Nemzeti Alaptanterv (2003, 44), Unkarin perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelma, esittää, että koulun matematiikan opetuksen tarkoitus on antaa uskottava ja yhtenäinen kokonaiskuva matematiikasta (ks. lukua 4.3).

Kaikesta siitä, mitä yksilö on havainnut, kokenut tai lukenut, hän muodostaa uskomuksia. Koska ihmisen mieli eli psyyke rakentuu Latomaan (2005, 17, 47) mukaan subjektiivisista merkityksenannoista ja merkityssuhteista, mieli merkitysmaailmana on kokemuksia mm. tunteita ja uskomuksia. Myös Perttula (2005, 124) näkee, että kokemuksia mielellisinä merkityksinä on erityyppisiä, kuten tunteita, uskomuksia ja arviointia. Merkityssuhteet, jatkaa Rauhala (2005/1983, 37), ovat luonteeltaan erilaisia, esimerkiksi tunnetta ja uskoa. Nämä syntyvät ihmisen tajunnassa spontaanisti tai erilaisten vaikuttavien toimien ansiosta, kun ihmisen tajunta käsitetään kokemisen kokonaisuudeksi. Tältä pohjalta sekä uskomukset, tunteet että asenteet arviointiprosessien sulautuessa yhteen nähdään ihmisen perusolemukseen kuuluviksi.

Matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen liittyviä opettajien, opiskelijoiden ja oppilaiden uskomuksia on tutkittu runsaasti. Perusopetuksen oppilaiden uskomus- ja asennetutkimuksista Vanayan, White, Yuen ja Teper (1997) huomauttavat, että perusopetuksen yläkoululaisten uskomuksia on tutkittu runsaammin kuin alakoululaisten vastaavia. Alakoululaisten matematiikkaan liittyvien uskomusten tutkimuksen vähäisyyteen lienevät syynä kehityspsykologiset tekijät mm. luku- ja kirjoitustaito, jota kyselytyyppiset tutkimukset edellyttävät.

Uskomuksia on määritelty monin tavoin. Runsaasta alan kirjallisuudesta huolimatta uskomus-käsitteen määrittely on vakiintumaton eikä sellaista kenties ole mahdollista löytääkään (Furinghetti & Pehkonen 2002, 48–55), mikä oli havaittavissa Oberwolfachissa matematiikkauskomustutkijoiden paneelissa vuonna 1999. Uskomukset voidaan ymmärtää subjektiivisena tietona, jota yksilöllä on uskomuksen kohteen jostakin tai joistakin ominaisuuksista. Uskomusten voimakkuus vaihtelee sen mukaan, miten varma yksilö on kohteen ominaisuuksista (Block & Hazelip 1995, 25). Uskomus voi olla myös yksilölle muodostuneen käsityksen uskottavuuden arviointia, hyväksyykö, kieltääkö tai epäileekö arviointiaan, joka koskee jotakin asiaa tai käsitettä (Hart 1989, 42). Tässä tutkimuksessa 9–10-vuotiaiden lasten kokemasta matematiikan opetussuunnitelmasta sovelletaan Op ’t Eynden, de Corten ja Verschafelin (2002, 16) määritelmää seuraavasti:

> *Oppilaiden matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen liittyvät uskomukset ovat implisiittisiä tai eksplisiittisiä subjektiivisia käsityksiä, joita he pitävät totena.*

Määritelmä herättää kysymyksen, millä perusteilla nuoret oppilaat pitävät uskomuksiaan totena. Pienet lapset uskovat todeksi sen, minkä havaitsevat (Kitchener & King 1995, 183). Heidän uskomuksensa ovat luonnehdittavissa konkreettisiksi, yhden kategorian järjestelmiksi, jolloin lapset olettavat, että tieto on sekä ehdotonta että konkreettista, joten uskomuksia ei ole tarpeen perustella, vaan vain havainnoiminen riittää sen tietämiseksi, mitä on olemassa. Lasten konkreettisen yhden kategorian uskomusjärjestelmän kehittymisen näkökulmasta on suotuisaa, että matematiikan opetuksessa opittavia asioita konkretisoidaan monipuolisesti aistein havaittaviksi, jotta lapsille muodostuisi monipuolisia uskomuksia matematiikasta. Pienet lapset eivät myöskään tunnusta sellaisten ongelmien olemassaoloa, joihin ei ole ehdottoman tosia vastauksia. Heidän on vaikea hyväksyä matematiikassa sellaisia ongelmia, joissa on useita ratkaisuja tai ne eivät ole ratkaistavissa ollenkaan.

Murrosiän varhaisvaiheessa oppilaat alkavat uskoa dualistisen uskomusjärjestelmän mukaisesti, että joillakin ihmisillä on oikeita ja toisilla vääriä uskomuksia, koska tieto ei ole kaikkien ulottuvilla (Kitchener & King 1995, 183), vaan se on auktoriteetin, esimerkiksi opettajan, hallussa. Tällöin tietämisen muuttuessa monimutkaisemmaksi lapset katsovat, että vaikka totuus on saavutettavissa, se ei ole välttämättä suoraan ja välittömästi jokaisen tiedossa.

Koska totuus kuitenkin on perimmältään tiedettävissä, lapset pitävät kaikkia ongelmia ratkaistavina. Tämän johdosta he olettavat, että oppijan tehtävänä on löytää vastaus ja että tämän vastauksen lähteenä voi olla opettaja-auktoriteetin lisäksi esimerkiksi matematiikan oppikirja. Murrosikää lähestyvä oppilas saattaa ihmetellä, miksi matematiikan ongelmanratkaisutehtäviä tulkitaan eri tavoin ja miksi opettaja ei teetä sellaisia matematiikan tehtäviä, joissa toistetaan opetettuja tosiasioita eli totuuksia kuten 15+7 = 22, jolloin tiedetään varmasti, onko tehtävä oikein vai väärin opettajan tarkistuksen perusteella.

1980-luvun puolivälin jälkeen on ilmestynyt runsaasti artikkeleita perusopetuksen yläkoulun oppilaiden ja opiskelijoiden matematiikkaan liittyvistä uskomuksista, joita pidetään monissa tutkimuksissa oppilaiden väärinkäsityksinä matematiikasta (Cobb 1986; Schoenfeld 1987; Garofalo 1989; Mtetwa & Carofalo 1989; Underhill 1988; Frank 1988; Buerk 1994). Esimerkiksi Underhill (1988, 56) luonnehtii väärinkäsitystä oppijan uskomukseksi, jota eivät jaa muut matematiikasta enemmän tietävät, mutta Schoenfeld (1987) ja Garofalo (1989) pitävät oppilaiden uskomuksia realistisina päätelminä, jotka perustuvat heidän havaintoihinsa luokkahuoneympäristöistä. Siksi opettajat tarvitsevat tietoa oppilaiden uskomuksista, sillä ne vaikuttavat oppilaiden käyttäytymiseen luokassa (Schoenfeld 1987; Spangler 1992; Oaks 1994). Jos oppilaiden uskomukset ovat pysyviä ja negatiivisia, oppilaista tulee passiivisia oppijoita, jotka pitävät ensisijaisesti muistamista turvallisempana menettelytapana kuin ymmärtämistä (Buerk 1994; Pehkonen & Törner 1996). Oppilas pyrkii ”olemaan turvassa”, kun hän tuntee, että hänen odotetaan olevan passiivinen. Jotkut oppilaat haluavat olla turvassa, koska heille on vihjailtu tyhmyydestä tai he ovat kokeneet olevansa tyhmiä luokassa (Buerk 1994, 3).

Oppilaiden matematiikkaan liittyviä uskomuksia on ryhmitelty tutkimuksissa monella eri tavalla (Op ´t Eynde ym. 2002, 16–21), kuten uskomukset matematiikasta oppiaineena, sen oppimisesta, itsestä ja muista matematiikan oppijana, opettamisesta, opettajasta, matematiikan tehtävistä, sosiaalisesta kontekstista ja luokkahuoneesta. Furinghetti (1996, 20) näkeekin, että kaikilla koulua käyneillä on hyvin yksityiskohtaisia uskomuksia matematiikasta oppiaineena ja että nämä uskomukset muodostavat matematiikasta mielikuvan, joka on erittäin yleinen.

Monet muutkin tutkijat pitävät oppilaiden matematiikkaan liittyviä uskomuksia yleisinä. Näitä yleisiä uskomuksia ovat luetelleet mm. Schoenfeld (1983), Cobb (1986), Garofalo (1989), Mtetwa & Garofalo (1989), Frank (1988), Spangler (1992), Bock (1994), Pehkonen & Törner (1996) ja Henrion (1997). Seuraavaksi tarkastellaan muutamia yleisimpiä oppilaiden matematiikkaan liittyviä uskomuksia. Tässä yhteydessä verrataan myös suomalaisten ja unkarilaisten seitsemäsluokkalaisten käsityksiä matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta (Pehkonen 1993). Samalla verrataan oppilaiden yleisiä uskomuksia myös Suomen perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelmaan 2004 ja Unkarin vastaavaan opetussuunnitelmaan 2003. Lisäksi uskomuksia peilataan edellä esitettyihin nuorten oppilaiden uskomusjärjestelmän kehitysvaiheisiin (Kitchener & King 1995). Näillä vertailuilla luodaan perustaa oppilaiden uskomusten muodostumisen ja niihin yhteydessä olevien tekijöiden ymmärtämiselle.

Uskomuksia matematiikasta oppiaineena ja sen oppimisesta

- Matematiikka on laskemista.

Tämän uskomuksen mukaan matematiikka on aritmetiikkaa peruslaskutoimituksineen (Frank 1988). Se korostaa matematiikan olevan lukuja ja numeroita. Suomalaiset seitsemäsluokkalaiset näkivät matematiikan mekaanisena laskemisena useammin kuin unkarilaiset ikätoverinsa (Pehkonen 1993, 153) 1990-luvun alussa.

Tällainen oppilaiden uskomus matematiikasta olisi nykyisinkin ymmärrettävä, koska esimerkiksi Suomen perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelman perusteissa (2004, 156–159) vuosiluokilla 1–5 sisältöalue *Luvut ja laskutoimitukset* on ensimmäisenä, siis tärkein. Se on myös laajin sisältöalue opetussuunnitelmassa. Näillä perusteilla suomalaisopettajat painottanevat tätä sisältöaluetta muita enemmän, mikä todennäköisesti heijastuu oppilaiden uskomuksiin.

Kun taas Unkarin perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelman perusteet, Nemzeti Alaptanterv, (2003, 45) esittää *Lukuja ja laskutoimituksia* vastaavan sisältöalueen *Orientoitumisena tilaan, aikaan ja maailmaan määrällisissä suhteissa*, jolloin lukukäsitettä ja laskutoimituksia lähestytään opetustilanteissa perussuureiden mittaamisen avulla. Koska nuoret oppilaat uskovat todeksi sen, minkä havaitsevat, konkreettisen yhden kategorian uskomusjärjestelmän kehitysvaiheessa (Kitchener & King 1995), heidän uskomuksissaan kuvastunevat opetussuunnitelman painotukset.

- Matematiikan tekemisen tavoitteena on saada oikeita vastauksia.

Oppilaat näkevät matematiikan jäykästi ja kapea-alaisesti: vastaukset voivat olla joko täysin oikein tai väärin ja vain opetettujen ratkaisumenetelmien käyttö antaa oikeita vastauksia. Tässä tilanteessa ei arvosteta matematiikan prosessia, vaan sen lopputulosta. (Frank 1988, Bock 1994.) Suomalaisoppilaat uskoivat unkarilaisoppilaita useammin, että oikea vastaus on ratkaisutapaa tärkeämpi, unkarilaiset oppilaat uskoivat suomalaisia merkitsevästi voimakkaammin ratkaisuun johtavien algoritmien olemassaoloon (Pehkonen 1993, 154).

Tämä oppilaiden uskomus toiminnasta matematiikan parissa ilmentää murrosikäisten oppilaiden dualistisen uskomusjärjestelmän kehitysvaihetta, jolloin uskotaan tiedon olevan joko oikeaa tai väärää (Kitchener & King 1995, 183). Suomen matematiikan opetussuunnitelman (2004, 158–159) yhtenä tavoitteena on varmentaa peruslaskutoimitukset ja oppia laskualgoritmeja vuosiluokilla 3–5 kuten Unkarinkin matematiikan opetussuunnitelmassa 2003, joten tavoite saattaa ilmetä oppilaiden uskomuksena ratkaisumenetelmistä.

Uskomuksia oppilaan ja opettajan rooleista työtapojen ilmentäjänä

- Oppilaan rooli matematiikassa on vastaanottaa tietoa ja harjoitella sitä, mitä on opetettu.

Oppilaiden on uskomuksensa mukaisesti näytettävä asioiden täydellistä hallintaa (Cobb 1986, 8). Oppilaat pelaavat tällöin akateemista matematiikka-peliä. Menestymisen tarkoituksena on vakuuttaa opettajalle, että tarkoituksenmukaiset symboliset toiminnat on tehty. Uskomus on havaittavissa käytännön opetustilanteissa siten, että oppilaat kysyvät, tuleeko tämä kokeeseen (Garofalo 1989, 503; Oaks 1994). Suomalaisten ja unkarilaisten käsityksiä vertailevan tutkimuksen mukaan (Pehkonen 1993, 155–156) suomalaiset oppilaat uskoivat opettajajohtoiseen työskentelyyn selkeästi vahvemmin kuin unkarilaiset oppilaat. Tällöin opettaja auttaa tarvittaessa ja selittää tehtävien ratkaisun tarkasti.

- Jonkun täytyy kertoa, mitä matematiikassa on tehtävä.

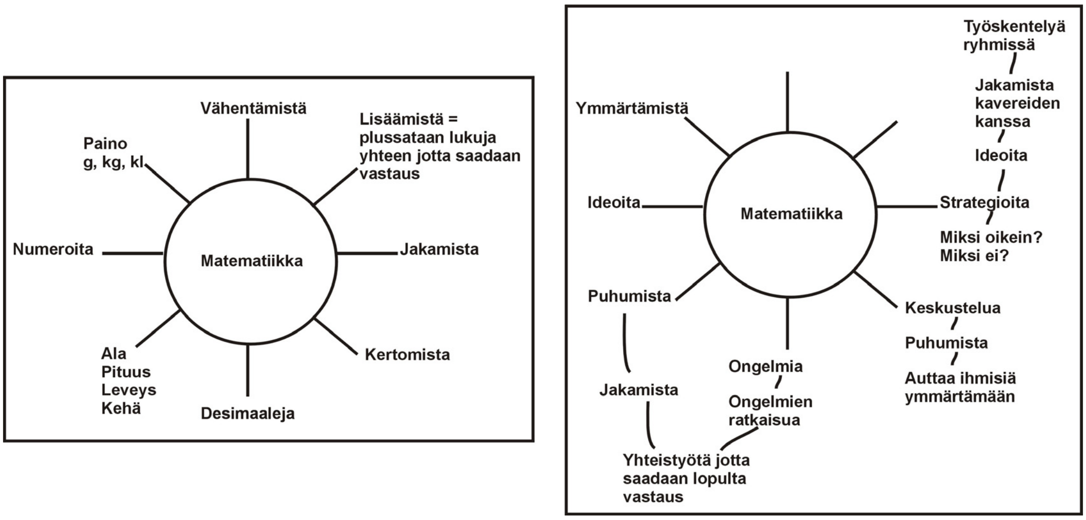
Uskomus opettajan kertomisvelvoitteeseen korostaa opettajan auktoriteetin keskeistä asemaa (Bock 1994), jolloin oppilaat tulevat riippuvaisiksi opettajasta (Buerk 1994, 3). Suomalaisoppilaiden opettajajohtoisen työskentelyuskomuksen mukaan opettajan tuli antaa tarkat ohjeet työskentelylle, mihin unkarilaiset ikätoverit eivät uskoneet yhtä voimakkaasti (Pehkonen 1993, 156).

Nämä kaksi matematiikkaan liittyvää uskomusta kuvastavat murrosikäisten oppilaiden dualistisen uskomusjärjestelmän kehitysvaihetta, jolloin oikea tieto on opettaja-auktoriteetin hallussa (Kitchener & King 1995, 183). Sekä Suomen perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelman perusteiden (2004, 17) että Unkarin opetussuunnitelman (2003, 61) mukaan opetuksessa tulisi käyttää monipuolisia sekä opettajajohtoisia että oppilaslähtöisiä työtapoja. Suomalaistutkimukset (mm. Niemi 2004; Pietilä 2002; Maijala tulossa) kuitenkin osoittavat matematiikan opetuksen useimmiten olevan opettajajohtoista kyselevää opetusta ja oppilaiden yksilöllistä työskentelyä. Englantilaistutkimusten (mm. Andrews & Hatch 2000, 2001; Price 1997) mukaan matematiikan opetuksessa Unkarissa käytetään vaihtelevasti opettajajohtoisia ja oppilaslähtöisiä menetelmiä, jolloin oppilaat ajoittain toimivat *opettajina*.

On huomattava, ettei kaikilla oppilailla ole vain yleisiä uskomuksia. Franke ja Carey (1997) tutkivat 36 ensimmäisen luokan oppilaan havaintoja matematiikasta kognitiivisesti ohjatussa opetuksessa (Cognitively Guided Instruction CGI), jossa oppilailla oli mahdollisuus ratkaista ongelmia, keskustella tavoistaan ratkaista niitä ja rakentaa omia epämuodollisia strategioitaan ratkaista ongelmia. Kaksikymmentä minuuttia kestävässä strukturoidussa haastattelussa oppilailta kysyttiin luokkahuonetapahtumista. Näiden lasten havainnot matematiikan tekemisestä erosivat yleisistä uskomuksista matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta. Lapset kertoivat ongelmanratkaisusta, toimintavälineiden käytöstä, matematiikasta puhumisesta ja ongelmanratkaisusta eri tavoin. Pääosa 36 lapsesta ei pitänyt opettajaa ainoana auktoriteettina luokassa. 22 lasta (61 %) koki, että he itse voivat kertoa tehneensä hyvää työtä ratkaistessaan ongelmia, kuusi lasta (17 %) katsoi palautteen annon kuuluvan opettajalle ja seitsemän lasta (19 %) arvioi yhdessä opettajan kanssa ongelmanratkaisuaan. Lisäksi 28 lasta (78 %) koki, että he itse pystyvät ratkaisemaan niitä syntyviä konflikteja, kun kaksi kaveria on ratkaissut ongelman eri tavalla. Tämä tutkimus korostaa oppilaiden aktiivista ja keskeistä roolia luokassa. Näin on pääteltävissä, että pienetkin lapset saattavat tunnistaa ongelmia korostavassa ympäristössä sekä matematiikan prosessin että lopputuloksen merkityksen.

Kaikki tutkimustulokset eivät tue sitä ajatusta, että lasten uskomukset muovautuisivat samanlaisiksi samanlaisessa opetuksessa. Esimerkiksi Roddin (1993) haastattelututkimus yhdeksän vanhemman englantilaisen oppilaan uskomuksista paljastaa, että oppilasryhmässä saattaa olla erilaisia uskomuksia. Yhdeksästä oppilaasta kuudella oli monipuolinen ja joustava näkemys matematiikasta, kolmella yksipuolinen ja ehdoton näkemys.

Tutkiessaan australialaisten kuudesluokkalaisten oppilaiden näkemyksiä matematiikasta miellekartan avulla niin ikään McDonough (2002, 46–47) havaitsi, että saman oppilasryhmän oppilailla saattaa olla erilaisia näkemyksiä matematiikasta. Oppilaiden erilaisia näkemyksiä havainnollistetaan kuviossa 2.4.1. Vasemman puoleisen miellekartan piirtänyt kuudesluokkalainen on keskittynyt matematiikan sisältöihin, kun taas oikeanpuoleisen miellekartan piirtänyt kuudesluokkalainen ei ole kiinnittänyt huomiota matematiikan sisältöihin, vaan näkee matematiikan sosiaalisena toimintana, joka sisältää sekä yksilö- että ryhmätyöskentelyä ongelmien ratkaisemiseksi.



KUVIO 2.4.1 Oppilaiden miellekarttoja matematiikasta (McDonough 2002, 46–47)

Piirrostutkimusten merkityksen lasten matematiikkaan liittyvien erilaisten käsitysten paljastamiseksi ovat havainneet myös Cox (1999), van Essen ja Hamaker (2001) sekä Morgan-Fleming ja Doyle (1997), joista kaksi viimeksi mainittua toteavat, etteivät lapset mielellään kirjoita matematiikan opetussuunnitelmasta.

Sekä Suomen että Unkarin matematiikan opetussuunnitelmissa (2004, 2003) korostetaan ongelmanratkaisua muiden matematiikan sisältöjen lisäksi, joten on todennäköistä, että ongelmanratkaisu ja muut matematiikan sisältöalueet ilmenevät oppilaiden uskomuksissa, jos niitä on käsitelty opetustilanteissa.

Yhteenvetona esitetään, että oppilaiden tunteiden, asenteiden, minäkäsityksen, uskomusten ja uskomusjärjestelmien muodostumiseen ovat osaltaan yhteydessä matematiikan opetus kokonaisuudessaan, sisällöt, oppimateriaalit ja opetusmenetelmät. Sisällöt määritellään periaatteiltaan opetussuunnitelmassa, jonka perusteella laaditaan oppimateriaalit. Niiden avulla esitellään opittavia asioita. Matematiikan opetusmenetelmät pohjautuvat usein oppimateriaaleihin. (ks. myös Malmivuori 1993, 164–165). Koska yleisimmät 1980-luvulta saakka tunnetut oppilaiden matematiikkaan liittyvät uskomukset ovat ymmärrettäviä vielä 2000-luvun Suomen ja Unkarin virallisen kirjoitetun matematiikan opetussuunnitelman pohjalta, uskomuksia tässä tutkimuksessa ei nähdä piilo-opetussuunnitelmaan vaan oppilaiden kokemaan matematiikan opetussuunnitelmaan kuuluviksi.

2.5 Koetun matematiikan opetussuunnitelman rakenne

Kun oppilas tulkitsee opettajan toteuttamaa virallista matematiikan opetussuunnitelmaa ja oppimateriaaleja mahdollisena opetussuunnitelmana, syntyy koettu opetussuunnitelma matematiikasta. Se on epäyhtenäinen rakenteeltaan koulukokemusten erilaisuuden vuoksi (Lindenskov 1993, 151–154). Edellisten lukujen 2.1–2.4 tarkastelujen tarkoituksena oli yhtenäistää koetun matematiikan opetussuunnitelman tarkastelua ja eriyttää säätelevien tekijöiden (tunteiden, asenteiden, minäkäsityksen ja uskomusten) osittain päällekkäisiä määritelmiä. Yhtenäisen rakenteen tarkoitus on tukea suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten matematiikkaan liittyvien koulukokemusten jäsentämistä ja kokoamista.

Seuraavassa kuviossa 2.5.1 esitetään koetun matematiikan opetussuunnitelman rakenne, joka sisältää oppilaan tunteita, asenteita ja uskomuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta sekä käsityksiä itsestä matematiikan oppijana.

Koska koulukokemukset ovat keskeisiä koetun matematiikan opetussuunnitelman muodostumisessa, kuvion jälkeen tarkastellaan, millaista matematiikan opetus Suomessa ja Unkarissa perusopetuksessa on aiemman tutkimustiedon pohjalta. Sitten tarkastellaan eri maiden lasten ja nuorten suhdetta matematiikkaan sekä suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen koululaisten affektiivisia ja kognitiivisia oppimistuloksia matematiikassa. Koska opettajien uskomusten matematiikasta katsotaan olevan yhteydessä oppilaiden uskomuksiin opetuksen välittäjänä, tarkastellaan myös suomalaisten ja unkarilaisten opettajien uskomuksia. Lopuksi esitellään muita mahdollisia koettuun matematiikan opetussuunnitelmaan yhteydessä olevia tekijöitä. Näiden pohdiskelevien tarkastelujen tarkoituksena on osoittaa, että koettu matematiikan opetussuunnitelma voidaan nähdä koulukontekstia laajempana ilmiönä (ks. myös Kankaanranta & Linnakylä 1993, 8–36).

Koettu matematiikan opetussuunnitelma sisältää

Oppilaiden kuvaamia tunteita
- matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta

Oppilaiden asenteita matematiikkaan aiempiin kokemuksiin perustuvana arviointina
- pitäminen tai ei-pitäminen
- vaikeus tai helppous,
- tärkeys ja
- käyttötarkoituksia

Oppilaiden uskomuksia matematiikasta
- mitä ja millaista matematiikka on,
- miten sitä opitaan ja opetetaan sekä
- oppilaan ja opettajan rooleista

Oppilaiden käsityksiä itsestä matematiikan oppijana
- arvio itsestä matematiikassa yleensä
- onnistumisia ja epäonnistumisia sekä
- vahvoja ja heikkoja sisältöalueita

KUVIO 2.5.1 Koetun matematiikan opetussuunnitelman rakenne

2.6 Matematiikan opetusta Suomessa ja Unkarissa

Matematiikan opetuksen tarkastelun tarkoituksena on edistää molempien maiden oppilaiden kokeman matematiikan opetussuunnitelman ymmärtämistä. Aluksi katsotaan opetusta oppilaiden näkökulmasta, suomalaisten peruskoulun kolmasluokkalaisten, 9-vuotiaiden, silmin sekä suomalaisten ja unkarilaisten seitsemäsluokkalaisten käsityksiä hyvästä matematiikan opetuksesta. Sittemmin tarkastellaan opetusta Suomessa ja Unkarissa sekä tutkijoiden että opiskelijoiden havainnoimana. Lopuksi pohditaan kyselevän opetuksen pedagogiikkaa tarkemmin, koska se on niin Suomessa, Unkarissa kuin monissa maissa matematiikan opetuksessa runsaasti käytetty työtapa, joka yleisyytensä vuoksi saattaa ilmetä tämän tutkimuksen aineistossa koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta.

Suomalaisen peruskoulun kolmasluokkalaisten kirjoitelmien mukaan (Kankaanranta & Linnakylä 1993, 19, 34–35) 1990-luvulla oppiminen alkoi siitä, kun opettaja tuli luokkaan. Yleensä koulupäivän ensimmäinen tunti oli matematiikkaa tai äidinkieltä. Ensin tarkistettiin matematiikan kotitehtävät ja laskettiin päässälaskuja. Sitten opettaja opetti ja näytti muutamia esimerkkejä. Sitten kaikki tekivät kirjan kappaleeseen liittyvät tehtävät. Kun oli laskenut laskut, ne tarkistettiin. Tavallisesti kolmasluokkalaiset kokivat matematiikan tehtävät vain tehtävinä tai jopa kirjan sivuina, joiden mukaan edettiin. Oppikirjan valta oli erityisen vahva matematiikassa ja äidinkielessä, joissa kirjan "sivujen", tehtävien tekeminen tai niiden tarkastaminen oli kolmasluokkalaisten kuvauksissa hallitsevin työtapa. Matematiikan oppitunneilta oppilaiden kuvausten perusteella puuttui toiminnallisuutta, sosiaalisuutta, luovuutta ja valinnanvapautta, joita tarjosivat kolmasluokkalaisten mieliaineet, liikunta, kuvaamataito ja käsityö. Jo niin varhain kuin perusopetuksen toisella luokalla oppilaat alkavat muodostaa uskomuksia hyvästä opetuksesta, minkä havaitsivat Murphy, Delli ja Edwards (2004, 88–89) piirrättäessään oppilailla luokkahuonetapahtumia, joita toisluokkalaiset kykenivät vakuuttavasti suullisestikin kuvaamaan. Toisluokkalaisten uskomukset ovat ymmärrettäviä, koska jo kouluikää nuoremmat muodostavat uskomuksia havaintojensa perusteella (Kitchener & King 1995, 183).

Suomalaisten ja unkarilaisten peruskoulun seitsemäsluokkalaisten käsitykset hyvästä matematiikan opetuksesta erosivat merkitsevästi 1990-luvulla (Pehkonen & Tompa 1994, 233–234). Suomalaiset oppilaat suosivat laskemiskeskeistä oppimista enemmän kuin unkarilaiset oppilaat. Unkarilaiset oppilaat päinvastoin kuin suomalaiset korostivat täsmällistä opetusta, joka pyrki ymmärtämiseen oppilaiden edellytysten mukaan. Unkarilaiset oppilaat korostivat puhtaan matematiikan käsitteiden oppimista ja opettamista enemmän kuin suomalaiset, jotka pyrkivät tasapainoon puhtaan ja soveltavan matematiikan välillä. Unkarilaiset oppilaat painottivat enemmän kuin suomalaiset matematiikan arviointia kuten nopeaa suoritusta, oikeita vastauksia, sääntöjen muistamista ja uskoa oikeaan menetelmään. Suomalaiset ja unkarilaiset seitsemäsluokkalaiset olivat myös yksimielisiä siitä, millaista hyvä matematiikan opetus on (Pehkonen 1998, 257–260): Se sisältää päässälaskujen lisäksi sanallisia ongelmia. Tehtävät voidaan ratkaista useammalla kuin yhdellä tavalla. Niistä pitää olla hyötyä käytännössä, kuten alojen ja määrien laskemisessa. Opetuksessa on tärkeää, että kaikki ymmärtävät opittavan asian. Oppilaan tehtäviin kuuluu kysyä. Suomalaisten seitsemäsluokkalaisten mielestä opettajan kuului auttaa vaikeuksissa, kun taas unkarilaisten oppilaiden mielestä opettajan tehtävä oli selittää tarkasti opetettavat asiat.

Suomalaisten 1–2-vuosiluokkien opettajien, ns. alkuopettajien (n = 6), matematiikan opetus mukaili perinteisen oppikirjasidonnaisen tunnin rakennetta (Perkkilä 2002, 150–155). He käyttivät oppimisvälineitä matematiikan tunneilla, mutta niiden käyttötavat erosivat. Viisi opettajaa kuudesta käytti oppimisvälineitä oppikirjasidonnaisesti yleensä oppitunnin alussa uuden asian opetuksessa, jonka jälkeen oppilaat tekivät oppikirjan tehtäviä. Yhden alkuopettajan tuntien rakenne oli dynaaminen: oppilaat tutkivat toimintavälineiden avulla uusia matematiikan käsitteitä, joten tunnit olivat toiminnallisia työtapoja suosivia. Alkuopetuksen tunneilla tehtävien vastauksista tai ratkaisumenetelmistä ei juurikaan keskusteltu. Kun oppilas oli laskenut tehtävän väärin, opettaja pyysi korjaamaan tehtävän. Oppilaan vastatessa väärin opettajan kysymykseen, oli tavallista, että opettaja sivuutti oppilaan vastauksen ja kysyi toiselta oppilaalta. Laskutehtäviin siirryttäessä opettaja saattoi varmistaa, että lapset osaavat laskea oppikirjan aukeaman tehtävät käymällä lävitse erilaiset tehtävätyypit. Näin opettajat rakensivat turvaverkkoja, jotta lapset eivät epäonnistuisi. Oppilaan pääsääntöinen tehtävä oli tiedon vastaanottaminen. Oppilaat vastasivat yleensä täsmällisesti ja lyhyesti kysymyksiin. Oppilaat esittivät harvoin omia ajatuksiaan eivätkä perustelleet vastauksiaan.

Viiden suomalaisen luokanopettajan, jotka opettivat viidesluokkalaisia, matematiikan tunnit (30) olivat pääsääntöisesti kaavamaisia (Maijala tulossa): Oppitunnin alussa oli kotitehtävien tarkistus, jonka jälkeen opetettiin uusi asia matematiikasta opettajan esityksenä ja kyselynä. Opettajien kysymykset olivat täsmällisiä, ja niihin odotettiin ennalta suunniteltua vastausta. Oppikirjan sisällöt ohjasivat tiukasti oppitunneilla käsiteltäviä sisältöjä. Uuden asian opetuksen jälkeen oppilaat harjoittelivat opetettua asiaa tekemällä tehtäviä työkirjasta. Tunnin lopussa annettiin kotitehtävät. Tutkimustulokset osoittivat myös, että näin työskenneltäessä pojat menestyvät matematiikassa tyttöjä paremmin, ja että heillä on korkeampi itseluottamus kuin tytöillä.

Suomalaiset luokanopettajaopiskelijat (n = 80) havainnoivat matematiikan opetusta harjoitteluluokissaan, jolloin he havaitsivat oppitunnin etenevän kouluajoilta tutun kaavan mukaisesti (Pietilä 2002, 144): Ensin tarkistetaan läksyt, otetaan muutama esimerkki uudesta asiasta ja lasketaan lopputunti hiljaa päivän aukeamaa kirjasta. Suurin osa harjoitteluluokkien matematiikan opetuksesta poikkesi useilla tavoilla luokanopettajakoulutuksen matematiikan perusopintojen antamasta ”mallista”. Oppilaat olivat passiivisia kirjantäyttäjiä. Noin neljäsosa luokanopettajaopiskelijoiden matematiikan opetusharjoittelua ohjaavista opettajista käytti opetuksessaan havainnollistamisvälineitä ja toiminnallisuutta. Loput noudattivat opetuksessaan urakkasysteemiä eli oppilaat etenivät oppikirjaa pääasiassa omaan tahtiinsa itsenäisesti. Erityisesti luokanopettajaopiskelijoita askarrutti oppilaiden oppiminen. He olivat huolissaan, etteivät kaikki oppilaat ymmärrä opiskeltavia sisältöjä, varsinkaan ilman havainnollistamista. Heikompien auttamiseen ei kiinnitetty opiskelijoiden mielestä aina riittävästi huomiota. Lisäksi opiskelijat kiinnittivät huomiota eriyttämiseen. Suurin osa opettajista ei eriyttänyt opetusta riittävästi, yleensä ei ollenkaan.

Unkarissa englantilaiset Andrews ja Hatch (2001) havainnoivat kahdeksan viikon aikana lähes sataa matematiikan oppituntia. Useimmat heidän näkemistään matematiikan oppitunneista sisälsivät neljä vaihetta: Oppitunti alkoi edellisellä oppitunnilla annettujen kotitehtävien tarkastelulla, jolloin muutamat oppilaat esittelivät liitutaululla kotitehtävien ratkaisujaan. Tällöin opettaja tuki heitä epävarmoissa tilanteissa, selvensi tarvittaessa, teki yhteenvedon ja rohkaisi oppilaita osallistumaan aktiivisesti. Kotitehtävien tarkastelua seurasi "lämmittelyvaihe", jolloin esitettiin oppilaille muutamia suullisia tehtäviä kotitehtävistä tai aiemmin opituista asioista. Niiden tarkoituksena oli tarjota oppilaille mahdollisuus harjoitella laskurutiineja, loogista ajattelua tai suunnata oppilaita tunnilla käsiteltävään pääasiaan. Lämmittelyn jälkeen opettaja esitteli oppitunnilla käsiteltävän pääongelman. Sen esittelyn jälkeen oppilaat tekivät muutamia minuutteja yksilöllistä työtä, sittemmin ongelmaa ratkaistiin koko luokan yhteistyönä. Oppilaiden yksilöllinen työskentely ja ongelman ratkaiseminen yhteistyönä saattoivat vuorotella tunnin aikana useita kertoja. Oppitunnin lopuksi annettiin uudet kotitehtävät. Oppitunnin eri vaiheiden aikana puhuttiin runsaasti.

Englantilainen opiskelija Price (1997) tutki unkarilaisia videoituja 5–14-vuotiaiden matematiikan oppitunteja, joilla vuorottelivat opettajajohtoinen koko luokan kyselevä opetus ja oppilaiden yksilöllinen työskentely kirjallisten tehtävien parissa. Opettajan kysely ohjasi oppilaita tutkimaan, herätti ajattelua, innosti ja motivoi oppilaita oppimaan. Unkarilaiset opettajat hallitsivat opettamansa asian ja olivat suunnitelleet oppitunnit. Kaikilla tutkituilla videotunneilla opetus oli suunniteltu oppilaiden kykyjä vastaavaksi. Nuorempien oppilaiden mielenkiintoa pidettiin yllä toimintavälineillä. Matematiikan tunneilla puhuttiin runsaasti, mutta niillä oli hyvä järjestys. Price (1997) toteaa, että hänen havainnoimansa unkarilaiset matematiikan oppitunnit olivat erilaisia kuin hänen koulumuistonsa tunneista. Hänen kouluaikanaan oppilaat olivat harvoin liitutaululla esittelemässä ratkaisujaan ja heillä oli harvoin päässälaskuja.

Sekä oppilaiden, tutkijoiden että opiskelijoiden havaintojen perusteella on pääteltävissä, että matematiikan oppitunnit Suomessa ja Unkarissa noudattavat usein säännönmukaisia vaiheita, joita havainnollistetaan seuraavassa taulukossa. Taulukon kaksisuuntaisella nuolella kuvataan oppilaan yksilöllisen ja koko luokan yhteistyön vaihtelua ongelman ratkaisemiseksi oppitunnin aikana Unkarissa. Taulukko ilmentää matematiikan oppituntien säännönmukaisten vaiheiden keskeisiä eroja ja yhtäläisyyksiä. On oletettavissa, että tämän tutkimuksen sekä suomalaiset että unkarilaiset neljäsluokkalaiset kuvaavat koetussa matematiikan opetussuunnitelmissaan matematiikan oppituntien vaiheita kuten tutkijat ja opiskelijat mutta oppilaan näkökulmasta.

Erilaisiin tutkimusaineistoihin perustuvat tutkimukset osoittavat samankaltaisia tuloksia matematiikan oppituntien vaiheista eri puolilla maailmaa. Esimerkiksi tutkiessaan piirrosten avulla amerikkalaisten perusopetuksen toisluokkalaisten uskomuksia hyvästä opettajasta ja opetuksesta Murphy, Delli ja Edwars (2004, 83) havaitsivat, että toisluokkalaiset kuvasivat oppilastyöskentelyä koulussa useimmin matematiikan oppitunniksi. Tällöin oppilaat työskentelevät joko koko luokan ryhmänä opettajajohtoisesti liitutaulukeskeisesti tai yksilöllisesti kirjallisten tehtävien parissa.

TAULUKKO 2.6.1 Matematiikan oppitunnin rakenne Suomessa ja Unkarissa

Suomi	Unkari
Kotitehtävien tarkistus (ei alkuopetuksessa)	Kotitehtävät (ei alaluokilla) oppilaat esittelee ratkaisujaan
Uuden asian opetus opettajan esitys ja kysely alkuopetuksessa välineitä	Pääongelma opettajan esitys ja kysely, alaluokilla välineitä
Uuden asian harjoittelu oppilaiden yksilöllinen työ oppikirjan parissa	Ongelmanratkaisua oppilaan yksilöllisenä työnä ↕ Ongelmanratkaisua koko luokan yhteistyönä
Kotitehtävät (ei alkuopetuksessa)	Kotitehtävät (ei alaluokilla)

Monet muutkin lasten ja nuorten piirrostutkimukset viestivät matematiikan tuntien opettajajohtoisesta esityksestä tai kyselystä ja yksilöllisestä työskentelystä oppikirjan ohjaamana: Afrikassa Tansaniassa (Aronsson & Andersson 1996, 311), Australiassa (McDonough 2002, 14, 183, 213, 235), Amerikassa ja Euroopassa: Yhdysvalloissa, Iso-Britanniassa, Suomessa, Ruotsissa, Romaniassa (Picker 2000, 142, 144–146, 148, 151–152, 170, 173), Yhdysvalloissa ja Italiassa (Gulek 1999) sekä Ruotsissa (Alerby 2003, 23). Ruotsalaistutkimuksessa matematiikka oli kuvatuin koulun oppiaineista. Oppituntivideoanalyysiin perustuvassa tutkimuksessaan Davis ja Barnard (2000, 11–13) havaitsivat, että Georgiassa matematiikan oppitunnilla perusopetuksen vuosiluokilla 2–5 työskentely on pääasiassa yksilöllistä työskentelyä ja koko luokan kyselevää opetusta, jolloin oppilaat kuuntelevat, katselevat ja tekevät muistiinpanoja. Toimintavälineitä käytetään ensimmäisellä luokalla, mutta ne ovat harvoin käytössä ylemmillä luokilla. Niin ikään Hiebert ja Stigler (2000) havaitsivat videotutkimuksessaan, että näitä työtapoja käytetään perusopetuksessa Yhdysvalloissa, Saksassa ja Japanissa.

Neljän viikon oppituntiseuranta-aineiston, luentomuistiinpanojen, keskustelujen ja runsaan valokuva-aineiston pohjalta Korpinen (2005, 158–163, 166) arvioi matematiikan unkarilaisen Varga-metodin mukaisen opetuksen tukevan oppilaan itsetuntoa myönteisesti. Koska opetus on oppilaskeskeistä, oppilas on koulussa keskeisessä asemassa ja tärkeä. Opettaja suhtautuu oppilaisiinsa myönteisesti, avoimesti ja tasapuolisesti, joten luokan ilmapiiriä voi luonnehtia iloiseksi ja vapaaksi.

Opetustilanteissa käytetään joustavia ja vaihtelevia ryhmittelyjä niin yksilöllistä, pienryhmä kuin koko luokan työskentelyä. Usein oppilaat saavat valita kenen kanssa työskentelevät. Koska alkuvuosista saakka arvostetaan oppilaan itsekontrollia, oppilaat osaavat työskennellä vastuullisesti ja itsenäisesti. Se on havaittavissa oppilaiden toimintavälineiden huolehtimisesta, välittömästä keskustelusta ja liikkumisesta koulun tiloissa työrauhaa kunnioittaen. Vuorovaikutus ja yhteistyö oppilaiden välillä sujuu ilman opettajan välitöntä valvontaa.

Unkarilaisten opettajien yhteistyö vanhempien kanssa on välitöntä ja kiinteää. Vanhemmat arvostavat matematiikan opetusta. He hankkivat oppilaan tarvitsemia toimintavälineitä ja ovat perillä siitä, mitä koulussa tapahtuu. Opetuksesta on havaittavissa, että opettajat luottavat oppilaiden onnistumiseen. Koska matematiikan tehtävät ovat lapsen omasta maailmasta, ne ovat lapsen kannalta mielekkäitä ja kehittäviä. Oppikirjan yksipuolisesta painottamisesta pyritään ongelmakeskeiseen opetukseen, jolloin leikit ja pelit ovat ahkerassa käytössä. Arviointi on monipuolista. On tarpeetonta järjestää kirjallisia kokeita, koska unkarilaisella opettajalla on mahdollisuus havainnoida suoraan runsaan keskustelun ja toimintavälineiden käytön ansiosta oppilaiden oppimista.

On huomattava, että kielellisen kommunikoinnin roolia opetuksessa painotetaan sekä matematiikan että luonnontieteiden tutkimuksessa (Ahtee, Pehkonen, Krzywacki, Lavonen & Jauhiainen 2005, 95–97). Se on keskeistä, jotta oppilaat muodostavat matemaattisia ja luonnontieteellisiä käsitteitä ja menetelmiä. Jotta opettaja voisi tukea oppilasta, olisi hänet saatava puhumaan. Yksi keino puhumiseen rohkaisemiseksi on kysyminen.

Kysymysten laatu vaikuttaa siihen, millaiseen vuorovaikutukseen kysymykset ohjaavat oppilasta. Kysymyksiä voidaan luokitella neljään luokkaan (Ahtee ym. 2005): 1) Opitun tiedon osaamista kontrolloivat kysymykset voivat olla alempitasoisia tietämiseen, selittämiseen ja soveltamiseen ohjaavia tai korkeampitasoisia analysointiin, syntetisointiin tai arviointiin ohjaavia. 2) Produktiiviset kysymykset suuntaavat oppilaan huomion ongelmaan, johon on tarkoitus löytää ratkaisu. Niihin vastaaminen voi edellyttää oppilaalta asioiden vertailua, päättelyä perusteluineen, apukuvioiden piirtämistä tai pieniä kokeiluja. Kysymys voi herättää oppilaassa uusia kysymyksiä, joiden ohjaamana hän etsii ratkaisuja ongelmaan. 3) Käsitteelliseen muutokseen tähtäävät kysymykset tuottavat oppilailta vaihtoehtoisia käsityksiä, haastavat pohtimaan ja ratkaisemaan käsitystensä ristiriitaisuuksia ja soveltamaan tietojaan uusiin tilanteisiin. 4) Keskusteluun johtavat kysymykset ohjaavat matemaattisten merkitysten ja/tai riippuvuuksien etsimiseen, joiden avulla yhdistetään matemaattisia ideoita. Keskusteluun johtavilla kysymyksillä voidaan saada oppilas selittämään ajatuksiaan, yhdistämään tietojaan ja soveltamaan oppimaansa toisiin tilanteisiin.

On todennäköistä tämän ja edellisen kappaleen piirrostutkimusten perusteella, että suomalaiset ja unkarilaiset neljäsluokkalaiset monien maiden lasten tapaan kuvaavat piirroksissaan ja kirjoitelmissaan käsityksiään opettajan esittämistä kysymyksistä.

Opettajan tulee kysymisen lisäksi kuunnella, mitä ja miten oppilaat ajattelevat. Opettajan kuuntelemisen tasoista on muodostettu malli (Ahtee ym. 2005, 97; Ahtee & Pehkonen 2005, 35–37), jonka alimman tason muodostaa opettajan kuuntelemattomuus. Tällöin hän sivuuttaa kuulemansa tai hän saattaa kuunnella kuulematta. Valikoiva kuunteleminen on sitä, että opettaja kuuntelee osan oppilaan puheenvuorosta, mutta ei kaikkea. Arvioiva kuunteleminen tarkoittaa opettajan arviota oppilaan vastauksen oikeellisuudesta ts. yhteensopivuudesta opettajan mielessä olevan ”oikean” vastauksen kanssa.

Tulkitsevassa kuuntelemisessa opettaja pyrkii ymmärtämään oppilaan vastauksen omasta viitekehyksestään eli matematiikan opettajana ja tulkitsemaan sitä myönteisessä hengessä. Ylimmällä kuuntelemisen tasolla, avoimessa kuuntelemisessa, opettaja arvostaa oppilaan ajatuksia ja pyrkii ymmärtämään, mistä ne ovat lähtöisin ja mihin oppilas tähtää, vaikka ajatukset olisivatkin opettajalle vieraita. Kymmenen suomalaisopettajan aineistossa oppilaiden kuunteleminen vaihteli pääasiassa kuuntelemattomuudesta yksinkertaiseen arvioivaan kuunteluun. Konstruktivistinen oppimiskäsitys edellyttää, että oppilas tulisi kuulluksi kaikilla kuuntelemisen tasoilla. Kun opettaja kuuntelee valikoivasti esimerkiksi ”oikeita” vastauksia, oppilaat suuntautuvat etsimään niitä ajattelematta asiaa syvemmin.

Tällainen menettely opetustilanteissa synnyttää mahdollisesti oppilaissa uskomuksia, että matematiikassa on vain oikeita tai vääriä vastauksia. Mahdollisesti tämän tutkimuksen unkarilaiset ja suomalaiset neljäsluokkalaiset kuvaavat käsityksiään siitä, miten opettaja on kuunnellut oppilaitaan.

2.7 Oppilaat ja matematiikka

Aluksi tarkastellaan eri maiden lasten ja nuorten suhdetta matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten kokeman matematiikan opetussuunnitelman ymmärtämiseksi laaja-alaisesti. Loppuluvussa esitellään perusopetuksen unkarilaisten neljännen luokan oppilaiden matematiikkasaavutuksia kansainvälissä ja kansallisissa tutkimuksissa. Myös suomalaisten alakoululaisten kansallista menestystä matematiikassa tarkastellaan asenne-, minäkäsitys- ja itseluottamustutkimusten lisäksi.

Suomalaiset kolmasluokkalaiset suhtautuivat matematiikkaan erittäin kaksijakoisesti Suomen peruskoulun arviointi 1990 tutkimuksen mukaan (Kankaanranta & Linnakylä 1993, 21, 34). Tutkimuksen kolmasluokkalaiset kirjoittivat koulupäivästään. Matematiikkaa kolmasluokkalaiset kuvasivat joko erittäin mieluiseksi tai epämieluiseksi oppiaineeksi. Joistakin matematiikka oli mukavaa ja helppoa, joistakin vaikeaa ja ahdistavaa, jopa pelottavaa. Ruotsalaiset neljäsluokkalaiset kuvasivat matematiikan oppitunteja pitkäveteisiksi Alerbyn (2003, 18, 23) tutkimuksessa oppilaiden koulukokemuksista. Englantilaiset yhdeksäsluokkalaisetkin viestivät matematiikan oppituntien olevan pitkäveteistä yksilötyöskentelyä, jossa korostetaan ulkoa oppimista ja luokan parhaimmiston osaamista. Tällöin oppilaat ulkoistavat (depersonalisation) itsensä, ovat ajatuksissaan muualla kuin oppitunneilla Nardin ja Stewardin (2003, 345, 349–361) tutkimuksessa oppilaiden hiljaisesta tyytymättömyydestä koulussa. Taiwanilaiset viidesluokkalaiset kertoivat oppivansa matematiikkaa rangaistuksia peläten amerikkalaisten ja taiwanilaisten oppilaiden matematiikkakäsityksiä vertailevan tutkimuksen (Tsao 2004, 209–211) mukaan, vaikka muuten taiwanilaisten viidesluokkalaisten käsitys matematiikasta ja sen oppimisesta oli positiivisempi kuin amerikkalaisten oppilaiden.

Internetin avulla Rock ja Shaw (2000, 551–554) kartoittivat englantilaisten lasten ja nuorten ajatuksia matemaatikoista ja heidän työstään avointen kysymysten ja piirrosten avulla. Valtaosa lasten kuvaamista hahmoista työskenteli hymyillen luokkahuoneessa. Rock ja Shaw (2000, 554) päättelivät, että nuoret lapset nauttivat matematiikasta koulussa ja että lapset ajattelevat muidenkin suhtautuvan matematiikkaan myönteisesti. Unkarilaiset perusopetuksen 5- ja 7-luokkalaiset ja lukion 9- ja 11-luokkalaiset asennoituvat koulun oppiaineisiin kaksijakoisesti (Csapó 2000): Pidettyjä oppiaineita ovat taiteet, historia, vieraat kielet, kirjallisuus, biologia ja maantieto, kun taas vähän pidettyjä oppiaineita ovat kielioppi, matematiikka, fysiikka ja kemia. Tytöt pitävät oppiaineista enemmän kuin pojat, paitsi fysiikasta unkarilaispojat pitävät tyttöjä enemmän. Oppiaineista pitäminen vähenee oppilaan iän lisääntyessä. Samanlainen kehitys 7- ja 11-luokkalaisten (n = 1351) unkarilaisoppilaiden asenteissa ja asennoitumisessa koulun oppiaineisiin on havaittavissa myös Takácsin (2001) tutkimuksesta.

Laajan haastattelututkimuksen (Goodnow & Burns 1985, 96, 98, 101, 105) mukaan australialaiset koululaiset (noin 2 000) vuosiluokilta 1–6 suhtautuivat matematiikkaan kaksijakoisesti kuten suomalaiset kolmasluokkalaiset: Jotkut pitivät sitä mukavana kouluaineena, jotkut inhosivat sitä. Matematiikka oli vastenmielistä, koska se oli vaikeaa. Se oli ikävystyttävä kouluaine, koska sitä oli liian usein. Jotkut australialaiset koululaiset toivoivat kuitenkin opiskeltavan enemmän matematiikkaa, koska he katsoivat tarvitsevansa sitä tulevassa ammatissaan. Suomalaiset kolmasluokkalaiset 1990-luvulla olivat yksimielisiä matematiikan tärkeydestä, mutta tyttöjen ja poikien suhtautuminen matematiikkaan erosi melko selvästi: Pojat pitivät matematiikkaa mukavana oppiaineena useammin kuin tytöt. Pojat arvioivat tyttöjä useammin itsensä hyviksi laskijoiksi. (Kankaanranta & Linnakylä 1993, 21–22). Myös Vanayan, White, Yuen ja Teper (1997) raportoivat kanadalaisten kolmasluokkalaisten poikien arvioivan itsensä matematiikassa hyviksi useammin kuin tytöt.

Suomalaisten kahdeksasluokkalaisten näkemys matematiikasta oli 1990-luvulla laskemista, aritmetiikkaa Hoskosen (1996) tutkimuksen mukaan. Siinä selvitettiin kahdeksasluokkalaisilta (n = 84), mitä sana matematiikka tuo mieleen, mitä he ajattelevat matematiikan olevan ja minkälaiset asiat kuuluvat matematiikkaan. Kahdeksasluokkalaiset kirjoittivat 274 kommenttia matematiikasta. Ainoastaan yksi oppilas ilmoitti matematiikan tuovan hänelle mieleen geometrian. Niin ikään amerikkalaisen Pickerin tutkimuksessa (2000) useimmista suomalaisten seitsemäsluokkalaisten piirroksista välittyy uskomus, että matematiikka on peruslaskutoimituksia. Useimmista välittyy myös oppituntien negatiivisuus, mistä yhtenä esimerkkinä seuraava suomalaispojan piirros.

PIIRROS 2.7.1 Peruslaskutoimituksia (Picker 2000, 173)

Hoskosen (1996) tutkimien oppilaiden joukosta löytyi 18 oppilaan ryhmä, joiden mielestä matemaattisia ongelmia ei tarvitse ratkaista nopeasti, vaan niitä ajatellaan jopa puoli tuntia. Tämä väittämä poikkeaa Frankin (1988) tutkimustuloksista, joiden mukaan oppilaat (n = 27) ilmoittivat matemaattisten ongelmien olevan ratkaistavissa nopeasti ja vain muutaman vaiheen kautta. Unkarin kansallisiin matematiikkakilpailuihin osallistuneiden perusopetuksen viidesluokkalaisten (n = 188) uskomuksia matemaattisista ongelmista tutkiessaan Orosz (2000, 74–78) havaitsi, että viidesluokkalaiset olivat kiinnostuneita aritmetiikkaan, algebraan ja funktioihin liittyvistä ongelmista, mutta he eivät olleet kiinnostuneita geometrian ongelmista. Viidesluokkalaiset pitivät helppoina aritmetiikan ja algebran ongelmia, mutta vaikeina funktioihin liittyviä ongelmia, kaikista vaikeimpina viidennen luokan oppilaat kokivat geometrian ongelmat. Parhaiten nämä unkarilaiset matematiikkakilpailuihin osallistuneet viidesluokkalaiset osasivat ratkaista algebran ongelmat, sitten aritmetiikkaan ja funktioihin liittyvät ongelmat, heikoimmin geometrian ongelmat. Oli pääteltävissä, että oppilaiden uskomukset matematiikan ongelmien kiinnostavuudesta ja vaikeudesta ovat yhteydessä heidän suorituksiinsa.

Unkari on ollut pitkään kiinnostunut opiskelijoidensa kansainvälisestä menestyksestä matematiikassa. Osallistuminen kansainvälisiin tutkimuksiin IEA:n (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) jäsenenä vuodesta 1968 mahdollistaa unkarilaisten opiskelijoiden vertailun ikätovereihinsa eri puolilla maailmaa. Näihin tutkimuksiin matematiikasta osallistuvat 3–4-, 7–8- ja 12-luokkalaiset. TIMSS 2003-tutkimuksen mukaan unkarilaiset perusopetuksen neljäsluokkalaiset nauttivat merkitsevästi enemmän matematiikan oppimisesta kuin vuonna 1995 (Mullis, Martin Gonzales & Chrostowski 2004, 157, 160). Unkarilaisilla neljäsluokkalaisilla vajaalla kahdella kolmanneksella oli korkea itseluottamus kykyihinsä oppia matematiikkaa, noin neljänneksellä keskimääräinen itseluottamus matematiikassa, vajaa kymmenesosa unkarilaisista neljäsluokkalaisista luotti vähän kykyihinsä oppia matematiikkaa. Unkarilaisten neljäsluokkalaisten korkea itseluottamus matematiikassa oli kansainvälistä keskiarvoa korkeampaa, keskimääräinen ja alhainen itseluottamus matematiikassa olivat kansainvälistä keskiarvoa alhaisempia. Keskimäärin oli positiivinen yhteys itseluottamuksen ja oppimistulosten välillä. (Mullis ym. 2004, 152–153, 155). Unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten menestyminen matematiikassa oli kansainvälistä keskitasoa 1990-luvulla TIMSS-tutkimuksissa (the Third International Mathematics and Science Study) (Vári, Tuska & Krolopp 2002, 109–111). Unkarilaiset neljäsluokkalaiset menestyivät matematiikassa kaiken kaikkiaan merkitsevästi kansainvälistä keskiarvoa paremmin TIMSS 2003-tutkimuksessa (Mullis ym. 2004, 35, 40, 107). Parhaiten he menestyivät säännönmukaisuuksia ja suhteita mittaavissa tehtävissä, sitten lukuihin ja mittaamiseen liittyvissä tehtävissä, heikoimmin geometriassa ja tilastoissa. Unkarilaisia neljäsluokkalaisia paremmin menestyivät singaporelaiset, hongkongilaiset, japanilaiset, taipeilaiset, belgialaiset ja alankomaalaiset perusopetuksen neljännen vuosiluokan oppilaat.

Unkarissa järjestetään kahden vuoden välein myös kansallinen matematiikan arviointi, johon osallistuvat 4–12-vuosiluokkien parilliset luokat. Kansallisessa matematiikan arvioinnissa tutkitaan oppilaiden lukukäsitettä, suureita ja mittaamista, geometriaa ja loogista ajattelua. Parhaiten unkarilaiset neljäsluokkalaiset hallitsevat lukukäsitteen, suureet ja mittaamisen, heikoimmin loogisen ajattelun ja geometrian keskimääräisesti. (Vári ym. 2002, 119–121).

Kansainvälisen ja kansallisen arvioinnin lisäksi Unkarin matematiikan kilpailujärjestelmä tarjoaa mahdollisuuden oppilaille ottaa mittaa kyvyistään. Perusopetuksen vuosiluokille 3–4 on perinteinen László Kalmár -kilpailu, Ilona Zrínyi -kilpailu luokille 3–8, oppilaiden siirryttyä viidenneltä luokalta aineenopetukseen on tarjolla myös Tamás Varga -kilpailu, Daniel Arany -kilpailu ja TÖRD A FEJED -kilpailu. Niiden lisäksi on kaksi matematiikkalehden järjestämää kilpailua matematiikasta, toinen perusopetuksen vuosiluokille 3–8 ja toinen lukioluokille 9–12 (Hersh & John-Steiner 1993, Matematikai versenytesztek. A Zrínyi Ilona Matematikaverseny 1998; 2000; 2003; 2004; Nemetz 1992).

Käsite *kilpailu* on ymmärrettävä laajasti, korostaa Gyöngyösi (2002, 115), koska sen tarkoitus on täydentää matematiikan opetusta ja oppimista. Kilpailuun sisältyy muutakin toimintaa itse kilpailun lisäksi, kuten matematiikan käyttäminen dynaamisesti ongelmien luomisessa ja ratkaisemisessa, matematiikan opetuksen tutkiminen, matematiikkakurssien, kerhojen, leirien ja julkaisutoiminnan järjestäminen oppilaille ja opettajille. Matematiikkakilpailussa on sekä etuja että haasteita (Gyöngyösi 2002, 116–117): Kilpailut herättävät oppilaiden mielenkiintoa matematiikkaan. Koska kilpailutehtävät ovat usein elävästä elämästä, ne edistävät matematiikan soveltamista. Kilpailutehtävät herättävät tavallisesti vilkasta keskustelua ja ne voidaan ratkaista useammalla kuin yhdellä tavalla. Näin ne osoittavat matematiikan rikkautta. Kilpailut täydentävät matematiikan opetus-suunnitelmaa ja tarjoavat lahjakkaille oppilaille haasteita matematiikan teoreettisiin rakenteisiin. Kilpailut voivat aiheuttaa oppilaille erityisiä paineita, mutta niihin osallistuminen on vapaaehtoista. Kilpailu pitäisi nähdä yksilöllisenä haasteena eikä kilpailuna toisia vastaan. Kilpailuja on kaikentasoille oppilaille, ei vain lahjakkaille. Näin pyritään kohtelemaan osallistujia tasapuolisesti. Kun oppilaat osallistuvat kilpailutoimintaan laaja-alaisesti, se voi edistää oppilaiden edellytyksiä mm. yliopisto-opiskeluun.

Suomessa osallistutaan kansainvälisiin arviointitutkimuksiin Unkaria maltillisemmin perusopetuksen alakoulussa. Suomen kansallisessa peruskoulun arviointi 1990 -hankkeessa (Kupari 1993b, 86, 92–93, 102) selvitettiin neljäsluokkalaisten matematiikan oppimistuloksia opetus-suunnitelman keskeisistä tavoitteista. Matematiikan oppimistuloksia verrattiin vuoden 1979 tuloksiin. Kaiken kaikkiaan neljäsluokkalaiset paransivat suorituksiaan merkittävästi. Tulokset kohenivat lähinnä kolmella sisältö-alueella: lukukäsitteessä, yhteen- ja vähennyslaskussa ja soveltavassa matematiikassa. Tällä luokalla soveltavan matematiikan tavoitteisiin sisältyivät tärkeimmät mittayksiköt muunnoksineen, opittujen laskutoimitusten ja yksiköiden soveltaminen käytännön tilanteisiin. Muilla sisältöalueilla, kerto- ja jakolaskussa, lausekkeissa, yhtälöissä ja geometriassa keskimääräiset tulokset paranivat hieman tai säilyivät ennallaan. Vuonna 2000 suomalaisten kuudesluokkalaisten (n = 4251) matematiikan oppimistulokset olivat keskimäärin tyydyttäviä. Oppilaista noin kaksi prosenttia ei ollut saavuttanut valtakunnallisia matematiikan oppimiselle asetettuja tavoitteita. Oppilaiden tuloksista noin yksitoista prosenttia oli välttäviä. Hyvin tai kiitettävästi tavoitteet oli saavuttanut noin kolmannes kuudesluokkalaisista. (Niemi 2004, 189).

Vuonna 1990 yleensä suomalaiset neljäs- ja kuudesluokkalaiset oppilaat kokivat matematiikan miellyttävämpänä kuin 1979 (Kupari 1993b, 86–90; 1999, 58–59). Kuitenkin tuolloin oli nähtävissä sama matematiikan opiskelun ”vaikeutumisen” kehitys kuin 1979: kun neljännellä luokalla joka kymmenes oppilas koki vaikeuksia, kuudennella luokalla jo kaksi kymmenestä koki matematiikan vaikeaksi. Suomalaisoppilaiden mielestä matematiikka ja sen opiskelu oli tärkeää hyvän työpaikan saamiseksi. Molempien luokkien oppilaista liki neljä viidesosaa katsoi naisten tarvitsevan matematiikkaa yhtä paljon kuin miestenkin. Vuonna 1979 oppilaat pitivät matematiikkaa tärkeämpänä oppiaineena kuin vuonna 1990.

Keskisuomalaisten peruskoululaisten (n = 477) asenteet matematiikkaan muuttuivat kielteisemmiksi ylemmille luokille mentäessä: Luokkien 1–3 oppilaista yli puolet asennoitui matematiikkaan myönteisesti, mutta luokkien 4–6 oppilaista enää vajaa puolet asennoitui matematiikkaan myönteisesti (Koponen 1994). Vuonna 2000 yli neljän tuhannen suomalaisen kuudesluokkalaisen asenteet matematiikkaan olivat positiivisia, poikien asenteet samoin kuin itseluottamus matematiikan osaamisessa oli parempi kuin tyttöjen (Niemi 2004, 191).

Minäkäsityksellä on opetuksessa ja oppimisessa on keskeinen rooli (Linnanmäki 2002; 2004, 242, 249, 252–253): Suomalaisten oppilaiden matematiikan oppimistulosten ja minäkäsityksen välinen yhteys oli merkityksetön toisella luokalla, kohtuullinen viidennellä luokalla ja suhteellisen vahva kahdeksannella luokalla, joten minäkäsityksen yhteys matematiikan saavutuksiin voimistuu voimistumistaan ylemmillä luokilla. Poikien matemaattinen minäkäsitys oli yleensä parempi kuin tyttöjen, kahdeksannella luokalla poikien matemaattinen minäkäsitys oli merkitsevästi parempi kuin tyttöjen. Niin ikään pitkittäistutkimuksessa suomalaisen perusopetuksen luokilla 5–8 itseluottamuksen ja ymmärtämisen kehittymisestä havaittiin (Hannula, Maijala & Pehkonen 2004, 199–204), että murtolukujen, äärettömän ja muiden tehtävien osaamisen myönteinen kehitys oli merkittävää viidenneltä kahdeksannelle luokalle, kun taas matematiikkaan liittyvät uskomukset, itseluottamus, menestys- ja puolustusorientaatio, kehittyivät huonompaan suuntaan. Uskomusten ja osaamisen kausaalisuhteesta tulokset viittaavat siihen, että viidenneltä luokalta lähtien pääasiallinen syyseuraus-suhde on minäkäsityksestä menestykseen.

2.8 Unkarilaisten ja suomalaisten opettajien uskomuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta

Aluksi verrataan englantilaisten ja unkarilaisten matematiikan opettajien käsityksiä matematiikasta ja sen opetuksesta. Myös suomalaisten ja unkarilaisten opettajien käsityksiä geometriasta, sen oppimisesta ja opettamisesta verrataan. Lopuksi verrataan kokeneiden ja nuorempien suomalaisopettajien matematiikkauskomusten heijastumista opetuskäytäntöihin, koska tässä tutkimuksessa tutkittavien sekä suomalaisten että unkarilaisten oppilaiden luokanopettajat ovat kokeneita opettajia. Sittemmin tarkastellaan alkuopettajien matematiikkauskomusten ja opetuskäytännön ristiriitaisuutta.

Opettajien uskomukset ja opetuskäytännöt ilmenevät mahdollisesti oppilaiden kokemassa matematiikan opetussuunnitelmassa.

Englantilaisten (577) ja unkarilaisten (108) matematiikan aineenopettajien käsityksissä oli yhtäläisyyksiä ja eroja matematiikasta ja sen opettamisesta Andrewsin ja Hatchin (2000) tutkimuksen mukaan. Molempien maiden opettajat opettivat 11–14-vuotiaita oppilaita. Sekä englantilaiset että unkarilaiset opettajat pitivät tärkeinä matematiikan opetuksessa matemaattisia taitoja ja erilaisia tapoja opettaa, kuten tutkimista ja ongelmanratkaisua. Lisäksi heistä matematiikka oli olennainen väline elämää varten. Unkarilaisten opettajien käsitykset painottuivat pedagogiikkaan ja tehokkaaseen matematiikan opettamiseen ja oppimiseen. Unkarilaisia opettajia tuki opetuksessa yhtenäinen pedagoginen runko, jota englantilaisopettajilla ei ollut käytettävissä. Englantilaisopettajien käsitykset eivät olleet niin yhtenäisiä matematiikan pedagogiikasta ja matematiikan hyödyllisyydestä kuin unkarilaisopettajien.

Niin ikään kuuden suomalaisen luokanopettajan ja neljän unkarilaisen luokanopettajan ja kahden aineenopettajan käsityksissä Räty-Záborszkyn (2006, 209–213) mukaan oli yhtäläisyyksiä ja eroja geometriasta, mikä on havaittavissa seuraavasta taulukosta 2.8.1.

TAULUKKO 2.8.1 Suomalaisten ja unkarilaisten opettajien käsityksiä geometriasta (Räty-Záborszky 2006, 221)

Suomalaiset opettajat	Unkarilaiset opettajat
1) ajattelu ja sen kehittäminen 2) hahmottaminen 3) mekaanisuus 4) jokapäiväinen tarve elämässä 5) apu oppimisongelmien ennakoinnissa 6) oppikirjageometrian kokeminen	1) ajattelun ja hahmottamisen kehittäminen 2) geometrian kokeminen 3) matematiikan tiedon luonteen korostuminen 4) jokapäiväisen elämän korostuminen 5) aivopuoliskojen kehittäminen 6) oppikirjageometrian kokeminen 7) toiminnallisuus ja konkreettisuus 8) esteettisyys

Sekä suomalaiset että unkarilaiset opettajat käsittivät geometrian edellyttävän ajattelua ja hahmottamista. Suomalaisopettajien mukaan geometria on miettimistä, loogista ajattelua ja muuta kuin laskemista. Hahmottamisessa suomalaisopettajat painottivat kokonaisuuden, kuvioiden ja avaruudellisuuden hahmottamista. Unkarilaisopettajat käsittivät ajattelun geometriassa suomalaisopettajia laajemmin, koska he erittelivät ajattelun visuaaliseksi, avaruudelliseksi, loogiseksi ja joustavaksi ajatteluksi. Geometria edistää unkarilaisopettajien mukaan kuvien ja tilan hahmottamista. Molempien maiden opettajat liittivät geometrian arkipäivään, se oli tarpeellista jokapäiväisessä elämässä. Opettajien käsitykset erosivat oppikirjageometriasta. Suomalaiset opettajat kokivat oppikirjageometrian suhteellisen kielteisesti, he pitivät sitä mekaanisena. Unkarilaisopettajien suhde oppikirjoihin oli myönteinen, koska geometriaa esiintyy kaikilla matematiikan sisältöalueilla, jolloin matematiikka on yhtenäinen kokonaisuus. Suomalaisopettajat korostivat geometrian toiminnallisuutta ja konkreettisuutta, kun taas unkarilaisopettajat korostivat matematiikan tiedon luonnetta, aivopuoliskojen kehittämistä ja esteettisyyttä.

Räty-Záborszky (2006, 214–221) havaitsi, että suomalaisilla ja unkarilaisilla opettajilla oli yhtenevä käsitys siitä, että geometrian opetuksen ja oppimisen lähtökohtana on oppilaan oma elinympäristö, joka etenee unkarilaisopettajien mukaan spiraalimaisesti ja systemaattisesti todistamiseen. Seuraavassa taulukossa 2.8.2 on kooste suomalaisten ja unkarilaisten opettajien geometrian opetukseen ja oppimiseen liittyvistä käsityksistä.

TAULUKKO 2.8.2 Suomalaisten ja unkarilaisten opettajien käsityksiä geometrian oppimisesta ja opettamisesta (Räty-Záborszky 2006, 221)

Suomalaiset opettajat	Unkarilaiset opettajat
1) Lähtökohtana oma fyysinen ympäristö	1) Edetään lähiympäristöstä todistamiseen
2) Käsitetietous	2) Käsitetietous
3) Tavoitteena hahmottaminen ja ajattelu	3) Menetelmien ja oppilaan aktiivinen rooli
4) Toiminnallisuus ja konkreettisuus	4) Opetuksen ja oppimisen kokeminen
5) Opetuksen ja oppikirjan ongelmat	5) Integrointi
6) Oppilaiden yksilöllinen huomioiminen	6) Oppilaiden yksilöllinen huomioiminen
7) Opettajan pedagoginen vastuu	7) Tehtävät ja niiden ratkaiseminen
8) Kielitaito	8) Kielitaidon korostunut merkitys

Molemmat opettajaryhmät painottivat oppilaan yksilöllistä huomiointia, käsitetietoutta ja kielitaidon merkitystä, joka suomalaisopettajien mukaan tarkoitti ääneen puhumista ja kuuntelemista, unkarilaisopettajien mukaan kieli liittyi ajattelemiseen, ääneen puhumalla voi osoittaa ymmärtäneensä asian. Suomalaiset opettajat korostivat opetuksessa toiminnallisuutta ja konkreettisuutta, mikä oli lähellä unkarilaisten opettajien käsitystä menetelmistä ja oppilaan aktiivisesta roolista. Suomalaisopettajien käsityksissä painottui opettajan pedagoginen vastuu, jonka mukaan geometrian oppitunti vaatii etukäteisvalmisteluja muita tunteja enemmän. Unkarilaisopettajien käsityksissä painottui opetuksen ja oppimisen kokeminen, integrointi, tehtävät ja niiden ratkaiseminen. Unkarilaiset opettajat kokivat geometrian vaikeana opettaa ja oppia. Geometriaa ei opita pelkästään oppikirjasta. Geometriassa tehtävät ja niiden ratkaiseminen ovat monipuolisia, kun niitä ohjataan geometrian opetustilanteessa kyselemällä. Unkarilaisopettajat kokivat sen motivoivana, mutta pelkäsivät opettaa sitä. Myös jotkut amerikkalaiset opettajat pelkäävät toimintavälineiden käyttöä matematiikan tunneilla, koska oppilaat saattavat olla levottomia välineitä käyttäessään (Moyer 2001; Moyer & Jones 2004, 20).

Suomalaisten kokeneiden (15) ja nuorempien (17) luokanopettajien uskomukset matematiikan opetuksesta heijastuivat Kuparin (1999) mukaan 1990-luvulla eri tavoin opetuksen toimintatapoihin. Kokeneet opettajat painottivat laskemisen perustaitoja, runsasta rutiiniharjoittelua, oikeiden vastausten saamista tehtävistä ja järjestystä luokassa. Nuorempien opettajien uskomukset näistä asioista olivat heikommat. He korostivat oppilaskeskeisyyttä ja vuorovaikutusta luokassa. Kokeneiden ja nuorempien opettajien opetuksen järjestäminen ei eronnut merkitsevästi. Kokeneet opettajat käyttivät summatiivisia kokeita merkitsevästi enemmän kuin nuoremmat opettajat, jotka käyttivät formatiivisia kokeita kokeneita opettajia useammin. Opetuksen painotuksissa ja työmuodoissa erot olivat selkeät. Kokeneet opettajat painottivat laskutaidon merkitystä nuorempia opettajia enemmän. Sekä kokeneet että nuoremmat opettajat pitivät soveltamista ja ajatteluntaitoja tärkeinä. Kokeneet opettajat antoivat oppilaille säännöllisesti kotitehtäviä tunnilla käsitellyistä asioista ja soveltamisesta. Kokeneet opettajat käyttivät opetuksessa säännöllisesti nuorempia opettajia useammin opettajajohtoista työskentelyä, kun taas nuoremmat opettajat käyttivät pari- ja ryhmätöitä. Muita työtapoja opettajat käyttivät samalla tavoin. (Emt. 154–156.) Näiden tulosten perusteella on pääteltävissä, että muutamat luokanopettajien uskomuksista heijastuvat heidän matematiikan opetuksen toimintatapoihinsa. Näitä heijastuvia uskomuksia ovat laskutaitopainotteisuus, opettajajohtoisuus ja kokeet.

Suomalaisten alkuopettajien matematiikkauskomusten ja käytännön opetuksen välillä on ristiriita Perkkilän (2002, 151–152) mukaan. Kaikki alkuopettajat painottivat uskomuksissaan ongelmanratkaisua, jolloin oppilaiden tulisi olla aktiivisia ajattelijoita, mutta näin ei käytännössä ollut. Alkuopettajien opetus vaihteli lähinnä sisältökeskeisen, ymmärtämistä painottavan matematiikkanäkemyksen ja sisältökeskeisen, tehtävien suorittamista painottavien näkemysten välillä. Matematiikan oppikirja määräsi opetettavien asioiden sisällöt, joihin perustuivat käytetyt opetusaktiviteetit. Pääsääntöisesti matematiikka nähtiin oppikirjan sisältöinä. Integrointia muihin oppiaineisiin tai koulun ulkopuolelle ei tullut esille.

Suomalaisten ja unkarilaisten opettajien matematiikan opetukseen liittyvien käsitysten, uskomusten ja opetuskäytännön pohjalta voidaan olettaa, että suomalaisten oppilaiden kokemuksissa ilmenee useammin laskemista oppikirjasta kuin unkarilaisoppilailla. Unkarilaisoppilaiden kokemuksissa korostunee geometria useammin kuin suomalaisoppilailla, koska unkarilaisten opetussuunnitelman mukaan matematiikan sisältöalueita opetetaan spiraalimaisesti, jolloin samat aiheet toistuvat useasti lukuvuoden aikana oppitunneilla. Unkarilaiset ja suomalaiset oppilaat mahdollisesti integroivat matematiikkaa muihin oppiaineisiin ja koulun ulkopuoliseen arkielämäänsä opettajien uskomusten mukaisesti. Suomalaiset oppilaat kertonevat kokeista enemmän kuin unkarilaisoppilaat, jotka kertonevat edellisen luvun perusteella kansallisista, kansainvälisistä arvioinneista ja matematiikkakilpailuista suomalaisoppilaita useammin.

2.9 Muita koettuun matematiikan opetussuunnitelmaan yhteydessä olevia tekijöitä

Monien tutkimusten mukaan myös vanhempien ja sisarusten asenteet, uskomukset ja menestyminen matematiikassa, kodin tuki ja odotukset ovat yhteydessä lasten asenteisiin, uskomuksiin ja menestymiseen (Kangasniemi 2000, 51–52; Pezdek, Berry & Renno 2002; Leedy, LaLonde & Runk 2003; Bleeker & Jacobs 2004; Topping, Kearney, McGee & Pugh 2004).

Amerikkalaiset Pezdek, Berry & Renno (2002) raportoivat kahden tutkimuksen perusteella, että vanhemmat yliarvioivat perusopetuksen 4–6-luokkalaisten lastensa menestystä matematiikassa. Aika, jonka vanhemmat käyttivät auttaakseen lapsiaan matematiikan kotitehtävissä, ei ollut suhteessa lasten menestykseen, vanhempien ennusteisiin lasten menestyksestä eikä vanhempien ennusteiden tarkkuuteen. Vaikka vanhempien lisääntyneen tiedon lastensa menestyksestä matematiikassa pitäisi ehkäistä heikkoa menestystä, eivät lasten kotitehtävät ja perinteiset viestit koulusta edistäneet vanhempia ottamaan huomioon lastensa taitoja. Amerikkalaiset Bleeker ja Jacobs (2004) havaitsivat pitkittäistutkimuksessaan, että äitien havainnot lastensa kyvyistä matematiikassa ja luonnontieteissä olivat yhteydessä nuorten minäpystyvyysuskomuksiin näissä aineissa myöhemmissä opinnoissa. Lisäksi äitien aikaisemmat ennusteet lastensa menestyksestä matematiikassa olivat merkitsevästi yhteydessä nuoriksi varttuneiden lasten uravalintoihin.

Suomalaisten lukion kolmasluokkalaisten asenteisiin ja uskomuksiin matematiikasta vaikutti oppilaan kodin ”matemaattinen ilmapiiri” (Kangasniemi 2000, 51–52). Kodin tuki on lukiolaisen asenteiden ja uskomusten determinantti. Kodin tuki ei vaikuttanut suoraan lukion pitkän matematiikan oppilaan tiedollisiin oppimistuloksiin, vaan kodin tuen vaikutukset tulivat oppilaan asenteiden ja uskomusten kautta. Mitä suurempi oli kodin tuki ja odotukset oppilaan matematiikan opiskelussa ja mitä parempi oli oppilaan aikaisempi koulumenestys, sitä vahvempi oli hänen minäkäsityksensä matematiikassa. Lukiolaisen minäkäsityksen suora vaikutus tiedollisiin oppimistuloksiin oli toiseksi suurin aikaisemman koulumenestyksen jälkeen.

Oppilaiden kokemaan matematiikan opetussuunnitelmaan ovat yhteydessä opettajien asenteet ja uskomukset, jotka edelleen ovat yhteydessä opettajankoulutukseen (Carré & Ernest 1993; Kaasila 2000; Pietilä 2002) ja koulujärjestelmään (Räty-Záborszky 2006), jotka kuitenkin rajataan aiheen laajuuden vuoksi tästä tutkimuksesta, vaikka tutkimusaiheina ovatkin tärkeitä. Báthory ja Leimu (1994) sekä Räty-Záborszky (2006) ovat verranneet Suomen ja Unkarin koulujärjestelmiä.

Tässä tutkimuksessa 9–10-vuotiaiden lasten kokemassa matematiikan opetussuunnitelmasta verrataan suppeasti Suomen ja Unkarin nykyisen perusopetuksen eroja. Oppivelvollisuus Suomessa alkaa sinä vuonna, jolloin lapsi täyttää seitsemän vuotta. Unkarissa oppivelvollisuus alkaa lapsen täytettyä kuusi vuotta, jos syntymäpäivä on ennen elokuuta. Enemmistö lapsista aloittaa tällöin koulun. Suomen yhdeksänvuotinen perusopetus on opetussuunnitelmallisesti yhtenäinen kokonaisuus, jonka vuosiluokilla 1–6 opettavat luokanopettajat useimmat opetusryhmänsä oppiaineista, vuosiluokilla 7–9 opetuksesta vastaavat aineenopettajat. Unkarin kahdeksanvuotinen perusopetus jakautuu neljä vuotta kestävään alakouluun ja nelivuotiseen yläkouluun. Unkarissa vuosiluokilla 1–4 useimpia oppiaineita opettaa luokanopettaja kuten Suomessa, mutta viidennestä luokasta eteenpäin oppilaat siirtyvät aineopetukseen. Aineopetuksen alkamisajankohta on huomattava ero Suomen ja Unkarin perusopetuksen välillä. Unkarissa kunnallisen perusopetuksen rinnalla on paljon erilaisia yksityiskouluja, vieraskielisiä ja eri kirkkokuntien ylläpitämiä kouluja. Oppivelvollisuus päättyy Suomessa 16-vuotiaana, Unkarissa 14-vuotiaana.

Oppilaiden kokemaan matematiikan opetussuunnitelmaan ovat yhteydessä edellisten lisäksi yhteiskunnallinen kulttuuri, jota välittää mm. internet ja media. Niiden vaikutuksen lasten piirroksiin ovat huomanneet mm. Picker (2000), Picker ja Berry (2000, 2001), jotka piirrättivät oppilailla kuvia matematiikasta ja matemaatikosta. Jolley, Fenn ja Jones (2004) havaitsivat piirroksissa lastenkirjallisuuden vaikutuksia.

Esimerkiksi sarjakuvista on löydettävissä matematiikkaa, joka välittyy lapsille lukuina, numeroina ja erilaisina kaavoina, kuten seuraavassa Schulzin (1988, 28) sarjakuvassa Sallista, Jaska Jokusen pikkusiskosta, jota Jaskan kaveri opettaa ja rohkaisee matematiikan oppimisessa.

PIIRROS 2.9.1 Salli Jokunen ratkaisee uuden matematiikan! (Schultz 1988, 28)

Lastenkirjoista on löydettävissä matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen liittyviä vitsejä, jotka osaltaan muokkaavat lasten uskomuksia matematiikasta. Seuraavaksi pari esimerkkiä matematiikkaan liittyvistä lastenvitseistä.

Ensimmäinen vitsi kertoo neljäsluokkalaisten uskomuksista opettajan ja oppilaan rooleista matematiikan tunnilla, oppilaiden suhtautumisesta esittävään opetukseen ja opettajan oppilaantuntemuksesta:

> *Nelosluokkalaiset vaihtoivat ajatuksia:*
> *- Meidän matikan ope on ihan hoopo, se puhuu itsekseen. Entä teidän? - Joo, niin meidänkin, mutta se itse ei huomaa sitä. Se luulee, että me kuunnellaan.*
> (Tapola 1998, 85.)

Toinen lastenvitsi viestii uskomusta, että matematiikka on erittäin täsmällisiä numeerisia ilmaisuja. Se välittää myös sukupuoleen liittyviä uskomuksia, jolloin pojat nähdään tyttöjä parempina matematiikassa, vaikka perusteita toisenlaiseen uskomukseen olisikin.

> *Kysymys eräässä matematiikan kokeessa:*
> *- Kauanko sinulla menee viikossa aikaa kotitehtävien tekoon, kun yhteen kuluu aikaa kolme minuuttia ja yksitoista sekuntia, tehtäviä on päivässä keskimäärin 4,87 ja koulupäiviä on viikossa viisi?*
> *Liisan vastaus:*
> *- 1 t 14 min 32 sek.*
> *Arvostelu:*
> *- Pyöristysvirhe, 9 pistettä.*
> *Kallen vastaus:*
> *- Nolla minuuttia. Enhän minä tee kotitehtäviä.*
> *Arvostelu:*
> *- Olet oikeassa, 10 pistettä.*
> *Mitä me tästä opimme? Rehellisyys kannattaa.* (Tapola 1998, 96–97.)

3 TOTEUTETTAVA OPETUSSUUNNITELMA

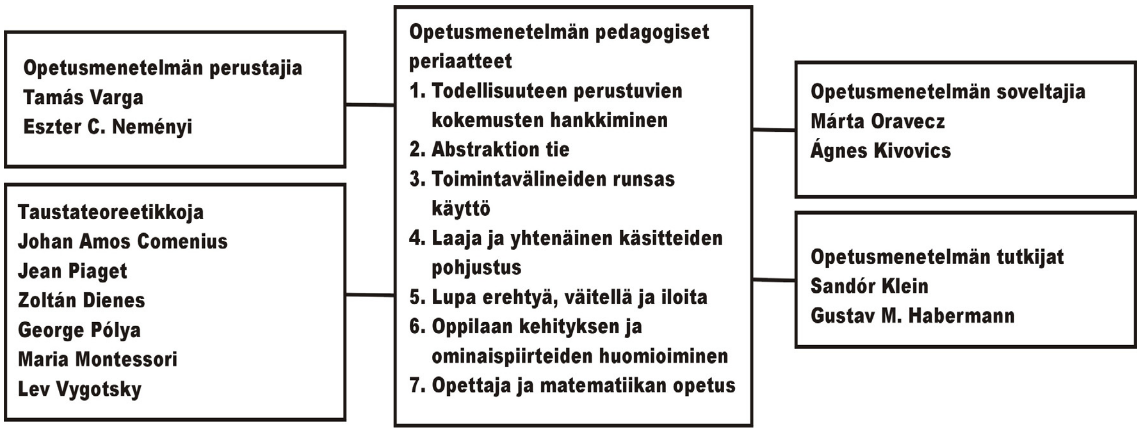
Toteutettavalla opetussuunnitelmalla viitataan opettajan käytännön toimintaan, miten hän toteuttaa virallisen kirjoitetun opetussuunnitelman tavoitteita. Toteutukseen vaikuttavat koulun resurssit, opettajan asenteet sekä oppilaiden edellytykset asenteineen. Käytännön opetusjärjestelyissä opetusmenetelmät eli metodit ovat aina olleet keskeisellä sijalla. Metodilla tarkoitetaan sitä ”tietä”, jota myöten opettajan ja oppilaan välinen vuorovaikutustapahtuma ohjataan kulkemaan (Lahdes 1980, 196). Metodi voi olla laaja tai suppea, jolloin puhutaan tekniikoista (Kansanen 2004, 32). Uusikylä ja Atjonen (2002, 104, 107) käyttävät termiä opetusmuodot ja erottavat opettajajohtoiset, oppilaskeskeiset ja yhteistoiminnalliset muodot. Opettajajohtoisia muotoja ovat opettajan esitys, kysely ja oppilaiden yhteinen harjoitus, koska opettaja panee työn alulle ja ohjaa sitä. Oppilaskeskeisillä muodoilla tarkoitetaan yksilöllistä työskentelyä, oppilaiden esitystä ja ryhmätyötä, koska työn eteneminen ja suunnittelu ovat oppilaiden varassa. Yhteistoiminnallisessa muodossa työnjako on yhteinen eikä ole selvää vastuunjakoa. Tällaisia yhteistoiminnallisia muotoja ovat esimerkiksi opetuskeskustelu ja juhla.

Tässä tutkimuksessa opetusmenetelmän tulee täyttää kuusi kriteeriä ollakseen opetusmenetelmä. Nämä kuusi kriteeriä ovat teoreettinen orientaatio, rakenne, toiminnan periaatteet, sosiaalinen systeemi, tukisysteemi ja vaikutukset (Joyce & Weil 1986, 15–20; Joyce & Weil & Showers 1992; Joyce & Calhoun & Hopkins 2002, 27–37). Luvussa kolme tarkastellaan matematiikan unkarilaista Varga–Neményi -opetusmenetelmää ja matematiikan opetusta suomalaisittain.

3.1 Varga–Neményi -opetusmenetelmä

Orientaatiolla tarkoitetaan Varga–Neményi -opetusmenetelmän taustateorioita (ks. kuviota 3.1.1), joihin menetelmän rakenne ja toiminta perustuvat. Teoreettinen orientaatio erottaa opetusmenetelmän yksinkertaisesta opetustekniikasta.

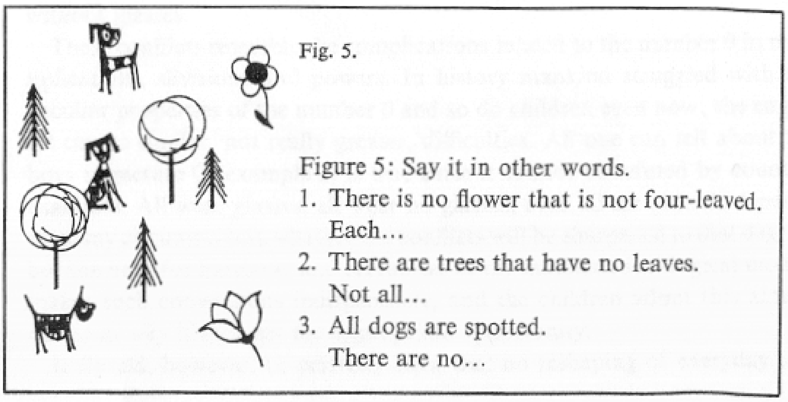
Esimerkiksi luentomenetelmää opetuksessaan jatkuvasti käyttävän opettajan on vaikea perustella, mihin tieteelliseen viitekehykseen hänen opetusmenetelmänsä nojaa. Varga–Neményi -opetusmenetelmän rakennetta ja toiminnan periaatteita kuvaavat seitsemän pedagogista periaatetta (ks. kuviota 3.1.1), jotka käytännössä kietoutuvat erottamattomaksi kokonaisuudeksi (Matikainen, Kyyrä, Risku & Tikkanen 2002a, 4–6; 2002b; Risku & Tikkanen 2004a, 6–13; 2004b), vaikka ne on kuviossa ja sitä seuraavassa tarkastelussa eroteltu erillisiksi. Sosiaalisessa vuorovaikutuksessa opettajan tarkoitus on ohjata oppilaita aktiiviseen yhteistoimintaan heidän kehityksensä ja persoonallisten ominaispiirteittensä pohjalta. Tukisysteemillä tarkoitetaan opettajan suhdetta matematiikkaan, sen oppimiseen ja opettamiseen sekä oppilaisiin. Opettajalla tulisi olla myönteinen asenne matematiikkaan ja innostava tapa opettaa, jotta oppilaiden asenteet kehittyisivät. Opetusmenetelmän vaikutuksista ja oppimistuloksista viestivät Kleinin (1987) sekä Kleinin ja Habermannin (1988) tutkimukset. Myös tämän käsillä olevan tutkimuksen tulokset suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemasta matematiikan opetussuunnitelmasta kertovat menetelmän vaikuttavuudesta ja tuloksista. Seuraavan kuvion tarkoitus on toimia Varga–Neményi -opetusmenetelmän tarkastelun karttana.



KUVIO 3.1.1 Varga–Neményi -opetusmenetelmän periaatteet

3.1.1 Todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen

Kokemuksen merkitystä matematiikan oppimisessa korosti (Varga 1971b, 13) Comeniukseen (Jan Amos Komensky 1592–1670) viitaten: Kokemuksen pitäisi olla kaiken oppimisen lähtökohta. Kokemus ja sen avulla ymmärtäminen ovat valmiin verbaalisen tiedon esittämisen ja sen muistamisen vastakohta. Tämä korostui Vargan mukaan tuonaikaisessa matematiikan opetuksessa Unkarissa. Hän piti Comeniuksen vuosisatoja vanhoja kasvatusperiaatteita ”uusina” ja ”moderneina”. Niin ikään C. Neményi (2003b) painottaa erityisesti konkreettisten kokemusten hankintaa, josta induktiivisesti edetään kuvalliseen ja kielelliseen esitykseen, koska se myötäilee lapsen kehitystä ja luonnollista kiinnostusta ympäristöön (C. Neményi 2003c, 5–7). Tärkeä oppimisen lähtökohta on myös matematiikan ja kielen käyttökelpoisuus arkielämässä (Varga 1971b, 14). Tämä periaate sekä matematiikan että kielen samanaikaisesta korostamisesta ilmenee Vargan (1972) laatimissa logiikan tehtävissäkin 8–9-vuotiaille kolmasluokkalaisille, mistä yksi esimerkki on seuraavassa kuviossa. Tehtävän kuvien tarkoitus on saada oppilas kytkemään logiikan tehtävä omaan tuttuun arkielämäänsä. Lauseiden alut tutustuttavat oppilasta logiikan kielen alkeisiin. Lauseita täydentäessään oppilaalla on mahdollisuus suulliseen esittämiseen luokkatovereille ja opettajalle. Tehtävä haastaa oppilaan ajattelemaan, koska lauseen sisältö on tuotettava omin sanoin.



KUVIO 3.1.1.1 Logiikan harjoitus: Sano toisin. (Varga 1972, 349)

Varga (1971b, 14) perusteli käytännönläheisiä ajatuksiaan todeten, että harvat ovat kiinnostuneita jonkin rakenteesta sinänsä, jos se ei ole kytkettävissä käytäntöön. Kokemus lisää rakenteiden ymmärtämisen arvostamista, mikä edistää rakenteiden tehokasta ja oikeaa käyttöä. Lapset kyllä oppivat mitä vain, mutta mistään tietämyksestä ei kuitenkaan tule pysyvää ja käyttökelpoista, jollei sitä esitetä lapsille tutussa arkipäivän yhteydessä ja heidän ajattelunsa tasolla (Varga 1971b, 20). Myös opetusmenetelmän pitkäaikaiset kehittäjät ja soveltajat Oravecz ja Kivovics (2005, 22–24) korostavat tärkeimpänä periaatteena todellisuuteen perustuvien toiminnallisten kokemusten hankkimista oppimisen perustaksi. He kuvaavat oppilaan toiminnallisia kokemuksia käytännönläheisillä verbeillä: Oppilas *kokoaa, peittää, täyttää, koskettaa, askeltaa, rakentaa, mittaa ja laskee* oppitunneilla. He muistuttavat, ettei toiminnallisuus ole vain piirtämistä ja värittämistä, jotka ovat lapselle jo jonkinasteisia abstraktioita. Todellisuus ymmärretään opetusmenetelmässä oppilaiden jokapäiväiseksi elinympäristöksi ja kokemuksellisuus oppilaiden konkreettiseksi esineelliseksi toiminnaksi, jolla on neljä keskeistä tavoitetta:

1) Esineellisellä toiminnalla pyritään varmistamaan, että oppilas hankkii kokemuksia monien aistihavaintojen kautta matemaattisten käsitteiden pohjaksi.

2) Kaikkien oppilaiden omakohtaiset kokemukset mahdollistuvat henkilökohtaisilla toimintavälineillä.

3) Niiden avulla oppilaalle tulisi muodostua visuaalisten mielikuvien lisäksi kuulo- ja tuntoaistimuksia. Kuuloaistimuksia hankitaan esimerkiksi taputtamalla, tömistämällä ja soittamalla, tuntoaistimuksia koskettamalla ja askeltamalla sekä havainnoimalla esimerkiksi kasvavaa jonoa nousemalla kyykystä seisomaan ja päinvastoin. Näin hyödynnetään kehon liikkuvuutta ja rakennetaan suhdetta esineisiin ja asioihin ja opitaan ymmärtämään niitä.

4) Konkreettisten esineiden avulla oppilas voi havainnoida myös omaa ajatteluaan tietoisesti.

Fyysisistä arkielämän tutuista kokemuksista edetään matematiikan oppimisen kannalta tärkeimpään – loogis-matemaattiseen kokemukseen, josta Peel (1971, 156) on tehnyt yhteenvedon Piaget'n teorian pohjalta Servais´n ja Vargan (1971) toimittamassa kirjassa Teaching school mathematics korostaen fyysisen kokemuksen ja loogis-matemaattisen kokemuksen eroa. *Fyysisessä kokemuksessa* lapsi toimii järjestellen ympäristöään. Nämä toiminnot vaihtelevat yksinkertaisesta laskemisesta mm. ryhmittelyyn, luokitteluun, osajoukkoihin jakamiseen ja yhteen liittämiseen. Nämä luovat toiminnallisen ja käsitteellisen perustan lapselle tulkita fyysistä ympäristöä. Fyysinen kokemus lisää lapsen tietoa toiminnan kohteesta, kun taas *loogis-matemaattinen kokemus* lisää tietoa toiminnasta itsestään ja sen tuloksista. Fyysisen ja loogis-matemaattisen kokemuksen eroa voidaan kuvata lapsen nappileikillä: Lapsi havaitsee nappeja tutkiessaan niiden värin, muodon, pinnan tunnun ja muita ominaisuuksia eli toiminnan kohteen ominaisuuksia. Kun lapsi järjestää napit riviin ja laskee niiden lukumäärän rivin alusta loppuun, lopusta alkuun, hän saa saman lukumäärän molemmilla laskemiskerroilla. Tällöin lapsella on mahdollisuus oivaltaa, että tiettyyn objektiryhmään kuuluvien objektien määrä on niiden järjestyksestä riippumaton. Näin lapsi voi keksiä kahden toiminnan välisen suhteen eikä vain toiminnan kohteen ominaisuuksia. Tämä kahden toiminnan välisen suhteen oivaltaminen tarkoittaa loogis-matemaattista kokemusta. Lisäesimerkkeinä loogis-matemaattisista kokemuksista mainittakoon oppilaiden askelmittaus lattiaan teipatun lukusuoran origosta sovittuun merkkiin ja takaisin. Oppilaat kirjaavat molemmat mittaustulokset, jotka luokan yhteiskeskustelussa havaitaan samoiksi. Oppilaat voivat mitata myös värisauvoilla erilaisia nauhakäärmeitä päästä häntään ja hännästä päähän. Nämä oppilastehtävät kertovat loogis-matemaattisen kokemuksen, lukumäärän säilyvyyden, käytännön toteutuksista.

Kiinnostus matematiikkaan saattaa herätä itse aineesta tai sen ulkopuolelta, kuten matematiikasta välineenä käytännön elämässä (Varga 1971b, 28–29). Ilman kiinnostusta ja motivaatiota matematiikan oppiminen on tuskin mahdollista. Vargan pohdinta herättää kysymyksen, miten motivoituneita tällä menetelmällä opetetut oppilaat ovat.

Vuonna 1969 toteutettiin unkarilaisen Sándor Kleinin (1987, 302–310) johtama laaja tutkimusprojekti "Modernin matematiikan psykologisista vaikutuksista" kahdella mantereella neljässä maassa, Kanadassa, USA:ssa, Brasiliassa ja Unkarissa, jossa tutkittiin Varga–Neményi -menetelmällä opetettujen oppilaiden motivaatiota matematiikassa. Motivaatiolla tarkoitettiin oppilaan tarvetta suorittaa tehtäviä. Motivaatiota tutkittiin McClellandin the Thematic Apperception -testillä, jossa lapset kertoivat viiden annetun kuvan avulla tarinoita. Peruskoulun kolmas-, neljäs- ja viidesluokkalaiset Varga–Neményi -luokissa olivat motivoituneimpia kuin ikäisensä kontrolliluokissa, joita oli opetettu tavanomaisen opetussuunnitelman mukaan. Sekä tytöt että pojat Varga–Neményi -luokilla tytöt olivat motivoituneempia kuin pojat ja tytöt kontrolliluokilla. SIMS (Second International Mathematics Study, IEA) tutkimuksessa unkarilaiset perusopetuksen yläkoululaiset, ammattikoululaiset ja lukiolaiset keskimäärin olivat sitä mieltä, ettei matematiikkaa tarvita arkielämässä (Klein & Habermann 1988, 38–39).

On pääteltävissä, että tarvitaan pitkäkestoista, tavoitteellista ja monipuolista oppilaiden ohjausta sekä vertaisryhmässä että yksilöllisesti oppijan edellytykset huomioon ottaen. Näin oppilaat voivat oppia näkemään matematiikkaa ympärillään ja kytkemään matematiikan sisältöjä todellisiin arkipäivän tilanteisiin käyttökelpoisesti. Koska Varga–Neményi –opetusmenetelmässä painotetaan matematiikan käytännönläheisyyttä, on oletettavaa, että suomalaiset ja unkarilaiset oppilaat näkevät matematiikan liittyvän monin tavoin arkielämäänsä koulun ulkopuolellakin.

3.1.2 Abstraktion tie

”Abstraktion tie” on metafora pedagogisesta periaatteesta, joka kuvaa lapsen käsitteen oppimisen vaiheita fyysistä kokemuksista loogis-matemaattisiin kokemuksiin, jotka määriteltiin edellisessä luvussa. C. Neményi (2003a; 2003c, 6–7, 30–31, 75–78) sekä Oravecz ja Kivovics (2005, 25) esittävät ”abstraktion tien” nelivaiheisena, jossa edetään toiminnallisesta fyysisestä kokemuksesta välineisiin, joita kuvataan esimerkiksi piirtäen. Lopulta ilmiö ilmaistaan symboleilla.

Kombinatoriikassa ”abstraktion tie” lapsen fyysisestä kokemuksesta loogis-matemaattiseen kokemukseen voisi olla seuraava: Lapset leikkivät vapaasti pienryhmissä ”tuijotusta”: kumpi katsoo kauemmin toista silmiin silmiään räpäyttämättä. Tuijotusleikki on kytkentä lapsen arkielämään. Leikittyään lapset kertovat kokemuksistaan eli pyritään kielentämään tapahtumaa. Jotta edettäisiin tavoitteellisesti loogis-matemaattiseen kokemukseen: lapsilta kysytään leikkiparien yhdistelmien määrää. Mahdollisesti huomataan, ettei yhdistelmiä tullut lasketuksi leikin tuoksinassa. Säännönmukaisuuden huomaamiseksi leikitään järjestäytyneesti. Leikkimässä on esimerkiksi kaksi poikaa, Unto ja Veikko, ja kolme tyttöä, Kaisa, Liisa ja Maija. Pojat tuijottavat vuorotellen jokaisen tytön kanssa (abstraktion tien *toiminnallinen, fyysinen kokemus*). Sitten leikkiparien yhdistelmiä kuvataan askartelutikkujen avulla, jolloin saadaan kuusi tikkuparia (*välineellinen vaihe*). Leikkipareja voidaan kuvata myös kahteen osaan haarautuvan puudiagrammin avulla. Oksiin merkitään poikien nimet, Unto ja Veikko. Unton oksa haarautuu kolmeksi oksaksi, joihin merkitään tyttöjen nimet Kaisa, Liisa ja Maija. Nimet merkitään samoin Veikon oksan kolmihaaraumaan. (*kuvallinen vaihe*). Lopuksi tikkuparien tai diagrammin avulla muodostetaan lauseke 2 x 3 = 6, kombinatoriikan tuloperiaate (abstraktion tien *symbolinen vaihe*).

C. Neményi (2003abc) sekä Oravecz ja Kivovics (2005, 25) muistuttavat, että abstraktion tiellä konkretiasta symboleihin kuljetaan monta kertaa, uudestaan ja uudestaan, kunnes itse abstrakti käsite ilmentää monien yksittäisten tapausten yhteistä perusolemusta. Varga (1969c, 58) korosti Piaget'n sisäistämiskäsitteeseen viitaten, että abstraktion tien liikenne on kaksisuuntaista objektien ja symbolien välillä: Lapset tulkitsevat myös symboleita objekteiksi. Lapset kuvaavat esimerkiksi lauseketta 3 x 4 = 12 piirtäen, välineillä ja järjestämällä leikin.

Termeillä "spiraaliopetussuunnitelma" ja "keskitetty opetussuunnitelma" Varga (1971b, 21) viittasi erilaisiin ajallisiin mahdollisuuksiin edetä konkretiasta abstraktioon ja päinvastoin aihetta laajentaen ja syventäen. Keskitetyn opetussuunnitelman mukaista etenemistapaa Varga kuvasi sanonnalla "aritmetiikan jakso on nyt ohi ja algebran jakso alkaa". Spiraaliperiaatteen mukaan jokin aihe käsitellään syventäen ja laajentaen useita kertoja ilman taukoja eri matematiikan sisältöalueisiin liittyen. Tällöin Oraveczin ja Kivovicsin (2005, 24–25) mukaan monenlaiset kokemukset yhdistyvät, joille rakentuu uusi sisältö, itse käsite määrittynee vasta 12–16-vuotiaana. Esimerkiksi todennäköisyyden havainnointi muuttuu laskemiseksi, kaavaksi ja kypsyneeksi käsitteeksi vasta lukiossa. On huomattava, että matematiikan oppimisvaikeudet saavat alkunsa abstraktion yhtenäisen jatkumon katkeamisesta. Tällöin puuttuu tärkeä kokemus, jonka sijasta tietoa on tarjottu vain verbaalisesti.

Lasten matematiikan oppiminen ja käsitteen muodostaminen ovat Vargan (1971b, 23–24 Dienesiin viitaten) mukaan vaiheittaisia syklejä, joissa eritasoiset leikit seuraavat toisiaan. Vapaassa leikissä lapsi saa tutustua ilman rajoittavia ohjeita ja sääntöjä uuteen materiaaliin. Sitten lapsi hankkii kokemuksia, jotka ovat rakenteellisesti isomorfisia, samanrakenteisia opittavan käsitteen kanssa. Lopuksi harjoitellaan käsitteen käyttöä leikkimällä. On oleellista, että lapsi osaa soveltaa oppimaansa käsitettä todellisen elämän tilanteisiin. Tällä vaiheella on kaksi tarkoitusta: toisaalta se yhdistää vasta opitun käsitteen lapsen kokemusmaailmaan, toisaalta se toimii perustana uusille leikeille uusien käsitteiden oppimiseksi.

Seuraavaksi tarkastellaan tarkemmin Dienesin teoriaa leikkimuotoisesta matematiikan oppimisprosessista, johon unkarilainen Varga–Neményi -opetusmenetelmä perustuu.

Dienesin teoria matematiikan oppimisprosessista

Dienesin (1973, 5–9, 53–54) mukaan lapsen matematiikan oppiminen kehittyy asteittain kuudessa vaiheessa leikkien: vapaassa leikissä, säännönmukaisuuksia ja yhdenmukaisuuksia havaitsemalla, mallintamalla, niitä tarkastelemalla sekä kuudenneksi muodostamalla formaalit säännöt leikeistä.

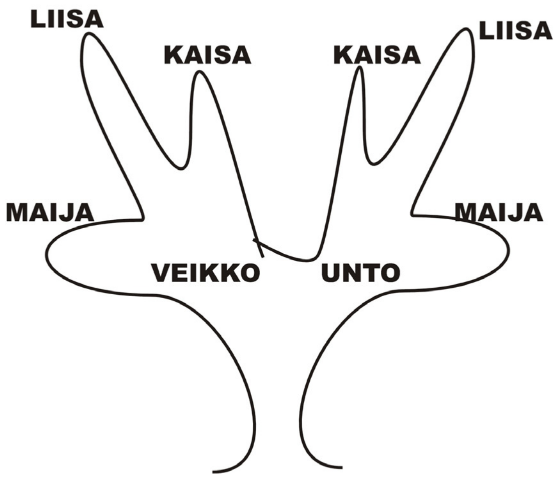
1) Vapaa leikki (free play)

Oppimisen perusluonteen Dienes (1973, 6–7, 53) määrittelee ympäristöön sopeutumiseksi. Silloin kun yksilöllä on tarve saada uusia taitoja ja tietoja selviytyäkseen, yksilö oppii. Oppimisen ja ympäristön tarpeisiin mukautumisen myötä yksilö selviää paremmin, koska pystyy sopeuttamaan käytöstään ja ympäristöään. Lapsi sopeutuu ympäristöön vapaassa leikissä. Leikki valmistaa häntä tulevan elämän tarpeisiin. Mikä tahansa vapaa leikki ei edistä matemaattisten käsitteiden muodostumista ja omaksumista, vaan aikuisen on rakennettava ympäristö, joka tukee lapsen loogisten käsitteiden rakentamista. Tällöin aikuisen on tunnettava lasten leikkejä, jotta hän voi ohjata lapsia käsitteiden muodostukseen. Luvun alun tuijotusleikkiesimerkkiä käyttääksemme on riittämätöntä käsitteen muodostuksen kannalta, että leikin säännönmukaisuudet jätetään havainnoimatta.

2) Säännönmukaisuuksien havaitseminen (regularities)
Jotta lapsen vapaa leikki olisi tavoitteellista, häntä ohjataan etsimään leikistä etenemisjärjestystä. Pikku hiljaa hän keksii etenemisen säännönmukaisuuksia, jotka kehittyvät havainnoimalla konkreettisia tilanteita. Vasta konkreettisten toimintojen jälkeen lapsi voi toimia formaalisten sääntöjen mukaan. Konkreettisen toiminnan rakenteiden täytyy olla matemaattisesti loogisia, jotta ne palvelisivat tarkoitustaan. (Dienes 1973, 7, 53). Kun tuijotusta leikitään pareittain järjestäytyneesti vapaan leikin jälkeisessä toisessa vaiheessa, leikki tarjoaa lapsille mahdollisuuden havaita yhdistelmiä.

3) Yhdenmukaisuuksien havaitseminen (isomophism game)
Matemaattisia rakenteita sisältävien pelien pelaaminen ja leikkiminen eivät vielä kuitenkaan ole matemaattisen ajattelun oppimista. Lapsen tulisi havaita ja erottaa pelien ja leikkien olennaiset säännönmukaisuudet. Näihin päästään pelaamalla useita samanrakenteisia pelejä (isomorphism game), joissa on samanlaiset lainalaisuudet mahdollisimman monessa erilaisessa muodossa. Näin lapsi oppii erottamaan erimuotoisista peleistä samat yleiset lainalaisuudet ja epäoleelliset piirteet, mikä tarkoittaa ensimmäisen abstraktion muodostumista. (Dienes 1973, 7–8, 53). Yksi tuijotusleikki ei ole riittävä abstraktisen yleistyksen muodostumiseksi kombinatorisista yhdistelmistä, vaan tarvitaan useita erilaisia samanrakenteisia leikkejä, kuten perinneleikki ”suolasäkin punnitus”, jossa kaksi lasta nostaa toisiaan vuorotellen selät vastakkain, ja paritanssit.

4) Mallintaminen (representations)
Lapsi ei kykene käyttämään abstraktiota aktiivisesti, ennen kuin hän osaa jollakin tavalla mallintaa mielikuvan. Lapsen mallintaminen voi olla auditiivista tai visuaalista, kuten piirroksia ja diagrammeja. Lapsi pystyy havainnoimaan visuaalista mallia, jonka avulla hän pystyy kertomaan havainnostaan. (Dienes 1973, 8, 53). Tuijotusleikin pareja mallinnetaan askartelutikuilla, puudiagrammilla tai taulukoinnilla. Seuraava kuvio havainnollistaa, miltä tuijotusleikin visuaaliset mallit voivat näyttää.



	UNTO	VEIKKO
LIISA	LIISA UNTO	LIISA VEIKKO
MAIJA	MAIJA UNTO	MAIJA VEIKKO
KAISA	KAISA UNTO	KAISA VEIKKO

KUVIO 3.1.2.1 Tuijotusleikin visuaaliset mallit

5) Mallien tarkasteleminen
Yhtä tai useampaa olemassa olevaa mallia tarkastelemalla lapsi pystyy havaitsemaan kyseiseen asiaan liittyviä matemaattisia lainalaisuuksia. Havaintojen purkaminen edellyttää niiden kielentämistä. Lapset kuvaavat ensin asioita täysin ”omalla kielellään”. Vähitellen opettajan ohjauksessa ja muiden lasten kanssa keskustellen valitaan sopivimmat termit yhteiseen kielenkäyttöön. (Dienes 1973, 8–9, 53). Tuijotusleikin pariyhdistelmien malleina toimivat askartelutikut tai diagrammit, joiden avulla lapset kertovat leikin tapahtumista ja niiden säännönmukaisuuksista.

6) Formaalit säännöt
Matemaattisen ajattelun kehittyneimmässä vaiheessa pystytään määrittelemään matemaattinen ilmiö yksiselitteisellä ja rajallisella tavalla. Määritelmien avulla syntyvät sitten kokonaiset formaalit aksioomat ja teoreemat. (Dienes 1973, 9, 53–54). Tuijotusleikin viimeisessä vaiheessa muodostetaan laskulauseke leikkiparien yhdistelmien määrästä, 2 x 3 = 6, tuloperiaatteen mukaan. Vuosiluokilla 1–4 laskulausekkeet ovat useimmiten vielä yksittäisiin konkreettisiin tilanteisiin liittyviä, mutta ne luovat kokemuksellista perustaa formaalille ajattelulle.

Matematiikan oppimista olisi ohjattava lasten kasvettua Vargan (1971b, 23–24) mukaan Polyan syklistä mallia seuraten ongelmanratkaisussa seuraavasti: Ensimmäisessä tutkivassa vaiheessa yhdistetään toiminta ja havainto edeten intuitiivisella, heuristisella tasolla. Toisella formaalimmalla tasolla oppilaita johdatellaan termeihin, määritelmiin ja todistuksiin. Lopuksi assimilaation vaiheessa pitäisi oppilaiden kanssa pyrkiä havaitsemaan asioiden sisäisiä perusteita, jotta opittava asia järjestäytyisi ja sulautuisi oppijan tietorakenteisiin, ajattelutapoihin. Tämä taso on perustana toisaalta sovelluksiin, toisaalta korkeampiin yleistyksiin.

Pelit ja leikit ovat oivallisia välineitä matematiikan oppimiseksi Halmosin ja Vargan (1978, 229, 237) mukaan. Ne kehittävät muistia ja suuntautumista tilaan (C. Neményi 2003c, 64–65). Ne motivoivat ja voivat myös vähentää ahdistusta. Klein (1987, 294–298) tutkimuksensa perusteella kertoo Varga–Neményi -menetelmään liittyvästä ahdistuksesta seuraavaa: Koeluokkien (= Varga–Neményi -ryhmät) neljäsluokkalaiset olivat merkittävästi vähemmän ahdistuneita kuin ikäisensä kontrolliluokissa. Kolmasluokkalaiset koeluokalla olivat oireellisesti vähemmän ahdistuneita kuin kontrolliluokkalaiset. Viidesluokkalaiset koeluokassa olivat oireellisesti kontrolliluokan oppilaita ahdistuneempia. Kun muodostettiin oppilasryhmät korkean, kohtalaisen ja matalan ahdistuksen mukaan, niin havaittiin, että neljännellä ja viidennellä luokalla koeluokissa oppilaiden ahdistus on keskittyneempää kuin kontrolliluokissa. Jos tämä mittaustulos heijastaa todellista eroa, se on tärkeä varoitus niille, jotka ovat vastuussa modernin matematiikan opetusmenetelmän jatkamisesta: On otettava huomioon ne oppilaat, joilla on oppimisvaikeuksia ja jotka ovat enemmän ahdistuneita. SIMS-tutkimuksen mukaan unkarilaisia perusopetuksen yläkoululaisia, ammattikoululaisia ja lukiolaisia ei matematiikan opiskelu pelottanut, vaan he halusivat opiskella lisää matematiikkaa (Klein & Habermann 1988, 38–39).

Abstraktion tie -pedagogisen periaatteen pohjalta oletetaan, että suomalaisen ja unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän neljännen luokan oppilaiden kokemassa matematiikan opetussuunnitelmassa mahdollisesti heijastuu leikkejä ja etenemistä konkreettisesta abstraktiin eri vaiheiden kautta tai päinvastoin.

3.1.3 Toimintavälineiden runsas käyttö

Erilaisia toimintavälineitä käytetään runsaasti matematiikan Varga–Neményi -opetusmenetelmässä. Toimintavälineet tukevat induktiivista oppimista, jonka tavoitteena on monien yksittäisten kokemusten yleistäminen, perustelee C. Neményi (2003abc; 2005, 38–39), Vargan työryhmän jäsen ja pitkäaikainen työtoveri. Toimintavälineet voivat olla manuaalisia esineitä tai painettua kirjallista materiaalia. Niiden avulla oppilaat hankkivat toiminnallisia kokemuksia ja elämyksiä. Toimintavälineet tarjoavat oppilaille mahdollisuuden tutkia ja harjoitella abstraktisia käsitteitä sovelluksineen. Oppilaat voivat välineillä esittää, kokeilla, ratkaista ja ymmärtää ongelmia. Niillä on myös mahdollista tarkistaa ja yleistää ratkaisumenetelmiä sekä luoda ajatusmalleja. Varga (1969c, 58, 66) perusteli konkreettisten toimintavälineiden käyttöä matematiikan oppimisen sisäistämisellä Piaget'n kehitysteoriaan viitaten seuraavasti: oppimisen alkuvaiheissa voimakas konkretia tarkoittaa sensomotorista kokemusta, jossa tuntoaistiin perustuvat kokemukset ovat tärkeimmät.

Monipuolisten ja usein käytettyjen toimintavälineiden tarkoituksena on tarjota oppilaille aistihavaintoja, kokemuksia ja mielikuvia. *Mielikuvat* ovat mielen sisäisiä kuvia (Piaget & Inhelder 1977, 71–74), joista on erotettavissa toistavat ja ennakoivat kuvat. *Toistavien kuvien*, muistikuvien, avulla herätetään mielessä uudelleen eloon aikaisemmin havaittuja näkymiä. *Ennakoivien kuvien* avulla voidaan kuvitella liikkeitä tai muutoksia ja niiden seurauksia, vaikka niitä ei olisi ennen nähty. Toimintavälineiden synnyttämien mielikuvien tarkoituksena on edistää matemaattista ajattelua. Matemaattinen ajattelu kehittyy Servais'n (1971, 94) mukaan siten, että aluksi muodostamme konkreettisen toimintamme, havaintojemme sekä niiden välisten suhteiden avulla mielikuvan asioista. Mielikuvan voimme palauttaa myöhemmin mieleen sellaisenaan ilman konkreettisia välineitä. Näin konkreettinen asia, ilmiö tai havainto on saanut alkeellisen abstraktin muodon.

Toimintavälineet voidaan ymmärtää matemaattisen käsitteen malleiksi. Niistä Varga (1976, 173–174) totesi, että kaikki, matemaatikot ja ei-matemaatikot, käyttävät malleja katsoessaan minne tahansa tai sanoessaan mitä tahansa. Mallit ovat kätkeytyneinä puheeseen ja ajatteluun. Voimme olla enemmän tai vähemmän tietoisia niistä ja soveltaa niitä enemmän tai vähemmän tarkoituksenmukaisesti. Varga (1971b, 15) piti opetuksessa käytettäviä toimintamateriaaleja matematiikan symbolisten tai abstraktisten esitysten fyysisinä malleina. Vargan kanssa toimittamassa kirjassaan Servais (1971, 95) määrittelee termin "malli" fyysisen ja matemaattisen vuorovaikutukseksi: Toisaalta fyysinen materia on konkreettinen malli matemaattisista suhteista, joita se kuvaa. Toisaalta matemaattinen rakenne on abstraktinen malli fyysisestä tilanteesta, jota se selittää. Mallissa käytettyjen välineiden tulee olla isomorfisia eli samanrakenteisia havainnollistettavan ilmiön kanssa.

Toimintavälineiden tarkoituksena on myös saada oppilaat huomaamaan, että matematiikkaa on kaikkialla heidän ympärillään. Matematiikan tunneilla oppilaat työskentelevät pysyvillä ja satunnaisilla toimintavälineillä. Pysyviä toimintavälineitä ovat Varga–Neményi -opetusmenetelmässä mm. värisauvat, loogiset palat ja geolauta (C. Neményi 2003abc; Varga 1969a, 82-83). Dienes kehitti unkarilaiset loogiset palat Vygotskyn loogisten palojen pohjalta lasten päättelyn kehittämiseksi. Dienesin loogisissa paloissa on reikä, jonka tilalla Vygotskyn palojen ominaisuutena on paksuus. Monien esimerkkien avulla Varga (1969a, 82–83; 1970, 36–37; 1971b, 37–67; 1972, 348–357; Halmos & Varga 1978, 236–244) korosti, että pysyvien välineiden, pelien ja tehtävien tulee ilmentää matematiikan rakennetta, usein monimutkaistakin rakennetta ja että välineet yhdistävät havaintoja ja mielikuvia. Servais (1971, 95) varoittaa monimutkaisten valmiiden mallien käytöstä: Jotta matemaattiset välineet täyttäisivät tarkoituksensa, oppilaiden itsensä täytyy käsitellä niitä yhteistyössä. Näin välineet auttavat oppilaita selventämään ja järjestämään ideoitaan. Satunnaisesti käytettävät toimintavälineet voivat olla mitä tahansa, jonka avulla matemaattista ongelmaa voidaan havainnollistaa, esim. tikkaat lukusuorana tai metallisesta vaateripustimesta tehty vaaka (Oravecz & Kivovics 2005, 24).

Havainnollistamisväline ja toimintaväline merkitsevät Vargan mukaan (1969c, 58–59; myös Klein 1987, 41) eri asioita: Opettaja käyttää havainnollistamisvälinettä, jota oppilaat havainnoivat, kun taas toimintaväline on jokaisen oppilaan yksilöllisessä käytössä. Havainnollistamisvälineen avulla lapsille näytetään tiettyjä matemaattisia suhteita. Oppilaiden omakohtaisella toimintavälineiden käytöllä varmistetaan, että jokainen lapsi keksii nämä suhteet itse. Havainnollistamis- ja toimintavälineen ero viittaa käsitykseen oppimisesta:

Behavioristisen oppimiskäsityksen mukaan opettaja esittää ja välittää opetettavia asioita havainnollistaen, tällöin oppilaat ovat tiedon vastaanottajia. Sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan opettaminen ja oppiminen nähdään tietoa konstruoivana vuorovaikutusprosessina, jossa oppilailla on aktiivinen rooli.

Matematiikan opetuksessa oppikirjoilla on tärkeä osa, tärkein osa, opetusmateriaaleina (Servais 1971, 118-119). Oppikirjoja tärkeämpänä opetusmateriaalina Varga (1969a, 82–83; 1969b, 76; 1969c, 59, 63; 1972, 352; 1973, 37) Montessoriin viitaten piti työkortteja ja toimintavälineitä, koska ne ohjaavat oppilasta omakohtaiseen havainnointiin ja mahdollistavat yksilöllisen etenemisen. Suotuisimmillaan kirjalliset tehtävät esittelevät matematiikan rakenteita ja matematiikkaa kokonaisuutena, ei vain yhtä osa-aluetta. Moniväriset, humoristisetkin, kuvat elävöittävät matematiikkaa ja nivovat sitä arkielämään. Oppilaita rohkaistaan matemaattisen kirjallisuuden lukemiseen, jotta tekstin ymmärtäminen kehittyisi. Varga–Neményi -opetusmenetelmää tukevat siihen suunnitellut oppikirjat perusopetuksen vuosiluokille 1–4 (esim. C. Neményi & Sz. Oravecz 1992; 1999; C. Neményi & Káldi 1999ab). Oppikirjojen ominaispiirteenä on kirjallisten tehtävien ja toimintavälineiden yhtäaikainen käyttö oppilaiden abstrahoimisen edellytysten mukaan.

Varga–Neményi -opetusmenetelmän pedagoginen periaate toimintavälineiden monipuolisesta ja runsaasta käyttämisestä perustuu Dienesin (1966) Englannissa ja Walesissa järjestettyyn laajaan tutkimukseen. Sen tavoitteena oli selvittää, miten edistää parhaiten matematiikan ymmärtämistä ja suotuisampia matematiikka-asenteita. Tutkimukseen osallistui runsaat 4500 koululaista esiopetuksesta kymmenvuotiaisiin. Tavoitteena oli verrata neljää erilaista menetelmää: traditionaalista, uni-model -menetelmää, motivoivaa menetelmää ja multi-model -menetelmää. Traditionaalisessa opetusmenetelmässä keskeisiä olivat ulkoa oppiminen ja symbolien käyttö. Uni-model -menetelmässä matematiikan käsitteiden looginen rakenne havainnollistettiin vain yhtä konkreettista mallia käyttäen Cuisenaire- tai Stern-sauvoilla. Motivoivassa menetelmässä pyrittiin ylläpitämään lasten mielenkiintoa *elävästä elämästä* saaduilla malleilla ja tilanteilla. Uni-model -menetelmä ei edistänyt parempaa matematiikan ymmärtämistä tai myönteisempiä asenteita. Vain älykkäiden poikien ryhmä näytti hyötyvän uni-model -menetelmästä. Motivoiva menetelmä oli yhtä hyvä kuin muut menetelmät, kun sitä käytettiin esikoulussa. Jatkuvassa käytössä se sen sijaan tuotti huonoja tuloksia. Tutkimuksen toisessa vaiheessa verrattiin Dienesin multi-model –menetelmää ja traditionaalista menetelmää. Multi-model -menetelmässä käytettiin monipuolisia konkreettisia välineitä matematiikan käsitteiden loogisten rakenteiden havainnollistamisessa. Multi-model -ryhmän oppilaat menestyivät traditionaalista kontrolliryhmää huomattavasti paremmin mekaanista laskutaitoa ja käsitteiden ymmärtämistä mittaavissa tehtävissä. Multi-model -menetelmästä hyötyivät eniten heikkolahjaiset oppilaat.

Tutkimusten johtopäätös oli, että uni-model -menetelmä ei anna lapselle tarpeeksi monipuolista kokemusta opetettavasta asiasta. Tulokset osoittivat, että laajat käsitteen soveltamismahdollisuudet monipuolistavat käsitteen oppimista. Dienes korostaa tutkimustensa pohjalta, että monipuolisuus on välttämätöntä lapsen matemaattisessa kokemuksessa. Multi-model -ryhmän oppilaiden asenteetkin matematiikkaan olivat myönteisemmät kuin vertailuryhmän oppilaiden.

SIMS-tutkimuksen mukaan unkarilaiset perusopetuksen yläkoululaiset, ammattikoululaiset ja lukiolaiset keskimäärin tunsivat itsensä hyviksi, kun ratkaisivat matematiikan ongelmia itsenäisesti. He halusivat onnistua matematiikassa. Vähiten he pitivät teoreemojen todistamisesta sekä sääntöjen ja kaavojen muistamisesta. (Klein & Habermann 1988, 38–39).

Myös Kleinin (1987, 257–265) tutkimuksessa havaittiin alakoulun Varga–Neményi -opetusryhmien asenteiden olevan myönteisiä sekä matematiikkaan että koulunkäyntiin yleensä. Oppilaiden asenteita tutkittiin Osgoodin viisiportaisen semanttisen differentiaalin avulla vastakkaisia adjektiivipareja vertailemalla. Kaikkien toisen, kolmannen, neljännen ja viidennen koeluokkien oppilailla oli oireellisesti myönteisempi asenne matematiikkaan ja kouluun kuin kontrolliluokkien oppilailla, mutta merkitsevästi myönteisempi ainoastaan neljännellä luokalla. Taulukossa verrataan Varga–Neményi -koeluokkien ja kontrolliluokkien asennoitumista matematiikan oppituntiin vastakohtaisilla adjektiivipareilla.

TAULUKKO 3.1.3.1 Oppilaiden asennoituminen matematiikan oppituntiin (Klein 1987, 264)

Matematiikan tunti koeluokkien mielestä	**Matematiikan tunti kontrolliluokkien mielestä**
aktiivisempi	passiivisempi
pehmeämpi	kovempi
sosiaalisempi	epäsosiaalisempi
virkistävämpi	väsyttävämpi
reilumpi	epäreilumpi
nopeampi	hitaampi
epätavallisempi	tavallisempi
meluisampi	hiljaisempi
parempi	huonompi
lempeämpi	ankarampi
hedelmällisempi	hedelmättömämpi
jännittävämpi	rauhallisempi
onnistuneempi	epäonnistuneempi
kiltimpi	julmempi
vaihtelevampi	yksitoikkoisempi
humoristisempi	vakavampi
kiinnostavampi ja	tylsempi ja
miellyttävämpi	epämiellyttävämpi
kuin kontrolliluokkien mielestä.	**kuin koeluokkien mielestä.**

Koska Varga–Neményi -opetusmenetelmässä, Suomen matematiikan opetussuunnitelmassa (2004) ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelmassa (2003) korostetaan oppilaiden monipuolisia kokemuksia matematiikassa eri tavoista esittää matemaattisia käsitteitä puhutun ja kirjoitetun kielen avulla, välineillä ja symboleilla, on todennäköistä, että suomalaiset ja unkarilaiset neljäsluokkalaiset kuvaavat kokemassaan matematiikan opetussuunnitelmassa toimintavälineiden merkitystä ja sisältöä oppilaan näkökulmasta.

3.1.4 Laaja ja yhtenäinen matemaattisten käsitteiden pohjustus

Nuoret lapset kykenevät oppimaan Vargan mukaan (1969c, 66–67; 1971b, 16–21) monia matematiikan sisältöalueita kuten algebraa, funktioita, geometriaa, joukko-oppia ja relaatioita, eivät vain yksinkertaista aritmetiikkaa. Jotta voisi ymmärtää esimerkiksi tietokoneen toimintaa, on ehdottoman tärkeää olla perillä muistakin lukujärjestelmistä kuin kymmenjärjestelmästä. Oleellista matematiikan abstraktien käsitteiden pohjustamisessa Vargan ja C. Neményin (2002; 2003abc) mukaan on, että lasten saamat ensimmäiset kokemukset eivät johdata myöhempää käsitteenmuodostusta harhaan, anna siitä väärää kuvaa tai rajaa käsitettä liian tiukasti. Konkreettisissa tilanteissa lapsi saa kokemuksia suhteellisen väljästä käsitteestä ja vasta sitten soveltaa ajatusta erikoistapauksiin.

Opetusmenetelmän nykyiset soveltajat Oravecz ja Kivovics (2005, 26) korostavat olennaisena ja tärkeänä perusperiaatteena, että oppilaalle annetaan yhtenäinen ja laaja perusta matematiikan oppimiselle. Oppilaalle halutaan opettaa matematiikkaa, ei vain sen yhtä osa-aluetta, laskuoppia. Oppilas tarvitsee koko matematiikkaa kehittääkseen ajatteluaan. Menetelmässä kaikki tärkeät aihepiirit saavat tilaa: joukko-oppi, logiikka, funktiot, lukujonot, kombinatoriikka, todennäköisyys, tilastotiede, geometria ja mittaamiset. Keskeinen rooli on luku- ja laskutoimituskäsitteiden muodostamisella sekä erilaisten laskutapojen muokkaamisella ja harjoittelemisella. Suurin osa aihepiireistä suuntautuu näihin. Muutamat opetussuunnitelmaan kuuluvat aihepiirit, esimerkiksi geometria ja kombinatoriikka esiintyvät omina kokonaisuuksinaan oppimisprosessissa (C. Neményi 2002; 2003c), jolloin niiden käsittely on ensisijaisesti näkemyksen muodostamista ja kokemuksien hankkimista. Toimintaa näissä aihepiireissä ei arvioida. Kuitenkin oppilaita seurataan, sillä on hyödyllistä, jos opettaja voi olla varma siitä, että oppilas kokee, näkee ja ymmärtää.

Varga–Neményi -koeluokkien perinteisen matematiikan kognitiivisista oppimistuloksista Klein (1987) kertoo seuraavaa*:* Vaikka koeluokkien oppilaat käyttivät paljon vähemmän aikaa perinteisiin matematiikan aiheisiin, heidän oppimistuloksensa eivät olleet sen huonompia kuin kontrolliluokkien oppilaiden oppimistulokset perinteisessä matematiikassa. Kokonaisuutena koeluokkien tois- ja kolmasluokkalaiset menestyivät oireellisesti paremmin kuin luokkatoverinsa perinteisissä matematiikan tehtävissä. Neljäsluokkalaiset menestyivät perinteisissä matematiikan tehtävissä merkittävästi paremmin kuin luokkatoverinsa kontrolliluokilla. Sen sijaan kontrolliluokan viidesluokkalaiset menestyivät koeluokan ikäisiään paremmin perinteisissä matematiikan tehtävissä. (Klein 1987, 162–166). Modernin matematiikan kognitiiviset testit tehtiin vain koeluokissa, koska oli järjetöntä testata kontrolliluokan oppilaiden modernin matematiikan osaamista, koska he eivät olleet sitä opiskelleet. Testit tehtiin vain luokilla 2, 3 ja 5, koska neljäsluokkalaisten testiä ei saatu valmiiksi lukukauden loppuun mennessä. Viidesluokkalaisten testin toteutuksessa epäonnistuttiin. Johtopäätös oli, että toisten ja kolmansien koeluokkien oppilaat näyttivät oppineen modernia matematiikkaa. (Klein 1987, 171–173). SIMS-tutkimuksen mukaan unkarilaiset perusopetuksen yläkoululaiset keskimäärin osasivat matematiikkaa paremmin kuin ikäisensä ammattikoulussa (Klein & Habermann 1988, 32–33).

Koska Varga–Neményi -opetusmenetelmässä korostetaan samoin kuin Suomen opetussuunnitelmassa 2004 ja Unkarin opetussuunnitelmassa 2003 matematiikan sisällöllistä monipuolisuutta, suomalaiset ja unkarilaiset neljäsluokkalaiset kertonevat kokemissaan opetussuunnitelmissa matematiikan eri sisältöalueista.

3.1.5 Lupa erehtyä, väitellä ja iloita

Joku kertoo maanantaina vitsin viidelle ihmiselle. Seuraavana päivänä, tiistaina, jokainen heistä kertoo vitsin kuudelle muulle ihmiselle, jotka kertovat vitsin seitsemälle ihmiselle keskiviikkona. Kuinka moni on kuullut vitsin keskiviikkona? (Varga 1988, 295).
Eräällä unkarilaisella pojalla oli tämä tehtävä kotitehtävänä. Hän löysi siihen kolme tulkinnaltaan erilaista ratkaisua:

- Viisi ihmistä kuuli vitsin maanantaina, tiistaina 5 x 6 eli 30, keskiviikkona 5 x 6 x 7 eli 210. Vastaus on 210.
- Toisen tulkinnan mukaan vastaus on 5 + 30 + 210 eli 245. Maanantaina, tiistaina ja keskiviikkona vitsin kuulleet. 210 ihmistä oli kuullut vitsin juuri keskiviikkona.
- Sen, joka oli kertoi vitsin viidelle ensimmäiselle, on täytynyt kuulla se aikaisemmin - ellei hän keksinyt sitä itse – siis vastaus on 246.

Unkarilainen poika oli huolissaan: ”Jos esitän koulussa jonkun näistä kolmesta ratkaisusta, opettajalla saattaa olla mielessä joku muu ratkaisu ja opettaja tekee minusta typeryksen luokan edessä, koska en löytänyt oikeaa ratkaisua. Koko luokka nauraa minulle.” (Varga 1988, 295–296). Tämä kertomus on yksi esimerkki avoimesta ongelmasta, jolla tarkoitetaan tehtävätilannetta, jossa tehtävän ratkaisemiseksi voidaan yhdistää tuttuja tietoja uudella tavalla ja saada yksi tai useita ratkaisuja. Varga kertoi antavansa mielellään lapsille tulkinnallisia ongelmia. Erilaisten tulkintojen oivaltaminen on ensimmäinen askel ongelman tutkimiseen ja ongelman matematisointiin. Sellaiset toiminnot ovat yhtä tärkeitä kuin valmiiden tehtävien ratkaiseminen. Ongelmanratkaisun tarkoitus on herättää väittelyä ja keksimisen iloa.

Niin erehtyminen kuin edellisen esimerkin pojan huoli herättää kysymyksen koulu♦luokan ilmapiiristä. Turvallinen oppimisilmapiiri määritellään

Varga–Neményi -opetusmenetelmässä pedagogisella periaatteella ”lupa erehtyä, väitellä ja iloita”. Periaate tarkoittaa matematiikan oppimisen yhteydessä erehtymisen hyväksymistä (C. Neményi 2005, 39). Erehtyminen on luonnollinen oppimisen rinnalla kulkija. Erehtyminen korjataan siten, että oppilas kulkee abstraktion tien uudestaan. Näin hän itse voi tunnistaa erehdyksensä ja korjata virheensä. (Oravecz & Kivovics 2005, 27).

Varga (1968) kuvasi esimerkillä, miten ohjata lasta oivaltamaan erehdyksensä. Kuvitellaan opettajan kysyneen, paljonko on 50 kertaa 100. Janne vastaa, että 500. Väärään vastaukseen reagoidaan yleensä seuraavasti:

- Janne, olet väärässä. Petteri, osaisitko sinä vastata? tai
- Oletko Janne aivan varma? Kokeile uudestaan! tai
- Voi, voi Janne, milloin sinä opit kertotaulun? tai
- Jos et osaa laskea päässä, niin laske paperilla! tai
- Ei, vaan 5000.

Lapset eivät heitä vastauksiaan yleensä summamutikassa. Janne vastatessaan 500 ajatteli jotain. Yksittäinen väärä vastaus on merkityksetön, paljon tärkeämpää on, ettei Janne ratkaisisi tehtäviä väärin jatkossakin. Jos kukaan ei auta poikaa, niin hän todennäköisesti jumittuu ajattelemaan väärin. Jos se toistuu usein, Janne menettää mielenkiintonsa. Oikean vastauksen kertominenkaan ei auta poikaa ajattelemaan seuraavalla kerralla oikein. Kun oppilas vastaa, että 50 kertaa 100 on 500, opettaja kysyy uuden kysymyksen: Entä 50 kertaa 10? Janne saattaa oivaltaa, että tosiaankin se on 5000. Usein tapahtuu juuri näin: lapset vastaavat muitta mutkitta alkuperäiseen kysymykseen eivätkä välitä toisesta kysymyksestä. Tämä menettely on edullista Vargan (1968) mukaan siksi, että siitä ilmenee lapsen oikea vastaus – joskaan ei siihen, mitä toisessa kysymyksessä kysyttiin. Johdattelun avulla lapsi itse löytää oikean vastauksen alkuperäiseen kysymykseen. Näin lapsi voi kokea tuottaneensa itse jotain perustellusti. Menettelyn tarkoitus on poistaa ne piikit, jotka väärä vastaus jättää lapseen. Hän haluaa edelleenkin yrittää. Menettely on myös nopea. Se on lähes riippumaton lapsen suullisesta ilmaisutaidosta. Siksi se on sovellettavissa iän, taitojen ja kulttuurin näkökulmasta katsottuna laajasti. Opettajalle menettely on tilaisuus harrastaa arvokasta aivojumppaa. Tällaiset mahdollisuudet tekevät ensimmäisillä luokilla työn mukavaksi. Se ohjaa oppilasta tarkistamaan vastauksiaan myös silloin, kun hän työskentelee itsenäisesti.

Seuraavalla toiminnalla pyritään Vargan mukaan (1968) muodollisesti samaan: Kuinka paljon on 7 kertaa 5? Lapsi vastaa, että 12. Häntä pyydetään kertomaan, mitä ajatteli, kun vastasi 12. Kuvitellaan, että hän osaisi kertoa, että laski yhteen 5 ja 7 ja näin sai 12, todennäköisesti hän ei olisi vastannut alunperinkään väärin. Lapsen ajattelua voisi paremminkin kuvata tähän tapaan: ”Otin vitosen ja seiskan, pyöritin niitä jonkin aikaa mielessäni ja sitten pulpahti jotenkin 12 ja sitten sanoin sen ääneen.” Tämä kuitenkin onnistuu vain harvoin ja vie paljon aikaa. Lapsi ei osaa kertoa tarkasti, mitä hän ajatteli. C. Neményi (2003c) korostaa, ettei erehdyksiltä voida välttyä eikä opettajan ole tarkoituksenmukaista selittää niitä sanallisesti, koska sillä ei voi olla niin vakuuttavaa voimaa kuin lapsen omakohtaisella kokemuksella. Tämän vuoksi se opettaja, joka paheksuu oppilasta virheiden vuoksi tekee vakavan rikkeen oppilasta ja hänen opiskelumahdollisuuksiaan kohtaan. Opettajan tulee iloita virheiden ilmitulosta, sillä se voidaan oikaista uusilla kokemuksilla. Apua voidaan tarjota vain niissä ongelmissa, joista ollaan tietoisia ja jotka lapset tuovat esille pelkäämättä.

Entä jos opettajan mieleen ei pikaisesti tulekaan auttavaa kysymystä? (Varga 1968). Tällöin opettaja voi vastata rauhallisesti, ettei hän ymmärrä, mitä oppilas ajatteli. Se on edullista monesta syystä: Se ei loukkaa lasta. Oppilas arvostaa sitä, että opettaja yrittää ymmärtää häntä. Oppilas voi yrittää selittää. Joku toinen oppilas voi auttaa tekemään oikean kysymyksen. Lopuksi lapset pyrkivät reagoimaan opettajan rehellisyyteen rehellisyydellä. Mutta vain silloin, kun opettaja on tosissaan ja saa lapset temmattua mukaansa. Varga (1976, 173) arveli, että opettajan on vaikea myöntää oppilailleen olevansa väärässä. Opettajan kuuluukin suunnitella opetukseensa virheitä, joita oppilaat saavat korjata. Näin hän itse toimii mallina erehtyvästä ihmisestä.

Tutkimuksessa ”modernin matematiikan vaikutuksista” oltiin kiinnostuneita oppilaiden ongelmanratkaisutaidoista ja luokan sosiometrisesta rakenteesta. Ongelmanratkaisutaitoja tutkittiin uusia, aiemmin kokemattomia asioita ja luovuutta mittaavilla testeillä. Uusien asioiden oppimista selvitettiin Secret Writing, A Test of Information Acquisition and Creative -testillä, kaksiosaisella salakirjoitustehtävillä, jonka alkuosassa oppilaan tehtävänä on keksiä koodi, miten sanojen vokaalit muuttuvat erikoismerkeiksi (uuden oppimisaika). Sovellustehtävänä oli kirjoittaa annettu loru juuri opitulla salakielellä. Testin toisessa osassa oppilaan tehtävänä oli keksiä uusia salakirjoituskoodeja. Oppilaiden aika salakirjoituksen oppimiseksi vaihteli 15–80 minuuttiin. Useimmat oppilaat olivat valmiita 40 minuutissa. Sovellustehtävään oppilaat käyttivät 5–10 minuuttia. Neljäs- ja viidesluokkalaiset koeluokissa oppivat uusia asioita paremmin kuin oppilaat kontrolliluokissa, vain viidesluokkalaisten tulos oli merkitsevästi parempi. (Klein 1987, 191-206). Luovuus määriteltiin sujuvuudeksi, joustavuudeksi ja omaperäisyydeksi, jonka testaamiseksi käytettiin kolmea osaa Torrance’s Test of Creative Thinking –testistä: Ympyröistä oli tarkoitus piirtää kuvio, jonka osana ympyrä on. Lelun tuotekehittelyssä oli tarkoitus kehittää koirasta entistä parempi, hauskempi ja kiinnostavampi. Epätavalliset käyttötavat -testissä lapset keksivät sanomalehdelle, napille ja avaimelle erilaisia käyttötapoja. Luovuuskoe suoritettiin yksilöllisenä kokeena luokalla 3, ryhmäkokeena luokilla 4 ja 5. Luovuustestin pohjalta oli hankalaa tehdä yhtä selkeää merkittävää johtopäätöstä: Kolmasluokkalaiset koeryhmässä olivat merkittävästi luovempia ympyrätehtävissä kuin ikäisensä kontrolliluokkalaiset. Neljäsluokkalaiset olivat merkittävästi omaperäisempiä kuin kontrolliluokkalaiset vain koiralelun tuotekehittelyssä. Viidesluokkalaiset olivat merkittävästi luovempia kuin kontrolliluokkalaiset koiralelun tuotekehittelyssä ja esineiden epätavallisten käyttötarkoitusten keksimisessä. (Klein 1987, 221–224). SIMS-tutkimuksen mukaan unkarilaiset perusopetuksen yläkoululaiset, ammattikoululaiset ja lukiolaiset keskimäärin pitivät eniten taskulaskimella laskemisesta ja yhtälöiden ratkaisemisesta (Klein & Habermann 1988, 38–39).

Alakoulun luokkien sosiometrista rakennetta tutkittiin juuri tätä tarkoitusta varten räätälöidyllä testillä ”Ketkä ovat kolme taitavaa oppilasta luokallasi?”. Tämä yksinkertainen menetelmä valittiin aikarajoituksen vuoksi. Lapsia luokilla 2–5 pyydettiin nimeämään anonyymeina kolme taitavaa (clever) kaveria luokastaan, ei välttämättä niitä, joilla oli parhaimmat arvosanat. Toisen ja kolmannen luokan oppilaat tutkittiin yksilöllisesti, luokat 4 ja 5 ryhmänä. Oppilaiden valintojen pienempi hajonta osoitti lasten oppineen tuntemaan toisensa paremmin koeluokissa kuin kontrolliluokissa. Koeluokissa oli lisäksi yhtenäisempi sosiometrinen rakenne kuin kontrolliluokissa. Klein kehottaa tulkitsemaan näitä tuloksia varovaisesti, koska oppilasryhmän sisäinen paine saattaa suunnata oppilaiden mielipiteitä yhteneviksi. Päivittäinen luokkien havainnointi kuitenkin tuki yllä olevia tuloksia. (Klein 1987, 254–256).

Varga–Neményi -opetusmenetelmässä kuten Suomen matematiikan opetussuunnitelmassa 2004 ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelmassa 2003 korostetaan ongelmanratkaisua matematiikassa, unkarilaiset ja suomalaiset neljäsluokkalaiset kuvannevat kokemissaan matematiikan opetussuunnitelmissa ongelmanratkaisua ja luokan ilmapiiriä erehtymisen, väittelyn ja iloitsemisen näkökulmasta.

3.1.6 Oppilaan kehityksen ja ominaispiirteiden huomioon ottaminen

On otettava huomioon oppilaiden yksilölliset erot (Varga 1969c, 59–60). Tähän tarvitaan näkemyksen muutosta (Varga 1971a, 3–5): Aiemmin opettajia rohkaistiin siihen, että he saattaisivat heikot muiden tasolle – ihmetellään, kun testit osoittavat, ettei tämä ole vieläkään onnistunut. Ongelma kärjistyy vaatimukseen jokaisen mahdollisuudesta kehittää kykyjään maksimaalisesti. Jos lapsi ei ole kypsä algebralle, turhaan piinaamme häntä sillä, jos taas on kypsä, hänelle ei tarvitse vuositolkulla tipoittain annostella suunnilleen yhtä vaikeita asioita. Luokkaopetus piinaa kypsymätöntä ja romuttaa kypsän innon.

Yksilöllisten erojen vuoksi on syytä työskennellä pienryhmissä toimintavälineitä käyttäen Montessori-pedagogiikan esikuvan mukaisesti. Ryhmässä kehitykseltään tasavertaiset lapset pureskelevat tehtävää niin kauan kuin heidän voimansa riittävät (Varga 1971a, 163–165; 1971b, 25–26). Varga (1971a, 165–166) varoitti oppilaiden kankeista ryhmäjaoista, jotka lokeroivat kuten kronologisen iän mukainen ryhmittelykin. Yli kolmekymmentä vuotta sitten Varga (1971a, 166) totesi, ettei tänä päivänä sellainen koulu ole enää utopiaa, jossa oppilas voi itsekin arvioida soveltuvilla testeillä, miten hän edistyy. Esimerkiksi tietokonetta käyttämällä voidaan arvioida kielitaito, eri nopeus- ja vaikeusasteisten puhuttujen tekstien ymmärtäminen, kirjoittaminen ja kieliopin hallinta. Opettajan tuomarin rooli voi sitten lakata olemasta tällaisten menetelmien yleistyttyä. Tästä voi opiskeluilmapiiri ainoastaan parantua. ”Kun opettaja parhaan taitonsa mukaan, järjestelmällisesti, kärsivällisesti ja innokkaasti opettaa luokkaa ja tulokset jäävät odotetuista, niin eikö häneltä vaadita mahdottomia ja hän oppilailta?" kysyi Varga (1971a, 166) ja jatkoi metaforalla: "Miksi oppilaat vetäisivät moniin erikokoisiin jalkoihin yhdenkokoiset kengät? Ja vielä tuomitsemme lapset, jos he eivät osaa liikkua hyvin ahtaissa tai hölskyvissä kengissä! Olisi ihme, jos he viihtyisivät niissä hyvin. Mikä sitten neuvoksi? Valmista lääkettä ei ole olemassa. Etsimme turhaan yhtä ainoaa tietä ratkaisuun, mutta sen teitä kannattaa hakea."

Oppilaiden kehityksen ominaispiirteiden huomioon ottaminen ei ole Varga–Neményi -opetusmenetelmän soveltamisessa ainoastaan menetelmällinen, vaan myös pedagoginen periaate (Oravecz & Kivovics 2005, 26–27). Jotta opetustilanteet olisivat oppilaslähtöisiä, opettajalla on oltava monipuolinen ja hyvä oppilaantuntemus: on tunnettava 6–12-vuotiaan fyysinen ja henkinen kehitys. On oltava perillä myös oppilaan opittavaan asiaan liittyvistä esikäsityksistä. Oppilaan sanavaraston tunteminen on sitä tärkeämpää mitä pienemmästä lapsesta on kyse. Myös lapsen vireystila, tarkkaavaisuus, kyky keskittyä ja persoonallisuuden yksilölliset ominaispiirteet on otettava huomioon. Jokaista oppilasta kehitetään hänen omalla tasollaan. Juuri tämän takia matematiikan opetus on jokaisen oppilaan omakohtaista toimintaa välineillä, ei ainoastaan opettajajohtoista selittämistä ja havainnollistamista. Matematiikan oppimista edistetään monen aistikanavan kautta. Toiminnalliset tehtävät ovat vaihtelevia. Näin opettaja sopeutuu oppilaan kykyyn keskittyä. Oppilas ei yleensä jaksa keskittyä 45 minuuttia, olivatpa aihe ja toiminta miten mielenkiintoisia tahansa. Hän pystyy keskittymään ensimmäisellä luokalla 10–15 minuutin ajan. Neljäsluokkalainenkin – 10-vuotias – kykenee ainoastaan 18–20 minuutin intensiiviseen keskittymiseen. Keskittymistä tuetaan oppimalla leikinomaisesti kehittävien ja konstruktivististen leikkien ja pelien avulla. Opetuksessa käytetään oppilaalle tuttua kieltä ja sanoja. Esimerkiksi matemaattisen termin joukko sijasta puhutaan "ryhmästä" tai "kasasta". Kuusivuotiaalle ei puhuta relaatiosta, vaan pyydetään häntä osoittamaan pitempää, korkeampaa tai vaaleampitukkaista. Oppilasta johdatellaan pikkuhiljaa virallisiin matematiikan termeihin. Hänelle tarjotaan mahdollisuus puhua havainnoistaan ja päätelmistään arkikielellä. Varga (1971b, 25) kehotti opettajaa harkitsemaan pedagogisesti verbalisointia. Kielentämistä viivytetään, jotta hitaillakin oppilailla olisi tilaisuus itse kokea keksiminen eikä vastaanottaa valmista kielellistä ilmausta. Viivytetty verbalisointi auttaa ideaa kypsymään. Kolmanneksi on motivoivaa yrittää päästä selville salaisuudesta, jonka oppilas tietää, mutta ei jaa sitä toisten kanssa.

Oraveczin ja Kivovicsin (2005) perään kuuluttamaa oppilaan fyysistä väsymistä ja tarkkaavaisuutta selvitettiin Kleinin (1987) tutkimuksessa "modernin matematiikan vaikutuksista". Matematiikan oppituntien aiheuttamaa väsymystä tutkittiin oppilaiden reaktioajasta näkö- ja kuuloärsykkeisiin, näkökentän laajuudesta, sydämensykkeestä ja sormien tärinästä. Nämä mitattiin matematiikan oppitunnin alussa aamulla kello kahdeksan ja välittömästi oppitunnin loputtua kello yhdeksän. Löydettiin neljä tilastollisesti merkitsevää eroa koe- ja kontrolliluokkien välillä: Kolme näistä neljästä erosta, sydämensyke toisella luokalla ja reaktioaika näkö- ja kuuloärsykkeisiin viidennellä luokalla osoittivat oppilaiden olevan väsyneempiä kontrolliluokissa. Kun taas yksi ero, sydämensyke kolmannella luokalla osoitti vastakkaista suuntaa: Oppilaat koeluokissa olivat väsyneempiä matematiikan oppitunnin jälkeen kuin kontrolliluokissa. Kokonaisuutena väsymystä mittaavista tuloksista on todettavissa, että oppilaat koeluokissa olivat vähemmän tai yhtä väsyneitä kuin kontrolliluokissa. (Klein 1987, 179–186). Tarkkaavaisuutta eli sitä, miten oppilas keskittyy tehtäviin, tutkittiin Toulouse-Pieronin testillä. Testivihko sisälsi yksitoikkoisia tehtäviä, tehtäväsivulla oli 20 ”korvallista” neliötä. Korvat sijaitsivat neliön sivuilla tai kulmissa. Lasten tehtävänä oli löytää kaksi tietynlaista neliötä joka sivulta. Koe- ja kontrolliluokkien tarkkaavaisuudessa ei ollut merkitseviä eroja ennen ja jälkeen matematiikan tunnin (Klein 1987, 187–190).

Lisäksi oletettiin, että koeluokkien oppilaat eivät ole niin sinnikkäitä rutiinitehtävissä kuin kontrolliluokkien oppilaat, koska koeluokkien matematiikan opetuksessa menetelmien ja materiaalien vaihtelu saattaisi aiheuttaa sinnikkyyden vähenemistä. Sinnikkyyden mittaamiseksi käytettiin unkarilaista mukaelmaa Zazzon ja Stambakin testistä. Testi sisälsi kirjainten, numeroiden ja lauseiden kirjoitustehtäviä ja verbaalisen tehtävän värien nimeämisestä. Kolmas- ja neljäsluokkalaiset olivat oireellisesti vähemmän sinnikkäitä koeluokissa kuin kontrolliluokissa. Viidesluokkalaiset olivat merkittävästi vähemmän sinnikkäitä kuin ikäisensä kontrolliluokissa. Viidennen luokan oppilaiden luovuus oli merkitsevästi yhteydessä heidän sinnikkyyteensä ts. mitä luovempia oppilaat olivat, sitä vähemmän sinnikkäitä he olivat rutiinitehtävissä. (Klein 1987, 249–252). SIMS-tutkimuksen mukaan unkarilaiset perusopetuksen yläkoululaiset, ammattikoululaiset ja lukiolaiset keskimäärin pitivät vaikeimpana teoreemojen todistamista ja sanallisten ongelmien ratkaisemista. Helpointa heistä oli taskulaskimen käyttäminen, ongelmanratkaisun tarkistaminen ja yhtälöiden kuvaajan piirtäminen. (Klein & Habermann 1988, 36–37).

Mahdollisesti suomalaiset ja unkarilaiset perusopetuksen neljännen luokan oppilaat kertovat kokemastaan matematiikan opetussuunnitelmasta, miten heidät otetaan huomioon yksilöinä, koska Varga–Neményi -opetusmenetelmä sekä Suomen ja Unkarin opetussuunnitelmat painottavat yksilöllisyyden huomiointia opetuksessa.

3.1.7 Opettaja ja matematiikan opetus

Matematiikan Varga–Neményi -opetusmenetelmän pitkäaikaiset käyttäjät Oravecz ja Kivovics (2005, 30) esittävät mittavan luettelon, mitä menetelmä vaatii opettajalta käytännössä. Menetelmä edellyttää tunteihinsa valmistautunutta, itseään jatkuvasti kouluttavaa, itsenäisiin päätöksiin kykenevää, luovaa ja askartelevaa opettajaa, jolla on kokemusta eri matemaattisista aihepiireistä ja joka suunnittelee ja järjestää oppilaiden toiminnan tunneille, takaa monien aistihavaintojen kautta tulevat kokemukset, alustaa abstraktion seuraavat askelmat, keksii ja varmistaa toimintavälineiden monipuolisen käytön, mukautuu oppilaiden ilmaisuun, puheen ymmärtämiseen, ottaa kauaskantoisesti huomioon oppilaiden kehityksen ominaispiirteet, sallii keskustelun ja luo iloisen ilmapiirin. Oravecz ja Kivovics tunnustavat, että monikaan ei mielellään ryhdy tähän ihanaan, mutta todella uuvuttavaan työhön. Onko tämä menetelmä muista poikkeava? Opettajalla on samat haasteet menetelmässä kuin menetelmässä, aineessa kuin aineessa ja koko kasvatustyössään, jos hän paneutuu työhönsä vastuuntuntoisesti. Opettajan on kuitenkin tarpeetonta uuvuttaa itseään äärimmilleen esimerkiksi askartelemalla toimintavälineitä parille kymmenelle oppilaalle. On oivallettava, että matematiikkaa on kaikkialla omassa kehossa ja ympäristössä. Tähän oivallukseen tarvitaan matematiikan aineenhallintaa. Opettajan työn vaikeimpia tehtäviä kenties on ohjaaminen, joka ikään kuin huomaamatta ”johdattaa” oppilaat itse oivaltamaan matematiikan tosiasioita ja rakentamaan niitä omakohtaisen kokemuksen pohjalta, näin C. Neményi (2002, 5–6) haastaa opettajia konstruktivistiseen opettamiseen.

Suunnatkaamme nyt huomio Vargan (1976, 172) silmin matematiikkaan, jota ala-asteen opettajat tarvitsevat. Tärkeä kysymys on *Kuinka paljon matematiikkaa?* Matematiikkaan erikoistumattomalta luokanopettajalta, jolle matematiikka on yksi kahdeksasta (kirjoittajan huomautus, tarkoitetaan perusopetuksen alakoulua Unkarissa) opetettavasta aineesta, ei voida odottaa, että hän peruskoulutuksessaan omistautuisi matematiikkaan ajallisesti paljon. Matematiikkaan erikoistuvan luokanopettajan koulutuksessa tilanne on toinen. Matematiikkaan erikoistuneen luokanopettajan koulutus ei kuitenkaan ole aineenopettajan koulutuksen veroinen. Hänen lyhyemmästä koulutuksestaan matematiikassa ei kuitenkaan välttämättä ole haittaa, koska matematiikan aineenopettajan suurin ansa on nähdä opettamansa aine itse tarkoituksena. Tämän tilanteen voi yleisopettaja välttää paremmin kuin matematiikan spesialisti. Opettajankoulutuksessa on sekä kognitiivinen että affektiivinen ulottuvuus. Olennaista on Vargan lukeman kirjallisuuden ja henkilökohtaisen kokemuksen perusteella, että koulutus ohjaa matematiikan ja lapsen (hänen ajattelutapansa) ymmärtämiseen ja rakastamaan matematiikkaa ja lasta (lapsi hyväksytään puutteineen). Kumpikaan näistä ei ole korvattavissa kohtuullisesti millään muulla, vaikka joitakin puutteita voidaan kompensoida. (Varga 1976, 172). Tämän edesmenneen unkarilaisen matemaatikon näkemykset opettajan tehtävistä ja opettajankoulutuksesta pätevät vieläkin. Oppilaat aistivat, jos opetettava aine on opettajalle vastenmielinen tai jos hän on siinä epävarma. Varsinkin pienet lapset ilmaisevat aistimuksensa esimerkiksi hälisemällä tai osoittamalla muuten, ettei heitäkään innosta.

Myös opettajan pätevyyttä Varga (1976, 172) pohti: Kunnianhimoisen ja itseään kunnioittavan matematiikan opettajan ja oppilaiden ymmärtämisessä on suuri ero, mutta eron laajuutta opettaja voi vähentää. Kuitenkin matematiikkaan erikoistuneella opettajalla saattaa todennäköisesti olla kunnianhimoisia tunteita, jos ero pienentyy liiaksi tai jopa kääntyy päinvastaiseksi. Opettaja lienee tavallisesti vähemmän valmis myöntämään oppilailleen olevansa väärässä. Hän ei ole valmis myöntämään, että hänellä on puutteita tiedoissa silloin, kun hän itse on koulutettavana. Erikoistumattomalle opettajalle molemmat ovat helpompia. Yksi vaikuttavimmista kokemuksista 13 vuoden pilottikokeilun aikana Unkarissa on ollut se, että erikoistumattomat opettajat ovat olleet etulyöntiasemassa aineenopettajiin nähden molemmissa asioissa. Sananlasku *alku aina hankalaa* ei ole pätenyt matematiikan opetuksen uudistukseen Unkarissa. Alussa erikoistumattomien luokanopettajien kanssa oli vähemmän ongelmia kuin jatkossa aineenopettajien kanssa. Onko se paikallinen ilmiö paikallisine seurauksineen? Vai onko siinä jotain yleisempää takana? Voiko matematiikalle tulla immuuniksi? Vai ovatko näennäismatematiikka ja näennäisopetus niitä, jotka tekevät epäkiitollisen palveluksen matematiikan opetuksen kehittämiselle? Ainoa varaus on, että edelliset lauseet ovat liian dikotomisia, huomautti Varga (1976, 172) pohtiessaan matematiikan opetuksen kehittämistä. Kleinin ja Habermannin (1988, 28–31, 48) tutkimuksen mukaan unkarilaiset aineenopettajat olivat stressaantuneita, alipalkattuja ja ei-tarkoituksenmukaisesti koulutettuja. Nämä seikat estivät matematiikan opetuksen uudistumista. Opettajien ammatillisen aseman ja työolosuhteiden pitäisi muuttua huomattavasti, jotta opettajat haluaisivat vapaaehtoisesti kouluttautua, parantaa opetusmenetelmiään ja saada oppilaansa pitämään matematiikasta.

Siirtykäämme Vargan esittämään toiseen edellistä tärkeämpään kysymykseen: *Millaista matematiikkaa* tulisi luokanopettajien koulutuksessa opettaa? Varga (1976, 173–174) pahoitteli opettajankoulutusideansa karkeutta, epämääräisyyttä ja jäykkyyttä. Hänen ideansa opettajankoulutuksesta oli, että koulutettava pyrkisi keksimään matemaattisen mallin jostakin avoimesta tilanteesta ja käyttämään sitä. Koulutettavan tavoitteena olisi esitellä mallinnuksensa, tehdä siitä piirros, suunnitella siihen liittyvä eksperimentti ja arviointi. Varga piti opettajien tietoisuutta matemaattisesta mallintamisesta tärkeämpänä kuin valmiiden harjoitusten ratkaisemista paperilla. Havainnollistaakseen mallintamista opettajankoulutuksessa Varga (1976, 174–176) kuvasi käytännönläheisesti, miten loogisilla paloilla voidaan mallintaa kolmiulotteista tilaa. Loogiset palat ovat vieläkin lasten toimintavälineitä matematiikan oppitunneilla joissakin Unkarin kouluissa. Loogisten palojen pedagoginen kehittäjä on ollut mm. Dienes ja lähes vastaava versio loogisista paloista on myös Vygotskyn kehittämänä.

Lapset pitävät Vargan (1976, 176–177) mukaan todennäköisesti matematiikasta, jos heidän opettajansa pitää siitä. Matematiikkailon lähteenä voivat olla matematiikkavitsit, ongelmat, paradoksit, kysymysten ja vastausten ihmettely ja ajanvietepelit. Monia niistä löytyy kirjoista ja lehdistä, monet niistä ovat kansanperinnettä, joka siirtyy vanhemmilta lapsille tulevaisuudessa. Historiallisesti katsottuna paljon nykyisestä matematiikasta on virinnyt tällaisista lähteistä. Ajanvietepelit viihdyttävät lapsia sekä älyllisesti että emotionaalisesti.

Käytännön luokkatilanteiden työtavoiksi Varga (1969c, 59–65) suositteli oppilaiden itsenäistä työskentelyä yksilöllisesti ja pienryhmissä. Oppilaiden itsenäistä työskentelyä ohjataan erilaisilla toimintavälineillä tai työkorteilla. Hän uskoi, että oppilaiden itsenäinen työskentely edistyy, jos oppilaille tarjotaan mahdollisuus valita matematiikan tehtävänsä. Opettajalla, joka ohjaa oppilaiden itsenäistä työskentelyä, on erilaiset tehtävät kuin perinteisellä opettajalla. Opettajan on varattava sekä nopeille että hitaille oppilaille kykyjenmukaisia tehtäviä. Oppilaansa opettaja oppii tuntemaan paremmin, silloin kun oppilaat työskentelevät yksilöllisesti tai pienryhmissä kuin silloin, kun heille puhutaan opettajan pöydän takaa. Koko luokan työskentelyä käytetään peleissä ja kilpailuissa. Liitutaulua saatetaan käyttää tilanteissa, joissa taululle kerätään erilaisia vastauksia oppilaiden havainnoitaviksi ja pohdittaviksi.

3.1.8 Kooste Varga–Neményi -opetusmenetelmästä

Opetusmenetelmän tärkein periaate on *todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen.* Tavoitteena on, että lapsi hankkii fyysisiä kokemuksia loogis-matemaattisten kokemusten perustaksi. Tällöin lapsella on mahdollisuus omakohtaisesti havaita kahden toiminnan samankaltaisuus, kuten mitatessaan leikkinallen pituuden päästä tassuihin ja päinvastoin. Jotta lapsi oppisi näkemään matematiikkaa ympärillään ja kytkemään matematiikan sisältöjä arkielämäänsä pysyvästi ja käyttökelpoisesti, hän tarvitsee pitkäkestoista, tavoitteellista ja monipuolista ohjausta. Periaate *abstraktion tie* on metafora lapsen käsitteen oppimisen vaiheista, jotka etevät kehollisista kokemuksista väline- ja kuvavaiheen kautta abstraktisiin ja symbolisiin loogis-matemaattisiin kokemuksiin. *Abstraktion tien* liikenne on kaksisuuntaista objekteista symboleihin ja päinvastoin. Näin pyritään ehkäisemään oppimisvaikeuksia. Lapsen matematiikan oppimisprosessia voidaan tukea vaiheittain etenevällä toiminnalla vapaasta leikistä sen formaaleihin sääntöihin. Toimintavälineiden runsas käyttö matematiikan opetuksen periaatteena pyrkii luomaan lapselle mielikuvia, joiden tarkoituksena on edistää opittavan käsitteen abstrahoitumista ilman konkreettisia toimintavälineitä.

Laajan ja yhtenäisen käsitteiden pohjustuksen tavoitteena on lapsen monipuolisen matemaattisen ajattelun kehittäminen. Matemaattisella ajattelulla tarkoitetaan perusopetuksen vuosiluokkien 3–5 opetussuunnitelman pohjalta sitä, että lapsi osoittaa ymmärtävänsä käsitteet ilmaisemalla niitä eri esitysmuotojen avulla ja käyttämällä niitä ongelmanratkaisussa. Esitysmuodoilla tarkoitetaan matemaattisen käsitteen mallintamista välineillä, piirroksilla, kielellisesti ja symboleiden avulla. Matemaattinen ajattelu tarkoittaa myös reaalimaailman tilanteen matematisointia vertailemalla, luokittelemalla, järjestämällä, konstruoimalla ja mallintamalla symboleiden avulla. Pedagogisen periaatteen *lupa erehtyä, väitellä ja iloita* tarkoituksena on edistää myönteistä oppimisilmapiiriä, jossa erehtyminen on oppimisen luonnollisen seuralainen. Oppimistilanteiden oppilaslähtöisyys perustuu opettajan syvälliseen oppilaantuntemukseen ja lapsen loogis-matemaattisen ajattelun yksilöllisen kehityksen tiedostamiseen. Kun matematiikan Varga–Neményi -opetusmenetelmä ymmärretään ”moderniksi matematiikaksi” 1970-luvun alun ilmaisua käyttääksemme, niin sillä on jokseenkin myönteisiä vaikutuksia matematiikan oppimiseen Kleinin (1987) tutkimuksen perusteella. Toimiakseen unkarilainen Varga–Neményi -opetusmenetelmä edellyttää opettajalta sitoutumista elinikäiseen oppimiseen, oppilaslähtöisyyttä, taitoa konkretisoida matematiikan käsitteitä, oppilaantuntemusta ja opetuksen suunnittelua aineenhallinnan lisäksi. Suotuisa opettajankoulutus ohjaa sekä ymmärtämään matematiikkaa ja lasta että rakastamaan matematiikkaa ja lasta.

3.2 Matematiikan opetusta suomalaisittain

Tämän luvun tarkoituksena on luonnehtia suomalaisen matematiikan opetuksen piirteitä alakoulussa, koska kolmantena tutkittavana oppilasryhmänä on suomalainen perusopetuksen neljäs luokka. Sen opetuksessa ei ole käytetty unkarilaista Varga–Neményi -opetusmenetelmää.

Toisaalta tämä luku kuvaa tämän tutkimuksen tekijän pedagogista taustaa, jolta unkarilaista opetusmenetelmää on sovellettu. On huomattava, että tämän tutkimuksen tuloksena saatavat suomalaisen Varga–Neményi -ryhmän oppilaiden kokemukset matematiikasta perustuvat opettajansa unkarilaisen opetusmenetelmän ensimmäisiin kokeiluvuosiin. Siksi taustan tarkastelu on perusteltua. Tässä luvussa muista luvuista poiketen käytetään vain suomalaisten teoksia. Ne välittävät suomalaisten käsityksiä matematiikan opetuksesta. Niillä on kansainvälinen tausta, johon viitataan asianomaisessa yhteydessä.

Suomalaisesta matematiikan opetuksesta tarkastellaan ensin mahdollista opetussuunnitelmaa opetuksen ohjaajana, sitten varsinaisia opetusmenetelmiä, ongelmanratkaisua, tosi-matematiikkaa ja tarinankerrontaa, story tellingia, opetusmenetelmänä. Lopuksi koostetaan matematiikan opetusta suomalaisittain ja verrataan sitä Varga–Neményi -opetusmenetelmään.

3.2.1 Mahdollinen opetussuunnitelma opetuksen ohjaajana

Matematiikan oppikirjat ja toimintavälineet ymmärretään tässä tutkimuksessa mahdollisena opetussuunnitelmana (ks. kuviota 1.1 johdannossa). Suomalaista matematiikan opetusta perusopetuksessa, erityisesti alakoulussa, pidetään oppikirjasidonnaisena (Kupari 1999, 154–155; Maijala tulossa; Niemi 2001; 2004, 165; Pehkonen E. & Rossi 2007, 143–144; Pehkonen, L. & Krzywacki-Vainio 2007, 158–159; Perkkilä 2002, 170–172; Perkkilä & Lehtelä 2007, 74–75; Pietilä 2002, 144–147; Törnroos 2004, 32, 218). Toisaalta suomalaisessa matematiikan pedagogisessa kirjallisuudessa sekä opettajien perus- ja täydennyskoulutuksessa on ollut pitkään toimintavälineiden puolesta puhujia (Häggblom 2006; 43–49; Ikäheimo 1995; Ikäheimo, Aalto & Puumalainen 1998; Ikäheimo & Näätänen 1995, 74–87; Ikäheimo & Risku 2004, 222–230; Ilmavirta 1995, 61–69; Lindgren 1990; 2004; Pehkonen 1989; Perkkilä 2002, 36–42; Pietilä 2002, 40–43). Niemen (2004, 166) mukaan koulun opetussuunnitelmat eivät vielä ole vieneet oppikirjojen asemaa opetuksen suunnittelun perustana, sillä 53,1 prosenttia tutkituista kuudennen luokan opettajista oli edelleen sitä mieltä, että oppi- ja työkirjat antavat paremman perustan opetuksen suunnittelulle ja toteutukselle kuin koulun opetussuunnitelma. Näillä perusteilla tarkastelen alakoulun matematiikan neljännen luokan oppikirjojen opettajanoppaita ja toimintavälineiden käyttöön ohjaavaa pedagogista kirjallisuutta, koska ne ohjannevat luokanopettajan pedagogisia ratkaisuja käytännön tilanteissa.

3.2.1.1 Oppikirjojen opettajanoppaiden pedagogiikkaa

Tarkastelu perustuu seuraaviin opettajanoppaisiin: Salonen, Sintonen, Uus-Leponiemi ja Ilmavirta (2005) Laskutaito 4 syysosan opettajan kirja; Lilli, Putkonen ja Sinnemäki (2003) Matikkamatka syksyn opettajan opas 4; Vähäpassi, Hänninen ja Pietilä Mieti ja laske syksyn (2001) ja kevään (2000) opettajan kirja 4 sekä Asikainen, Fälden, Nyrhinen, Rokka ja Vehmas (2004) Tuhattaituri 4a opettajan opas. Jatkokäsittelyssä opettajanoppaista käytetään kirjasarjan nimiä, Laskutaito, Matikkamatka, Mieti ja laske sekä Tuhattaituri. Kustantajien (WSOY, Tammi ja Otava opettajanoppaita vastaavassa järjestyksessä) mukaan ne ovat ainoat markkinoilla olevat alakoulun matematiikan oppikirjat neljännelle luokalle kullakin kustantajalla. Mieti ja laske on poistumassa Tammen tuotannosta, sen seuraaja on Matikkamatka. On huomattava, että kustantajilta on tulossa uusia sarjoja, mutta ne eivät ole vaikuttaneet tämän tutkimuksen suomalaisten neljäsluokkalaisten oppilaiden kokemuksiin matematiikasta. Ne rajataan täten tarkastelun ulkopuolelle.

Tarkastelen vain perusopetuksen neljännen luokan oppikirjojen opettajan oppaita tutkimusaiheen vuoksi. Alempien luokkienkin kirjat oppaineen lienevät vaikuttaneet opettajan työskentelyn kautta oppilaiden kokemuksiin. Kunkin alakoulun kirjasarjan opettajanopas pysyy pääsääntöisesti sisällöltään ja rakenteeltaan samanlaisena vuosiluokasta riippumatta. Tarkastelun kohteeksi rajataan opettajan oppaiden pedagoginen osio, jonka oletetaan antavan viitteitä matematiikan opetuksesta suomalaisittain. On huomattava, ettei ole tarkkoja tutkimuksia opettajien oppikirjojen ja niiden oppaiden käytöstä.

Opettajanoppaiden yleiskuvauksen jälkeen tarkastellaan oppimiskäsitystä, matemaattista sisältöä, oppitunnin rakennetta, työtapoja, toiminta- ja havainnollistamisvälineitä, eriyttämistä ja arviointia. Lopuksi on kooste opettajanoppaiden pedagogiikasta.

Opettajanoppaiden yleiskuvaus: Laskutaidon opettajanoppaassa on kolme sivua A4–kokoista kaksipalstaista sivua johdantoa, joka on ymmärrettävissä kirjasarjan pedagogiseksi perustaksi. Matikkamatkassa pedagoginen osuus on otsikoitu ”Matematiikan oppimisen ja opetuksen painoalueita”. Sitä on 11 A4–kokoista sivua, joiden palstoitukset vaihtelevat. Mieti ja laske –kirjan opettajan oppaassa on yhdeksän A4–kokoista kaksipalstaista sivua matematiikan pedagogiikkaa. Kullakin sivuaukeamalla on oma itsenäinen otsikkonsa. Tuhattaiturissa on yleistä pedagogista perustaa otsikolla ”Tuhattaiturin opettajan opas” vajaa A4-kokoinen sivu, jonka kirjasinkoko on pienempi kuin kirjan jatkosivuilla. Kaikki opettajanoppaat rakentuvat aukeama-periaatteelle, jossa on pienennös oppilaan kirjan vastaavasta aukeamasta. Pienennöksen ympärillä on yleensä tavoitteet, matemaattisen sisällön käsittely, harjoituksia oppilaille, päässä- ja vihkolaskuja ja pohdittavaa. Tuhattaituri (2004) tarjoaa kehyskertomuksen jokaiselle oppitunnille, jonka tarkoituksena on virittää oppilaat pohtimaan opittavaa asiaa ja liittää matematiikkaa arkielämään. Kehyskertomukset liittyvät juonellisesti toisiinsa. Tuhattaiturissa ohjataan oppikirjan kuvan tarkasteluun kysymyksin, minkä tarkoituksena on kiinnittää oppilaiden huomio keskeisiin asioihin ja nivoa matematiikkaa käytäntöön.

Oppimiskäsitys: Laskutaito (2005, 4) ohjaa matematiikan opetusta kognitiivisen oppimiskäsityksen mukaiseen aktiiviseen ja ymmärtävään oppimiseen. Tavoitteina on varman laskutaidon lisäksi matemaattisen ajattelun, päättelykyvyn, ongelmaratkaisutaitojen ja luovuuden kehittäminen. Varma laskutaito ja perusta uusien matemaattisten tietojen ja taitojen oppimiselle saavutetaan ymmärtävän oppimisen ja oikein mitoitetun harjoittelun avulla. Lapsen tulee saada monipuolisia kokemuksia opittavasta asiasta eri aistien välityksellä ja itse aktiivisesti toimien. Näin hän pystyy oppimaan ja muodostamaan itselleen toimivia ja hyviä ajattelumalleja. Näiden mallien eli skeemojen muodostumiseen tarvitaan sekä konkreettisia välineitä että suullista kommunikaatiota. Siksi Laskutaidossa on runsaasti ehdotuksia suullisiin ja toiminnallisiin harjoituksiin.

Matikkamatkassa (2003, 3) oppilas nähdään aktiivisena tiedon käsittelijänä ja tallentajana. Käsitteiden syvällisen ymmärtämisen ja harjoittelun kautta saavutetaan varma laskutaito ja kyky jatkaa matematiikan omaksumista. Oppimistilanteet pyritään rakentamaan keskustelunomaisiksi, kokeileviksi ja ongelmakeskeisiksi. Oppimisessa käytetään toiminnallisia menetelmiä. Oppimisen lähtökohtana on oppilaalle tuttu arkielämä.

Mieti ja laske (2001, 4) nimeää eksplisiittisesti konstruktiivisen oppimiskäsityksen teoreettiseksi lähteekseen Erik de Corten. Oppiminen on konstruktiivista, jolloin oppijat ovat aktiivisia tietojensa ja taitojensa rakentajia ja kartuttajia. Oppimisprosessi on aktiivinen, koska se vaatii kognitiivista prosessointia. Se on myös mielekästä ja ponnisteluja vaativaa. Oppiminen on kumulatiivista, koska aiemmin opittu vaikuttaa tulevan oppimiseen. Oppiminen on itseohjautuvaa, johon kuuluu valmius uuden oppimiseen, oppimisen säätely, itsearviointi ja kurinalaisuus. Näin korostetaan metakognitioiden merkitystä oppimisessa. Oppiminen suuntautuu tavoitteisiin. Oppilaan tietoisuus tavoitteesta ja niihin suuntautuminen edistää laadukasta oppimista. Oppiminen on tilanteittaista, koska olennaisilta osiltaan oppilas oppii sosiaalisessa ja kulttuurisessa kontekstissa. Oppiminen on yhteistoiminnallista. Oppilailla tulee olla mahdollisuus vaihtaa ajattelutapojaan ja tietojaan sekä kokeilla ideoitaan ikäistensä kanssa. Tämä vuorovaikutus edistää oppilaan oman ajattelun tiedostamista.

Tuhattaiturissa ei ole eksplisiittisesti esitetty käsitystä oppimisesta.

Matemaattiset sisällöt opettajanoppaissa esitellään joko oppaan alussa olevassa pedagogisessa osuudessa tai sisällysluettelossa. Matemaattiset sisällöt jätetään käsittelemättä tässä yhteydessä. Laskutaito 3 ja 6, Matikkamatka 3 ja 6 sekä

Tuhattaituri 3 ja 6 on arvioitu sisällöltään ja tavoitteiltaan Perusopetuksen opetussuunnitelman 2004 mukaisiksi Hämeenlinnan luokanopettajakoulutuksen yksikössä käynnissä olevassa Matematiikan Oppimateriaalin Tutkimuksen projektissa (MOT-projektissa) (Joutsenlahti & Vainionpää 2007). Todennäköisesti myös neljännen luokan matematiikan kirjat ovat opetussuunnitelman mukaisia. Ikävystyttävältä toistolta välttyäksemme neljännen luokan tavoitteet ja sisällöt ovat luettavissa luvusta 4. On huomattava, että Mieti ja laske on todennäköisesti vuoden 1994 Peruskoulun opetussuunnitelman mukainen. Siksi se on poistumassa käytöstä. Tämän tutkimuksen kannalta se on kuitenkin merkittävä, koska se on sekä tämän tutkimuksen tekijän että toisen suomalaisopettajan kirjahyllyssä ja molempien koulukirjastossa. Käytettynä oheismateriaalina se lienee yhteydessä tutkittujen suomalaisoppilaiden kokemuksiin matematiikasta.

Oppitunnin rakenne: Laskutaidossa ja Matikkamatkassa ei esitetä ehdotusta oppitunnin rakenteeksi. Tuhattaiturissa (2004) esitetään ehdotus jokaiselle oppitunnille (kuvio 3.2.1.1.1).

EHDOTUS TUNNIN KULUKSI

1. KEHYSKERTOMUS
2. KUVAN TARKASTELU
3. PÄÄSSÄLASKUT
4. TOIMINTA
5. TAULUTYÖSKENTELY
6. OPPIKIRJAN TEHTÄVÄT

KUVIO 3.2.1.1.1 Oppituntiehdotus (Tuhattaituri 2004)

Mieti ja laske -opas (2001, 5) suosittelee, että uusi asia opiskellaan opettajajohtoisesti koko luokan opetuksena, toiminnallisesti ja konkreettisesti. Opettajajohtoista tuokiota seuraa parityöskentely, jossa oppilas selostaa tehtävänratkaisua. Parityöskentelyä seuraa yksilöllinen työskentely oppikirjan tehtävien parissa. Ne silloin tällöin korvautuvat opittua harjoittavilla peleillä.

Työtavoista: Laskutaito (2005, 4) ei sido eikä rajoita opetusmenetelmien valinnassa. Se rohkaisee käyttämään erilaisia työtapoja. Opas tarjoaa pari- ja ryhmätyöskentelyyn sopivia pelejä, leikkejä ja toiminnallisia harjoituksia. Ongelmatehtäviä suositellaan tehtäväksi erityisesti yhdessä työskennellen. Matikkamatkassa (2003, 7) korostetaan leikkejä, pelejä, yhteistoiminnallisia ja kommunikointitaitoja. Kommunikoitaessa tulkitaan ja esitetään matemaattista tietoa suullisesti, kirjallisesti ja kuvin. Oppaassa ei mainita työtapoja. Mieti ja laskekin (2001, 5) rohkaisee monipuolisten työtapojen käyttöön: Uusi asia opiskellaan koko luokan kanssa yhdessä, mitä seuraa parityö ja yksilöllinen työskentely eriyttävien tehtävien parissa. Tuhattaituri (2004, 2) jättää työtavat opettajan ratkaistavaksi, mutta pulmakulman tehtäviä suositellaan ratkaistaviksi yhdessä keskustelemalla tai pienissä ryhmissä pohdittaviksi. Vinkkipankki tarjoaa usein yhteistoiminnallisia ideoita opetukseen.

Toiminta- ja havainnollistamisvälineet: Laskutaidon (2005), Matikkamatkan (2003), Mieti ja laske (2000; 2001) sekä Tuhattaiturin (2004) opettajanoppaassa nähdään suotuisaksi konkretisoida ja havainnollistaa abstraktista ja käsitteellistä matematiikkaa oppilaan omilla ja opettajan käyttämillä välineillä. Laskutaidon (2005, 4) mukaan jokainen oppilas tarvitsee lukukortit 0–20, jotka ovat oppilaan kirjan lopussa. Jokaisella oppilaalla tulisi olla pari noppaa pelejä varten. Kertolaskua varten tulisi varata konkreettisia esineitä, kuten nappeja, palikoita tai makaroneja. Viivainta tarvitaan mittaamiseen ja piirtämiseen. Geolautaa pidetään hyödyllisenä välineenä. Purkkeja ja laatikoita tarvitaan geometriassa. Matikkamatkassa (2003, 10) perustellaan oppimisvälineiden käyttöä seuraa-vasti: Konkreetti toiminta muodostaa matematiikan oppimisen perustan. Välineiden systemaattinen ja jatkuva käyttö edellyttää, että ne ovat helposti saatavilla luokassa. Oppaassa eritellään lukujen ja laskutoimitusten havainnollistamiseen, peleihin ja mittaamiseen tarvittavia välineitä. Mieti ja laske -oppaassa (2001, 6) kehotetaan mallintamaan käsitteitä eri tavoin: Toiminnallisina malleina käytetään palikoita, kymmenjärjestelmävälineitä tai oppilasryhmiä. Kuvallisena mallina toimivat esimerkiksi lukusuorat, piirrokset ja ruutumallit. Symbolisessa mallissa käsitteitä havainnollistetaan abstraktisten symbolien avulla. Mieti ja laske -sarja tarjoaa ostettavaksi matikkapaketin, jossa on geolauta, tangram-palat, nopat ja kymmenjärjestelmävälineet. Tuhattaiturissa (2004, 2) viitataan lyhyesti opettajan oppaan tunneittain eteneviin ohjeisiin nimellä ”Seuraava tunti”, jossa kerrotaan seuraavalla tunnilla tarvittava materiaali. Tuhattaiturin oppikirjoihin sisältyy kullekin oppilaalle kirjekuori, joka sisältää mm. lukukortit, sataruudukon, koottavan kuution, metrinmitan, sinipunakiekkoja, hajotuskoneen, pelimerkkejä ja eurot. Nämä toimintavälineet vaihtelevat vuosiluokkien sisältöjen mukaan.

Ajatteleminen: Mieti ja laske (2001, 11) nimensä mukaisesti korostaa ajattelemista Sternbergin ajattelun lajeihin viitaten. Ne jaetaan analyyttiseen, käytännölliseen ja luovaan ajatteluun. Analyyttisen ajattelun avulla etsitään samankaltaisuuksia, eroja, vertaillaan ja arvioidaan. Käytännöllisen ajattelun kohteena ovat sovellukset arkipäivän tilanteisiin. Luova ajattelu tarkoittaa taitoa ratkaista uudella tavalla jäsennettäviä tehtäviä, poiketa totutuista säännöistä ja keksiä uusia lähestymistapoja. Ajattelun tavat luokitellaan kolmeen ryhmään: sanalliseen, määrälliseen ja kuvalliseen. Sanallisessa tehtävässä eritellään sanojen merkityksiä ja merkitysten suhteita. Kuvallisissa tehtävissä tarkastellaan kuvioita ja tulkitaan niiden sisältämää informaatiota. Määrällisissä tehtävissä käsitellään lukuja ja numeroita.

Eriyttäminen: Laskutaidossa (2005, 4–5) otetaan huomioon tukiopetusta tarvitsevat oppilaat tarjoamalla tukiopetustehtäviä opettajanoppaan liitteissä ja erillisessä tukiopetuspaketissa. Nopeille ja lahjakkaille on oppilaan kirjan perusaukeamiin merkitty kettusymbolilla haastavia tehtäviä, opettajan oppaan liitteissä on eriyttämistehtäviä, jotka on merkitty L- tai XL-symbolilla. Matikkamatka (2003, 7) ohjaa arvioinnin pohjalta käynnistämään korjaavia toimia, kuten lisäharjoittelua koko luokan kanssa ja etukäteen, samanaikaisesti tai jälkikäteen annettavaa tukiopetusta. Hyvin suoriutuville oppilaille suositellaan haastavia lisätehtäviä, oman kirjan työstämistä ja kerhoa. Mieti ja laske (2000) tarjoaa vapaaehtoisia valinnaisia sivuja lisäharjoitukseksi tai haasteellisia syventäviä tehtäviä edistyneimmille kunkin viikkojakson lopussa. Tuhattaiturissa (2004) on jokaisen perusasioita käsittelevän aukeaman jälkeen vapaavalintaisia lisätehtäviä aukeaman verran nopeille ja taitaville oppilaille. Opettajanoppaassa on myös monistettavaa lisämateriaalia. Ongelmanratkaisu on huomioitu kaikissa neljässä opettajanoppaassa.

Arviointi: Laskutaitoon (2005) liittyy erikseen ostettavat kokeet seitsemään summatiiviseen arviointiin. Kokeista on samantasoiset A- ja B-versiot, joita voidaan käyttää rinnakkain tai vuorovuosina. Opettajanoppaan liitteissä on monistettavat formatiiviset kokeet ja oppilaan itsearvioinnit osaamisesta ja asenteista. Matikkamatkassa (2003, 7) korostetaan oppimisen jatkuvaa seurantaa, monipuolista, yksilöllistä ja ryhmäarviointia. Oppilas arvioi osaamistaan ja asenteitaan. Oppilasryhmää ohjataan ryhmän sisäiseen vertaisarviointiin. Mieti ja laske (2000, 7) tarjoaa opettajanoppaassa summatiiviset kokeet, lähtötason arviointiin voidaan käyttää rappu-kopiointipohjia ja kertaussivuja formatiiviseen arviointiin. Itsearviointi ohjaa oppilasta arvioimaan osaamistaan ja asenteitaan. Oppilaan itsearviointeja ja töitä neuvotaan keräämään salkkuun portfolioksi, jolla syvennetään ja laajennetaan itsearviointia. Tuhattaiturissa (2004) on opettajanoppaasta monistettavat kokeet summatiiviseen arviointiin oppikirjan jokaisesta jaksosta. Oppilaan kirjassa jokainen jakso päättyy Mitä osaan? -aukeamaan, jossa jokaisen tehtävän vieressä on helposti tehtävä itsearviointi osaamisesta. Aukeamaa voidaan käyttää myös formatiivisena kokeena.

Koonta: Laskutaidon (2005), Matikkamatkan (2003), Mieti ja laske (2000; 2001) sekä Tuhattaiturin (2004) opettajanoppaat ovat samanrakenteisia noudattaen aukeama-periaatetta, josta on helposti löydettävissä käytännön opetuksessa tarvittavia näkökulmia. Sen tarkoituksena on keventää luokanopettajan työmäärää. Luokanopettaja opettaa yleensä useimmat neljännen luokan oppiaineista. Opettajanoppaiden pedagogisen sisällön määrä vaihteli vajaasta A4-sivusta 11 sivuun. Kolmessa opettajanoppaassa oli julkistettu oppimiskäsitys, johon kirjasarja pohjautuu. Matemaattiselta sisällöltään oppikirjat arvioitiin perusopetuksen opetussuunnitelman mukaisiksi. Kaikki opettajanoppaat olivat yksimielisiä toiminta- ja havainnollistamisvälineiden merkityksestä 10-vuotiaiden neljäsluokkalaisten matematiikan opetuksessa. Kahdessa opettajanoppaassa ohjattiin oppitunninrakennetta. Kolme opettajanopasta suosittaa pedagogisessa osuudessaan käytettäviksi monipuolisia työtapoja matematiikan opetuksessa, neljäs tunneittain etenevillä aukeamilla. Eriyttäminen on otettu huomioon kaikissa opettajanoppaissa. Niin ikään kaikki opettajanoppaat tarjoavat materiaalia oppilasarviointiin ja oppilaiden osaamisen itsearviointiin. Kolmessa opettajanoppaassa ohjattiin oppilasta arvioimaan myös asennettaan matematiikkaan ja sen oppimiseen.

Opettajanoppaat ovat luonnehdittavissa painotusten vuoksi seuraavasti: Laskutaito laskutaitojen varmentajaksi, Matikkamatka käsitteiden opettajaksi, Mieti ja laske ajatteluttajaksi ja Tuhattaituri tarinoiden kertojaksi.

3.2.1.2 Toimintavälineet matematiikan opetuksessa

Toimintavälineet matematiikan opetuksessa tarkoittavat materiaalin avulla oppimista siten, että oppilaat yksin, pareittain, pienryhmissä tai koko luokkana tutkivat, kokeilevat ja konkretisoivat. Näin oppilas nähdään aktiiviseksi oppijaksi, joka rakentaa matemaattisia käsitteitä tutkien ja kokeillen. Tällöin opetuksessa suositaan toiminnallisia tehtäviä välineineen. Ne matemaattisine käsitteineen tarjoavat oppilaille mahdollisuuden pohtia ja selvittää tilannetta. Työskennellessään yhdessä oppilaat tutustuvat erilaisiin strategioihin samaan lopputulokseen pääsemiseksi. Näin he saattavat väitellä strategioiden käyttökelpoisuudesta, mikä kehittää matemaattisen ajattelun kielentämistä (puhumista) ja sosiaalisia taitoja. Ratkoessaan ongelmaa toimintamateriaaleilla oppilaat huomaamattaan pohtivat todellisuuden ja matemaattisen mallin välistä riippuvuutta.

Toiminnallinen matematiikka pohjautuu osaltaan Maria Montessorin kehityskausiteoriaan, jonka mukaan lapsen kehityksessä on herkkyyskausia, jolloin hän oppii helposti ja iloisesti konkreettisen materiaalin avulla (Ikäheimo ym. 1998, 10). Materiaalia käyttämällä pyritään siihen, että lapsi kokemuksellisen toimintansa kautta oivaltaisi matemaattisen mallin kuvaavan todellisuutta. Oppiminen helpottuu, mitä useampaa aistikanavaa opetuksessa käytetään: auditiivinen (kuulo), visuaalinen (näkö), taktiilinen (käden toimintaa) ja kinesteettinen (koko keho, myös haju ja maku) aistikanava saa ärsykkeitä materiaaleilla toimittaessa (Ikäheimo 1995, 9 Prashinigiin viitaten). Toiminnallisen matematiikan pedagogiikka perustuu myös Piaget'n konstruktivistiseen teoriaan lapsen kehitysvaiheista. Teoriassa korostetaan välittömien konkreettisten kokemusten perustavanlaatuista merkitystä matematiikan käsitteiden ja operaatioiden oppimiselle. Myös venäläisen Galperinin tutkimukset vakuuttavat konkreettisten materiaalien roolia henkisen toiminnan sisäistämisessä.

Toiminnallista matematiikkaa ohjaa konstruktivistinen oppimiskäsitys ja ns. aktiivisen oppimisen periaate, jonka mukaan opetus jää tuloksettomaksi, jos oppilas ei aktiivisesti työskentele uutta tietoa käyttäen (Pehkonen 1989, 9). Toimintavälineet konkreettisina auttavat varsinkin nuorta oppilasta työskentelemään aktiivisesti. Toimintavälineillä on kuitenkin vain toissijainen merkitys, ensisijaista on toiminta niiden avulla. Välineet, joita vain havainnoidaan ja joilla ei toimita, ovat arvoltaan hyvin rajallisia. Näin painotetaan oppilaiden omaehtoista toiminnallisuutta, jonka on syytä olla vaihtelevaa, jotta oppilaiden mielenkiinto pysyisi vireänä. Toiminnallisuudella välineineen pyritään pintatason oppimisesta syväoppimiseen. Tutkimustulokset toiminta-materiaalien käytöstä vaikuttavat lupaavilta (Seppälä 1995, 11 Soweliin viitaten): Konkreettisten välineiden pitkäkestoisen käytön ansiosta oppilaiden matemaattinen suoritustaso ja asenteet paranevat.

Oppilaiden aktiivinen oppiminen toimintavälineillä muuttaa opettajan roolia. Opettajan ei ole enää tiedonjakaja ja oikeiden vastausten kontrolloija, vaan hän toimii aktiivisesti oppimisen helpottajana, oppilaan ohjaajana ja neuvonantajana. (Pehkonen & Rossi 2007, 145). Jotta opettaja onnistuu roolissaan, hänen on tunnettava oppilaittensa tiedot, taidot, asenteet ja uskomukset. Oppilaiden asenteita ja uskomuksia kannattaa selvittää lukuvuoden alussa kyselyn, haastattelun, kirjoitelmien tai piirrosten avulla. Oppilaiden aiemmat kokemukset matematiikan oppimisesta ja odotukset siitä määräävät usein tulevien kokemusten suuntaa.

Toimintavälineet edistävät oppilaiden reaalisen avaruudellisen toimintaympäristön tuntemusta. Esimerkiksi pihalta voidaan ”metsästää” muotoja tai järjestää tuotepakkausten näyttely. Tuttu kahvipaketti on parempi malli suorakulmaisesta särmiöstä kuin pelkistetty malli, maitopurkki on uskottavampi mitta kuin mittalasi (Pehkonen 1989, 9). Näin matematiikan opetuksen lähtökohtana on oppilaiden oma todellisuus.

Toimintavälineet toimivat matemaattisen käsitteen konkreettisina malleina. Käytettäessä välineitä malleina on ratkaistava, millainen malli on sopivin kullekin käsitteelle. Laadukkaalla mallilla on neljä ominaisuutta (kuvio 3.2.1.2.1 Yrjönsuuri 1994, 129).

MALLIN OMINAISUUKSIA

1. Mallin ja käsitteen looginen vastaavuus
Mallin ominaisuudet vastaavat mahdollisimman loogisesti opittavan käsitteen ominaisuuksia.

2. Mallin selkeys
Mallin matemaattista käsitettä vastaavat ominaisuudet ovat helposti havaittavia.

3. Mallitapahtuman yleisyys käytännössä
Kun malli on lähiympäristöstä ja liittyy käytännön tapahtumiin, se helpottaa sen soveltamista.

4. Mallin kiinnostavuus
Malli houkuttelee tarkastelemaan opittavaa käsitettä.

KUVIO 3.2.1.2.1 Laadukkaan mallin ominaisuudet (Yrjönsuuri 1994, 129)

Matematiikan opiskelussa edetään vaiheittain konkreettisesta mallista käsitteen muodostukseen ja lopulta käsite abstrahoituu, jolloin konkreettinen malli on tarpeeton. Seuraava kuvio havainnollistaa käsitteen abstrahoitumisen vaiheita. Kuvion vaakasuorat nuolet kuvaavat opiskelun etenemistä. Vinosti kohoavat neljä abstraktion vaihetta kuvaavat opiskelun syvenemistä. Neljä vaihetta eivät erotu oppimisessa jyrkästi toisistaan, vaan näitä eri vaiheisiin kuuluvia toimintoja tapahtuu usein rinnakkain. Varsinkin nuoret oppilaat ajattelevat konkreettien välineiden avulla, mitä tuetaan niin kauan, kuin se on oppilaille tarpeellista.

4. Käsite abstrahoidaan ja irrotetaan mallista

3. Malli sisäistetään ja käsite omaksutaan siihen liittyvänä

2. Malli yleistetään ja käsite liitetään siihen.

1. Havaitaan malli konkreettisena eri yhteyksissä

KUVIO 3.2.1.2.2 Abstraktion vaiheet (Yrjönsuuri 1994, 132)

Koulussa saattaa olla liian vähän matematiikan toimintavälineitä tai oppikirjan valta on niin voimakas, että opettajat ajattelevat, ettei ole tarpeeksi aikaa käyttää toimintavälineitä. Eniten oppilailla lienee kokemuksia toimintavälineistä esiopetuksesta ja alakoulun alimmilta luokilta. (Perkkilä & Lehtelä 2007, 73–74). Perusopetuksen yläkoulussa havainnollistavia välineitä on riittävästi, joskin niiden kunto on rapistumassa. Peruskoulun yläluokkien opettajat pitävät tärkeänä käyttää välineitä matematiikan opetuksessa. (Lilja 2002, 105).

Matematiikan opetusta havainnollistavien välineiden käyttö on ammattikoulujen opettajien haastattelujen mukaan vähentynyt aiemmasta (Huhtala 2002, 117). Eräs matematiikkaa ja ammattiaineita opettava ammattikoulun opettaja muisteli teorialuokkien olleen aiemmin täynnä havainnollistamisvälineitä ja opetustauluja. Opetuksen nykytrendien vaikutuksesta lähes kaikki välineistö on poistettu vanhanaikaisena. Vaikka välineitä on joissakin ammattikouluissa käytettävissä, on niiden todellinen käyttö melko harvinaista.

Luokanopettajia koulutetaan toimintavälineiden käyttöön jo peruskoulutuksessa. Esimerkiksi Lapin yliopiston Rovaniemen opettajankoulutuslaitoksessa on luokanopettajaopiskelijoille järjestetty neljän viimeisen vuoden aikana valinnainen kurssi toiminnallisesta matematiikasta. Valinnaiselle kurssille on ilmoittautunut 20–60 luokanopettajaopiskelijaa vuosittain, enemmän kuin kurssille on voitu ottaa (Raimo Kaasilan puhelinhaastattelu 5.2.2008).

Heinolan opetusalan koulutuskeskuksessa vuonna 2007 aineen- ja luokanopettajille järjestetyn kurssin ”Toiminnalliset, yhteistoiminnalliset ja kommunikatiiviset työtavat perusopetuksen matematiikassa” tavoitteena oli edistää edellä mainittujen työtapojen yleistymistä matematiikan opetuksessa (www.opeko.fi).

Toimintavälineillä matematiikassa on monia yhtäläisyyksiä matematiikan unkarilaisen Varga–Neményi -opetusmenetelmän periaatteiden kanssa: Hankitaan todellisuuteen perustuvia kokemuksia, käytetään runsaasti toimintavälineitä, abstraktioon edetään vaiheittain sekä otetaan huomioon oppilaan kehitys ja ominaispiirteet (vrt. lukuun 3.1).

3.2.2 Suomessa käytettyjä opetusmenetelmiä

Tässä luvussa tarkastellaan Suomessa matematiikan opetuksessa käytettyjä opetusmenetelmiä. Opetusmenetelmän on täytettävä kuusi kriteeriä ollakseen opetusmenetelmä. Sillä on teoreettinen orientaatio, rakenne eli syntaksi, sosiaalinen systeemi, toiminnan periaatteet, tukisysteemi ja tuloksia (vrt. luvun 3 alkuun). Näillä perusteilla pidetään ongelmanratkaisua, tosi-matematiikkaa eli rakenteellista matematiikkaa ja tarinankerrontaa opetusmenetelminä. Niiden tarkastelu etenee kriteerien pohjalta teoreettisesta orientaatiosta tuloksiin tai vaikuttavuuteen.

3.2.2.1 Ongelmanratkaisu opetusmenetelmänä

Ongelmanratkaisun opettamisessa on kolme tapaa: opetetaan jotain ongelmanratkaisusta (teaching about problem solving), opetetaan ongelmanratkaisua varten (teaching for problem solving) ja opetetaan ongelmanratkaisun kautta (teaching via problem solving). Kolmatta käytetään opetusmenetelmänä, josta käytetään tässä yhteydessä lyhyttä nimitystä ”ongelmanratkaisu”.

Ongelmanratkaisua pidetään uutena maailmalla kehitettynä opetusmenetelmänä, jolla kohdata konstruktivismin asettamat haasteet esimerkiksi oppilaan ymmärtämisen edistämisestä (Pehkonen 2000, 378). Suomessa erityisesti Pehkonen (esim. 2000; 1997; 1995) on koonnut ja esitellyt menetelmän kansainvälisten asiantuntijoiden ajatuksia mm. Lesteriin, Nohdaan, Schroederiin, Silveriin ja Staceyyn viitaten.

Ongelmanratkaisun rakenne ja toiminnan periaatteet opetusmenetelmässä tiivistetään seuraavasti: Oppilaita johdatetaan keräämään itsenäisesti ongelmaan liittyvää matemaattista tietoa. Oppilaat analysoivat sitä ja pyrkivät tavoitteellisesti ratkaisemaan ongelman. Lopuksi he arvioivat ongelman ratkaisun tulosta ja ongelmanratkaisuprosessiaan. Vaikka prosessin eteneminen vaikuttaa lineaariselta, se ei kuitenkaan etene käytännössä lineaarisesti, vaan oppilaat saattavat palata takaisin alkutilanteeseen havaittuaan ratkaisun vaiheineen toimimattomaksi. Prosessi toimii erityisen hyvin pitempikestoisissa tutkimuksissa ja projekteissa. Unkarilaisen Polyan (Leppäaho 2007, 53–54) ongelmanratkaisumallissa on olennaista ymmärtää ongelma, tehdä suunnitelma ratkaisuprosessista, toteuttaa suunnitelma ja lopuksi tarkastella arvioiden tehtyä. Opetustilanteessa oppilaat saattavat edetä prosessissa yksilöllisesti eli ovat prosessin eri vaiheissa.

Ongelmia on määriteltävissä sen mukaan, millaisia henkisiä prosesseja niiden ratkaisemisessa oletetaan tarvittavan. Näin ongelmia luokitellaan avoimen ja suljetun järjestelmän ongelmiksi. Suljetun järjestelmän ongelmissa on rajallinen määrä tekijöitä, jotka ovat muuttumattomia ongelmanratkaisun aikana. Näistä esimerkkinä ovat toimintaohjeen mukaan ratkaistavat tehtävät.

Avoimessa ongelmaratkaisujärjestelmässä oppilaan on itse oivallettava mahdollisuuksia. Tällaista luovaa ajattelua tarvitaan, kun laajennetaan esimerkiksi tuttujen esineiden käyttötarkoituksia. Tällaisessa tilanteessa ongelmanratkaisija rikkoo totunnaisia rajoja. Luova ongelmanratkaisu sisältyy aina avoimeen järjestelmään. (Sahlberg, Meisalo, Lavonen & Kolari 1994, 16–18). Avoimen ja suljetun järjestelmän eroja kuvataan seuraavassa kuviossa.

AVOIN JÄRJESTELMÄ	Rajoja voidaan muuttaa ratkaisun aikana.	Ratkaisu-prosessissa esiintyy uusia ideoita.	Prosessi saattaa sisältää kontrolloima-tonta luovaa ajattelua.	Ratkaisut saattavat joskus tuntua epäloogisilta – niitä ei voi näyttää toteen eikä kumota.	Ongelman ratkaisun menetelmät vaihtelevat joustavasti ja useita eri menetelmiä voidaan yhdistää.
SULJETTU JÄRJESTELMÄ	Rajat ovat vakioita ratkaisun aikana.	Oikea ratkaisu tiedetään etukäteen.	Prosessi on yleensä tietoista kontrolloitua toimintaa, ja loogisesti uudelleen järjestettä-vissä.	Ratkaisut ovat usein todennetta-vissa ja loogisesti oikeita.	Ongelman ratkaisun keinot tunnetaan suorina menetelminä.

KUVIO 3.2.2.1.1 Ongelmanratkaisun avoimen ja suljetun järjestelmän vertailu (Sahlbergia ym. 1994, 17 soveltaen)

Yleiset ongelmanratkaisustrategiat Leppäahon (2007, 46 LeBlanciin viitaten) mukaan ovat yrittää ja erehtyä, listata järjestelmällisesti mahdollisuuksia, yksinkertaistaa ongelmaa, etsiä ongelmasta kaava, kokeilla eri mahdollisuuksia, päätellä, yleistää ja työskennellä takaperin. Auttavat strategiat ongelman-ratkaisussa ovat välivaiheita yleisten strategioitten toteuttamisessa. Ne soveltuvat kaikkiin yleisiin ongelmanratkaisustrategioihin. Auttavia strategioita käytännössä voivat olla diagrammit, taulukot, piirrokset, luettelot ja yhtälöt. Niin yleisiä kuin auttaviakin strategioita voidaan opettaa varsin nuorille oppilaille opettajakokemukseni mukaan.

Sosiaalinen systeemi tässä opetusmenetelmässä on vuorovaikutuksellinen. Käytännön opetustilanteissa on keskeistä avoin ilmapiiri, jossa erehtyminen on sallittua. Ongelmanratkaisun opetusmenetelmässä opettajan tehtävänä on antaa neuvoja, tarkkailla ja ohjata. Hänen on pidättäydyttävä arvioinnista ja annettava tilaa oppilaiden itsearvioinnille. Hänen tehtävänsä muuttuu matemattisten sisältöjen opettamisesta ajattelu- ja työskentelytaitojen ohjaamiseen.

Pari- ja pienryhmätyöskentely sopivat ongelmaratkaisun työtavoiksi. Ne mahdollistavat kokeilemisen, pohtimisen, arvailemisen ja erehtymisen turvallisesti. Näissä työtavoissa mahdollistuu myös oppilaiden keskinäinen vuorovaikutus enemmän kuin opettajajohtoisissa työtavoissa, kuten kyselevässä opetuksessa.

Menetelmän tukisysteemi koostuu sekä oppilas- että opettajatekijöistä. Oppilaan ja opettajan olisi motivoiduttava ongelmasta ja sen ratkaisemisesta. Jotta matemaattinen ongelmanratkaisu onnistuisi ja syntyisi onnistumisen kokemuksia, se vaatii oppilaalta matemaattisia perustaitoja ja lukutaitoa. Sujuva laskutaito, termien, käsitteiden ja teoreemojen hallinta edistävät ongelman ratkaisemista. Tarvitaan myös yleisiä ongelman ratkaisutaitoja, kuten visualisointia, joustavaa ajattelua ja analogioiden muodostamista. Opettajan olisi luotava myönteinen ja rohkaiseva ilmapiiri, kehitettävä oppilaiden ja omia luovia ja tiedollisia valmiuksiaan sekä parannettava asennoitumista ongelmanratkaisuun.

Ongelmaratkaisun vaikuttavuudesta opetusmenetelmänä Suomessa viestivät Leppäahon (2007) tuoreet tutkimustulokset: Ongelmaratkaisukurssin käyneet alakoulun kuudesluokkalaiset ovat merkitsevästi parempia ongelmanratkaisussa kuin kurssiin osallistumattomat ikätoverinsa. Puolentoista vuoden kuluttua oppilaiden ongelmaratkaisutaidot eivät eronneet merkitsevästi, vaikka kurssin käyneet olivat yhä parempia. Nämä tulokset on tulkittavissa siten, että ongelmanratkaisutaidon ylläpitämiseksi tarvitaan säännöllistä harjoitusta. Ongelmaratkaisukurssin oppilaiden motivaatiokin kohosi kurssin aikana. Kurssin aikana käytettiin ratkaisukarttaa, joka sisältää tehtävässä annetut tiedot, mahdollisen piirroksen, ratkaisuyritykset, myös virheelliset, ja lopputuloksen. Ratkaisukarttamenetelmä parantanee oppilaiden suorituksia ongelmanratkaisussa ja oppilaat suhtautuvat siihen myönteisesti. Ongelmaratkaisukurssin oppilaista 2/3 koki ratkaisukarttamenetelmän hyödylliseksi ja ratkaisuprosessia helpottavaksi (Leppäaho 2007, 209–210).

Vaikka pedagogista kirjallisuutta ja täydennyskoulutusta ongelmanratkaisusta opetusmenetelmänä on tarjottu opettajille Suomessa pari vuosikymmentä, sen asema oppilasarvioinnissa oli 1990-luvun lopussa olematon. Mäensivun (1999, 106–107) mukaan alakoulun oppilaan sanallinen arviointi matematiikassa kohdistuu peruslaskutoimitusten hallintaan ja matematiikasta selviytymiseen. Arvioinneissa käytetyt verbit – *sujua, selvitä, tuottaa vaikeuksia, pärjätä* – osoittavat oppilaan tehtävänä olevan selvitä ja pärjätä. Matematiikan sanallisissa arvioinneissa ei esiinny laadun, luovuuden, mielikuvituksen, yhteistyötaitojen tai keskustelutaitojen arviointia. Oppilaat saavat palautetta itsestään vain laskijoina. Sanallisista arvioinneista puuttuvat matematiikalle tyypilliset toiminnat kuin mallintaminen, päättely, arviointi, mittaaminen ja ongelmanratkaisu. Suomessa käytetyssä ongelmaratkaisussa opetusmenetelmänä on samanlaisia piirteitä kuin Varga–Neményi -opetusmenetelmän periaatteessa *lupa väitellä, erehtyä ja iloita*.

3.2.2.2 Tosi-matematiikka opetusmenetelmänä

Rakenteellinen matematiikka, tosi-matematiikka malatylaisittain ilmaisten, on syntynyt Joensuun matematiikan didaktiikan professori George Malatyn 1980–1990-luvun vaihteen kerhokokeiluista. Tosi-matematiikka tarkoittaa luvun (algebra) ja avaruuden (geometria) käsitteiden ja lauseiden matemaattisesti oikeata, rakenteellisesti kumulatiivista ja johdonmukaista sisältöä. Kokeilujen pohjalta syntyi matematiikan didaktiikkasarja, jossa on Geometrinen ajattelu 1 (1993), Algebrallinen ajattelu 1 (1994) ja syventävä teos Johdatus matematiikan rakenteeseen (2003). Didaktiikkasarja tarjoaa mallin teorian ja opetuskäytännön suhteesta. Tiivis tarkastelu ei valitettavasti tee oikeutta menetelmän monipuolisuudelle.

Teoreettiselta orientaatioltaan tosi-matematiikka opetusmenetelmänä perustuu Bloomin kognitiivisten tavoitteiden luokitteluun. Kognitiiviset tavoitteet ovat tietäminen, ymmärtäminen, soveltaminen, analysoiminen, syntesoiminen ja arvioiminen. Tärkein tavoitteista on ymmärtäminen, jotta olisi riittäviä edellytyksiä soveltaa (Malaty 1993, 14). Useilla kuvioilla Malaty (1993, 13–21) mallintaa kognitiivisten tavoitteiden ja matemaattisen sisällön yhteyttä sekä kognitiivisten tavoitteiden välistä vuorovaikutusta. Käsitteen ymmärtäminen tarkoittaa vastauksen löytämistä kysymykseen ”Mikä on?”. Periaatteen ymmärtäminen tarkoittaa vastauksia kysymyksiin ”Miksi on?: Miksi tietty algoritmi pätee tietyn taidon suorittamisessa?” ja ”Miksi lause on tosi?”. Matemaattisen käsitteen oppiminen tapahtuu prosessina, joka alkaa tekemisestä, etenee löytämiseen ja lopulta johtaa nimeämiseen (Malaty 1993, 19). Syntetisoimisella Malaty (1993, 18) tarkoittaa kirjoittamista, koska ilman sitä ei olisi matematiikkaa. Hän huomioi didaktiikassaan myös termin ja symbolin ymmärtämisen ”Miksi termi on tällainen?” ja ”Miksi symboli on tällainen?”. Arviointi tarkoittaa lapsen itsensä tekemää arviointia erityisesti ongelmanratkaisussa. Arvioinnin kohteena on lapsen omaa analysointia ja syntetisointia. Vaikka Bloom työryhmineen on tarkastellut opetuksen affektiivisiakin tavoitteita, Malaty (1993, 13) ei ota niitä suoranaisesti huomioon, koska kognitiivisten tavoitteiden toteutumisesta seuraa affektiivisten tavoitteiden toteutuminen.

Toisaalta tosi-matematiikan teoria perustuu kreikkalaisen n. 365 – n. 300 eaa eläneen Eukleideen geometriaan. Eukleideen pääosin geometriaa käsittelevä teos on kreikaksi Stoikheia, latinaksi Elementa ja suomeksi Alkeet. Myös sveitsiläisen Piaget’n teoria suuntaa rakenteellisen matematiikan opetusmenetelmää: Loogis-matemaattiset kokemukset ovat tärkeä vaikutin oppilaan ajattelun kehittymiselle tosi-matematiikassa. Mikä tahansa matematiikan oppitunti ei kehitä ajattelua, vaan tunnin on korostettava loogis-matemaattisia kokemuksia. (Malaty 1993, 22). Loogis-matemaattista kokemusta käsiteltiin tarkemmin Varga–Neményi -opetusmenetelmän ”todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen” –periaatteen yhteydessä.

Tosi-matematiikan opetusmenetelmän rakenne eli syntaksi geometrian osalta perustuu euklidisen geometrian rakenteeseen ja yleisesti matematiikan deduktiiviseen rakenteeseen. Toiminnan periaatteet ja sosiaalinen systeemi (sosiaalinen vuorovaikutus oppilaiden ja opettajan välillä) ovat kiteyttävissä ohjatuksi keksimiseksi ja heuristisiksi kysymyksiksi (Malaty 1993, 24–26). Jotta lapsi ajattelisi ja keksisi matematiikan oppitunnilla, opettaja ohjaa lasta kysellen. Heuristinen kyselevä opetus etenee kuten ongelmasarja: Mikä on? Mitä huomasit? Mitä tehdään? Oletko varma? Miksi? Heurististen kysymysten tekeminen vaatii opettajalta matematiikan rakenteen ymmärtämisen lisäksi tietoa matematiikan historiasta, hyvää tietoa kielestä ja etymologian harrastuneisuutta.

Seuraavassa kuviossa kuvataan pisteen opettamista pienille lapsille geometrian rakenteen mukaisesti.

PISTEEN OPETTAMINEN

Opettaja voi aloittaa matematiikan oppitunnin seuraavalla tavalla: havainnoikaa, mitä teen liitutaululla. Hän piirtää tarkoituksellisen hitaasti suurikokoisen pisteen kuvion ja kysyy:

1) Mitä olen piirtänyt? (Odotettu vastaus ’piste’)
2) Entä nyt? Opettaja on piirtänyt pienemmän pisteen kuvion.
3) Entä nyt? Opettaja on piirtänyt edellistä pienemmän pisteen kuvion.

Näin jatketaan siihen asti kunnes lapset eivät näe taululta enää mitään.

4) Mikä näistä on sopivin olemaan juuri piste? (Viimeinen)

Oppilaiden toiminta

Oppilaita pyydetään piirtämään vihkoonsa samalla tavalla pisteitä. Heidät haastetaan piirtämään pienin mahdollinen piste. Sitten oppilaille annetaan paperia ja neula. Oppilaat pistävät neulalla pienen reiän paperiin. Opettaja kommentoi, että piste on niin pienen pieni, että terävän neulan reikä paperissa on jättiläinen pisteeseen verrattuna. Kun näin on, opettaja kysyy:

5) Onko liitutaululla todellisia pisteitä? (Ei)
6) Mitä ne sitten ovat? (Oppilaiden on ymmärrettävä, että ne ovat pisteen kuvioita. Tämä voi edetä seuraavasti: Opettaja tervehtii oppilasta kädestä. Sitten hän yrittää tervehtiä oppilasta luokkakuvassa. Miksi oppilas ei tervehdi? (Koska se on valokuva.) Sitten opettaja yrittää tervehtiä oppilasta luokkakuvan piirroksessa. Tervehtiikö oppilas? (Ei) Mikä ero on luokkakuvalla ja piirroksella? (Luokkakuva on valokuva, mutta piirros on kuvio.) Onko piirros todellinen? (Ei. Se on kuvio.) Piirroksen alle kirjoitetaan sana ’kuvio’. Opettaja piirtää taululle pisteen ja kysyy:
7) Onko tämä todellinen piste? (Ei) Mikä se sitten on? (Pisteen kuvio)

Opettaja lisää kirjaimen A taulukuvioon ja kysyy:

8) Mikä pisteen nimi on? (Piste A) Opettaja kommentoi: Ihan oikein.
9) Miksi olen käyttänyt isoa kirjainta? (Koska se on nimi.)

KUVIO 3.2.2.2.1 Pisteen opettaminen tosi-matematiikassa (Malaty 1993, 49–50)

Koska matematiikan rakenne on looginen, heuristinen kysymyssarja toimii. Esimerkiksi kun joku matemaatikko on löytänyt teoreeman todistuksen idean, hänen löytönsä perustuu tunnettuihin lauseisiin. Opettajan on tunnettava nämä yhteydet ja rakennettava niiden pohjalta heuristinen kysymyssarja, joka ohjaa oppilaat todistuksen idean löytämiseen. Opettaja toimii silloin oppimisprosessin arkkitehtinä, mikä mahdollistaa uudelleen keksimisen.

Tosi-matematiikan opetusprosessi sisältää sekä hiljaista yksilöllistä työskentelyä että puhumista ja keskustelua pareittain tai pienryhmissä. Tosi-matematiikan oppimateriaalien Geometrinen ajattelu 1 (1993), Algebrallinen ajattelu 1 (1994) ilmestymisen jälkeen opetus kerhoissa muuttui itsenäisemmäksi ja yksilöllisemmäksi. Tällainen mahdollisuus lisääntyy kolmion käsitteen omaksumisen jälkeen. Tukisysteemi kuvaa oppimisympäristön sosiaalisia ominaisuuksia, jotta opetusmenetelmä toimisi käytännössä. Rakenteellisessa matematiikassa heurististen kysymysten lisäksi opettajan elävä ääni ja esitystapa auttavat lasten keksimistä (Malaty 1993, 19). Ne aktivoivat lasta ajattelemaan. Opettaja havainnoi lapsen osallistumista ajatteluun ja mukautuu lapsen jaksamiseen vaihtelemalla heuristista kyselyä, toimintaa ja hiljaista yksilöllistä työskentelyä.

Tosi-matematiikan oppimistulokset ovat olleet myönteiset. Lapsille rakenteellisen matematiikan oppiminen on ollut helppoa (Malaty 1993, 101). Lapset ovat pyytäneet innoissaan haasteellisia lisätehtäviä ratkaistavaksi kotiinkin (Malaty 1993, 178).

Opetusmenetelmä on suosittu: Geometrinen ajattelu 1 Didaktiikka –teoksesta on kolme painosta. Niin ikään Geometrinen ajattelu 1 ja Algebrallinen ajattelu 1 –oppilaankirjoista on otettu useita painoksia. Vuonna 1990 Malaty piti matematiikkakerhoa, jolle osallistui 39 erityis-, luokan- ja aineenopettajaa. Koulutettujen opettajien ansiosta kerhot levisivät Joensuun kouluihin. Vuosina 1990–95 tosi-matematiikka opetusmenetelmänä levisi muualle Suomeen täydennyskoulutuksessa, johon osallistui 12 000 opettajaa päiväkodista lukioon. (Malaty 2005–2006). Olen yksi noista 12 000 täydennyskoulutetusta opettajasta ja nimenomaan geometriassa. Tästä syystä valitsin geometrian tosi-matematiikasta. Opettamani Varga–Neményi -ryhmän oppilaiden kokemuksissa saattaa ilmetä geometriaa enemmän kuin kahden muun opetusryhmän oppilaiden kokemuksissa.

Vuonna 1993 Joensuun opettajankoulutuslaitoksessa yli 50 luokanopettaja-opiskelijaa valitsi sivuaineekseen matematiikan, mikä oli yli puolet vuosittaisesta opiskelijamäärästä. Se oli myös yli kolminkertainen muihin Suomen kymmeneen opettajankoulutuslaitokseen verrattuna. Menestys jatkuu, matematiikan sivuaineekseen valinneiden luokanopettajaopiskelijoiden on noussut jopa yli 80 prosenttiin. (Malaty 2005–2006).

Tosi-matematiikan eli rakenteellisen matematiikan ja Varga–Neményi -opetusmenetelmän välillä on yhteyttä, esimerkiksi loogis-matemaattisen kokemuksen korostaminen. Niiden vaikutteita on löydettävissä myös Riskun (2002, 115–141) artikkelista Leikisti ja oikeesti – oikeata matematiikkaa lapsesta lähtien.

3.2.2.3 Tarinankerronta opetusmenetelmänä

Tarinankerronta, story telling, on uusin Suomessa käytetyistä matematiikan opetusmenetelmistä. Sitä on suomalaistettu Tampereen yliopiston Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitoksessa matematiikan didaktiikan lehtori Jorma Joutsenlahden ja luokanopettajaopiskelijoiden yhteistyönä osana laajempaa matematiikan oppimateriaalin tutkimushanketta.

Opetusmenetelmä perustuu konstruktiiviseen käsitykseen oppimisesta, jossa oppija nähdään oman tietonsa rakentajana ja jossa korostuu kielen merkitys. Oppimisteorian taustateoreetikkoja ovat mm. Dewey, Piaget, Vygotsky ja Bruner. Tarinankerronta opetusmenetelmänä perustuu Michael Stephen Schiron teokseen ”Oral storytelling and teaching mathematics – pedagogical and multicultural perspectives”. Teoksesta on peräisin myös opetusmenetelmää ohjaava Velhon tarina, johon menetelmän rakenne ja toiminnan periaatteet perustuvat.

Opetusmenetelmässä opettaja kertoo elävästi ja toiminnallisesti tarinaa Velhosta, joka haastaa tarinan muita henkilöitä ja kuuntelevia oppilaita ratkaisemaan erilaisia ongelmia esimerkiksi yhteenlaskun algoritmista yksin, pareittain tai pienryhmissä. Erilaiset lelut ja matemaattiset toimintavälineet konkretisoivat oppilaiden ongelmien ratkaisemista. Ajoittain oppilaat osallistuvat tarinan etenemiseen taputtamalla ja loitsuamalla taikariimejä koko opetusryhmän puhekuorona. Näin opetusmenetelmän sosiaalinen systeemi mahdollistuu oppilaiden keskinäisessä sekä opettajan ja oppilaiden välisessä vuorovaikutuksessa.

Opetusmenetelmässä on keskeistä kielentäminen, jossa oppilaita ohjataan perustelemaan vastauksiaan ääneen, kirjoittamaan soveltavien tehtävien ratkaisuprosessia ja oppilaiden keskinäiseen suulliseen vuorovaikutukseen. Kielentäminen edistää oppimista, mikä tiivistetään kolmeen tekijään (Joutsenlahti 2005a, 1 ks. kuviota 3.2.2.3.1).

Opetusmenetelmää perusopetuksen kolmannella luokalla soveltanut Hytti (2007, 35) korostaa Fröbeliin viitaten laulun, tarinoiden ja kertomusten kuuntelemisen merkitystä lapsuusiässä. Aikuisen tehtävä on tarjota lapselle kieli siihen, mistä se häneltä vielä puuttuu.

Tarinankerronta opetusmenetelmänä tukee oppilaiden motivaatiota, mielikuvitusta ja erilaisten oppilaiden huomioimista. Se tarjoaa myös vaihtelua tavanomaiseen toimintaan. Tarinankerronnassa otetaan huomioon lapsi kokonaisuutena: kognitiivisena, affektiivisena, fyysisenä, sosiaalisena ja psykomotorisena oppijana. Opetusmenetelmä antaa tilaa erilaisille tunnekokemuksille ja rakentaa oppilaan minäkuvaa tarjoamalla erilaisia samastumiskohteita.

KIELENTÄMISEN ETUJA

1. Oppijan oman ymmärryksen tukeminen:
   Kielentäessään ajatuksiaan ja käsityksiään muille, yksilön on ensin selvitettävä ne itselleen, koska puhuttu kieli on ajateltua kieltä.

2. Sosiaalinen tekijä:
   Kielentäminen tarjoaa yksilölle mahdollisuuden jakaa ajatuksiaan ja oppia toisilta sosiaalisessa kanssakäymisessä.

3. Pedagoginen tekijä:
   Oppilaan suorittama kielentäminen mahdollistaa opettajan havainnoida oppilaan ajattelurakenteita ja väärinkäsityksiä. Näin opettaja voi oikaista niitä.

KUVIO 3.2.2.3.1 Kielentämisen etuja (Joutsenlahti 2005a, 1)

Tarinankerronnan opetusmenetelmä on vaikuttava ja tuloksellinen (Hytti 2007, 2–3; 69–86): Mielikuvitusmaailmassa on mahdollista oppia mielekkäästi matematiikkaa. Sen avulla voi oppia ja ymmärtää matemaattisia käsitteitä. Opetusmenetelmä parantaa oppilaiden motivaatiota matematiikkaan ja innostaa sen oppimiseen. Se motivoi erityisesti tyttöjä. Sen avulla voi rikkoa matematiikan opetuksen kaavamaisuutta, rutiineja ja rituaaleja. Koska oppilaat kokevat sen myönteisesti, se osaltaan parantaa kouluviihtyvyyttä. Opettajalle menetelmä tarjoaa tukea vastata opetussuunnitelman haasteisiin ja integroida oppiaineita. Se tukee myös opettajan ammatillista kehitystä ja työssä jaksamista.

3.2.3 Kooste matematiikan opetuksesta suomalaisittain ja sen vertailua unkarilaiseen Varga–Neményi -opetusmenetelmään

Matematiikan opetuksen Suomessa oletetaan olevan oppikirjasidonnaista. Oppikirjojen ohessa käytettäneen toimintavälineitä varsinkin esi- ja alkuopetuksessa. On huomattava, ettei ole laajoja ja tarkkoja tutkimuksia oppikirjojen ja toimintavälineiden käytöstä opetustilanteissa. Suomessa käytetään varsinaisia matematiikan opetusmenetelmiäkin. Niitä ovat ongelmanratkaisu opetusmenetelmänä, tosi-matematiikka eli rakenteellinen matematiikka ja tarinankerronta eli story telling. Niiden vaikuttavuutta ja tuloksia on tutkittu.

Suomalaisessa matematiikan opetuksessa suositaan konstruktivistista ja aktiivista oppimiskäsitystä. Opetussuunnitelman perusteet ohjaavat matemaattisten sisältöjen valintaa. Oppikirjojen opettajanoppaat ja opetusmenetelmät ohjaavat monipuolisiin työtapoihin. Oppikirjojen opettajanoppaat ohjaavat kaavamaisempaan oppitunnin rakenteeseen kuin opetusmenetelmät. Niin oppikirjojen opettajanoppaissa kuin opetusmenetelmissäkin suositaan toiminta- ja havainnollistamisvälineiden käyttöä. Niiden tarkoituksena on edistää käsitteiden ymmärtämistä. Oppilaiden edellytysten mukaan opetusta eriytetään eritasoisilla tehtävillä ja tukiopetuksella. Oppilaiden edistymistä arvioidaan formatiivisilla ja summatiivisilla kokeilla. Oppilaita ohjataan myös itsearviointiin.

Suomalaisen matematiikan opetuksen ja matematiikan unkarilaisen Varga–Neményi -opetusmenetelmän vertailua: Suomalaisissa matematiikan opetusmenetelmissä, opettajanoppaissa ja pedagogisessa kirjallisuudessa on monia periaatteellisia yhtäläisyyksiä Varga–Neményi -opetusmenetelmän kanssa. Yhtäläisyyksiä ovat mm. kansainväliset taustateoreetikot, oppilaan arkielämän huomiointi, toiminnallisuus ja toimintavälineiden käyttö, eteneminen konkreettisesta abstraktioon, matematiikan sisällöt, myönteisen oppimisilmapiirin korostaminen, ongelmanratkaisu, oppilaan kehityksen huomioiminen ja opettajan rooli.

Erojakin on havaittavissa: Varga–Neményi -opetusmenetelmä on muotoutunut periaatteiltaan jäsentyneeksi menetelmäksi Unkarissa aiemmin kuin Suomessa käytetyt opetusmenetelmät. Sitä on siis käytetty suomalaismenetelmiä kauemmin.

Varga–Neményi -opetusmenetelmän tärkein periaate on todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen. Ensin oppilaat hankkivat runsaasti toiminnallisia kokemuksia opittavasta käsitteestä, joka käsitteellistetään matemaattisesti myöhemmin. Suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa käsite nimetään ensin, sitten annetaan esimerkki sen käytöstä. Esimerkin ohjaamana oppilaat harjoittelevat ja soveltavat käsitettä. Varga–Neményi -opetusmenetelmä on siis lähestymistavaltaan induktiivisempi kuin matematiikan suomalaiset oppikirjat. Loogis-matemaattiset kokemukset ovat Varga–Neményi -opetusmenetelmässä keskeisempiä kuin suomalaisessa matematiikan opetuksessa.

Etenemisessä konkreettisesta abstraktioon on periaatteellinen ero: unkarilaisessa menetelmässä puhutaan abstraktion tiestä, jolla korostetaan konkreettisen ja abstraktisen tasa-arvoa. Suomalaisessa pedagogisessa kirjallisuudessa abstraktion vaiheet esitetään portaina. Porrasmallissa ylimpänä on abstraktio ja alimpana konkretia. Abstraktion tiellä edetään lapsen kehollisista kokemuksista välineiden ja kuvien kautta abstraktisiin ja symbolisiin loogis-matemaattisiin kokemuksiin. Abstraktion tiellä liikutaan toiminnallisesti myös abstraktisesta konkreettiseen. Porrasmalli abstraktion vaiheista korostaa käsitteen havaitsemista mallista, käsitteen yleistämistä, sisäistämistä ja abstrahoitumista.

Varga–Neményi -opetusmenetelmässä toimintavälineiden runsaalla ja monipuolisella käyttämisellä pyritään luomaan oppilaalle rikkaita mielikuvia. Mielikuvien tarkoituksena on toimia konkreettisen ja abstraktisen välisenä siltana. Mielikuvaoppimista ei eksplisiittisesti korosteta suomalaisen matematiikan opetuksen pedagogisessa kirjallisuudessa.

Varga–Neményi -opetusmenetelmässä korostetaan oppilaskeskeistä väittelyä työtapana painotetummin kuin matematiikan opetuksessa suomalaisittain. Unkarilainen opetusmenetelmä ohjaa opettajaa konkreettisesti pohtimaan sitä, miten suhtautuu oppilaiden tekemiin virheisiin (vrt. lukuun 3.1.5). Opettajan myönteistä suhdetta oppilaisiin, matematiikkaan ja opetusmenetelmään edellytetään unkarilaismenetelmässä painokkaammin kuin suomalaisessa matematiikan opetuksessa. Jotta opetusmenetelmä olisi vaikuttava ja tuloksellinen, on opettajan oltava innostunut siitä (Varga 1968; 1976, 172, 176–177).

Oppituntien rakenteet eroavat Suomessa ja Unkarissa. Havaintoni oppituntirakenteen erosta perustuu kahdentoista viikon matematiikan unkarilaisen Varga–Neményi –menetelmän seurantaan (ks. liitettä 1) ja lähes 30 vuoden ohjauskokemukseen suomalaisesta luokanopettajakoulutuksen opetusharjoittelusta. Suomessa oppitunti usein etenee opettajan esittävästä ja/tai kyselevästä opetuksesta oppilaiden oppikirjan ohjaamaan yksilölliseen työskentelyyn. Unkarissa opetusmenetelmän mukaisilla tunneilla on runsaasti toimintavälineitä ja toiminnallisuutta, opettajajohtoinen ja oppilaskeskeinen yksilöllinen ja parityöskentely vaihtelevat oppitunnilla useita kertoja. Koko opetusryhmä toimii yhteistoiminnallisesti silloin, kun pohditaan yksilöllisiä ja pienryhmien ratkaisuja ja tuloksia matemaattisista ongelmista.

Unkarilaisessa menetelmässä varoitetaan oppikirjojen mekaanisesta käytöstä (Varga 1969a, 82–83; 1969b, 76; 1969c, 59, 63; 1972, 352; 1973, 37). Varga–Neményi -opetusmenetelmän mukaisissa oppikirjoissa on vähemmän ns. mekaanisia laskuja kuin suomalaisissa oppikirjoissa. Unkarilaisen menetelmän mukaisten oppikirjojen ominaispiirteenä on toimintavälineiden ja kirjallisten tehtävien samanaikaisuus. Unkarilaisessa oppikirjasarjassa esimerkiksi toisen luokan oppikirja alkaa konkreettisiin välineisiin perustuvalla logiikalla. Suomessa 1970-luvulla useat opettajat kyllästyivät joukko-opin ja logiikan termien käyttöön, kun niillä ei ollut heidän opetuksessaan merkitystä (Malinen 2005, 16). Unkarissa joukko-oppia käytetään aktiviteettina, toiminnan välineenä. Joukko-opin tarkoituksena on ohjata lasta havainnoimaan esineiden ominaisuuksia ja ilmaisemaan niitä arkikielellä. Joukko-opillisia termejä ei käytetä. Symboleihin ja peruslaskutoimituksiin siirrytään suomalaiskirjoja hitaammin. Hihnalan (2005, 135) mukaan olisikin ryhdyttävä kehittämään ja kokeilemaan oppikirjojen lisäksi tietyn matematiikan osa-alueen kattavia opetusohjelmia tai opetuspaketteja. Ne pohjautuisivat ongelmakeskeiseen lähestymistapaan ja oppilaan ajattelua kehittävään tehtävämateriaaliin.

Huomattavin ero on matematiikan opetussuunnitelmissa: Suomen opetussuunnitelma (2004) korostaa sisältöjä ja niiden arviointia, kun taas Unkarin opetussuunnitelma (2003) on kehittämisorientoitunut (vrt. lukuun 4). Varga–Neményi -opetusmenetelmä ja Unkarin opetussuunnitelma muodostavat luontevan jatkumon.

Varga–Neményi -opetusmenetelmällä on kansallisesti tunnustettu asema perusopetuksen alakoulussa Suomessa (Koponen 2001, 7, 63; Näätänen 2000; 2006; Pehkonen & Rossi 2007, 152; Perkkilä 2002, 37; Räsänen, Kupari, Ahonen & Malinen 2004, esipuhe).

4 SUOMEN JA UNKARIN PERUSOPETUKSEN MATEMATIIKAN OPETUSSUUNNITELMAT

Suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa tulkitaan Suomen ja Unkarin opetussuunnitelmista käsin, joten tarkastellaan molempien maiden matematiikan opetussuunnitelmia. Niiden tarkastelulla pyritään ymmärtämään oppilaiden koulukokemuksia matematiikasta ja havaitsemaan niissä mahdollisia eroja ja yhtäläisyyksiä.

Aluksi esitellään lyhyesti molempien maiden perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelmien kehitysvaiheet. Niistä siirrytään tarkastelemaan matematiikan opetuksen periaatteita, tavoitteita, sisältöjä ja arviointia perusopetuksen alemmilla vuosiluokilla. Lopuksi tarkastellaan opetussuunnitelmien yhtäläisyyksiä ja eroja. Peilataan myös suomalaisia opetusmenetelmiä, mahdollista opetussuunnitelmaa sekä unkarilaisen Varga–Neményi -opetusmenetelmän periaatteita opetussuunnitelmiin.

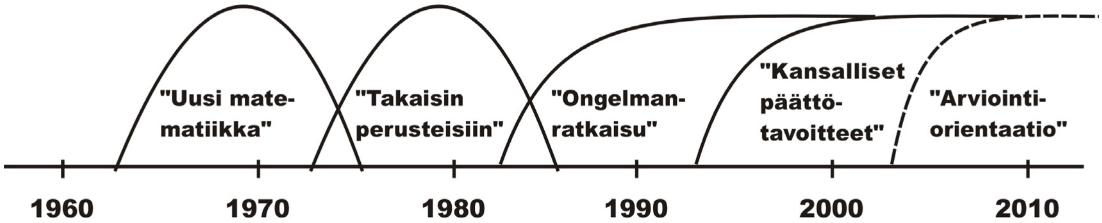
4.1 Matematiikan opetussuunnitelman kehitysvaiheita

Suomen peruskoulun matematiikan opetussuunnitelman kehityksessä on ollut useita vaiheita (kuvio 4.1.1), joista ensimmäinen oli 1970-luvun alun *uusi matematiikka*. Uuden matematiikan unkarilainen psykologi Klein (1987, 28–32) näkee epäyhtenäisenä. Sen amerikkalaiset ja eurooppalaiset opetussuunnitelmat ovat luokiteltavissa painotusten mukaan kahdella tavalla: Toisaalta opetussuunnitelmat painottuvat yleisten piirteiden perusteella seuraavasti:

1. matematiikan rakenteita painottavat opetussuunnitelmat
2. ymmärtämistä ja keksimistä painottavat opetussuunnitelmat
3. myönteistä asennetta ja emootioita painottavat opetussuunnitelmat
4. neljää peruslaskutoimitusta laajemmat opetussuunnitelmat tai
5. induktiota painottavat opetussuunnitelmat

Toisaalta matematiikan opetussuunnitelmat uuden matematiikan kaudella olivat sisältöjen mukaan painottuneet 1) joukko-oppiin, 2) aritmetiikkaan, 3) geometriaan, 4) luonnontieteiden (science) ja matematiikan integraatioon, 5) symbolipeleihin tai 6) monipuolisiin sisältöihin. Suomen peruskoulun historian ensimmäinen matematiikan opetussuunnitelma painotti joukko-oppia, logiikan perusteita ja funktion käsittelyä. Se painotti myös ymmärtämiseen perustuvaa opetusta. *Takaisin perusteisiin* -vaiheessa perustavoitteiden ja -oppiaineksen avulla katsottiin voitavan luoda oppimiselle vankka perusta. Tämän toisen vaiheen vastareaktiona korostettiin ongelmanratkaisukeskeistä opetusta 1980-luvulla. Matematiikan oppimäärissä korostettiin ongelmanratkaisun lisäksi soveltamista tavoitteellisesti. Tavoitteiden vaikutukset ilmenivät erityisesti oppimateriaaleissa, joissa oli aiempaa enemmän sovellus- ja pulmatehtäviä. Käytännössä sovellus- ja pulmatehtävien vaativuuden ja yksipuolisuuden vuoksi ne jäivät oppituntien loppuun edistyneimpien oppilaiden haasteeksi. Soveltaminen matematiikan tavoitteena on löydettävissä seuraavienkin vaiheiden opetussuunnitelmista. Soveltavaa matematiikkaa pidetään yhtenä syynä menestykseemme PISA-tutkimuksissa (Lampiselkä, Ahtee, Pehkonen & Eloranta 2007, 40–41; Kinnunen 2008, 6).

Neljännessä kehitysvaiheessa, kouluittaisten ja kansallisten päättötavoitteiden vaiheessa, opetussuunnitelman perusteissa matematiikan opetuksen tavoitteet ja sisällöt esitettiin tiiviisti yleisessä muodossa kouluasteittain, jotta koulut voisivat laatia paikalliset opetussuunnitelmansa. Nykyinen Suomen perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelma 2004 on luonnehdittavissa arviointiorientoituneeksi, koska siinä ohjataan matematiikan oppilasarviointia laajoilla ja tarkoilla hyvän osaamisen kriteereillä toisen, viidennen ja yhdeksännen luokan päättyessä. Kuvion 4.1.1 aaltoviivalla kuvataan opetussuunnitelman kehitysvaiheita: aluksi kehitysvaiheen jyrkkää nousua, sittemmin vastaavanlaista laskua kahdessa ensimmäisessä vaiheessa. Sen sijaan seuraavissa kehitysvaiheissa *ongelmanratkaisussa* ja *kansallisissa päättötavoitteissa* ei nähdä jyrkkää laskua, koska edelleenkin opetussuunnitelmassa korostetaan ongelmanratkaisua, soveltamista ja tavoitteita, joiden arviointiin ohjataan aiempaa tarkemmin.



KUVIO 4.1.1 Matematiikan opetussuunnitelman kehitysvaiheet Suomessa (Neljä ensimmäistä vaihetta Kuparin 1999, 52 mukaan)

Oppikirjat edustavat opetuksen realismia, kritikoi Korkeakoski (2003, 147) opetussuunnitelmia: Oppikirjat ovat yleisimmin käytetty oppimateriaali kaikessa formaalisessa opetuksessa oppitunnista toiseen. Niiden laatua valvovat ajantasaiset markkinavoimat. On naiivia kuvitella, että hallinnollisessa prosessissa syntyneet, toistuvasti epärealistisiksi koetut, linjauksiltaan epävakaat opetussuunnitelman perusteet syrjäyttäisivät oppikirjat. Opetussuunnitelmien perusteiden tulisi perustua järjestelmällisesti tuotettuun tutkimus- ja arviointitietoon sekä niiden meta-analyyseihin (Korkeakoski 2003, 147).

Suomen perusopetuksen vuoden 2004 opetussuunnitelmauudistuksesta onkin systemaattisesti kerätty arviointia opetuksen järjestäjiltä, kouluilta, rehtoreilta, opettajilta ja muilta sidosryhmiltä (Kartovaara 2007). Arviointitiedon pohjalta valmistellaan tulevaisuuden linjauksia. Miksi ei kerätty arviointitietoa myös oppilailta? Hehän ovat varsinaisia tulevaisuuden rakentajia. Suomen uusimmassa opetussuunnitelmassa 2004 painotetaan matemaattisen ajattelun kehittämistä, mutta se on jäänyt avaamatta useimmissa koulun tai kunnan opetussuunnitelmissa. Haasteellisinta 2000-luvun opetussuunnitelmatyössä näyttää olleen aineittaisen arvioinnin kuvaaminen sekä oppimiskäsityksen konkretisointi työtapojen ja oppimisympäristöjen avulla. Useissa koulun ja kunnan opetussuunnitelmissa korostuu edelleenkin kapea käsitys arvioinnista vain arvosanojen ja todistusten antamisena. Opetussuunnitelmissa jää kaipaamaan oppilaiden onnistuneiden matematiikkakokemusten selvittämistä. Myös työtapojen monipuolistaminen on ollut pitkään tavoitteena matematiikassa. Työtapoja pidetään keskeisenä. Työtavoilla voidaan vaikuttaa oppilaiden motivaatioon, tukea ja ohjata oppimista sekä kehittää sosiaalisiakin taitoja. Tämä tutkimus tarjonnee yhden mahdollisuuden selvittää oppilaiden onnistumisen kokemuksia ja työtapojen motivoivuutta matematiikassa.

Unkarissa matematiikan opetussuunnitelman ja opetuksen uudistus alkoi 1950-luvun lopussa Vargan henkilökohtaisina opetuskokeiluina (Varga 1988, 291; 1969b, 73), jotka saivat virallisen kokeiluaseman vuonna 1962 (Varga 1969a, 81; 1969b, 74–75; Halmos & Varga 1978, 226–227). Uuden matematiikan vaihetta Unkarissa nimitetään mm. kompleksiseksi (monipuoliseksi) matematiikaksi, koska uudistuksen tavoitteena oli monipuolistaa matematiikan opetussuunnitelman sisältöjä ja oppilaiden aiempaa myönteisemmät asenteet matematiikkaan. Opetussuunnitelman rinnalla uudistettiin myös oppimateriaaleja ja matematiikan opetusta. Tässä uudistustyössä sai alkunsa Varga–Neményi -opetusmenetelmä, jonka periaatteita käsiteltiin edellisessä luvussa. Suomessa on vahvistettu virallisesti kansallisia perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden muutoksia maltillisemmin kuin Unkarissa, jossa opetussuunnitelmaa on muutettu useita kertoja, 1963, 1965, 1968, 1973, 1978, 1979, 1986 ja 1995 (Dobos, Ocskó & Vásárhelyi 2001). Vuoden 1973 matematiikan opetussuunnitelmassa palattiin perusteisiin, vasta vuonna 1978 vahvistettiin Vargan johtama ja laajasti kokeiltu matematiikan opetussuunnitelma. Ennen vuotta 1978 Unkarin peruskoulussa käytettiin kahta erilaista opetussuunnitelmaa, virallista ja kokeilussa olevaa. Unkarin opetussuunnitelmakäytäntö on siis ollut kirjavaa, koska opetussuunnitelmaan on tehty muutaman vuoden välein hienosäätöä, muutoksia ja tarkennuksia.

Unkarin vuoden 1995 matematiikan opetussuunnitelma on herättänyt kritiikkiä mm. sanallisten tehtävien vähäisen painotuksen (Dobos ym. 2001), unkarilaisten oppilaiden kansainvälisen matematiikkamenestyksen heikentymisen (Szalontai 2000; Vári, Tuska & Krolopp 2002) ja negatiivisten yleisten kouluasenteiden vuoksi (Hercz 2003). Vári ym. (2002) ja Hercz (2003) ovat esittäneet, että opetuksen uudistamisessa on painotettava oppimisen taitoja, myönteisten asenteiden kehittämistä ja matematiikan soveltamistaitoja enemmän kuin formaaleja sisältöjä, jotta oppilaiden asenteet ja edellytykset elinikäiseen oppimiseen olisivat aiempaa myönteisemmät. Unkarin perusopetuksen matematiikan nykyinen opetussuunnitelma 2003 on luonnehdittavissa kehittämistehtävien opetussuunnitelmaksi, jossa painotetaan oppilaan kognitiivista ja emotionaalista kehitystä aiempia opetussuunnitelmia voimakkaammin.

4.2 Suomen matematiikan opetussuunnitelma

Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (POPS 2004) kuvataan matematiikan opetusta tehtävineen ja matematiikan merkitystä oppilaan henkisessä kasvamisessa. Opetuksen tehtävänä on tarjota mahdollisuuksia kehittää matemaattista luovaa ja täsmällistä ajattelua sekä oppia matemaattisia käsitteitä ja ratkaisumenetelmiä. Matematiikan opetuksen tulee ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä ratkaisemaan niitä. Matematiikka on laajamerkityksinen: se edistää oppilaan henkistä kasvua, tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta. Matematiikan opetus etenee systemaattisesti ja luo kestävää pohjaa käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle. Konkreettisuus on tärkeää yhdistettäessä oppilaan kokemuksia ja ajattelua matematiikan abstraktiin järjestelmään. Arkipäivän ongelmia ratkaistaan matemaattisen ajattelun ja toiminnan avulla. Oppilaan oppimisprosessia tuetaan tieto- ja viestintätekniikkaa käyttäen. (Emt. 156.)

Matematiikan opetussuunnitelma on ositettu vuosiluokittain 1–2, 3–5 ja 6–9. Kussakin osiossa on ydintehtävät, tavoitteet, sisällöt ja kuvaus oppilaan hyvästä osaamisesta osioiden nivelkohdassa. Koska tässä tutkimuksessa tarkastellaan perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa, opetussuunnitelmasta käsitellään vain vuosiluokkien 1–5 osioita. Matematiikan opetuksella on kolme ydintehtävää vuosiluokilla 1–2: 1) matemaattisen ajattelun kehittäminen, 2) työskentelytaitojen (keskittymisen, kuuntelemisen ja kommunikoinnin) harjaannuttaminen sekä 3) kokemusten hankkiminen käsitteiden ja rakenteiden muodostumisen perustaksi. Vuosiluokilla 3–5 on neljä ydintehtävää: 1) matemaattisen ajattelun kehittäminen, 2) kokemusten hankkiminen, 3) matemaattisten ajattelumallien pohjustaminen sekä 4) lukukäsitteen ja peruslaskutoimitusten varmentaminen. (POPS 2004, 156, 158).

TAVOITTEET VUOSILUOKILLA 1–5: Oppilas oppii luokilla 1–2 keskittymään, kuuntelemaan, kommunikoimaan ja kehittämään ajatteluaan. Affektiivisena tavoitteena on, että hän saa tyydytystä ja iloa ongelmien ymmärtämisestä ja ratkaisemisesta, vuosiluokan 3–5 oppilas puolestaan saa onnistumisen kokemuksia matematiikan parissa. Vuosiluokan 1–2 oppilas saa monipuolisia kokemuksia eri tavoista esittää matemaattisia käsitteitä, joiden muodostumisprosessissa keskeisiä ovat puhuttu ja kirjoitettu kieli, välineet ja symbolit. Oppilas ymmärtää käsitteiden muodostavan rakenteita. Vuosiluokan 3–5 oppilas tutkii ja havainnoi muodostaakseen matemaattisia käsitteitä, käsitejärjestelmiä ja oppii käyttämään niitä. Vuosiluokan 1–2 oppilas ymmärtää luonnollisen luvun käsitteen ja oppii siihen soveltuvia peruslaskutaitoja. Oppilas luokilla 3–5 oppii myös peruslaskutaitoja ja harjaantuu ratkaisemaan matemaattisia ongelmia. Oppilas luokilla 1–2 oppii perustelemaan ratkaisujaan ja päätelmiään konkreettisin mallein ja välinein, kuvin, kirjallisesti tai suullisesti. Hän löytää ilmiöistä yhtäläisyyksiä ja eroja, säännönmukaisuuksia sekä syyseuraus-suhteita, joita löytää myös 3–5-luokkien oppilas. Hänkin perustelee toimintaansa ja päätelmiään sekä esittää ratkaisujaan muille. Oppilas luokilla 1–2 harjaantuu tekemään havaintoja itselleen merkityksellisistä ja haasteellisista matemaattisista ongelmista, mutta havaintojen pohjalta 3–5-luokkalainen oppii esittämään kysymyksiä ja päätelmiä. Hän oppii käyttämään sääntöjä ja noudattamaan ohjeita. Hän oppii työskentelemään keskittyneesti ja pitkäjänteisesti sekä toimimaan ryhmässä. (POPS 2004, 156, 159).

KESKEISET SISÄLLÖT: Luvuista ja laskutoimituksista luokilla 1–2 opetellaan lukumäärä, -sana ja numerosymbolit, tutkitaan lukujen ominaisuuksia vertailemalla, luokittelemalla, järjestämällä, hajottamalla ja kokoamalla konkreettisilla välineillä. Opetellaan myös kymmenjärjestelmän periaate, joka varmennetaan luokilla 3–5, jolloin tutustutaan myös 60-järjestelmään kellonaikojen avulla. Tällöin myös luokitellaan ja järjestetään lukuja. Luokilla 1–2 opetellaan yhteen- ja vähennyslasku sekä niiden väliset yhteydet luonnollisilla luvuilla, opetellaan myös kertolaskuja ja kertotauluja. Käytetään erilaisia laskutapoja ja välineitä, kuten palikoita, kymmenjärjestelmävälineitä ja lukusuoraa. Harjoitellaan päässälaskua ja konkreettisilla välineillä jakolaskuja, josta luokilla 3–5 opetellaan sisältö- ja ositusjako sekä jaollisuus. Tällöin harjoitellaan myös laskualgoritmeja ja päässälaskua. Luokilla 1–2 konkreettisilla välineillä pohjustettua murtoluvun käsitettä laajennetaan luokilla 3–5 niiden muunnoksiin ja desimaalilukuihin. Tarkastellaan murto-, desimaaliluvun ja prosentin välistä yhteyttä. Opitaan murto- ja desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskua sekä kertomista ja jakamista luonnollisella luvulla. Arvioidaan laskutoimitusten tuloksia, tarkistetaan ja pyöristetään niitä. Käytetään sulkeita. Tutustutaan negatiivisen kokonaisluvun käsitteeseen. Kombinatoriikassa tutkitaan erilaisten vaihtoehtojen lukumäärää luokilla 1–5. (POPS 2004, 156–157, 159).

Lukujen ja laskutoimitusten lisäksi keskeisiä sisältöjä on algebra, jossa luokilla 1–2 tutkitaan säännönmukaisuuksia, suhteita ja riippuvuuksia ja yksinkertaisia lukujonoja, joita luokilla 3–5 tulkitaan ja kirjoitetaan. Tällöin myös opetellaan lausekkeen käsite ja päätellään yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisuja. (POPS 2004, 157, 159).

Geometrian ja mittaamisen sisältöalueella luokilla 1–2 havainnoidaan, kuvaillaan ja nimetään ympäröivän tilan avaruudellisia suhteita ja geometrisia muotoja. Tunnistetaan, selostetaan ja nimetään kaksi- ja kolmiulotteisia muotoja, joita myös tehdään, piirretään, jäljennetään ja rakennetaan, niitä tutkitaan myös luokilla 3–5. Luokilla 1–2 opetellaan geometrian peruskäsitteitä, kuten piste, jana, murtoviiva, puolisuora, suora ja kulma, joita syvennetään 3–5-luokilla mittaamalla ja luokittelemalla kulmia, tutkimalla yhdensuuntaisia ja kohtisuorassa olevia suoria. Tutkitaan ja luokitellaan myös monikulmioita. Luokilla 1–2 tehdään yksinkertaisia peilauksia ja suurennoksia, joiden lisäksi luokilla 3–5 tutkitaan yhdenmuotoisuutta ja mittakaavaa. Tällöin syvennetään peilaamista suoran ja pisteen suhteen, tutkitaan symmetriaa ja yhtenevyyttä konkreettisilla välineillä. Opetellaan ympyrä osineen, piiri ja pinta-ala. Luokilla 1–2 opetellaan pituuden, massan, pinta-alan, tilavuuden, ajan ja hinnan mittaamisen periaate mittavälineitä käyttäen. Opetellaan tärkeimpiä mitta-yksiköitä, tehdään vertailuja ja arvioidaan mittaustuloksia. Luokilla 3–5 vahvistetaan mittaamisen periaatteen ymmärtämistä, mittayksiköiden käyttöä, vertailua ja opetellaan mittayksiköiden muunnoksia. Arvioidaan mittaus-tuloksia ja tarkistetaan niitä. (POPS 2004, 157, 159–160).

Tietojen käsittelyn, tilastojen sekä todennäköisyyden sisältöalueella luokilla 1–2 etsitään, kerätään, tallennetaan ja esitetään tietoja. Luetaan yksinkertaisia taulukoita ja diagrammeja, joilla kuvataan koottuja tietoja. Näiden lisäksi luokilla 3–5 opetellaan koordinaatistoa, keskiarvon käsitettä ja laskemista. Pohjustetaan tyyppiarvon ja mediaanin käsitteitä. Hankitaan kokemuksia klassisesta ja tilastollisesta todennäköisyydestä. (POPS 2004, 157, 160).

Suomen perusopetuksen opetussuunnitelmassa (2004, 157–158, 160–161) on oppilaan arviointia ohjaavat kuvaukset hyvästä osaamisesta toisen luokan ja viidennen luokan päättyessä. Kuvauksissa on yksityiskohtaiset ohjeet ajattelun ja työskentelyn taitojen lisäksi edellä esitellyistä sisältöalueista.

4.3 Unkarin matematiikan opetussuunnitelma

Nemzeti Alaptanterv (NAT 2003, 44), Unkarin kansallinen perusopetuksen opetussuunnitelma, esittelee matematiikan opetuksen tarkoituksen ja tehtävät. Sen tarkoituksena on antaa uskottava, yhtenäinen kokonaiskuva matematiikasta, ei pelkästään valmiina, jäykkänä tietojen järjestelmänä, vaan ainutlaatuisena inhimillisenä kognitiivisena toimintana, älyllisenä käyttäytymisenä. Opetus rikastuttaa persoonallisuutta, sekä ajattelua että emootiota tarjoamalla soveltamiskelpoisia tietoja. Kehittämällä matemaattista ajattelua se kohentaa yleisesti ajattelun kulttuuria. Opetuksen tehtävänä on tuoda esille matematiikkaa monipuolisena, esimerkiksi kulttuuriperinteenä, ajattelutapana, luovana toimintana, ajattelun riemuna, järjestyksenä ja esteettisyytenä, tieteenä, muiden tieteiden ja kouluaineiden apuna, arkielämän ja eri ammattien välineenä. Opetuksen tarkoitus on avata matematiikan ja matemaattisen ajattelun maailmaa opettamalla eri aihepiirejä luonteenomaisissa yhteyksissään. Matemaattisten käsitteiden ja ajattelutavan kypsyminen vaatii opetukselta laajenevaa spiraalirakennetta, joka vastaa lasten ja nuorten sekä ikää että yksilöllistä kehitystä ja kiinnostusta, monimutkaistuvia tietoja ja kehittyvää abstraktiokykyä. Spiraalirakenne antaa tilaa ja aikaa sekä hitaasti edistyville että lahjakkaille oppilaille. Päämäärien ja tehtävien saavutettavuuteen vaikuttaa ratkaisevasti 1–4-luokkien oppilaiden kehitysvaihe, jota käsitellään laajemmin kuin ylempien luokkien, jotta aineenopettajat tuntisivat alempien luokkien opetusta. Jotta päämäärät ja tehtävät saavutettaisiin, oppilaiden kiinnostus, ammattivalinta ja eriyttäminen otetaan huomioon oppimateriaaleja ja opetusmenetelmiä valittaessa.

Matematiikan tärkeimmät kehittämistehtävät tiivistettynä ovat

- kasvattaa persoonallisuuden kunnioittamiseen
- kehittää puhuttua ja kirjoitettua kommunikaatiokulttuuria sekä argumentteihin perustuvaa väittelytaitoa
- ohjata matematiikan erittäin tärkeän roolin ymmärtämiseen luonnon- ja yhteiskuntatieteissä ja humanistisessa kulttuurissa
- kehittää ilmiöihin sopivien mallien, ajattelutapojen ja menetelmien soveltamistaitoa
- kehittää matemaattisten tietojen soveltamista käytännössä
- kehittää historiankatsomusta
- kehittää matematiikan opiskelutaitoja, ongelmanratkaisua ja luovaa ajattelua
- kehittää täsmällistä, pitkäjänteistä ja kurinalaista työntekoa sekä itsesäätelyä
- harjaannuttaa perustoimintojen (esim. mittausten, geometristen piirustusten) ja toimitusten (esim. aritmetiikan, algebran ja transformaatioiden alueella) automatisoitunutta suorittamista (NAT 2003, 44).

Unkarin perusopetuksen opetussuunnitelmassa 2003 matematiikan kehittämistehtävät tarkentuvat seitsemäksi osa-alueeksi, jotka ovat seuraavat: 1) orientoituminen tilassa, ajassa ja maailmaan määrällisissä suhteissa, 2) kognitiiviset toiminnot, 3) tietojen ja taitojen soveltaminen, 4) ongelmien käsittely ja ratkaisu 5) luominen ja luovuus, 6) tahdonalaisten, emotionaalisten ja itseä kehittävien kykyjen sekä yhteistyöhön liittyvien arvojen kehittäminen ja 7) tietoisuus matematiikan rakentumisen periaatteista (emt. 45–61). Seuraavaksi tarkastellaan lähemmin kuutta kehittämistehtävää vuosiluokilla 1–4, seitsemäs kehittämistehtävä on tarkoitettu ylemmille luokille.

1. Orientoituminen tilassa, ajassa ja määrällisissä suhteissa

Orientoidutaan lähiympäristöön karkeamotorisesti toistamalla liikesarjoja ja kehittämällä liikemuistia. Orientoidutaan myös orientoitumispisteiden mukaan, jolloin opetellaan käsitteet vieressä, alla, yllä, välissä, edessä, takana, vasen ja oikea. Harjoitellaan orientoitumista tasossa esimerkiksi paperilla ja tasoon kuvatussa tilassa sanallisen ohjeen mukaan. Kehitetään menneen, nykyajan ja tulevan ymmärtämistä tiettynä ajankohtana (äsken, tätä ennen, kohta, tämän jälkeen) ja jatkuvasti muuttuvina suhdekäsitteinä (ennen ja jälkeen jotain). Vertaillaan esineitä, henkilöitä, kuvioita, ilmiöitä ja kokonaisuuksia niiden määrällisten ominaisuuksien (korkeuden, leveyden, pituuden, massan, tilavuuden, vetoisuuden, kappalemäärän) mukaan. Pohjustetaan arviointia ja lukukäsitettä. Ilmaistaan luvuilla määrällisiä ominaisuuksia ja tulkitaan lukuja todellisuuden määrillä. Käsitellään esimerkiksi mittalukuja, kappalemääriä, luonnollisia, rationaali-, reaalilukuja, täsmällisiä lukuja ja likiarvoa.

2. Kognitiiviset toiminnot

2.1 Kokemusten hankkiminen, tiedostaminen, ilmaiseminen, tallentaminen, tulkitseminen ja lukeminen

Kokemuksia hankitaan siirtelemällä hienomotorisesti esineitä, käyttämällä kynää ja paperia sekä havainnoimalla staattisia kohteita. Rekonstruoidaan keholla eri aistein havainnoitu tilanne tai kuva ja kehitetään samalla havainnointitarkkuutta. Vertaillaan esineitä järjestäen ja luokitellen niitä tunnistamalla yhteisiä ja erottavia ominaisuuksia. Harjoitellaan myös ominaisuuksien ilmaisemista negaationa. Lajitellaan ilmiöitä kahden kriteerin mukaan käyttäen joukkoja välineenä. Otetaan käyttöön numerot.

Pohjustetaan kahden muuttujan operaation tulkintaa kokemuksellisesti, tulkitaan kahden muuttujan operaatiota konkreettisten operaatioiden synteesinä. Opetellaan laskutoimitusten merkit ja otetaan käyttöön lukujen yhdistelmämuodot. Havainnoidaan muutoksia, esitetään niitä karkeamotorisesti keholla ja hienomotorisesti esineillä. Esitetään laskutoimituksia esineillä. Aloitetaan muutoksia kuvaavien operaatioiden tulkinnan kokemuksellinen pohjustaminen ja otetaan käyttöön muutosnuoli. Laaditaan funktioita, jonoja ja matemaattisia malleja muutoksen kuvaamiseksi. Aloitetaan geometriaan kuuluvien transformaatioiden säilyvien ja muuttuvien ominaisuuksien tiedostaminen. Opitaan sanallisesti ilmaistun tilanteen ja tapahtuman havainnointi ja tulkinta: olennaisten ja epäolennaisten tietojen erottaminen. Opetellaan sanallisen tehtävän matemaattisen tekstin laatiminen ja sen matematisointi: matemaattisten mallien laatiminen ja tulkinta tilanteeseen sopivasti, esimerkiksi yksinkertaistettu piirros, lukutehtävä, avoin lause, jono, taulukko, yhtälö tai graaffeja. Harjoittelun kohteena ovat myös matematiikan merkkien (numerot, laskutoimitusten merkit, $<$, $>$, $=$, $\neq$, $\approx$, $\leq$, $\geq$) ymmärtäminen. Tulkitaan tilanteesta tai tapahtumasta sanallisesti muotoiltua matemaattista tekstiä. Tulkitaan konkreettisia matemaattisia malleja (avointa lausetta, jaksottaista kuvausta ym.) keksimällä siihen sopiva sanallinen tehtävä. Havaitaan ja tuotetaan säännönmukaisuuksia.

2.2 Jäljittelevä ja luova mielikuvitus

Seurataan kerrottua, luettua tapahtumaa, ilmaistaan se esittämällä, rakennelmilla tai kuvilla. Kuvitellaan tapahtuman jatko ja esitetään se. Kuvitellaan tapahtuma tai tilanne abstraktikuvien ja merkkien perusteella. Kuvitellaan todellinen tilanne, tapahtuma tai yhteys lukujen, laskutoimitusten, muiden matemaattisten symbolien (kuvien, kuvaparien, jaksottaisten kuvioiden, diagrammien, taulukkojen, laskutoimitusten, avointen lauseiden ym.) avulla. Palautetaan mieleen vakiomittayksiköihin kuuluvien määrien, niiden kerrannaisten ja murto-osien mielikuvien perusteella. Kuvitellaan tietty esine tai järjestys eri näkökulmista, esimerkiksi rakennetaan kappale eri näkökulmista, eri projektioista. Laaditaan luonnos ennen rakentamista ja verrataan tulosta luonnokseen. Piirretään geometrisesti eri välineillä ja menetelmillä. Askarrellaan mielikuvituksellisia siirtoja. Ennakoidaan ongelman ratkaisua, muotoillaan se sanallisesti; verrataan ratkaisun jälkeen ennakoitua ja saatua ratkaisua.

2.3 Muisti

Palautetaan mieleen liikkeitä ja muotoja taktillisesti karkea- ja hienomotorisesti. Kehitetään lukujen, yhteyksien ja geometristen kuvioiden muistamista liikkumalla. Kehitetään kuvamuistia staattisista tilanteista (esim. kuvan, tilanteen tai yksityiskohtien muistamista; vakiomittayksiköiden suuruuden muistamista; kokonaisuuden muistamista; kappalemäärien, elementtien, järjestelyn, järjestyksen muistamista; staattisten kuvien kuvioiden ja rakenteiden muistamista; merkkien asennon tai muodon muistamista; funktioiden graafisen kuvan muistamista). Kehitetään kuulomuistia muistelemalla suullisesti kerrotuista tarinoista yksityiskohtia ja etenemisjärjestystä. Niistä laaditaan mm. piirroksia, kombinatorisia laskuja ja määritelmiä. Opetellaan määritelmät.

Opetellaan muistamista auttavien välineiden käyttöä. Opetellaan kahden yhteenlaskettavan summat ja vastaavat erotukset lukualueella 0–20. Opetellaan kertotaulut, tuttujen kappaleiden ja tasokuvioiden ominaisuudet. Opetellaan käyttämään algoritmeja, ratkaisemaan ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä, laskemaan yksinkertaisilla murtoluvuilla. Painetaan mieleen väittämiä, sääntöjä, yhteyksiä ja relaatioita. Argumentoidaan, väitellään ja tehdään johtopäätöksiä uusissa tilanteissa.

2.4 Ajattelu

Vertaillaan ja tunnistetaan yhtäläisyyksiä tai erilaisuuksia. Luokitellaan yhden tai useamman kriteerin perusteella. Järjestetään jonoja. Arvioidaan tehtävien tietoja. Ohjataan oppilasta oivaltamaan ja ymmärtämään: oppilas ymmärtää sisällöltään tutun ohjeen ja ilmaisun; oppilas ymmärtää uudessa tilanteessa annetun ohjeen esimerkin avulla ja ilman sitä; oppilas ymmärtää kysymyksen sisällön esineellisessä tilanteessa ja sanallisessa ongelmassa; oppilas ymmärtää matemaattisia malleja (lukuja, laskutoimituksia, avoimia lauseita, jonoja, funktioita, taulukoita, piirrettyjä malleja, diagrammeja) ja koodaa niitä toiseen muotoon. Keksitään yhdessä malliin sopivia esimerkkejä ja ongelmia. Pohditaan omia ajatteluprosesseja. Harjoitellaan yksinkertaista todistamista. Abstrahoidaan ja konkretisoidaan. Tulkitaan yksityisiä kokemuksia, malleja; yleisiä kokemuksia ja universaaleja malleja, esim. sormilaskutapoja; lukujärjestelmiä ja lukujen eri nimiä. Muodostetaan pienistä luvuista luonnollisen luvun ja yksikkömurtoluvun käsite. Pohditaan ajattelun ja kielen yhteyttä ja niiden keskinäistä vuorovaikutusta. Verrataan arkikieltä ja matemaattista ilmaisua. Opetellaan merkit (numerot ja =, $\neq$, $<$, $\leq$,+, $\cong$, $\to$, $\emptyset$, …, $\pm$ ym.). Kehitetään ymmärtävää ja analysoivaa lukemista. Noudatetaan kirjallista ohjetta ja rekonstruoidaan kertomuksia. Seurataan suullista kerrontaa. Esitetään koettu prosessi. Noudatetaan, tulkitaan ja laaditaan algoritmeja. Etsitään syyseuraus-suhteita.

2.5 Tietojen järjestäminen ja tietokantojen käyttö

Järjestetään käsitteitä keskinäisissä suhteissa ala-, ylä- ja rinnakkaiskäsitteisiin. Tutustutaan tietojen järjestämistä auttaviin välineisiin ja algoritmeihin esimerkiksi puudiagrammiin, taulukoihin ja tietokoneohjelmiin. Käytetään opiskelussa manuaalisia välineitä tarkoituksenmukaisesti (värisauvoja, mittanauhaa, loogisia kokoelmia, pelejä, lukutaulukoita, mallintamis-kokoelmia). Käytetään kirjoja (matematiikan taskukirjoja, ammattikirjoja, populääritietokirjoja, tietosanakirjoja, tehtäväkokoelmia, taulukoita, kaavakokoelmia), laskukoneita ja tietokoneita. Autetaan opettajaa ja kavereita ja pyydetään heiltä apua, mitä edistää hyvä työilmapiiri, kerhot, leirit ja kilpailut. Tutustutaan opiskeluteknologiaan ja niiden järkevään, interaktiiviseen käyttöön (internetiin, CD-levykkeisiin). Ollaan avoimia uusille asioille ja luotetaan itseen uusissa asioissa.

3. Tietojen ja taitojen soveltaminen

Sovelletaan välittömästi uusia tietoja, taitoja ja oivalluksia yksinkertaisten ohjeiden noudattamiseen. Käytetään aiempia tietoja, taitoja, oivalluksia niiden omaksumistilanteen kanssa analogisessa tilanteessa (esim. yhtälöryhmän ratkaisemisessa opitulla menetelmällä). Sovelletaan aiempia tietoja uuteen tilanteeseen; tehdään aavistuksia ja tarkastetaan niitä. Sovelletaan uusia kokemuksia aiempiin esikäsitteisiin ja käsitteisiin.

4. Ongelmien käsittely ja ratkaisu

Tunnistetaan ongelma elämyksellisesti ja kehitetään ongelmaherkkyyttä. Pyritään ymmärtämään tilanteesta ja kertomuksesta luettu ongelma; sovelletaan ymmärrystä tukevia välineitä ja ratkaistaan ongelma matemaattisen mallin avulla. Opitaan ja sovelletaan matemaattisia malleja, esimerkiksi avoimia lauseita, graaffeja, jonoja, funktioita, funktiokuvauksia, tietokoneohjelmia, tilastollisia analyyseja ja niiden rajoituksia (tarkkuutta, tulkittavuutta). Tarkastetaan itsenäisesti ongelmanratkaisuja ja otetaan vastuuta tuloksesta. Pyritään erilaisiin ratkaisuihin ja vertaillaan vaihtoehtoisia ratkaisuja. Verrataan tulosta alkuperäiseen ongelmaan. Analysoidaan tulosta suhteessa ehtoihin, edellytyksiin, arvioituun tulokseen ja todellisuuteen. Muotoillaan vastaus suullisesti, myöhemmin myös kirjallisesti.

5. Luominen ja luovuus

Luodaan objekteja vapaasti, kopioimalla ja annettujen ehtojen mukaisesti. Luodaan kokonaisuuksia ja joukkoja annetun ehdon mukaisesti, luodaan myös määrittelevä ominaisuus sekä sen negaatio. Ilmaistaan nimityksiä, merkintöjä ja symboleja aluksi tilapäisillä nimityksillä esikäsitteisiin sopivalla arkikielellä. Kehitetään lukujärjestelmiä ja lukujärjestelmäajattelua lukukäsitteen rakentuessa. Muodostetaan jonoja ja jatketaan aloitettuja jonoja, täydennetään niitä annetun säännön mukaisesti soveltamalla oivallettua yhteyttä. Mallinnetaan tilanteita, jotta voitaisiin ymmärtää ja tulkita niitä käsitteen muodostamista varten. Pyritään käsittämään luonnollinen luku erilaisten sisältöjen (kappalemäärän, mittaluvun, arvon mitan, merkin) malliksi. Pyritään ymmärtämään murtoluvut, negatiiviset luvut, kokonaisluvut, lukusuora ja aritmeettiset toimitukset tapahtumien ja relaatioiden matemaattisina malleina. Pyritään ymmärtämään myös yhtälöt ja epäyhtälöt; relaatiot, funktiot ja jonot; kuviot ja diagrammit malleiksi. Muotoillaan aavistuksia sanallisesti. Pyritään ajattelemaan divergentisti. Tulkitaan mielessä manuaalisesta toimintaa. Hajotetaan ymmärretty ongelma osa-ongelmiksi ilman mallia tai mallin avulla; järjestetään osa-ongelmat niiden ratkaisun kronologian mukaan; tiedostetaan näin luotu suunnitelma kertomalla, kirjoittamalla ja merkkijonolla (prosessi-suunnittelu).

6. Tahdonalaisten, emotionaalisten ja itseä kehittävien sekä yhteistyöhön liittyvien arvojen kehittäminen

6.1. Kommunikaatio
Kommunikoidaan ennen kielen käyttöä esittämällä, rakentamalla, näyttämällä ja matkimalla. Käsitellään nimityksiä, sopimuksia, merkintöjä niiden ymmärtämiseksi, ensin käytetään arkikieltä esikäsitteiden ilmaisemisessa, sitten yksinkertaisia termejä ja merkitsemistapoja käsitteille; tarkennetaan ilmaisuja, esimerkiksi lukuja ja niiden merkitsemistä, laskutoimitusten merkitsemistä, yhtäläisyyden ja epäyhtäläisyyden merkitsemistä. Tarkennetaan myös mittauksia ja mittayksiköitä.

6.2. Yhteistyö
Työskennellään yhteistyössä pari- ja pienryhmänä sekä koko luokan ryhmänä toisia kuunnellen. Otetaan omaa ja yhteistä vastuuta. Harjaannutaan työn

suunnittelemiseen, järjestämiseen ja jakamiseen. Otetaan huomioon yksilöllisiä taipumuksia ja kykyjä yhteisen tuloksen saavuttamiseksi sekä kunnioitetaan niitä yksilön kehityksen edistämiseksi. Korostetaan suvaitsevaisuutta ja keskinäistä avunantoa. Harjoitellaan keskustelua ja ilmaisutaitoa.

6.3. Motivaatio
Motivaatio edistää maailmaan suuntautumista. Matemaattiset tiedot ja taidot auttavat välittömästi maailman esineiden ja ilmiöiden omaksumista. Ne tarjoavat välineen ja menetelmän eri ominaisuuksien havainnoimiseen, esineiden ja ilmiöiden luonnehtimiseen. Aluksi uteliaisuus on kapeaa, mutta yhä laajenevaa. Se voi olla yksi tärkeä opiskelun motiivi. Opitaan arvostamaan matematiikkaa ja sen saavutuksia ja hyödyllisyyttä muissa tieteissä ja käytännössä. Houkutelkoot ajatusten ja ajatuskulkujen, kuvioiden ja rakenteiden kiinnostavuus ja kauneus itse kutakin opiskelemaan matematiikkaa kouluaineena. Opitaan käyttämään matematiikan menetelmiä ja välineitä. Matematiikan menetelmillä ja välineillä on hyvässä tapauksessa myönteinen siirtovaikutus ajattelun lukuisille alueille. Matematiikan opiskeluun motivoi omien kykyjen kehittäminen ja sivistys. Elämykset *Minäkin tiedän, Minäkin osaan, Minäkin pystyin ratkaisemaan* ja *Minäkin sen keksin*! ovat kehityksen motiiveja. Itsenäistymisen ja riippumattomuuden vaatimus siirtää ulkokohtaiset motiivit taustalle ja tekee ne kokonaan tarpeettomiksi.

4.4 Opetussuunnitelmien kokoavaa vertailua

Kokoavassa vertailussa tarkastellaan joitakin yhtäläisyyksiä ja eroja sekä Suomen että Unkarin matematiikan opetussuunnitelmissa. Vertailun tarkoituksena on luoda perustaa oppilaiden kokeman matematiikan opetussuunnitelman mahdollisten erojen ja yhtäläisyyksien ymmärtämiselle. Opetussuunnitelmia peilataan myös Varga–Neményi -opetusmenetelmään ja matematiikan opetukseen suomalaisittain.

Molempien maiden opetussuunnitelmien alussa esitellään matematiikan opetuksen tarkoitus ja tehtävät, jotka ovat Unkarin opetussuunnitelmassa laajemmat ja tarkemmat kuin Suomen. Unkarissa matematiikan opetuksen ensisijainen tehtävä on antaa oppilaille yhtenäinen kokonaiskuva matematiikasta. Laaja ja yhtenäinen käsitteiden pohjustus on myös Varga–Neményi -opetusmenetelmän pedagogisissa periaatteissa (ks. lukua 3.1.4). Käsitteiden ymmärtämistä korostetaan suomalaisissa matematiikan mahdollisessa opetussuunnitelmassa (oppikirjojen opettajanoppaissa ja toimintavälineiden käytössä) ja opetusmenetelmissä (vrt. lukuihin 3.2.1 ja 3.2.2). Matematiikkakuvaa Suomen opetussuunnitelmassa ei eksplisiittisesti mainita. Molemmissa opetussuunnitelmissa on tarkoituksena edistää oppilaan henkistä kasvua ajattelua kehittämällä. Unkarissa tavoitteena on oppilaan persoonallisuuden kehittäminen ja yleisen ajattelukulttuurin kohentaminen.

Matematiikan opetuksen on Suomessa edettävä systemaattisesti, jotta käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle syntyy riittävä perusta. Unkarissa taas avataan matemaattisen ajattelun maailmaa ja edetään spiraaliperiaatteen mukaisesti, jolloin samat sisällöt toistuvat usein laajentuen ja syventyen. Eteneminen opetuksessa spiraalina on Varga–Neményi -opetusmenetelmänkin pedagoginen periaate (ks. lukua 3.2). Näin opetussuunnitelma ja -menetelmä muodostavat yhtenäisen jatkumon. Spiraalirakenteen tarkoituksena on mahdollistaa lahjakkaiden ja hitaammin edistyvien oppilaiden oppimisen eriyttäminen.

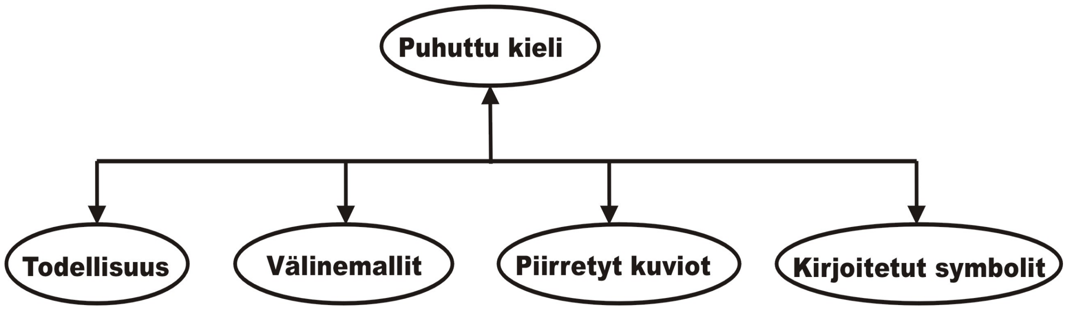
Unkarin opetussuunnitelma painottaa, että oppimateriaalien ja opetusmenetelmien valinnan on perustuttava oppilaiden kiinnostukseen, jotta opetuksen päämäärät saavutettaisiin. Suomessa opettajalla on opetusmenetelmällinen vapaus. Suomen opetussuunnitelman perusteissa (2004, 17) kuitenkin todetaan, että opetuksessa tulee käyttää oppiaineelle ominaisia ja monipuolisia työtapoja, joilla tuetaan ja ohjataan oppilaan oppimista. Suomalaiset matematiikan oppikirjojen opettajanoppaat ja opetusmenetelmät ohjaavat opettajaa käyttämään monipuolisia opetusmenetelmiä ja työtapoja (vrt. lukuun 3.2).

Molemmat opetussuunnitelmat on ositettu vuosiluokittain, Suomessa 1–2, 3–5 ja 6–9, Unkarissa 1–4, 5–6 ja 7–8. Unkarin opetussuunnitelman osiorakennetta selittänee se, että oppilaat siirtyvät viidenneltä luokalta aineopetukseen, Suomessa siirrytään aineopetukseen yleensä vasta perusopetuksen yläkoulussa seitsemänneltä luokalta. Vuosiluokkien 1–4 unkarilainen matematiikan opetussuunnitelma on tarkempi kuin ylempien luokkien, minkä tarkoituksena on edistää aineopettajan oppilaantuntemusta. Suomessa opetuksen ydintehtävät eritellään vuosiluokkaosioittain, mutta Unkarissa kehittämistehtävät ovat yhtenä kokonaisuutena. Unkarin matematiikan opetuksen ensimmäisenä, siis tärkeimpänä, kehittämistehtävänä on kunnioittaa oppilaan persoonallisuutta, Suomessa luokilla 1–2 ja 3–5 ensimmäinen ydintehtävä on kehittää oppilaan matemaattista ajattelua.

Unkarin opetussuunnitelmassa sisältöalueiden otsikot eivät ole matemaattisia, vaan ne kuvaavat oppilaan henkisiä toimintoja kuten mielikuvitusta tai muistia. Sisältöalueiden luettelot Unkarin opetussuunnitelmassa kuvaavat useimmiten oppilaan oppimispolkua konkreettisesta abstraktiin. On huomattava, että Unkarin opetussuunnitelma painottaa Suomen opetussuunnitelmaa useammin matematiikan oppimisen affektiivisen alueen tavoitteita, kuten motivaatiota ja emootioita. Oppilaan elämykset mm. oivaltamisen ilo nähdään kehityksen motiiveina, Suomen opetussuunnitelmassa tavoitteena on oppilaan ilo ongelmien ymmärtämisestä ja ratkaisemisesta. On eri asia sanoa, minä tiedän, kuin, minäkin tiedän. Jälkimmäinen ilmaus Unkarin matematiikan opetussuunnitelmassa tähdentää myös muiden osaamisen kunnioitusta, ei omaa paremmuutta suhteessa toisiin.

Molemmissa opetussuunnitelmissa pidetään tärkeänä ongelmanratkaisua, joka Suomen opetussuunnitelmassa esitetään matematiikan opetuksen yleisperiaatteissa, mutta ei itsenäisenä sisältöalueena, kuten Unkarin opetussuunnitelmassa, jossa korostetaan myös oppilaan luovuutta. Niin

Suomen kuin Unkarinkin matematiikan opetussuunnitelmassa nähdään olennaisena, että oppilas saa todellisuuteen perustuvia kokemuksia, joita voidaan mallintaa, esittää välineillä, piirretyillä kuvioilla, kielentää aluksi lapsen omalla arkikielellä, myöhemmin täsmällisillä matematiikan termeillä ja symboleilla sekä puhuen että kirjoittaen. Tätä molempien maiden opetussuunnitelmien yhtäläisyyttä viiden esitysmuodon vuorovaikutuksesta matematiikan oppimisessa havainnollistetaan alla olevassa kuviossa 4.4.1.



KUVIO 4.4.1 Viiden esitysmuodon vuorovaikutus

Todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen on myös Varga–Neményi -opetusmenetelmän ensimmäinen pedagoginen periaate (ks. lukua 3.1), jossa korostetaan kielen merkitystä matematiikan oppimisessa. Viidellä esitysmuodolla pyritään edistämään oppilaan matemaattisen käsitteen oppimista, jossa edetään konkreettisesta abstraktiin ja päinvastoin oppilaan edellytysten pohjalta. Viiden esitysmuodon vuorovaikutuksessa on nähtävissä yhtäläisyydet Varga–Neményi -opetusmenetelmän periaatteiden kanssa. Näitä ovat mm. abstraktion tie sekä toimintavälineiden runsas ja monipuolinen käyttö (ks. lukuja 3.1.2 ja 3.1.3). Suomalainen mahdollinen opetussuunnitelmakin (oppikirjojen opettajanoppaat ja toimintavälineet) ja opetusmenetelmätkin korostavat viiden esitysmuodon hyödyntämistä opetuksessa (vrt. lukuun 3.2).

Unkarin opetussuunnitelma on kehittämissuuntautunut, kun taas Suomen opetussuunnitelma on arviointiorientoitunut. Tämä ero näkyy opetussuunnitelmien esittämistavassa: Suomen opetussuunnitelma etenee tavoitteista sisältöihin päätyen hyvän osaamisen tarkkoihin kuvauksiin. Arviointia Unkarin matematiikan opetussuunnitelmassa ei mainita, vaan Unkarin virallisessa lehdessä, Magyar Közlönyssä (2003/43, 16–28), on annettu täsmälliset matematiikan arviointiohjeet vuosiluokille 1–4 vuosiluokittain ja matematiikan sisältöalueittain. Oppilasarviointi jätetään käsittelemättä tässä yhteydessä, koska tutkimuksen tarkoituksena ei ole arvioida koettua matematiikan opetussuunnitelmaa arviointikriteereillä.

5 KUINKA TAVOITTAA KOETTUA OPETUSSUUNNITELMAA MATEMATIIKASTA?

Tämän tutkimuksen peruslähtökohtana on, että oppilas luo aktiivisesti omaa opetussuunnitelmaansa tulkiten virallista tarkoitettua, mahdollista opetussuunnitelmaa ja toteutettavaa matematiikan opetussuunnitelmaa eikä vain passiivisesti vastaanota niitä. Oppilaan tulkinta opetussuunnitelmista, hänen kokemansa matematiikan opetussuunnitelma, nähdään tärkeänä ja hyödyllisenä pyrittäessä ymmärtämään oppilaan toimintaa matematiikassa. Tässä tutkimuksessa kuvataan ja verrataan suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa yhtäläisyyksien ja erojen löytämiseksi. Koettua opetussuunnitelmaa peilataan Varga–Neményi -opetusmenetelmään, matematiikan opetukseen suomalaisittain sekä Suomen matematiikan opetussuunnitelmaan 2004 että Unkarin matematiikan opetussuunnitelmaan 2003.

Koetun matematiikan opetussuunnitelman nähdään syntyvän tunteiden, asenteiden, uskomusten ja minäkäsityksen suodattamana. Näiden koettua opetussuunnitelmaa suodattavien tekijöiden käsitteellisen hahmottamisen perusteita käsiteltiin suhteellisen perusteellisesti luvussa kaksi, jossa pyrittiin erityisesti perusopetuksen alakouluikäisten lasten ja nuorten näkökulman tavoittamiseen matematiikasta. Uljens (1993, 145–146) kritikoi fenomenografisia lähestymistapoja siitä, etteivät ne ota huomioon yksilön käsitysten subjekti- ja kontekstisidonnaisuutta, jolloin sekä ihminen että maailma unohdetaan. Kritiikin ymmärretään koskevan laadullista hermeneuttis-fenomenologista lähestymistapaakin, jota tämä käsillä oleva pedagoginen tutkimus edustaa. Yksi mahdollisuus välttää tämä ongelma on kehittää tutkimuksellinen lähestymistapa, jolloin otetaan huomioon kokemuksen keskeiset piirteet unohtamatta sosiaalisia, kulttuurisia ja historiallisia ulottuvuuksia, joihin kyseinen kokemus on yhteydessä (Emt. 145–146). Paras tapa päästä sisälle toisen elämismaailmaan ja kokemukseen on osallistua siihen (ks. liitettä 1) ja paneutua alan kirjallisuuteen (van Manen 1997, 69). Oppilaiden kokeman matematiikan opetussuunnitelman ymmärtämiseksi on tarkasteltu luvussa kaksi matematiikan opetusta lasten, nuorten, opiskelijoiden ja tutkijoiden silmin sekä Suomessa että

Unkarissa. Koska aikuiselle, opettajalle ja tutkijalle on haaste ymmärtää itseään nuoremman kokemusta, luvussa kaksi tarkasteltiin myös eri puolilta maailmaa olevien oppilaiden suhdetta matematiikkaan. Luvussa kolme pohdittiin matematiikan unkarilaisen Varga–Neményi -opetusmenetelmän periaatteita, niiden teoreettisia taustoja ja tutkimustuloksia opetusmenetelmän vaikutuksista Unkarissa. Luvussa kolme pohdittiin myös matematiikan opetusta suomalaisittain. Luvussa neljä tarkasteltiin Suomen matematiikan opetussuunnitelmaa 2004 ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelmaa, Nemzeti Alaptanterv, 2003.

Luvussa viisi tutkimusongelmien jälkeen esitellään tutkittavat oppilaat. Pohditaan tutkijan suhdetta tutkittaviin oppilaisiin, tutkimusaineiston perusteita ja hankkimista, minkä jälkeen esitellään narratiivisen aineiston analysointi. Vertaisselvittäjä kyseenalaistaa aineiston analysointia luotettavuuden edistämiseksi.

5.1 Tutkimuksen ongelmat

Tutkimuksen ongelma-alueet jakautuvat tutkimusryhmittäin suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden kokeman matematiikan opetussuunnitelman selvittämiseen sekä heidän kokemiensa matematiikan opetussuunnitelmien vertailuun. Ongelmat tutkimusryhmittäin ja ongelma-alueittain ovat seuraavat:

1. Suomalaisten perusopetuksen neljännen luokan Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaiden kokema matematiikan opetussuunnitelma

1.1 Millaisia uskomuksia suomalaisilla Varga–Neményi -opetusryhmän oppilailla on matematiikasta, sen opetuksesta ja oppimisesta?

1.2 Miten oppilaat asennoituvat matematiikkaan?

1.3 Millaisia käsityksiä oppilailla on itsestään matematiikan oppijoina?

2. Unkarilaisten perusopetuksen neljännen luokan Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaiden kokema matematiikan opetussuunnitelma

2.1 Millaisia uskomuksia unkarilaisilla oppilailla on matematiikasta, sen opetuksesta ja oppimisesta?

2.2 Miten oppilaat asennoituvat matematiikkaan?

2.3 Millaisia käsityksiä oppilailla on itsestään matematiikan oppijoina?

3. Suomalaisten perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden kokema matematiikan opetussuunnitelma, kun matematiikan oppimista on ohjattu suomalaisittain

3.1 Millaisia uskomuksia suomalaisilla oppilailla on matematiikasta, sen opetuksesta ja oppimisesta?

3.2 Miten oppilaat asennoituvat matematiikkaan?

3.3 Millaisia käsityksiä oppilailla on itsestään matematiikan oppijoina?

4. Suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden kokeman matematiikan opetussuunnitelman yhtäläisyyksiä ja eroja

4.1 Millaisia yhtäläisyyksiä ja eroja suomalaisten ja unkarilaisten neljännen luokan oppilaiden koetussa matematiikan opetussuunnitelmassa on?

On huomattava, ettei toisen suomalaisryhmän matematiikan oppimista ole ohjattu matematiikan unkarilaisella Varga–Neményi -opetusmenetelmällä vaan suomalaisittain.

5.2 Tutkittavat oppilaat

Tutkittuja oppilaita oli yhteensä 64. Oppilaat olivat 9–10-vuotiaita neljäsluokkalaisia suomalaisen perusopetuksen kahdelta neljänneltä luokalta ja unkarilaisesta peruskoulusta samanikäiset oppilaat yhdeltä luokalta. Toisen suomalaisen neljännen luokan matematiikan opiskelua oli ohjattu ensimmäisestä luokasta alkaen Varga–Neményi -opetusmenetelmää käyttäen. Tässä ryhmässä oli 20 oppilasta, kymmenen tyttöä ja kymmenen poikaa. Toisen suomalaisen neljännen luokan oppilaat opiskelivat matematiikkaa suomalaisittain. Oppilaita tässä ryhmässä oli 21, joista oli 12 tyttöä ja yhdeksän poikaa. Unkarilaisessa luokassakin käytettiin matematiikan opetuksessa Varga–Neményi -opetusmenetelmää. Oppilaita unkarilaisella neljännellä luokalla oli 23, joista 14 tyttöä ja yhdeksän poikaa. Suomalaisessa luokassa, jossa käytettiin Varga–Neményi -opetusmenetelmää, oli tyttöjä ja poikia yhtä paljon, kun taas kahdessa muussa tutkitussa luokassa oli tyttöjä enemmän kuin poikia (ks. taulukkoa 5.2.1). Tutkimuskoulut Suomessa ja Unkarissa ovat keskisuuria kaupunkikouluja.

Kaikkien kolmen tutkimusryhmän valinta perustui harkintaan, koska tutkimusajankohtana opettamani opetusryhmä oli vielä ainoa ryhmä Suomessa, jossa oli ohjattu matematiikan oppimista Varga–Neményi -opetusmenetelmällä pitkäkestoisesti alkuopetuksesta saakka. Varga–Neményi -opetusmenetelmän perusteella valitsin myös unkarilaisen opetusryhmän, jonka opettaja oppilaineen osallistui tutkimukseen vapaaehtoisesti koulun rehtorin ja vanhempien luvalla. Myös toinen suomalaisryhmä opettajineen osallistui vapaaehtoisesti. Nämä kolme tutkittavaa oppilasryhmää rikastavat ja auttavat minua tutkijana hahmottamaan oppilaiden koulussa syntyneitä matematiikkakokemuksia ja niiden merkityksiä suhteellisen laajasti yli kansallisten matematiikan opetuskulttuurirajojen.

TAULUKKO 5.2.1 Tutkittavat oppilaat tutkimusryhmittäin

Tutkimusryhmät	Tytöt	Pojat	Yhteensä
Suomalainen neljäs luokka, Varga–Neményi -opetusmenetelmä	10	10	20
Suomalainen neljäs luokka opetus suomalaisittain	12	9	21
Unkarilainen neljäs luokka Varga–Neményi -opetusmenetelmä	14	9	23
Yhteensä	36	28	64

5.3 Tutkijan suhde tutkittaviin oppilaisiin

Tutkijan oman viitekehyksen tiedostaminen on tutkimusprosessissa olennaista, koska laadullisessa tutkimuksessa tutkija itse toimii tutkimusvälineenä. Van Manen (1997, 31) korostaa, että fenomenologinen tutkimus on aina jonkun projekti, jossa todellinen, yksilöllisessä, sosiaalisessa ja historiallisessa elämäntilanteessa oleva pyrkii ymmärtämään ihmiskokemusta jostakin näkökulmasta. Laadullisen tutkimusparadigman mukaan tutkija nähdään elämänkerrallisesti sijoittuneena (Denzin & Lincoln 2000, 19). Tutkijat tuovat tutkimustilanteeseen koko elämänhistoriansa: kaikki esikäsitykset, uskomukset, arvot ja teoriat, jotka vääjäämättä vaikuttavat tutkijan ja tutkimusaineiston vuorovaikutukseen. Lisäksi tutkijan havainnot ovat aina kielen, sukupuolen, sosiaaliluokan, rodun ja etnisyyden suodattamia. (Emt. 19.) Tällöin periaatteena tulee olla se, että kaikki henkilökohtainen ja ammatillinen tieto, joka voi vaikuttaa aineiston keräämiseen, analyysiin ja tulkintaan on tuotava esille (Lincoln & Cuba 1985, 362; Patton 1990, 472). Tutkijan on siis oltava selvillä historiallisuudestaan ja sidonnaisuudestaan, koska ne suuntaavat kysymyksen asettelua ja toisen kokemuksen ymmärtämistä ja tulkintaa.

Näkökulmani suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden kokemuksiin matematiikasta on suomalaisen naisopettajan ja tutkijan. Minulla on ennen tutkimusta monivuotinen kokemus peruskoulun luokanopettajana, sittemmin yliopiston opettajankoulutuksen normaalikoulun luokanlehtorina. Näin olen opettanut matematiikkaa kuten muitakin oppiaineita perusopetuksen luokilla 1–6 ja esiopetuksessa. Olen myös ohjannut luokanopettajakoulutuksen opetusharjoittelua vastaavilla luokka-asteilla vuodesta 1981. Luokanlehtorina on ollut mahdollisuus havainnoida matematiikan opetusta omaa opetustani laajemmin. Olen osallistunut myös luokanopettaja- ja lastentarhanopettajien koulutuksen valintoihin. Matematiikkaa unkarilaisittain -hankkeen alettua vuonna 2000 olen kouluttautunut 23 opintoviikon ajan matematiikan unkarilaiseen Varga–Neményi -opetusmenetelmään, jota olen soveltanut perusopetuksen vuosiluokilla 1–4. Samanaikaisesti paneuduin tutkimukseni aihepiiriä koskevaan kirjallisuuteen. Olen yhdessä muiden kirjoittajien kanssa julkaissut matematiikan opetuksen oppimateriaalia (Matikainen ym. 2002ab; Risku & Tikkanen 2004ab). Näiden lisäksi olen havainnoinut 12 viikon ajan vuosina 2001–2005 matematiikan opetusta sekä tutkimuskoulussa että muuallakin Unkarissa esiopetuksesta lukioon. Kouluttautuminen, tutkimus- ja opintomatkat päätarkoituksineen ja niistä kertynyt muu aineisto, joka tukee tässä tutkimuksessa käytettävän aineiston ymmärtämistä ja tulkintaa, on liitteessä 1. Nämä lähtökohdat tiedostaen olen pyrkinyt olemaan koko tutkimuksen ajan avoin kaikille havainnoilleni seuratessani matematiikan opetusta sekä Suomessa että Unkarissa ymmärtääkseni lasten koulukokemuksia matematiikasta, sen opetuksesta ja oppimisesta.

Tutkijan roolini suhteessa kaikkiin kolmeen tutkittuun oppilasryhmään on tutkimusaineiston, lasten kirjoitelmien ja piirrosten analysoija ja tulkitsija. Tarkentaen suhteeni tutkittuihin oppilasryhmiin on lisäksi seuraava: 1) Unkarilaisten neljäsluokkalaisten (23) näkökulmasta olen tutkijana ulkomaalainen osallistuva havainnoitsija, koska olen ollut fyysisesti läsnä heidän noin 50 matematiikan oppitunnillaan vuosien 2001–2005 aikana. Paras tapa päästä sisälle toisen elämismaailmaan ja kokemukseen onkin osallistua siihen, toteaa van Manen (1997, 69). Ensimmäisellä matkallani unkarilaisoppilaat eivät kiinnittäneet minuun erityisempää huomiota, koska he olivat tottuneet kouluvierailijoihin. Sittemmin he tunnistivat minut ja olivat uteliaita, miksi olen taas tullut Suomesta asti heidän matematiikan tunnilleen. Oppitunnin ulkopuolella he halusivat tehdä tuttavuutta ja lahjoittivat pieniä esineitä matkamuistoksi. Matematiikan oppitunnista piirtämisen jälkeen he mielellään selostivat piirrostaan. 2) Suomalaisiin neljäsluokkalaisiin (21), joita on opetettu matematiikassa suomalaisittain, suhteeni tutkijana on vain ulkopuolinen kirjoitelmien ja piirrosten analysoija ja tulkitsija. Olen kuitenkin useita kertoja vieraillut heidän luokassaan vaihtamassa kuulumisia ennen ja jälkeen tutkimuksen. Olin myös heidän kanssaan hiihtoretkellä erään talvisen päivän ennen tutkimusta, koska ennakoiden tutkijan on tutustuttava tutkimukseen osallistuvien elämäntilanteeseen (Perttula 2005, 137). Tämän ryhmän oppilaita kiinnosti erityisesti, miksi niin mielelläni keskustelen matematiikasta. Näin tunnen tämän tutkittavan ryhmän oppilaita jossain määrin. Vierailuillani kyseinen opetustila on tullut tutuksi, mikä on merkittävä tuki piirrosten tulkinnassa. Niin nämä kuin unkarilaisetkin oppilaat selostivat piirrostaan matematiikan oppitunnista vapaaehtoisesti ja mielellään. 3) Suomalaisten neljäsluokkalaisten (20) näkökulmasta olen ollut 14 oppilaan luokanopettaja neljä vuotta ensimmäisestä luokasta neljänteen luokkaan, kuuden oppilaan opettaja kaksi vuotta, koska he muuttivat tutkimusluokkaan kolmannen luokan alussa. Otin huomioon heidän koulun vaihdoksensa tutkimusajankohdan valinnassa, koska vasta muutaman vuoden jälkeen lasten piirroksista on havaittavissa opetuksessa tapahtuneita muutoksia (Haney, Russell & Bebell 2004, 244). Luokalle muuttaneet oppilaat kuvasivat haastatteluissa aiempaa matematiikan opetusta seuraavasti: Ensin tunnilla tarkastettiin kotitehtävät ja joskus laskettiin päässälaskuja. Sitten opettaja näytti esimerkkejä opittavista tehtävistä ja johdatteli kysellen ratkaisuun. Sen jälkeen kaikki tekivät kirjan aukeaman tehtäviä. Kun oli laskenut, sai usein mennä tarkistamaan itse tarkistuskirjasta. Laskuja he laskivat myös lisätehtäväkirjasta tai korteista. Joskus heidän luokissaan käytettiin joitakin välineitä. Vastaavanlainen kuvaus matematiikan oppitunnin rakenteesta on havaittavissa peruskoulun arvioinnin 1990 yhteydessä tehdystä tutkimuksesta suomalaisten kolmasluokkalaisten koulupäivästä (esim. Kankaanranta & Linnakylä 1993, 19, 34–35). Siis olen opettajana ollut tuottamassa niitä merkityksiä, joita tutkin kolmannen tutkimusryhmän kokemuksista, kun oppimista koulussa on ohjattu matematiikan unkarilaisella Varga–Neményi -opetusmenetelmällä.

5.4 Tutkimusaineiston perusteita ja hankkiminen

Keväällä 2002 haastattelin viittä vapaaehtoista unkarilaista perusopetuksen neljäsluokkalaista, miten he kokivat matematiikan, sen oppimisen ja opetuksen. Kaikilla heillä oli erittäin myönteinen suhde matematiikkaan, ja he uskoivat oppineensa sitä hyvin. Siitä virisi ajatus tavoittaa niin suomalaisten kuin unkarilaistenkin oppilaiden kokemuksia matematiikasta laajemmin. Vaikka haastattelussa pyrin siihen, että oppilaat kertoisivat mahdollisimman ohjaamattomasti kokemuksistaan, havaitsin nauhoituksista, että vuorovaikutuksemme oli kysymys–vastaus-tyyppistä ohjausta. Sain sitä, mitä kalastin. Vastaavanlaisia tilanteita opettaja–lapsi-haastatteluissa havaitsi myös Tauriainen (2000, 150–156). Haastattelemani oppilaat kertoivat itsestään runsaammin kuin opetuksesta, josta heidän oli vaikea kertoa, mikä on ymmärrettävää, ovathan heidän kokemuksensa oppituntitilanteista oppilaan näkökulmasta. Samanlaisen havainnon teki myös Lehtelä (2001, 85, 99, 105) tutkiessaan suomalaisten seitsemäsluokkalaisten metakognitioita aineen rakenteen oppimis- ja opiskeluprosessissa. Seitsemäsluokkalaiset olivat kolme vuotta vanhempia kuin haastattelemani unkarilaislapset. Joku seitsemäsluokkalainen oppilas kirjoitti, ettei osaa kuvata opetusta. Haastatteluissa jotkut seitsemäsluokkalaiset kommentoivat tehtäviä ja opetusta vain parilla sanalla. Pohdin, kuinka tavoittaa kymmenvuotiaiden lasten kokemuksia mahdollisimman ohjaamattomasti, mutta heille sopivalla tavalla.

Hermeneuttis-fenomenologisen pedagogiikan tutkija van Manen (1997, 40, 69, 161–162) ehdottaa, että lasten kokemuksia on tavoitettavissa suhteellisen ohjaamattomasti mm. piirrosten ja kirjoitelmien avulla. Kirjoitelman *Minä ja matematiikka* instruktio laadittiin yhdessä ohjaajani Eira Korpisen kanssa hänen minäkäsitystutkimustensa (1990, 1993, 2000) pohjalta, jolloin minäkäsitys ymmärrettiin kokemusten tulkiksi, joka määrää, mitkä kokemukset ovat yksilölle merkityksellisiä. Tämän tutkimuksen kannalta on oleellista se, millainen on merkittävien matematiikan oppimistilanteiden osuus oppilaiden minäkäsitykseen heidän itsensä ilmaisemana. Minäkäsitys nähdään siis oppimisen edellytyksenä ja tuloksena, jolloin tutkittavien oppilaiden minäkäsitys on osaltaan neljän vuoden aikana syntyneiden matematiikkakokemusten oppimistulosta. Kirjoitelman instruktio perustui haastattelujen pohjalta oletukseen, että lapset osaisivat kertoa kokemuksistaan matematiikasta ja sen oppimisesta oppilaan näkökulmasta. Oppilaiden kirjoittamista ohjattiin seuraavalla kirjallisella ohjeella:

Kerro itsestäsi matematiikan oppijana. Miltä sinusta matematiikka tuntuu? Miten tärkeää matematiikka on sinulle? Millaista sinulla on matematiikan tunnilla? Miten opit matematiikkaa? Onko matematiikka helppoa vai vaikeaa? Kerro, onko matematiikka ikävää vai hauskaa? Mihin uskot tarvitsevasi matematiikkaa? Millainen olet matematiikassa?

Instruktiossa käytettiin neutraalia kieltä, jotta kirjoittaja ei ohjautuisi kaunisteluun tai kukkaiskielen käyttöön (ks. van Manenia 1997, 64). *Miltä tuntuu?* -kysymysten tarkoituksena oli saada oppilaat kuvaamaan kokemuksiaan sisältäpäin mm. tunteitaan (ks. van Manenia 1997, 64). Kysymykset *helppoa vai vaikeaa* ja *ikävää vai hauskaa* suuntaavat kokemuksen pohdintaan, koska reflektiivinen kokemisen tapa on sinällään ihmiselle luonnollinen ja arkinen (Perttula 2005, 139). Kirjoitelman ohjeella pyrittiin tavoittamaan lasten välittömiä kokemuksia, joten ne eivät sisältäneet *miksi*–kysymyksiä (ks. van Manenia 1997, 64). Kirjoitelma-aineiston suunnittelun yhteydessä pohdittiin myös oppilaiden kirjoitustaidon sisällöllistä kehittymistä neljän ensimmäisen kouluvuoden aikana (Matilainen 1989): Neljännen luokan oppilaiden kirjoitelmat ovat suurimmaksi osaksi johdonmukaisesti eteneviä ja sisällöllisesti melko rikkaita. Kirjoitelmissa esiintyy kuvitteellisuutta ja aiheen omintakeista käsittelyä, mutta tunneherkkyys on vähäisempää kuin toisen luokan oppilailla. Sen sijaan neljäsluokkalaiset käyttävät kielikuvia toisluokkalaisia enemmän. Kirjoitelmat ovat lauserakenteeltaan monipuolisia, lähes kaikki neljäsluokkalaiset käyttävät sivulauseita. Erilaisilla rinnastuskonjunktioilla alkavien lauseiden käyttö monipuolistuu ja lisääntyy erittäin merkitsevästi toiseen luokkaan verrattuna. Matilaisen (1989) tutkimustulosten perusteella oli pääteltävissä, että neljäsluokkalaisella olisi edellytyksiä kirjoittaa tutuista kokemuksistaan matematiikasta.

Kirjoittamista instruktioineen esitestattiin marraskuussa 2002 unkarilaisilla ja tammikuussa 2003 suomalaisilla kolmasluokkalaisilla, joita oli yhteensä 134. Koska vuotta nuoremmille kolmasluokkalaisille aihe ja instruktio apukysymyksineen vaikutti sopivalta, mutta ei liian ohjaavalta, oletettiin kirjoittamisen ja sen instruktion toimivan neljäsluokkalaisillakin. Kokeilin myös eräässä suomalaisessa neljännessä luokassa kirjoittamista pelkistetyllä ohjeella: "Minä ja matematiikka. Kerro itsestäsi matematiikan oppijana." Tällöin oppilaalla ei ollut käytössä apukysymyksiä. Kyseiset neljäsluokkalaiset yrittivät pohtia aihetta kirjoittaen, mutta pitivät aihetta erittäin vaikeana, mikä näkyi kirjoitelmien pituudessa. Ne olivat pääsääntöisesti parin lauseen mittaisia. Heidän mielestään helppoja aiheita kirjoittaa olivat mm. ystävät ja harrastukset, mutta ei matematiikka ja sen oppiminen. Näin oli pääteltävissä, että kirjoitelman aiheen lisäksi tarvitaan apukysymyksiä.

Mutta miten tavoittaa kymmenvuotiaiden lasten kokemuksia opetuksesta? Van Manenin (1997, 163) ehdotus piirrosten käytöstä vaikutti lupaavalta tavoittaa asioita, joita on hankala sanoittaa, mutta muilla ilmaisukeinoilla ne voivat olla tavoitettavissa. Piirrostutkimusaineiston edut ja haitat ovat tiivistettävissä Chambersin (1983, 264–265) mukaan seuraavasti: 1) Koska piirrokset eivät ole yhteydessä kielellisiin valmiuksiin, niitä voidaan käyttää varhaisessa iässä toisin kuin muita testejä. Tämä tekijä myös mahdollistaa eri kieliryhmien vertailun ilman sanottavia käännösongelmia. 2) On mahdollista löytää mielenkiintoisia yhteyksiä lasten kuvien ja sosiaalisten tapahtumien välillä. 3) Piirrokset ovat helpompi hallita kuin useimmat muut testit. Kuitenkin jonkin verran tulkinnallisia vaikeuksia voi esiintyä. 4) Piirrokset ovat kätevämpiä asenteiden tunnistamisessa kuin mittaamisessa. Myös Barraza (1999, 49–50) ja Alerby (2000, 219) pitävät piirroksia käyttökelpoisena aineistona lapsia tutkittaessa: Piirrosten avulla saadaan lasten ja nuorten ajattelu "näkyväksi". Ne ovat nopea ja helppo tapa kerätä tutkimusaineistoa eikä piirtämisessä ole kieliesteitä. Vertailevassa tutkimuksessa piirrostekniikka kannattaa rajata tarkasti, koska vesiväritekniikalla syntyy yleispiirteisempi kuva kuin lyijykynätyönä, mikä vaikuttaa mahdollisuuksiin analysoida töitä. Lapset piirtävät mielellään eivätkä yleensä jännitä piirtäessään.

Pohdin myös lasten minäkäsityksen yhteyttä piirtämiseen, koska Picker ja Berry (2000, 70–71) havaitsivat tutkimuksessaan, että noin 15 prosenttia tutkituista yläkouluikäisistä suomalaisnuorista ei piirtänyt matemaatikkoa. Nämä suomalaisnuoret perustelivat kieltäytymistään osaamattomuudellaan ja haluttomuudellaan piirtää. Niin ikään Punch (2002, 331) muistuttaa bolivialaislasten tutkimukseensa viitaten, ettei piirroksia pitäisi pitää yksinkertaisena ja luonnollisena metodina tutkia lapsia. Jotkut lapset, varsinkin vanhemmat lapset, eivät pidä piirtämistä hauskana metodina, koska heillä saattaa olla piirtämisestoja tai heiltä puuttuu taitoa piirtää. Bolivialaislasten piirtämistaidottomuutta selittää harjoittelumahdollisuuksien ja visuaalisten virikkeiden puute. Yksilön puutteellinen piirustustaito ja ennakkokäsitykset omasta piirustustaidosta voivat osaltaan estää vapaan ideoinnin (Tikkanen & Kosunen 2000, 95). Tällöin on suositeltavaa tuottaa ideoita ryhmässä tai aikuisen tukemana. Bornholt ja Ingram (2001, 156) havaitsivat australialaisten 9–12-vuotiaiden 84 kaupunkilaislapsen minäkäsityksen piirtämisessä optimaaliseksi. Keskimäärin lapset näkivät itsensä aika hyvinä piirtäjinä, jopa kohtuullisen taitavina. Tutkittujen australialaislasten mielestä piirtäminen ei ole vaikeaa ja he uskoivat seuraavana vuonna tulevansa erittäin hyviksi piirtäjiksi. Päättelin, ettei tutkimillani kymmenvuotiailla mahdollisesti olisi vielä estoja piirtää, ja että Suomessa ja Unkarissa lapsilla on ollut myös harjoittelumahdollisuuksia ja visuaalisia virikkeitä.

Pohdin myös piirroksen ohjetta. Monissa kasvatukseen liittyvissä piirrostutkimuksissa ohjeet ovat lyhyitä ja yksinkertaisia (mm. Aronsson ja Andersson 1996; Picker & Berry 2000; Pnevmatikos 2002; Rock & Shaw 2000). Edellä esitettyjen artikkeleiden mukaan lyhyet ohjeet vaikuttivat riittäviltä. Vain Trend, Everett ja Dove (2000, 92) raportoivat lapsista, jotka tarvitsivat aikuisen vahvistusta piirrostilanteessa, vaikka ymmärsivätkin piirrosohjeet. Lyhyet ohjeet voidaan esittää kerralla isohkollekin tutkimusjoukolle, mikä varmentaa sen, että ne tulevat samanlaisina kaikille tutkittaville. Piirrosten ohje muotoutui seuraavaksi:

Piirrä meidän luokka matematiikan tunnilla. Toivottavaa käyttää puhe- ja ajatuskuplia.

Lapsia ohjattiin käyttämään lyijykynää piirtämisessä. Piirrosten käyttökelpoisuutta tutkimusaineistoksi esitestattiin unkarilaisilla kolmasluokkalaisilla (21) marraskuussa 2002. Esitestauksessa piirrosten lyhyt ohje vaikutti havaintojeni ja unkarilaisen opettajan mukaan toimivalta eikä kukaan lapsista valittanut heikkoa piirtämistaitoaan.

Lopullinen kirjoitelma-aineisto koottiin Suomessa kahdelta neljännen luokan opetusryhmältä helmikuussa 2003 ja piirrosaineisto toukokuussa 2003. Vastaavan ikäiseltä opetusryhmältä Unkarista kirjoitelma- ja piirrosaineisto hankittiin marraskuussa 2003. Piirtämisen jälkeen suomalaiset ja unkarilaiset oppilaat kertoivat piirroksestaan. Lasten kertomukset kirjoitin sanasta sanaan muistiin, jotta voisin myöhemmin verrata tulkintaani piirroksesta lasten tarkoittamaan sisältöön.

Tutkimusaineistojen hankinta-ajankohtiin vaikutti unkarilaisten lasten esitestauksen kirjoitelmien käännös unkarista suomeksi keväällä 2003. Kääntämiseen käytettävissä oleva aika työn ohessa osoittautui riittämättömäksi. Unkarilaisten lasten kirjoitelmat käänsi Ilona Lahdelma ja hungarologian professori Tuomo Lahdelma tarkasti tyttärensä käännökset. Toisaalta unkarilaiseksi tutkimusryhmäksi sovittu opetusryhmä aloitti neljännen luokan vasta syyskuussa 2003. Kaikkien kolmen opetusryhmän omat luokanopettajat ohjasivat kirjoitelma- ja piirrostilanteet osana oppilaan koulupäivää.

5.5 Narratiivisen aineiston analysointi

Käsitettä narratiivisuus käytetään tieteellisessä keskustelussa ainakin neljällä eri tavalla (Heikkinen 2001, 118–126): Sillä voidaan viitata tiedonprosessiin sinänsä, tapaan tietää ja tiedon luonteeseen, jolloin narratiivisuus yhdistetään usein konstruktivistiseen tiedonkäsitykseen. Toiseksi narratiivisuus voi viitata aineiston analyysitapoihin, kolmanneksi se liitetään usein kirjallisuudessa narratiivien käytännölliseen merkitykseen. Narratiivisuudella voidaan kuvata myös tutkimusaineiston luonnetta.

Tässä käsillä olevassa tutkimuksessa suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden tuottamat kirjoitelmat ja piirrokset ymmärretään narratiiveiksi (Polkinghorne 1995, 6–7). Tarkentaen ne voidaan ymmärtää lasten evaluatiivisiksi narratiiveiksi (Labov 1972, 370–375; Lyle 2000, 59–61; van Manen 1997, 120–121; Maybin 1996, 37–38; Warburton 1998, 260–261; Westling Allodi 2002, 187), koska neljäsluokkalaisilla on ollut mahdollisuus kuvata koulukokemuksiaan sekä omin sanoin että kuvin ja koska useimmista niistä puuttuvat kertomukselle tyypilliset rakennepiirteet, alku, keskikohta, loppu ja ajassa etenevä juoni.

Tutkimusaineiston analysoinnin aluksi kirjoitin suomalaisten ja unkarilaisten lasten matematiikkakokemuksia käsittelevät kirjoitelmat puhtaaksi sana sanalta mitään muuttamatta. Samalla tutustuin kirjoitelma-aineistoon. Unkarilaisten oppilaiden kirjoitelmat ja piirrokset käänsin ensin itse pääasiassa sanakirjan avulla. Kävin ne uudelleen läpi kahden eri-ikäisen syntyperäisen unkarilaisen, mutta suomea sujuvasti puhuvan Eszter Friedmanin ja Anna Hajdun kanssa.

Sittemmin luin kirjoitelma-aineiston ja tarkastelin piirroksia moneen kertaan. Luin myös lapsen kirjoitelmaa ja katselin hänen piirrostaan samaan aikaan. Pyrin elämään uudelleen lapsen kokemusta. Uudelleen eletty kokemus tarkoittaa tutkijan ymmärtävää kokemusta tutkittavien kokemusten kuvauksista (Perttula 2005, 143). Tutkijan uudelleen eletty kokemus toteutuu asennoitumalla rakastavasti ja pakottautuvasti tutkittavaan koettuun todellisuuteen, mahdollistaa keskittyneesti tässä todellisuussuhteessa heräävän ihmetyksen tunteen. Luotetaan siinä muodostuvien tunteiden ja intuition varmuuteen. Ponnistellaan tietoisesti ja systemaattisesti tämän tilan viivyttämiseksi niin, että tutkittavan todellisuuden ymmärtäminen saa tilaisuuden toteutua. (Emt. 143–147.)

Rakastavassa pakottautumisessa koin tulleeni tutkijana imetyksi, en pakotetuksi, aiemmin opettajana pitämiini matematiikan oppitunteihin, Unkarissa näkemiini ja toisen suomalaisopetusryhmän tunteihin, koska saatoin tunnistaa ja muistaa lasten kuvaamia matematiikan tunteja. Tämä imukokemukseni tutkijana oli luonteeltaan erilainen kuin kokemus opettajana: Kurkistin lapsen merkitysten maailmaan piirroksen, köyhän miehen videon avulla, sanoitta tunteella. Tavoitteeni oli uudelleen eletyn kokemuksen avulla muodostaa kokonaiskäsitys kahdesta erityyppisestä aineistosta ja pukea se sittemmin kielelliseksi kuvaukseksi.

5.5.1 Kirjoitelmien analysointi

Jotta voi ymmärtää kuvattua kokemusta, on van Manenin (1997) mukaan hyvä ajatella sitä tekstinä, jota voidaan lähestyä merkitysyksiköiden, merkitysrakenteen tai teemojen avulla. Fenomenologiset teemat voidaan ymmärtää kokemuksen rakenteena. Teema tarkoittaa jonkin tai jonkun merkitystä, mikä on parhaimmillaan yksinkertaistus, ymmärtämisen kartta tai pienennös. Koska teema on keino ymmärtää, se kuvaa ymmärtämisen sisältöä. Teema on myös tutkijan sisäinen oivaltamis- ja keksimisprosessi. Metaforisesti ilmaisten teemat ovat kokemusverkon solmukohtia. (Emt. 78, 87–88, 90.) Suomalaisten ja unkarilaisten lasten matematiikkakokemusten kuvauksia, kirjoitelmia, lähestyin teemoittain. Teeman muodostava yksikkö tekstissä saattoi olla lauseen, useamman lauseen tai kappaleen mittainen. Käytännössä kunkin lapsen matematiikkakirjoitelman kirjoitin palstoitetulle sivulle, jonka vasemmassa sarakkeessa eteni lapsen kirjoitelma kokonaisuudessaan teemoittain, keskimmäisessä sarakkeessa teema ja oikeassa sarakkeessa teeman yleiskielinen tiivistetty sisältö. Seuraavassa taulukossa 5.5.1.1 havainnollistetaan kirjoitelmien analysointia.

Kirjoitelmista niiden ohjeen mukaisesti löytyi kuusi teemaa 1) oppilaan käsitys itsestä matematiikan oppijana, 2) tunnekokemukset matematiikasta, 3) matematiikan tärkeys, 4) oppituntikokemuksia, 5) oppiminen ja 6) matematiikan käyttö. Näiden lisäksi löytyi kirjoitelmista muitakin teemoja, kuten kokemus väärinvastaamisesta, kateus, väheksyntä, opettajan palaute ja kokeissa menestyminen. Muutamat oppilaat arvioivat myös matematiikan opetusta ja antoivat siitä palautetta, kuten Amandan kirjoitelman lopusta on havaittavissa (ks. taulukkoa 5.5.1.1). Vaikka kirjoitelman ohje ei ohjannut matematiikan sisältöjen tarkasteluun, oppilaat kuvasivat niiden avulla kokemuksiaan matematiikasta. Näin oli hahmotettavissa, miten he kokivat Suomen ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelman eri sisältöalueita. Esimerkin Amanda viittaa kirjoitelmassaan päättelyyn ja ongelmanratkaisuun, jotka hän kokee myönteisesti.

Kirjoitelmista oli havaittavissa myös, miten oppilaat ymmärtävät sanallisten tehtävien ratkaisuvaiheet ja mikä merkitys säännöillä on matematiikan oppimisessa. Kirjoitelman ohje ei ohjannut vertailemaan oppiaineita toisiinsa tai perustelemaan kokemuksiaan, eihän instruktiossa käytetty miksi–kysymyksiä. Suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaat kuitenkin vertailivat ja perustelivat, mitä taas toisen suomalaisen opetusryhmän ja unkarilaisen opetusryhmän oppilaat eivät juuri tehneet. Vertailut ja perustelut merkitsin oppilaiden yksilöittäisiin analyysitaulukoihin.

Mahdollisuus verrata kolmen opetusryhmän kirjoitelmia sai havaitsemaan erot tavassa kertoa matematiikkakokemuksista. Suomalaisryhmä, jonka oppimista oli ohjattu suomalaisittain, pääsääntöisesti totesi asian, kun taas unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaat esittivät monia asioita dikotomisesti vastakohtien avulla. Koska miellän tavan kertoa matematiikka-kokemuksista tämän tutkimuksen löydökseksi, käsittelen asiaa tarkemmin perusteineen tuloksissa.

TAULUKKO 5.5.1.1 Analysointimalli 9-vuotiaan Amandan kirjoitelmasta

Amanda	Teema	Merkityssisältö tiivistettynä
Minusta olen aika hyvä matikassa, mutta selittäminen on vaikeaa. En tiedä, mistä se johtuu, mutta niin se on.	Käsitys itsestä oppijana	Varauksellisen myönteinen Vaikeaa selittää Perustelua ei tiedä
Matikka ei ole tällä hetkellä minulle niin hyödyllistä, kuin se joskus tulee luultavasti olemaan.	Matematiikan tärkeys	Myöhemmin hyödyllisempää kuin nyt. Vertailu.
Joihinkin kysymyksiin en todella tiedä vastausta, mutta useimmiten epäröin ja luulen, että muut pitävät minua pilkkanaan jos vastaan väärin. Luulotauti!	Käsitys itsestä oppijana	Itseluottamus, toisten mahdollinen pilkka
Matikka on yhä ykköslempiaineeni.	Asenne	Myönteinen Oppiaineiden vertailu
Opin matikkaa parhaiten ehkä laskemalla ja open selityksellä.	Oppiminen	Laskeminen ja open selittäminen
Matikka on hauskaa, mutta väärin vastaaminen inhottavaa.	Asenne Tunnekokemus	Myönteinen Negatiivista vastata väärin
Tarvitsen luultavasti matikkaa tulevassa ammatissani.	Matematiikan käyttö	Ammatti ja työelämä
Hauskat asiat niin kuin päättely menevät matematiikassa nopeasti ohi. Pidän päättelytehtävistä ja ongelmista, koska niissä pitää käyttää päätään paljon.	Matematiikan sisällöt Päättely ongelmanratkaisu	Myönteinen – aika kiitää Myönteinen – ajattelu Perustelu
Matikan kokeet ovat helppoja, mutta huolimattomuusvirheet ovat niitä joita minulla tosiaan on.	Kokeet	Myönteinen - helppoa Virheet
Matikka olisi varmaan toiseksi tärkein ja äidinkieli tärkein.	Oppiaineiden tärkeys	Matematiikka toiseksi tärkeintä. Vertailu
Opetat hyvin ja mielikuvituksellista matikkaa. Jatka samaan malliin.	Palaute opetuksesta	Myönteinen

Sen jälkeen kun kaikki 64 kirjoitelmaa oli teemoitettu, analysoitiin kutakin teemaa jokaisesta kirjoitelmasta tarkasti mahdollisten erojen havaitsemiseksi. Tätä varten yhdistin kaikkien oppilaiden teemat teemataulukkoon, jota havainnollistetaan seuraavassa taulukossa 5.5.1.2.

TAULUKKO 5.5.1.2 Tarkastelu teemoittain

Oppilas	Teema: Minäkäsitys	Johtopäätös
Amanda	Minusta olen aika hyvä matikassa, mutta selittäminen on aika vaikeaa.	Varauksellisen myönteinen minäkäsitys
Enni	Olen mielestäni aika hyvä matikassa, se varmaan johtuu siitä että olen käynyt matikkakerhossa.	Varauksellisen myönteinen minäkäsitys Perustelu
Heidi	Itseni mielestä olen matematiikassa aika hyvä, mutta jotkin asiat ovat vaikeampia. Vaikeat asiat oppii kuitenkin, kun vain harjoittelee tarpeeksi. Olen matematiikassa hyvä osittain siksi, koska opettaja opettaa asiat hyvin. Osittain siksi, että opin yleensä uudet asiat helposti.	Varauksellisen myönteinen minäkäsitys Perustelu
Helmi	Olen itseni mielestä aika hyvä ja joskus tehtävät tuntuvat vaikeilta. Itseni mielestä olen tyytyväinen ja päättelin siitä, koska ope on kehunut minua.	Varauksellisen myönteinen minäkäsitys Perustelu
Iiris	Olen kiitettävä, ope on sanonut ja kokeista oon saanu aika hyviä arvosanoja.	Myönteinen minäkäsitys Perustelu
Kanerva	Mielestäni olen aika hyvä matematiikassa. Olen matematiikassa kiitettävä opettajan kehujen mukaan.	Varauksellisen myönteinen minäkäsitys Perustelu
Katja	Olen mielestäni matikassa ihan hyvä, koska olen oppinut asiat hyvin.	Myönteinen minäkäsitys Perustelu
Maija	Minä olen varmaan hyvä matskassa, vaikka en viittaa juuri ollenkaan. Päättelin sen tuntitehtävistä.	Myönteinen minäkäsitys Perustelu
Tiina	Olen mielestäni ihan hyvä tai peräti voisin olla vaikka kiitettävä.	Myönteinen minäkäsitys
Silja	Olen matematiikan tunnilla melko hyvä. Kokeet ovat menneet huonosti. Olen tyydyttävä matematiikassa.	Varauksellisen myönteinen minäkäsitys

Teeman sisäisten erojen analysointi osoittautui hienosäätöiseksi kielen erittelyksi, koska erot ilmenivät lasten käyttämissä adjektiiveissa, jotka olivat toistensa vastakohtia, kuten hyvä – huono. Joku lapsi ilmaisi olevansa matematiikassa hyvä, joku taas koki olevansa matematiikassa huono. Jotkut lapset lievensivät ilmaisuaan käyttämällä adverbeja aika ja melko, toiset taas vahvensivat sitä sanoilla tosi tai erittäin. Näiden erojen avulla aineistoa oli luokiteltavissa alaryhmiksi, kuten taulukossa 5.5.1.2 kuvataan myönteisen ja varauksellisen myönteisen minäkäsityksen luokittelua, joka perustuu sanoihin aika, melko ja ihan. Taulukko 5.5.1.2 kuvaa myös määritelmän ”matemaattinen minäkäsitys sisältää sen, mitä oppilas tietää ja uskoo itsestään matematiikassa sekä millaiseksi hän arvioi itsensä siinä” empiirisiä vastineita. Taulukosta on havaittavissa myös suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän perusteluja, jotka on merkitty taulukon oikeanpuoleiseen sarakkeeseen. Taulukko 5.5.1.2 ilmentää konkreettisesti niitä merkittäviä tekijöitä, joiden perusteella kymmenvuotiaan minäkäsitys rakentuu hänen itsensä kuvaamana.

Taulukko 5.5.1.1 Analysointimalli 9-vuotiaan Amandan kirjoitelmasta havainnollistaa tunteiden, asenteiden ja uskomusten empiirisiä vastineita. Tunteilla (esimerkiksi ilolla, surulla, vihalla, pelolla, nautinnolla) tarkoitetaan oppilaiden subjektiivisten tuntemusten kuvauksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta. Amandasta väärinvastaaminen on inhottavaa, mutta päättely on hauskaa. Asenne ymmärretään erilaisten arviointiprosessien (tunteiden, assosiaatioiden, odotusten ja arvojen) yhteensulautumisen tuloksena syntyneeksi käyttäytymiseksi tai käyttäytymisvalmiudeksi. Näistä arviointiprosesseista painottuu aiempien kokemuksien arviointi. Esimerkin Amanda pohtii, pitääkö matematiikasta, ja arvioi sen vaikeutta ja helppoutta, tärkeyttä ja käyttötarkoituksia. Oppilaiden matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen liittyvät uskomukset ovat implisiittisiä tai eksplisiittisiä subjektiivisia käsityksiä, joita he pitivät totena. Amanda arvelee oppivansa matematiikkaa parhaiten laskemalla ja opettajan selityksellä.

5.5.2 Piirrosten analysointi

Matematiikan oppituntipiirrosten analysointi eteni kolmena heuristisena syklinä, jonka alussa analysointi haki muotoaan. Sittemmin piirroksista havainnoidut ja kirjatut piirteet hahmottuivat käsitteiksi. Lopuksi piirrokset arvioitiin holistisesti. Seuraavaksi esittelen kehittelemäni piirrosanalyysin vaiheet.

1. Piirrosten analysointi hakee muotoaan

Aluksi tarkastelin piirroksia avoimesti tunnistaakseni asioita, joita lapset olivat kuvanneet. Jotta piirroksia voisi analysoida systemaattisesti, kehitin taulukkomuotoisen havainnointilomakkeen niiden sisältämien piirteiden kirjaamiseksi. Havainnointilomakkeen koodina käytin keksittyä oppilaan tutkimusnimeä. Jos piirroksessa oli käytetty oppilaiden nimiä, muutin ne tutkimusnimiksi.

Piirteiden yleistarkastelussa kirjasin tarkasti havainnointilomakkeeseen luokkatilan kalusteineen, välineet, matematiikan sisällöt sekä opettajan että oppilaiden toiminnan ja vuorovaikutuksen sekä muut yksityiskohdat, jotka olivat tunnistettavissa. Tarkalla yksityiskohtaisella kirjaamisella pyrin selvittämään lapsille merkittävät asiat matematiikan oppitunneista. Yksi mielenkiintoinen yksityiskohta oli luokan nurkassa verkossaan asustava hämähäkki, joka kommentoi oppituntia. Vuorovaikutuksen ja ajattelun havainnointi oli mahdollista, koska useimmissa piirroksissa oli käytetty puhe- ja ajatuskuplia.

Luokan pulpettien järjestyksestä oli pääteltävissä sosiaalimuoto, koska pulpetit olivat riveinä, pienryhminä tai puolipiirinä. Välineistä erottuivat mm. liitutaulu, piirtoheitin, oppikirjat, vihkot, monisteet, nopat, paperiliittimet ja palikat. Matematiikan sisältöjä, kuten 1/8, C x C = ? ja $E = mc^2$, löytyi liitutaulun, ajatus- ja puhekuplien lisäksi piirretyistä oppikirjoista. Kaikista ajatus- ja puhekuplista kirjasin havainnointilomakkeeseen muunkin ajattelun ja puheen kuin matematiikan sisällöt, kuten emotionaaliset ja muut ilmaisut.

Kirjattuani piirrosten sisällöt havainnointilomakkeeseen vertasin niitä taltioituihin lasten suullisiin selostuksiin kuvistaan piirtämisen jälkeen. Selostuksissaan lapset kuvasivat piirroksen fyysistä ympäristöä esimerkiksi pulpetteja, kaappeja ja pöytiä. Jotkut saattoivat selostaessaan osoittaa sormella luokan kaappia, jota piirroksen kaappi tarkoitti.

Toiminnan selostuksissa lapset kertoivat, mitä opettaja ja oppilaat tekevät piirroksessa. Muutamat lapset totesivat minulle, että tiedäthän tai näithän sinä, mitä tunnilla tehtiin. Se oli totta, mutta olin kiinnostunut, miten juuri lapsi oli kokenut yhteisesti kokemamme tilanteen. Piirretyt oppimis- ja toimintavälineet tulivat nimetyiksi lasten selostuksissa, mikä tuki tulkintaani niistä.

Omista puhe- ja ajatuskuplistaan monet lapset muistivat sanoneensa tai ajatelleensa piirtämällään tavalla. Piirrosten luokkakavereiden ajatuskuplista he kertoivat kuvittelevansa kaverin ajatelleen esitetyllä tavalla. Muutamat lapset muistivat luokkatoverin sanoneen juuri siten, kuin puhekuplassa kuvattiin. Lasten suullisen selostuksen lisäksi kirjalliset selostukset piirroksen takana tukivat tulkintojani. Näin oli mahdollista kyseenalaistaa tulkintojani lasten piirroksista.

Jokaisesta 64 piirroksesta syntyi yhdestä kahteen väljästi kirjoitettua A4-havainnointilomaketta, joita kertyi yhteensä noin sata. Kirjoitin havaintoni väljästi, jotta voisin kirjata niiden lomaan tulkintoja ja mahdollisesti tarvittavia lisäyksiä. Sata sivua kirjattuja havaintoja osoitti, että lapsilta saatu aineisto on kuin elävä ja pulppuava lähde, josta virinneisiin tutkimusongelmiin haetaan vastauksia käymällä koko ajan keskustellen, kysellen sekä pohtien vuoropuhelua aikaisempien tutkimusten kanssa (Korpinen ym. 2003, 68). Seuraava haaste oli saada tämä rikkaasti pulpunnut aineisto jäsennetyksi ja käsitteellistetyksi, missä hyödynsin didaktista kirjallisuutta ja piirrostutkimuksia.

2. Piirteistä käsitteiksi

Seuraavaksi keräsin jokaisesta yksittäisen piirroksen havainnointilomakkeesta teemoittain etenevälle koostelomakkeelle luokkahuoneen kalusteet, välineet, matematiikan sisällöt sekä opettajan ja oppilaiden ajatus- ja puhekuplien sisällöt sekä muut yksityiskohdat. Koostelomakkeita kertyi yhteensä noin 25. Tämän koosteen tarkoituksena oli auttaa oivaltamaan, miten käsitteellistää yksittäisiä piirrosten piirteitä.

Välineistä muodostui kolme ryhmää Varga–Neményi -opetusmenetelmän mukaisesti (Varga 1969abc, 1971ab): opetusvälineet (liitutaulu, tietokone ja piirtoheitin), oppimisvälineet (oppikirjat, vihkot ja monisteet) ja toimintavälineet (mm. nopat, palikat, paperiliittimet). Opetusvälineitä käyttää opettaja havainnollistaakseen opittavia asioita, joita oppilaiden on tarkoitus seurata. Jos opetusväline on oppilaan henkilökohtaisessa käytössä, se on silloin hänen toimintavälineensä. Toimintavälineet tarkoittavat oppilaan omakohtaisessa käytössä olevia esineitä. Oppimisvälineisiin kuuluvat myös kirjalliset tehtävät.

Matematiikan sisältöjä piirroksista jäsensin Suomen 2004 ja Unkarin 2003 matematiikan opetussuunnitelmien sisältöalueiden avulla, esimerkiksi *luvut ja laskutoimitukset*, joka vastaa unkarilaista sisältöaluetta *määrällinen orientoituminen maailmaan*.

Luokan pulpettien järjestys, (rivit, piirit tai ryhmät) sosiaalimuotona on merkittäviä, koska ne mahdollistavat vuorovaikutuksen (Lahdes 1980, 292–293) eri tavoin: Ryhmät korostavat yhteenkuuluvuutta ja kontaktien vaihtoa kuten piirikin. Yksittäispulpettirivit koko luokan opetuksessa edistävät mm. mahdollisuutta hiljentyä. Luokan sosiaalimuodon, opettajan ja oppilaan välisen vuorovaikutuksen ja oppilaiden keskinäisen vuorovaikutuksen pohjalta käsitteellistyi opetuksessa käytetyiksi työtavoiksi opettajajohtoinen esittävä ja kyselevä opetus, oppilaskeskeiset yhteistoiminnalliset pari- ja ryhmätyö, opetuskeskustelu ja yksilöllinen työskentely.

Työtapojen määritelmät pohjautuvat didaktiikan perusteisiin (Lahdes 1980, 185–234; Uusikylä & Atjonen 2002, 104–108; Kansanen 2004, 32): Esittävässä opetuksessa opettaja kertoo opittavasta asiasta ja mahdollisesti havainnollistaa sitä. Kyselevässä opetuksessa hän esittää kysymyksiä, joihin oppilas vastaa puheenvuoron saatuaan. Opetuskeskustelussa oppilasjoukko puhuu tai väittelee keskenään ilman opettajan jakamia puheenvuoroja. Pari- ja ryhmätyössä kahdesta neljään oppilasta toimii yhteistyössä tehtävien parissa. Yksilöllisessä työskentelyssä oppilas tekee tehtäviä itsenäisesti ilman vuorovaikutusta toisten kanssa.

Luokkahuonepiirrostutkimusten (Aronsson & Andersson 1996; Gulek 1999; Murphy ym. 2004; Olson 1995; Weber & Mitchell 1996) mukaan opettajan asemoituminen luokassa ilmentää osuvasti opettajajohtoisia ja yhteistoiminnallisia oppilaskeskeisiä työtapoja, joten otin myös opettajan paikan työtapojen määrittelykriteeriksi. Opettajajohtoisten työtapojen aikana opettaja on opetusryhmän edessä liitutaulun ääressä tai pöytänsä takana. Oppilaskeskeisten työtapojen aikana opettaja on oppilaiden joukossa.

Työtapojen, matematiikan sisältöjen, oppimisvälineiden sekä ajatus- ja puhekuplien sisältöjen avulla ryhmittelin oppilaiden piirroksia selvittääkseni heidän kokemuksiaan matematiikasta, sen opetuksesta ja oppimisesta.

3. Holistinen arviointi

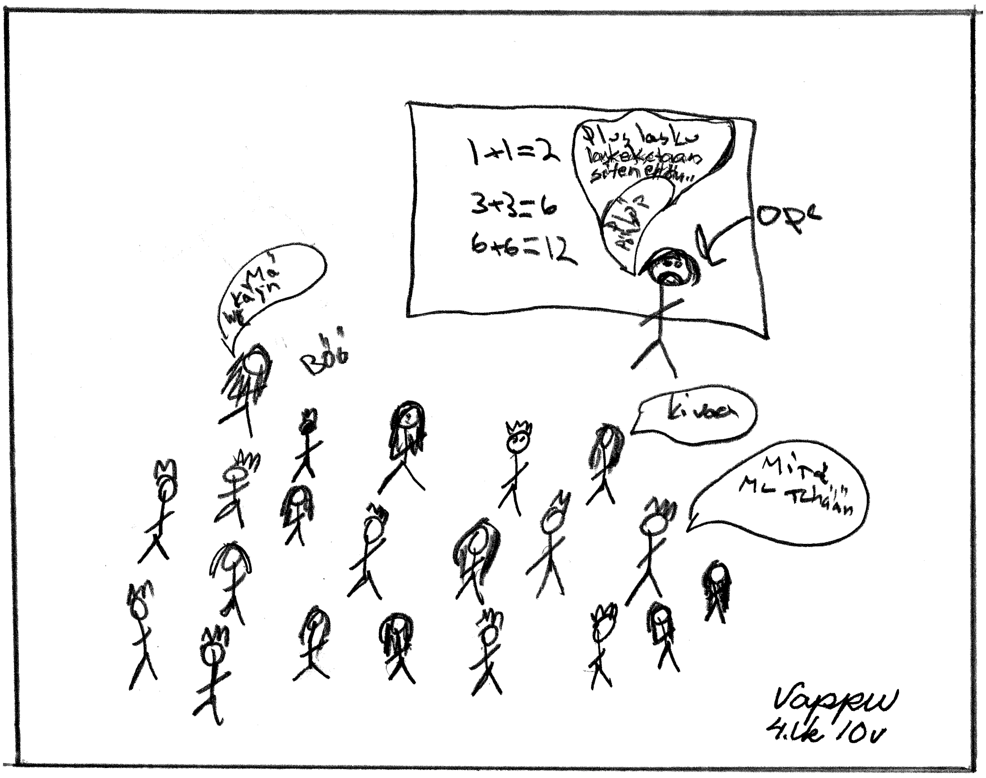
Kolmannessa piirrosten analyysivaiheessa tarkastelin oppilaiden ja opettajan ajatus- ja puhekuplista kerättyjen affektiivisten ilmaisujen koostelomakettta, jossa ryhmittyivät helppo/vaikea, mukavaa/tylsää -ilmaisut ja muut ilmaisut. Emotionaalisten ilmaisujen ja piirrosten ihmisten ilmeiden avulla arvioin holistisesti kuvien välittämiä oppilaiden kokemuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta asteikolla myönteinen–kielteinen.

Seuraava piirroskokoelma 5.5.2.1 – 5.5.2.5 matematiikan oppitunneista havainnollistaa pelkistetysti pitkäkestoisen ja monipolvisen analyysin tuloksia. Kunkin oppituntipiirroksen alla on piirroksien luokitteluperusteet, joista on niiden alla tai perässä tiivis kuvaus suluissa, jos havainnoitavaa piirrettä piirroksessa esiintyy. Piirroskokoelma etenee opettajajohtoisista työtavoista yhteistoiminnallisiin oppilaskeskeisiin työtapoihin päätyen oppilaskeskeiseen yksilölliseen työskentelyyn. Piirroksen alla oleva luokittelu etenee oppilaiden ja opettajan asemoitumisesta tilassa ja heidän välisestään vuorovaikutuksesta matematiikan sisältöihin. Niiden jälkeen seuraavat havainnot oppimis- ja toimintavälineistä, emotionaalisista ja muista ilmaisuista. Lopuksi on kokonaisarvio piirroksesta.

Pohdin, miten havainnollistaa osuvimmin lukijalle piirrosten analysointia. Lukiessani piirrosaineistoja käyttäneitä tutkimuksia niistä oli vaikea hahmottaa aineiston analyysia ja siis myös tulosten perusteita ja luotettavuutta (mm. Carr 2003; Murphy ym. 2004; Olson 1995; Swennen ym. 2004; Weber & Mitchell 1996; Yuen 2004). Prosserin toimittaman (1998) metodioppaankin artikkeleista puuttuvat piirrosten ja kuvien analyysien tarkat kuvaukset. Metodioppaassa kuvataan analyyseja yleisluonteisesti. Yleisluonteiseen esitykseen vaikuttanee se, että artikkelissa on vähän tilaa tarkalle esitykselle. Gulekin (1999) ja Pickerin (2000) väitöskirjoissa puolestaan analyysit esitetään artikkeleita tarkemmin.

Pohdin, havainnollistaisiko taulukko analyysia ymmärrettävästi. Esitellessäni piirrosmenetelmää kuulijat kaipasivat havainnoitavaksi piirroksia, joista taulukot oli tehty. Näin päädyin esittämään piirroskokoelmalla luokitteluineen piirrosten analyysia.

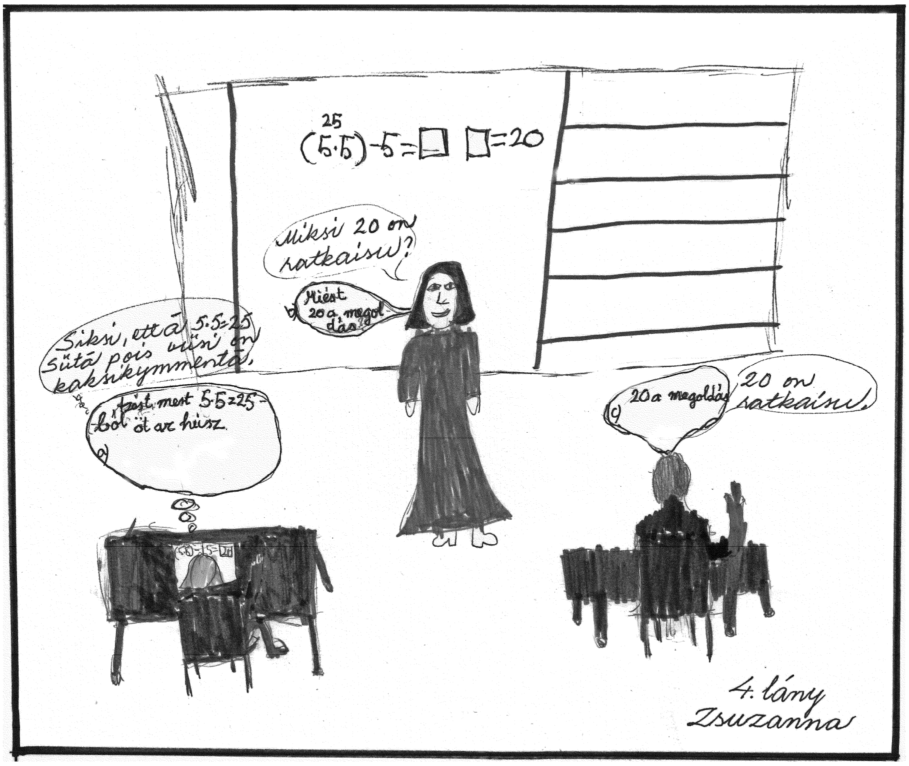
Opettajajohtoinen esittävä opetus



PIIRROS 5.5.2.1 Opettajajohtoinen esittävä opetus

- Opettaja on liitutaulun ääressä tai opettajapöydän takana. (Opettaja liitutaulun ääressä)
- Opettaja luennoi. ("Pluslasku lasketaan siten että pläp, pläp…")
- Oppilaat istuvat pulpettiriveissä. (Seisovat. Vappu kirjoitti, ettei osaa piirtää pulpetteja.)
- Matematiikan sisällöt (Luvut ja laskutoimitukset, yhteenlasku)
- Opetusvälineet (Liitutaulu)
- Toiminta- ja oppimisvälineet (ei ole)
- Emotionaaliset suulliset ilmaisut ("Böö" "Kivaa")
- Muut ilmaisut ("Mä käyn WC." "Mitä me tehään")
- Kokonaisarvio (Myönteinen ja kielteinen)

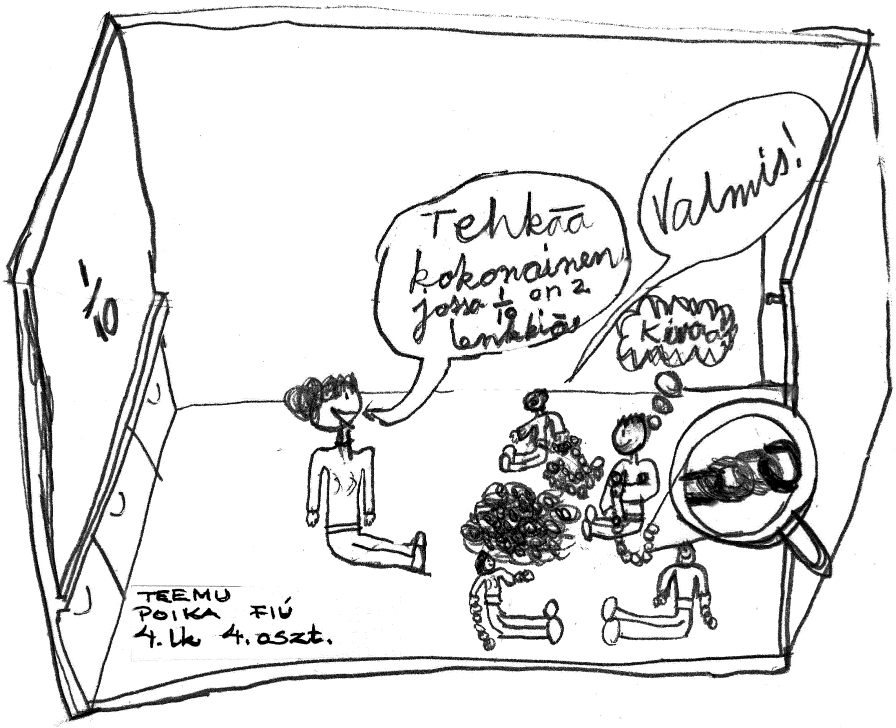
Opettajajohtoinen kyselevä opetus



PIIRROS 5.5.2.2 Opettajajohtoinen kyselevä opetus

- Opettaja on liitutaulun ääressä tai opettajapöydän takana. (Opettaja on liitutaulun ääressä)
- Opettaja kysyy. (”Miksi 20 on ratkaisu?”)
- Oppilaat istuvat pulpettirivissä. (Kaksi oppilasta istuu rivissä)
- Oppilas/oppilaat viittaa, vastaa kysymykseen. (”20 on ratkaisu.” ”Siksi, että 5 x 5 = 25. Siitä pois viisi on kaksikymmentä.”)
- Matematiikan sisällöt (Määrällinen orientoituminen maailmaan, laskutoimitukset)
- Opetusvälineet (Liitutaulu)
- Toiminta- ja oppimisvälineet (vihko)
- Emotionaaliset suulliset ilmaisut (ei ole)
- Muut ilmaisut (ei ole)
- Kokonaisarvio (Myönteinen)

Yhteistoiminnallinen oppilaskeskeinen pari- ja ryhmätyö



PIIRROS 5.5.2.3 Yhteistoiminnallinen oppilaskeskeinen pari- ja ryhmätyö

- Oppilaat istuvat 2–4 hengen ryhmissä. Jos pulpetit ovat riveissä, niin oppilaiden vuorovaikutus ja yhteistoiminta on ilmeinen. (4 oppilaan ryhmä istuu lattialla)

- Jos opettaja on kuvassa, niin hän on lähellä oppilaita. (Opettaja oppilaiden joukossa)

- Jos opettaja on kuvassa, hän on vuorovaikutuksessa oppilaan tai oppilasryhmän kanssa. (”Tehkää kokonainen, jossa 1/10 on 2 lenkkiä”)

- Matematiikan sisällöt (Luvut ja laskutoimitukset, murtoluvut)

- Opetusvälineet (Liitutaulu)

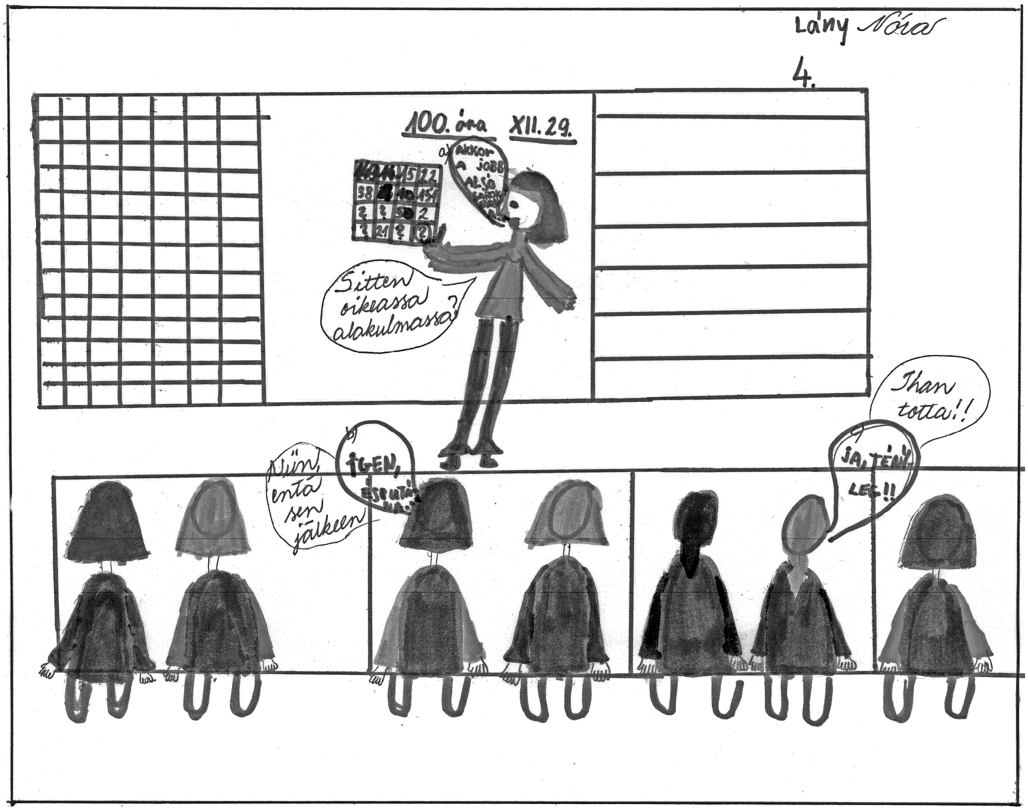
- Oppimis- ja toimintavälineet (Muoviliittimet)

- Emotionaaliset suulliset ilmaisut (Kivaa)

- Muut ilmaisut (Valmis)

- Kokonaisarvio (Myönteinen)

Yhteistoiminnallinen oppilaskeskeinen opetuskeskustelu



PIIRROS 5.5.2.4 Yhteistoiminnallinen oppilaskeskeinen opetuskeskustelu

- Oppilaat istuvat pulpettiriveissä. (Oppilaat istuvat pulpettirivissä. Yksi oppilas on liitutaululla Nóran selostuksen mukaan)

- Oppilaiden välinen vuorovaikutus ilmeinen. (”Sitten oikeassa alakulmassa?” ”Niin, entä sen jälkeen” ”Ihan totta!!”)

- Jos opettaja on kuvassa, niin hän ei osallistu keskusteluun, paitsi antamalla palautetta. (Opettajaa ei ole)

- Matematiikan sisällöt (Säännönmukaisuudet lukuruudukon avulla; määrällinen orientoituminen maailmaan, järjestysluvut)

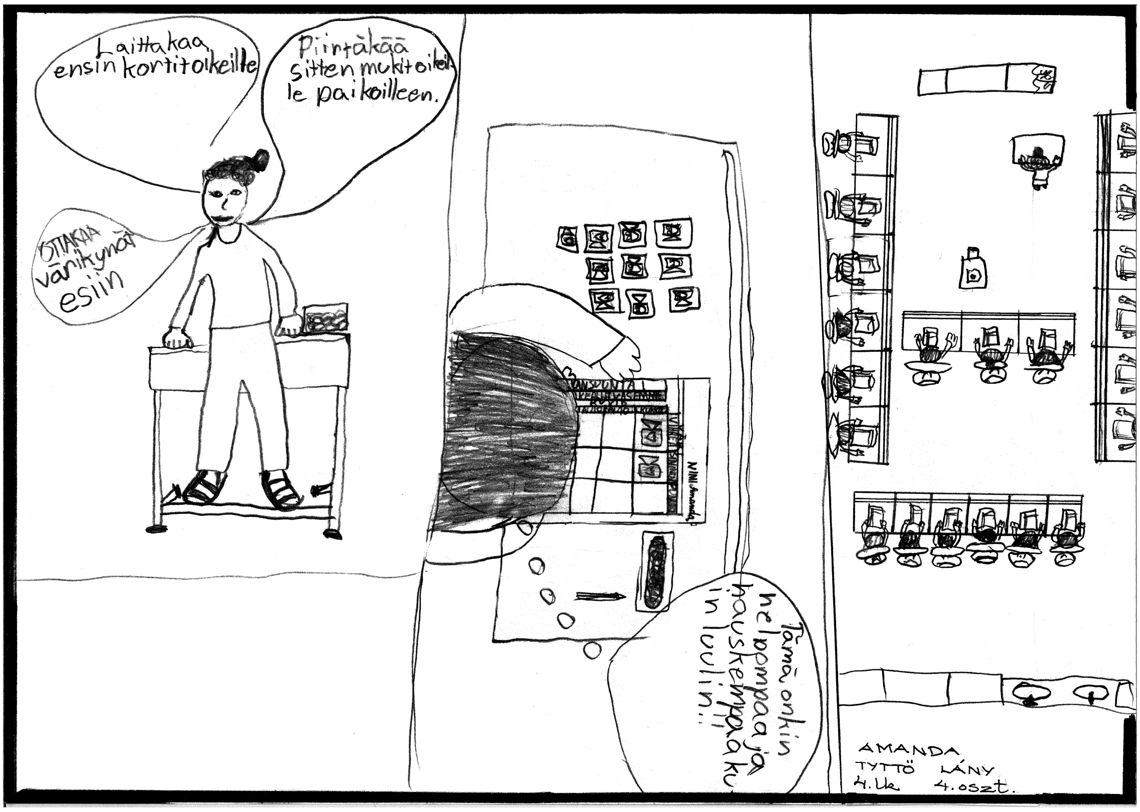
- Oppimis- ja toimintavälineet (Liitutaulu)

- Emotionaaliset suulliset ilmaisut (ei ole)

- Muut ilmaisut (ei ole)

- Kokonaisarvio (Myönteinen)

Oppilaskeskeinen yksilöllinen työskentely



PIIRROS 5.5.2.5 Oppilaskeskeinen yksilöllinen työskentely

- Oppilaat istuvat pulpettiriveissä. Oppilaiden välistä vuorovaikutusta ei ole. (Oppilaat istuvat rivimuotoisessa puolipiirissä. Vuorovaikutusta ei ole.)

- Jos opettaja on kuvassa, niin hän ohjaa työskentelyä. (Antaa työskentelyohjeet: ”Ottakaa värikynät esiin. Laittakaa ensin mukikortit oikeille (paikoilleen? PT). Piirtäkää sitten mukit oikeille paikoilleen.”)

- Matematiikan sisällöt (Tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys, luokittelua, taulukointia)

- Oppimis- ja toimintavälineet (Mukikortit, taulukkomoniste)

- Emotionaaliset suulliset ilmaisut (”Tämä onkin helpompaa ja hauskempaa kuin luulin.”)

- Muut ilmaisut (ei ole)

- Kokonaisarvio (Myönteinen)

5.6 Vertaisselvittäjä kyseenalaistaa aineiston analyysia

Tutkimuksen luotettavuuden parantamiseksi testautettiin aineiston analyysia vertaisselvittäjällä, jonka tuli tuntea 9–10-vuotiaita lapsia, matematiikan opetussuunnitelmaa, sen opetusta ja olla kiinnostunut perehtymään laadullisen aineiston analyysiin. Vertaisselvittäjän saaminen osoittautui hankalaksi. Kolme matematiikkaan erikoistunutta luokanopettajaa kieltäytyi tehtävästä, koska Unkarin matematiikan opetussuunnitelma olisi vaatinut pitemmän opiskeluajan kuin heillä oli käytettävissä.

Lopulta onnisti: kasvatustieteen maisteri, erityisopetukseen erikoistunut luokanopettaja Anni Lampinen lupautui tutkijayhteistyöhön. Hän on opiskellut neljä vuotta Varga–Neményi -opetusmenetelmää, soveltanut sitä käytännössä alakoulussa ja tuntee myös unkarilaisen matematiikan opetussuunnitelman perusopetuksen vuosiluokilta 1–4 oppimateriaaleineen. Hänellä on 17 vuoden opettajakokemus perusopetuksen alakoulusta, joten oppilaantuntemus on arvioitavissa riittäväksi. Koulutustaustan tasavertaisuudella pyrittiin minimoimaan vertaisselvittäjän ja tutkijan välisiä yli- tai aliarvostuksia.

Vertaisselvittäjän koulutuksessa kerrattiin aluksi Suomen ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelmat yhteisymmärryksen varmentamiseksi, käsiteltiin suullisesti piirrosaineistoa luokittelevat kriteerit työtavoista, matematiikan sisällöistä ja kokonaisarvioinnista. Vertaisselvittäjä paneutui suullisen kouluttautumisen jälkeen vielä aineiston analyysia ohjaavaan kirjalliseen materiaaliin.

Vertaisselvittäjän kanssa analysoitiin 64 piirroksesta 24 piirros kerrallaan. Analysointitilanteessa hän ajatteli ääneen luokittelunsa muodostumista, mikä kirjattiin. Tämän tarkoituksena oli selventää ja kyseenalaistaa tutkijan laatimia luokitteluperusteita. Vertaisselvittäjän luokittelun lopputulos kirjattiin, minkä jälkeen sitä verrattiin tutkijan aiemmin tekemään luokitteluun.

Pohdittiin luokittelun yksimielisyyden ja erimielisyyden perusteita. Vertaisselvittäjästä oli aluksi hankalaa erottaa opetuskeskustelua oppilaskeskeisestä pari- ja ryhmätyöstä. Erojen havaitsemista helpotti piirrosnäyte kustakin työtavasta. Matematiikan sisällöistä vaivattomia erotettavia olivat luvut, laskutoimitukset ja geometria, mutta ongelmanratkaisu, tilastot ja kombinatoriikka olivat hankalampia tunnistettavia lasten piirroksista, koska vertaisselvittäjällä ei ollut käytettävissään lasten selostuksia piirroksistaan.

Vertaisselvityksen lopputulos oli seuraava: Piirrosten kyselevästä opetuksesta ja yksilöllisestä työskentelystä oli 100-prosenttinen yksimielisyys, pohdinnan jälkeen myös muista työtavoista. Matematiikan sisällöistä (ongelmanratkaisu, tilastot ja kombinatoriikka) voitiin saavuttaa yksimielisyys yksityiskohtien tarkastelun jälkeen. Piirrosten kokonaisarvioinnista vertaisselvittäjän ja tutkijan näkemykset olivat lähellä toisiaan, kuten myönteinen – melko myönteinen tai melko myönteinen – neutraali. Kokoelman 24 piirroksesta 14:stä oltiin yksimielisiä kokonaisarvioinnissa.

Luokittelun perusteiden perusteellisella käsittelyllä pyrittiin luotettavuuden lisäksi tarkentamaan raportoinnissa käytettäviä ilmaisuja. Kaiken kaikkiaan matematiikkaan ja sen opetukseen liittyvän piirrosaineiston käsittely edellyttää analysoijaltaan matematiikan opetussuunnitelman tarkkaa tuntemusta, käytännön kokemusta ja työtapojen didaktisten perusteiden hallintaa.

6 KOETTU MATEMATIIKAN OPETUSSUUNNITELMA SUOMESTA JA UNKARISTA

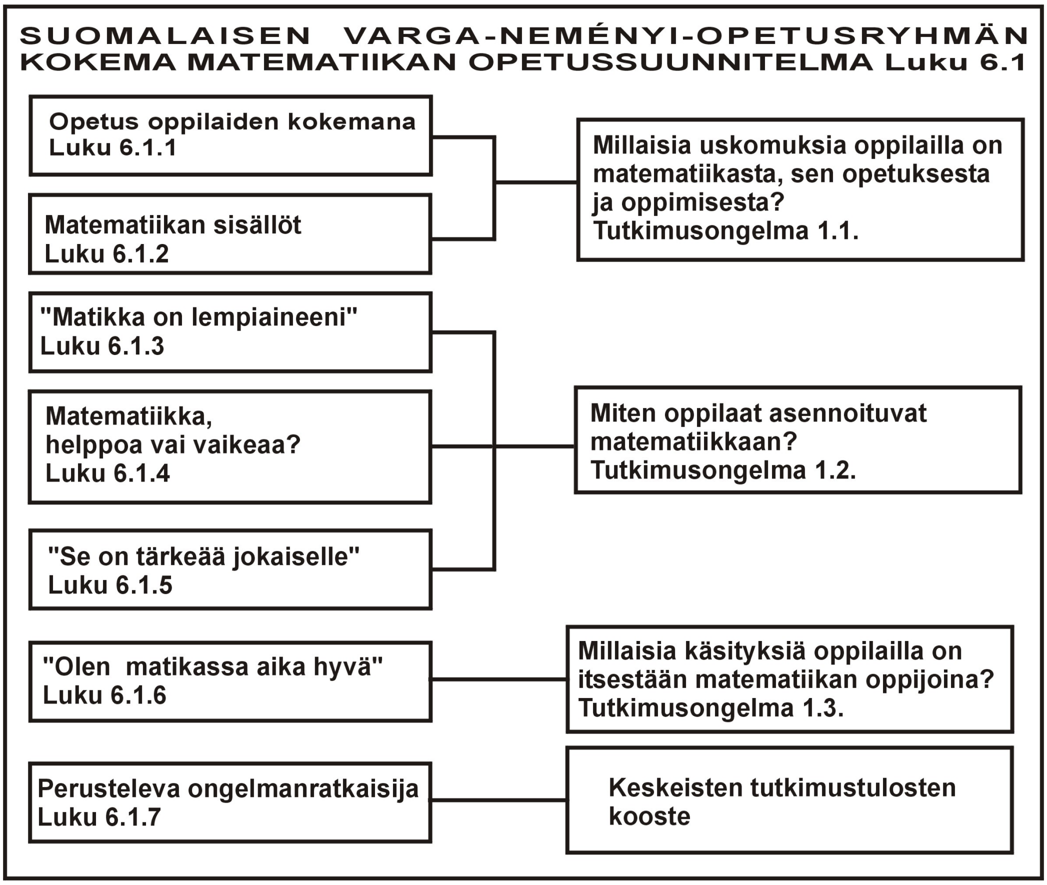
Tutkimuksen tulokset esitellään oppilasryhmittäin ja ongelma-alueittain. Aluksi luvussa 6.1 tarkastellaan suomalaisten Varga–Neményi -opetusryhmän perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa. Unkarilaisten Varga–Neményi -opetusryhmän peruskoulun neljäsluokkalaisten kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa kuvataan luvussa 6.2. Seuraavassa luvussa 6.3 esitellään suomalaisen perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa, kun oppimista on ohjattu suomalaisittain. Luvussa 6.4 tarkastellaan näiden kolmen opetusryhmän oppilaiden matematiikkaan liittyvien opetussuunnitelmien yhtäläisyyksiä ja eroja.

6.1 Suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän kokema opetussuunnitelma

Kuviossa 6.1.1 kuvataan tutkimuksen tulosten esittelyn etenemistä tutkimusongelmien mukaisessa järjestyksessä suomalaisessa perusopetuksen neljännen vuosiluokan oppilaiden Varga–Neményi -opetusryhmässä.

Tämän oppilasryhmän keskeiset tutkimustulokset esitetään *perusteleva ongelmanratkaisija* -tyyppikuvauksessa ja sen oppilaiden kokemassa matematiikan opetussuunnitelmassa (kuvio 6.1.7.1) luvun lopussa.

Tutkimusaineiston muodostivat neljäsluokkalaisten piirrokset ja kirjoitelmat, joissa he kuvasivat kokemuksiaan matematiikasta, sen opetuksesta ja oppimisesta. Koska painotetaan oppilaiden näkökulmaa, argumentointi etenee pääasiassa oppilaiden piirrosten ja kirjoitelmien varassa.



KUVIO 6.1.1 Suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän kokema matematiikan opetussuunnitelma tutkimusongelmittain

6.1.1 Opetus oppilaiden kokemana

Matematiikan työtavoiksi Varga (1969c) suositti oppilaiden itsenäistä työskentelyä yksilöllisesti ja pienryhmissä, joita ohjataan erilaisilla toimintavälineillä tai työkorteilla. Hän uskoi, että oppilaiden itsenäinen työskentely edistyy, jos heille tarjotaan mahdollisuus valita matematiikan tehtävä. Opettajalla, joka ohjaa oppilaiden itsenäistä työskentelyä, on erilaiset tehtävät kuin perinteisellä opettajalla, joka esittää asioita luokan edessä liitutaulun avulla. Hänen on varattava sekä nopeille että hitaammille oppilaille oppimisnopeuden mukaisia tehtäviä. Opettaja oppii tuntemaan oppilaansa paremmin, kun he työskentelevät yksilöllisesti tai pienryhmissä kuin silloin, kun hän puhuu opettajan pöydän takaa. Koko luokan työskentelyä käytetään peleissä ja kilpailuissa. Liitutaulua saatetaan käyttää tilanteissa, joissa taululle kerätään erilaisia tehtävien ratkaisuja. (Varga 1969c, 59–65). Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004, 17) mukaan opetuksessa tulee käyttää oppiaineelle ominaisia menetelmiä ja monipuolisia työtapoja, joiden avulla tuetaan ja ohjataan oppilaan oppimista. Työtapojen tehtävänä on kehittää oppimisen, ajattelun ja ongelmanratkaisun taitoja, työskentelytaitoja ja sosiaalisia taitoja sekä aktiivista osallistumista.

Suomalaisten Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaiden kokemuksia oppilaskeskeisistä yhteistoiminnallisista ja opettajajohtoisista työtavoista tarkastellaan piirros- ja kirjoitelma-aineiston pohjalta. Opettajajohtoisia työtapoja ovat opettajan esitys ja kysely. Esittävässä opetuksessa opettaja kertoo opittavasta asiasta ja havainnollistaa sitä. Kyselevässä opetuksessa opettaja esittää kysymyksiä, joihin oppilas vastaa puheenvuoron saatuaan. Oppilaskeskeisiä ja yhteistoiminnallisia työtapoja ovat opetuskeskustelu, pari- ja ryhmätyö sekä yksilöllinen työskentely. Opetuskeskustelussa oppilasjoukko puhuu tai väittelee keskenään ilman opettajan jakamia puheenvuoroja. Pari- ja ryhmätyössä kahdesta neljään oppilasta toimii yhteistyössä tehtävien parissa. Yksilöllisessä työskentelyssä oppilas tekee tehtäviä itsenäisesti. Tarkastelu etenee opettajajohtoisista työtavoista oppilaskeskeisiin yhteistoiminnallisiin työtapoihin.

”Joskus opin myös parhaiten, kun ope selittää”

Opettajajohtoista esittävää opetusta, jossa opettaja kertoo ja havainnollistaa opittavia asioita, ei kuvattu piirroksissa kertaakaan, mutta se mainittiin viiden oppilaan kirjoitelmissa. Näiden oppilaiden mukaan matematiikan opetuksessa on tärkeää, että opettaja selittää, selventää ja näyttää konkreettisesti oppilaille opittavia asioita, koska se aktivoi oppilaita oppimaan ja ajattelemaan:

> *Heidi: Opin yleensä parhaiten välineillä ja kuvista. Joskus myös parhaiten, kun ope selittää.*
>
> *Kanerva: Opin helposti välineistä ja open selittämisestä.*
>
> *Tiina: Liisa-ope selittää hyvin, koska olen oppinut uusia asioita.*
>
> *Ismo: Liisa opettaa hyvin, koska hän näyttää välineillä.*
>
> *Matti: Ku ope kertoo se saa miettimään ja päättelemään.*

”Paljonko sait ekaan vastaukseen?”

Opettajajohtoista kyselevää opetusta tämän suomalaisryhmän oppilaat kuvasivat piirroksissaan kaksi kertaa yksilöllisen tai parityöskentelyn koontina. Tällöin opettaja tarkastuttaa oppilailla matematiikan tehtäviä *kuinka paljon* -kysymysten avulla tai ohjaa heitä tarkastelemaan liitutaululta erilaisia tapoja ratkaista tehtäviä *miten*-kysymysten avulla ja tekemään niistä johtopäätöksiä *miksi*-kysymyksillä. Opettajan kyselyn avulla myös kerrataan opittuja asioita. Kahdessa kirjoitelmassa mainittiin kyselevä opetus ajattelemista aktivoivana ja haasteellisena toimintana, joka myös innostaa oppilasta:

> *Katja: Open kysymykset on haasteita. Niitä on ollut riittävästi.*

Teemu: Kysymyshaasteet on tosi hauskoja, koska niitä pitää miettiä paljon. Olen innostunut vain haasteissa.

Kyselevä opetus voi herättää oppilaassa myös epävarmuutta tai ärsyyntymistä:

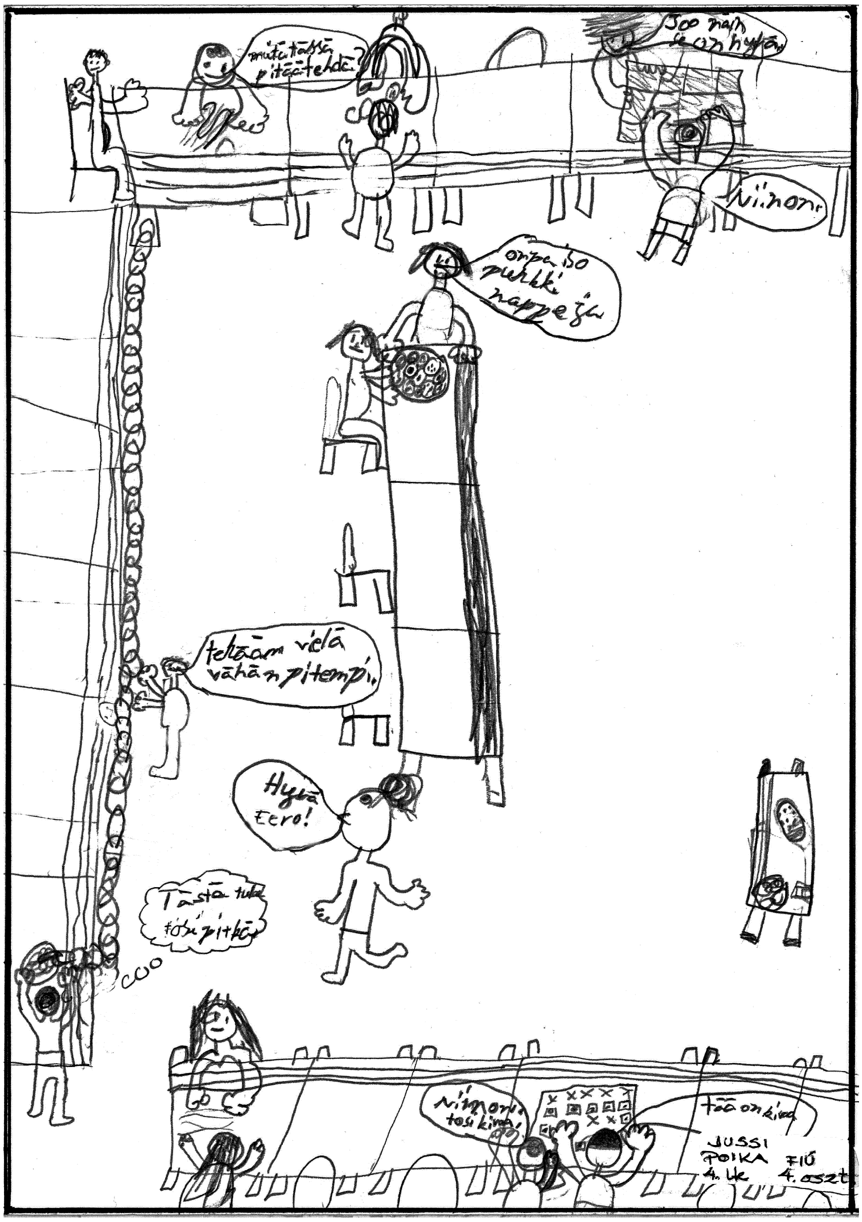
Amanda: Joihinkin kysymyksiin en todella tiedä vastausta, mutta useimmiten epäröin ja luulen, että muut pitävät minua pilkkanaan jos vastaan väärin. Luulotauti! Matikka on hauskaa, mutta väärin vastaaminen on inhottavaa. Matikka on yhä ykköslempiaineeni.

Iiris: Matikka on hauskaa, mutta se on ärsyttävää, kun jotkut inisee ja änisee jos ne tietää vastauksen.

Amanda on tarkkaillut omaa ajatteluaan kyselevän opetuksen aikana. Hän on havainnut, ettei tiedä vastausta joihinkin kysymyksiin. Väärinvastaamisen mahdollisuus sosiaalisissa tilanteissa askarruttaa Amandaa: Hän epäröi vastata luokkakavereiden kuullen, koska luulee toisten pilkkaavan vääristä vastauksista. Hän arvioi kavereiden mahdollisen pilkan luulotaudiksi. Sosiaalisten tilanteiden ahdistavuudesta huolimatta matematiikka on edelleen hänen lempiaineensa. Hänen kertomuksestaan on tulkittavissa, että kymmenvuotiaskin saattaa erottaa oppiaineen ja sen opetustilanteen toisistaan. Iiriskin Amandan tavoin pitää matematiikasta, mutta häntä häiritsevät tehtävän ratkaisseiden oppilaiden ääntelyt kyselevän opetuksen aikana. Hän kokee toisten ääntelyn painostuksena nopeaan suoritukseen ja toivoo saavansa pohtia kysymyksiä rauhassa. Molemmat tytöt kuvasivat matematiikan oppituntia piirroksissaan yksilöllisenä työskentelynä, jossa ei ole vuorovaikutusta oppilaiden välillä ja opettajan sekä oppilaiden välillä. Ääntely kyselevän opetuksen aikana voidaan ymmärtää myös oppilaiden onnistumisen kokemuksena, innostuksen osoituksena tai opettajan ja kavereiden huomion hakemisena.

Yhteistyössä: ″Tää on kivaa.″ ″Niin on, tosi kivaa.″

Useimmin suomalaiset neljäsluokkalaiset Varga–Neményi -opetusryhmästä kuvasivat piirroksissaan oppituntia yhteistoiminnallisena ja oppilaskeskeisenä parityöskentelynä, jolloin oppilaat keskustelevat työparin kanssa eri tavoin ratkaistavista ongelmista. Parityöskentelynä ratkaistavia ongelmia ovat lasten nimien päättely asusteiden tuntomerkkien perusteella tai WC-paperin rullan arkkien lukumäärän arviointi. Parin kanssa tutkitaan myös kalenterista omaa ja luokkakavereiden nimipäivää. Peruslaskutoimituksia harjoitellaan pelaten noppapeliä kaverin kanssa, jolloin voi pelitulosten perusteella ennakoida omia ja kaverin voittomahdollisuuksia. Parityöskentelypiirroksien mukaan matematiikan oppitunneilla käytetään erilaisia toimintavälineitä kuten noppia, WC-paperirullia, vaakoja ja rakentelupalikoita. Oppilailla on mahdollisuus valita yhteistyössä parin kanssa tehtävään sopivimmat toimintavälineet. Parityöskentelyn lisäksi kuvattiin yhteistoiminnallista ryhmätyötä. Tällöin oppilaalla on mahdollisuus vuorovaikutukseen luokkakavereiden kanssa sekä tehtävän sisällöstä, toimintavälineistä että niiden herättämistä tunteista. Samalla opitaan sosiaalisia taitoja, kun neuvotellaan tehtävän etenemisestä ja yhteisten toimintavälineiden käytöstä. Silloin kun oppilaat työskentelevät pareittain tai ryhmissä, opettaja kiertää oppilaiden joukossa seuraamassa työn edistymistä ja ohjaamassa apua tarvitsevia tai istuu omassa pulpetissaan kuten oppilaatkin. Alla olevassa Jussin piirroksessa 6.1.1.1 harjoitellaan parityönä murtoluvun esitysmuotoja välineitä käyttäen.

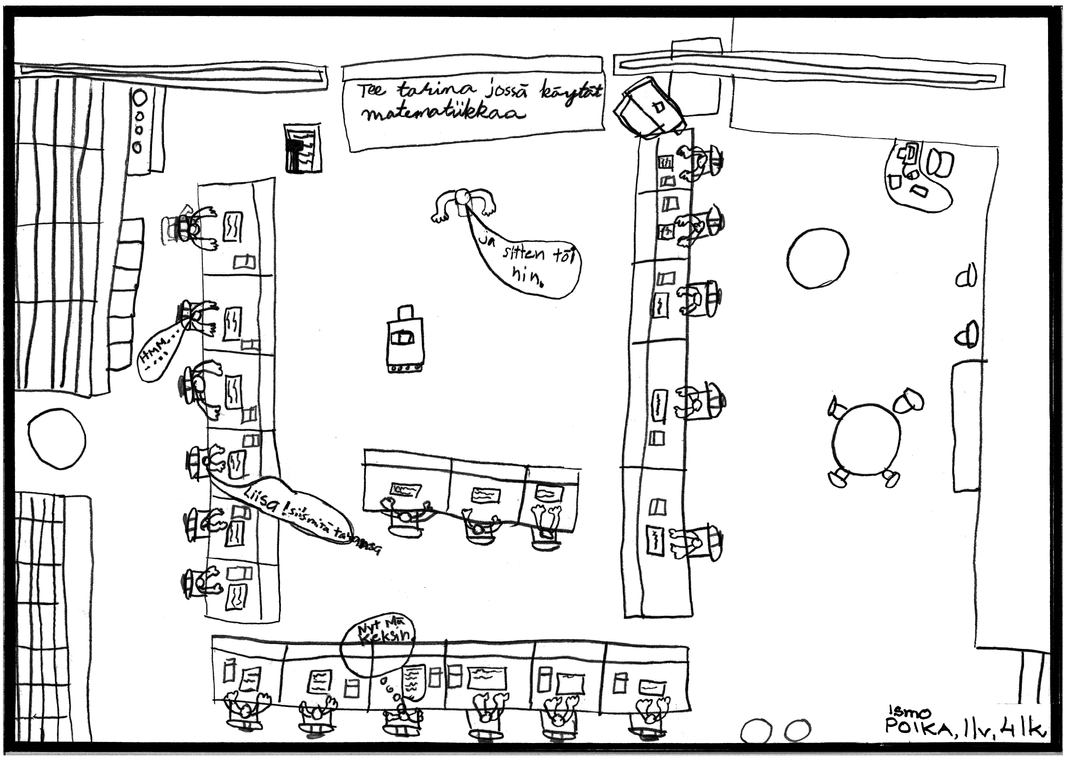


PIIRROS 6.1.1.1 Tää on kivaa. Niin on, tosi kivaa.

Jussin piirroksessa oppilaat ovat valinneet käyttöönsä muoviliittimiä, nappeja, lankoja, naruja, väritettävän taulun tai kuvakortteja. Niistä he kokoavat yhtä kokonaista, jonka kymmenesosan he ovat itse saaneet määritellä. Opettaja antaa myönteistä palautetta muoviliittimistä yhtä kokonaista kokoavalle oppilaalle.

"Tämä onkin helpompaa ja hauskempaa kuin luulin."

Suomalaiset oppilaat Varga–Neményi -opetusryhmästä kuvasivat piirroksissa toiseksi eniten oppilaskeskeistä yksilöllistä työskentelyä toimintavälineillä kirjallisten tehtävien ohjaamana. Tällöin käytettyjä välineitä ovat luokittelukortit taulukointia varten, nopat todennäköisyys- ja laskutoimitusharjoituksissa sekä palikat geometrian tehtävissä. Yksilöllisenä työskentelynä oppilaat kirjoittavat myös tarinoita, joissa käytetään matematiikkaa, kuten alla olevassa piirroksessa 6.1.1.2. Yksilöllisen työskentelyn aikana opettajan tehtävä on piirrosten mukaan antaa työskentelyohjeet, auttaa oppilaita pyydettäessä ja lopuksi keskusteluttaa oppilaita tehtävien ratkaisuista.



PIIRROS 6.1.1.2 Tee tarina, jossa käytät matematiikkaa.

Yksilöllisessä työskentelyssä matematiikan oppikirja on merkittävä oppimisväline, koska sen avulla voi oppia ja se tuo toimintaan vaihtelua. Oppikirjan avulla oppilas kokee oppivansa aika hyvin tai helposti, mutta parempia oppimisvälineitä ovat välineet ja kuvat. Vaikka oppikirja ei ole paras oppimisväline, tarjoaa se kuitenkin osaltaan vaihtelua toimintaan. Kokemukset oppikirjasta vaihtelevat: joku kokee sen tylsänä, jotkut taas mukavana.

Enni: Opin parhaiten matikkaa välineiden avulla ja kuvilla. Opin kirjallakin aika hyvin.

Iiris: Joskus matematiikan tunnilla tylsistyttää, mutta silloin on kivaa kun lasketaan kirjasta.

Ismo: Matikka on hauskaa, koska me tehdään eri juttuja pelataan, lasketaan kirjan avulla, piirretään viivadiagrammeja.

Kalle: Kirjasta oppii melko helposti.

Sauli: Kirjan tehtävät ovat tylsiä ja pelit kivoja. Sillon aika kuluu nopeasti.

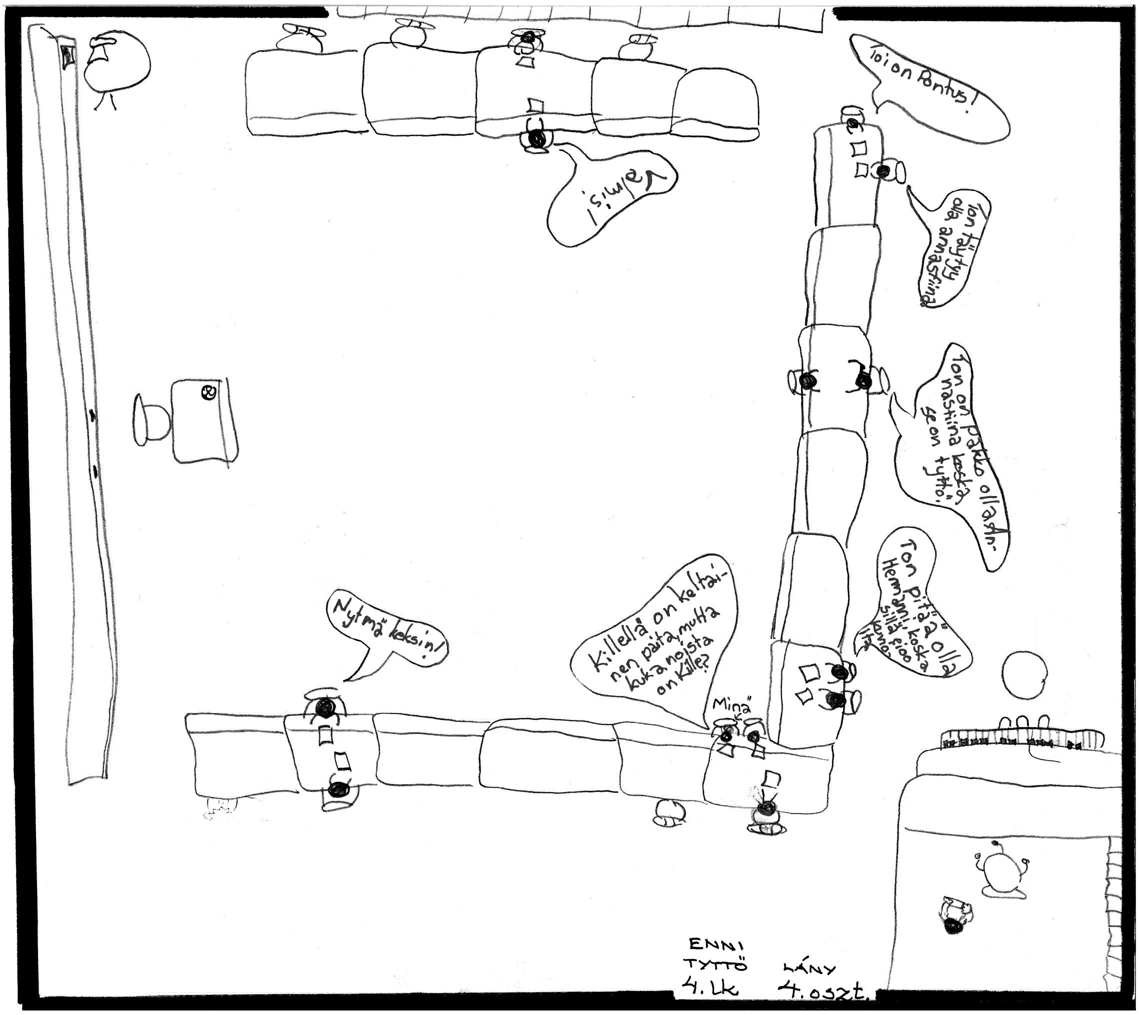
Kooste
Varga–Neményi -opetusryhmän suomalaisten 9–10-vuotiaiden neljännen luokan oppilaiden kirjoitelmat ja piirrokset osoittavat, että oppilaat havaitsevat matematiikan oppitunneilla erilaisia toimintoja, joilla tässä käsillä olevassa tutkimuksessa tarkoitetaan työtapoja. Yhteistoiminnalliset oppilaskeskeiset työtavat, pari- ja ryhmätyö sekä yksilöllinen työskentely, ovat hallitsevia näiden lasten kuvauksissa, kuten Varga (1969c) aikoinaan suositteli. Nämä työtavat tarjoavat oppilaille merkittäviä kokemuksia oppimisesta, ajattelusta, ongelmanratkaisusta, taidoista työskennellä vuorovaikutuksessa luokkatovereiden ja opettajan kanssa. Vuorovaikutus kyselevän opetuksen aikana herättää joissakin oppilaissa epävarmuutta tai ärsyyntymistä luokkatovereihin. Konkreettiset, jokaisen oppilaan omakohtaisessa käytössä olevat toimintavälineet havainnollistavat matematiikan sisältöjä ja tarjoavat aktiivista toimintaa. Varga–Neményi -opetusryhmän suomalaisten oppilaiden matematiikkakokemuksissa opetus ilmenee jokseenkin monipuolisena Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman 2004 mukaisesti, koska viidestä työtavasta (esittävä ja kyselevä opetus, opetuskeskustelu, pari- ja ryhmätyö sekä yksilöllinen työskentely) puuttuu vain yksi, opetuskeskustelu. Opetuksen menetelmällinen monipuolisuus mahdollistaa sen, että eri tavoin oppivat lapset saavat tilaisuuksia oppia itselleen sopivimmalla tavalla, mutta samalla laajentavat kokemuksiaan myös muista tavoista oppia.

6.1.2 Matematiikan sisällöt

Unkarilaisessa Varga–Neményi -opetusmenetelmässä pyritään laajaan pohjustukseen matematiikan eri sisältöalueista, joukko-opista, logiikasta, algebrasta, funktioista, lukujonoista, kombinatoriikasta, todennäköisyydestä, tilastoista, geometriasta ja mittaamisesta aritmetiikan lisäksi (Oravecz & Kivovics 2005, 26; Varga 1969c, 66–67, 1971b, 16–21). Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 keskeiset matematiikan sisältöalueet vuosiluokilla 3–5 ovat luvut ja laskutoimitukset, algebra, geometria sekä tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys, joihin sisältyy myös ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen (Emt. 159–160). Seuraavaksi esitellään matematiikan sisällöt suomalaisten Varga–Neményi -opetusryhmän neljännen luokan oppilaiden kokemana ongelmanratkaisun jälkeen opetussuunnitelman mukaisessa järjestyksessä.

Ongelmanratkaisu tarjoaa ällille tälliä

Ällitälli on lasten keksimä nimitys ongelmaratkaisutehtäville, joilla tarkoitetaan tehtäviä, joiden ratkaisutapa on oppilaan oivallettava itse ja ratkaisuja on useampia kuin yksi. Seuraavassa piirroksessa 6.1.2.1 Enni kuvaa ongelmaa, jossa ratkotaan lasten nimiä asusteiden kuvioiden perusteella. Oppilaat ovat pohtimassa ongelmaa puhekuplista päättelemällä. Keksimisen riemua on ilmassa. Pari oppilasta on jo saanut ongelman ratkaistuksi.



PIIRROS 6.1.2.1 Nyt mä keksin!

Matematiikan oppitunti oppilaiden mukaan tuntuu hauskalta silloin, kun on ongelmanratkaisua, koska siinä saa miettiä runsaasti. Ongelmatehtäviä saisikin olla opetuksessa enemmän. Ongelmanratkaisussa oppilasta viehättää useiden ratkaisujen ja ratkaisutapojen etsiminen. Kun ongelma on oppilaasta haasteellinen ja mielekäs, hän on valmis työskentelemään sen parissa sinnikkäästi pitkäänkin. Melkoinen joukko neljäsluokkalaisia todistaa omin sanoin, millaista ongelmanratkaisu voi olla:

> *Amanda: Hauskat asiat niin kuin päättely menevät matematiikassa nopeasti ohi. Pidän päättelytehtävistä ja ongelmista, koska niissä pitää käyttää päätään paljon.*
>
> *Helmi: Matikan tunnilla on tosi hauskaa, kun ällitällejä (ongelmia) ratkaistaan.*
>
> *Tiina: Pidän ällitälleistä eli mukavista tehtävistä, joita on liian vähän.*
>
> *Matti: Matikka on hauskaa, erityisesti päättelytehtävät. Luvuilla laskeminen ei ole niin hauskaa.*
>
> *Risto: Ällitälli on mukavaa kun saa päätellä vastauksia ja erilaisia keinoja saaha vastauksia selville. Tykkään miettiä jotain ällitälliä pitkään niin kun kerhossa tehdään.*
>
> *Enni: Killellä on keltainen paita, mutta kuka noista on Kille? (piirrosteksti)*
>
> *Silja: Kato, vain Killen paidassa on keltaista. Tää on mahoton. (piirrosteksti)*
>
> *Maija: Lasketaan WC-paperirullan arkit. Toivottavasti niitä ei oo sataa. (piirrosteksti)*
>
> *Heikki: Kuinka monta arkkia yhdessä rullassa vois olla? (piirrosteksti)*
>
> *Ari: Mutta miksi hän peitti jäljet? (pohtii ongelmaa tunnin jälkeenkin piirroksen mukaan)*

Näille neljäsluokkalaisille merkityksellisiä ongelmia olivat mm. WC-paperirullan arkkien määrän arviointi rullaa avaamatta. Tässä arviointimenetelmä oli keksittävä itse. Jotkut arvioivat punnitsemalla, jotkut mittaamalla rullan sisä- ja ulkokehän. Toinen lasten merkittäväksi kokema ongelma oli Kille-tehtävä eli lasten nimien päättely asusteiden kuvioiden ja värien perusteella. Tässä kuvioiden tulkinnallisuus mahdollistaa useita ratkaisuja.

Luvut ja laskutoimitukset

Matematiikan opetussuunnitelman sisältöalueen *Luvut ja laskutoimitukset* neljännen luokan oppilaat kokivat joko helppona tai vaikeana, mukavana tai tylsänä. Suuret luvut ovat helppoja, mutta tylsiä, kun taas murtolukujen konkretisointi välineillä tarjoaa mukavaa toimintaa. Luvuilla laskeminen on tylsempää kuin päättelyä vaativa ongelmanratkaisu tai geometrian hahmottamistehtävät paperisuikaleen avulla.

Heidi: Tylsää on, vaikkakin helppoa, suuret luvut.

Matti: Matikka on hauskaa, erityisesti päättelytehtävät. Luvuilla laskeminen ei ole niin hauskaa.

Risto: Mukavinta oli sinipunasuikaleen taittelujutut. Lukujen tutkimus on melko tylsää. En jaksa samanlaisia laskuja kauan.

Kerto- ja jakolaskut puhututtavat neljäsluokkalaisia enemmän kuin yhteen- ja vähennyslaskut, jotka ovat tulleet tutuiksi ensimmäisestä luokasta alkaen. Kerto- ja jakolaskuissa on vielä opiskeltavaa, jotta ne sujuisivat vaivattomasti.

Helmi: Tylsiä ovat jakolaskut, allekkain laskut ja kertotaulut. Hauskaa ovat puolestaan kertaistukset (kuinka monikertainen), kertolaskut ja pussitukset.

Kalle: +laskut, -laskut ja kertolaskut, nämä ovat kivoja tehtäviä.

Silja: Kertotaulut ovat helppoja, jakolaskut ovat puolestaan melko vaikeita.

Heikki: Minä osaan laskea kertolaskut ja kaikki muut paitsi en osaa vielä kovin hyvin jakolaskua.

Katja: Vaikeitakin asioita löytyy esimerkiksi päässälaskut.

Iiris: Kertotaululaput ovat kivoja.

Jussi: Hauskaa matikassa ovat allekkain laskut.

Lasten kokemuksissa heijastuvat peruslaskutoimitukset, joita painotetaan neljännen luokan matematiikan opetussuunnitelmassa. Kertomisen ymmärtämistä on harjoiteltu konkreettisesti pussittamalla esimerkiksi viiteen läpinäkyvään pussiin kuhunkin neljä kiveä. Kertotaululaput, pienet testit, ovat mieleisiä, koska ne antavat oppilaalle oman tarkistamisen jälkeen välitöntä palautetta siitä, miten kertotaulu on hallinnassa. Edellisistä lasten kertomuksista on havaittavissa, miten samat matematiikan sisällöt kuten allekkain laskut voidaan kokea eri tavoin.

Geometria ja mittaaminen

Geometria haastaa oppilaan hahmottamaan kolmi- ja kaksiulotteisuutta konkreettisen rakentelun tai paperitaittelun avulla, minkä pojat kokevat mieleiseksi. Lämpötilan mittaaminen on jostain syystä tylsää, niin kuin mittayksiköiden helpot muunnoksetkin.

Ari: Hauskinta on geometria ja logiikka! Joskus hieman tylsyyttäviä juttuja ovat mielestäni lämpömittaustehtävät.

Kalle: Kannattaa miettii pyramidin rakentamista (alla oleva piirros).

Risto: Mukavinta oli sinipunasuikaleen taittelujutut.

Heidi: Tylsää taas on, vaikkakin helppoa, joskus km, cm, kg, g, l ja dl asiat.

Kalle kuvaa seuraavassa piirroksessa 6.1.2.2 geometrian oppituntia, jolla rakennetaan palikoista pyramidia. Kuvan keskellä iloisesti hymyilevä poika on oivaltanut ajatuskuplan sisällön syttyneestä lampusta päätellen.

PIIRROS 6.1.2.2 Kannattaa miettii

Tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys

Diagrammit tilastojen kuvauksena ovat oppilaasta sekä helppoa että mukavaa. Toisaalta ne tarjoavat konkreettista toimintaa, toisaalta niiden avulla on mahdollista tehdä näkyväksi omia havaintoja kuvalliseksi esitysmuodoksi:

Enni: Diagrammitehtävät ovat kaikkein helpoimpia.

Kanerva: Matematiikassa hauskinta on ollut ainakin puudiagrammien tekeminen ja moni muu asia.

Ismo: Matikka on hauskaa, koska me piirretään viivadiagrammeja.

Kalle: Diagrammin teko on kivaa.

Teemu: Minun lempitehtävät on diagrammit.

Seuraavassa piirroksessa 6.1.2.3 kuvataan, miten mieleisiä harjoitukset todennäköisyydestä voivat olla: Heidi, hänen ystävänsä Amanda ja luokkakaveri Kalle ovat vapaaehtoisessa matematiikan kerhossa. Luokanopettaja käynnistää kerhon noppapelillä, jolla tutkitaan nopan lukujen todennäköisyyttä. Opettajan jaettua paperit oppilaat arvioivat, kuinka monta kuutosta saadaan 60 heitosta. Heidi arvioi mielessään tulevien kuutosten lukumäärää:

> *Hmm … 60 on paljon … 28!*

Arvioinnin jälkeen oppilaat heittävät noppaa ja merkitsevät tulokset muistiin tukkimiehen kirjanpidolla. Heidi on kuvannut tuloksensa erikoislähikuvaan: ykkösiä on tullut 14 kertaa, kakkosia 8, kolmosia 13, nelosia 8, viitosia 7 ja kuutosia 10 kertaa. Nopanheittojen summa 14 + 8 + 13 + 8 + 7 + 10 = 60. Hän on heittänyt 60 kertaa, kuten tehtävän tarkoitus olikin. Nopan heiton jälkeen kaikki oppilaat laittavat tuloksensa liitutaululle. Heidi katsoo tuloksia taululta ja oivaltaa:

> *Koska lukuja on 6 ja heittoja 60, kaikkia lukuja tulee tietysti luultavimmin 10!*

Opettaja päättelyttää oppilailla todennäköisyyttä ja sen perusteluja nopanheiton tuloksista. Heidi viittaa innokkaasti puheenvuoroa ja vastaa perustellen:

> *Luultavinta on, että kaikkia lukuja tulee 10, sillä lukuja on 6 ja heittoja 60, niin jos se jaetaan tasan kaikille, saadaan 10.*

PIIRROS 6.1.2.3 Hmm … 60 on paljon … 28!

Matematiikkakerhossa Heidi, muut kerholaiset ja opettaja ovat iloisia, koska kaikkien suupielet ovat ylöspäin – mukava ja innostava harjoitus todennäköisyydestä.

Lopuksi kokemuksia logiikasta

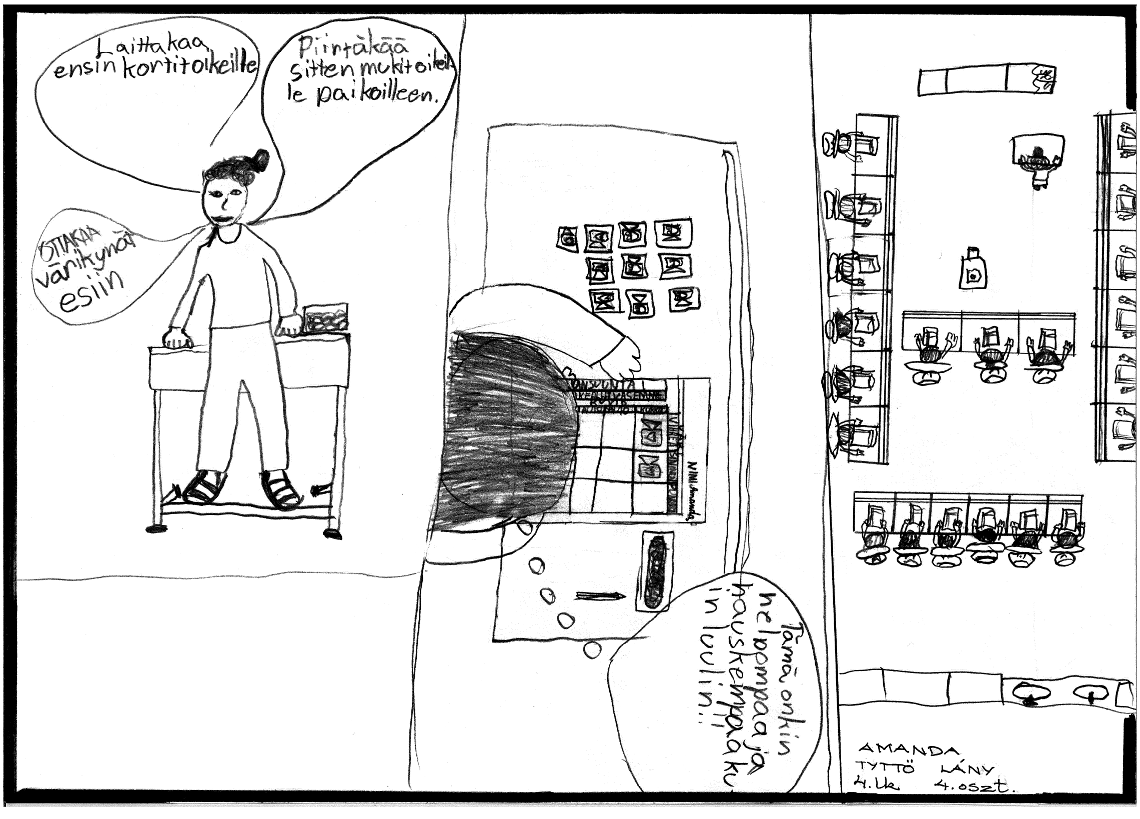
Oppilaiden kokemukset joukkojen logiikasta vaihtelevat: jotkut kokevat sen mukavaksi, jotkut tylsäksi. Logiikka tarkoittaa tässä opetusryhmässä konkreettisten esineiden, kuvien, lukujen ja lauseiden ominaisuuksia, niiden luokittelua sekä niihin liittyvien väitteiden totuuslauseiden pohdintaa:

Heidi: Hauskaa on usein logiikka.

Iiris: Logiikka on tylsää.

Ari: Hauskinta on geometria ja logiikka!

Amanda kuvaa seuraavassa piirroksessa 6.1.2.4 mukikorttien konkreettista taulukointia loogisten ominaisuuksien mukaan. Kortit on sijoitettava rivi- ja sarakeotsikoiden perusteella paikoilleen. Amandalla on ollut ennakkokäsitys tehtävän vaikeudesta ja tylsyydestä. Hän kuitenkin havaitsee tehtävän helpommaksi ja hauskemmaksi kuin etukäteen luuli.



PIIRROS 6.1.2.4 Tämä onkin helpompaa ja hauskempaa kuin luulin!

Kooste

Suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaiden *Minä ja matematiikka* -kirjoitelmissa tai *Meidän luokka matematiikan oppitunnilla* -piirroksissa esiintyvät Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman 2004 matematiikan sisältöalueista luvut ja laskutoimitukset, geometria ja mittaaminen, tietojen käsittely, tilastot, todennäköisyys ja ongelmanratkaisu, siis kaikki muut sisältöalueet paitsi algebra. Lisäksi opetussuunnitelman ulkopuolelta on logiikkaa unkarilaisen opetusmenetelmän mukaan.

6.1.3 "Matikka on lempiaineeni."

Varga–Neményi -opetusryhmän kaikki suomalaiset neljäsluokkalaiset oppilaat kuvasivat kirjoitelmissa kokemuksiaan matematiikasta, joka tuntui heistä hauskalta, mukavalta tai kivalta – he olivat kokeneet matematiikan myönteiseksi oppiaineeksi. Myönteisten ilmaisujen lisäksi useimmat olivat verranneet oppiaineiden mukavuutta järjestyslukuja käyttäen lempiainelistoiksi. Neljäsluokkalaisen opetussuunnitelmassa on yhdeksän oppiainetta: äidinkieli ja kirjallisuus, vieras kieli, matematiikka, ympäristö- ja luonnontieto, uskonto tai elämänkatsomustieto, musiikki, kuvataide, käsityö ja liikunta. Nämä suomalaislapset sijoittivat matematiikan 1 – 5 tilalle lempiaine-listoissaan.

Lasten suusta kymmenen syytä pitää matematiikasta

Matematiikka on mieleinen oppiaine, koska se tarjoaa tilaisuuksia ajatella, miettiä ja pohtia. Näissä kognitiivisissa toiminnoissa lapsia viehättää se, että pääsee tai joutuu käyttämään ja tarvitsee käyttää päätään paljon ja kauan. Sinnikästä ajattelua virittävät ja ruokkivat sellaiset haasteelliset tehtävät, joiden lopputulos ei ole välittömästi havaittavissa, vaan sitä on työstettävä suhteellisen pitkään:

> *Amanda: Pidän päättelytehtävistä ja ongelmista, joissa on käytettävä päätään paljon.*
>
> *Risto: Ällitälli on matikassa mukavaa kun saa päätellä vastauksia ja erilaisia keinoja saaha vastauksia selville. Tykkään miettiä jotain ällitälliä pitkään niin kun kerhossa tehdään.*
>
> *Ismo: Matikka on kiehtovaa koska siinä on erillaisia laskemistapoja. Aivot pääsee kuumille.*
>
> *Jussi: Minusta matikka on hauskaa koska se on monipuolista ja siinä tarvitsee ajatella.*

Värikkään vaihteleva matematiikka on toinen syy pitää oppiaineesta. Värikkään vaihteleva matematiikka tarkoittaa lasten mukaan monipuolisia sisältöjä. Tietysti matematiikassa on oltava lukuja ja laskutoimituksia, joskin ne kyllästyttävät usein toistuvina harjoituksina. Oppilasta innostaa päättelyä vaativa ongelmanratkaisu, jota pitäisi olla enemmän. Geometria on mieleistä, koska se kestitsee oppilaan toiminnan tarvetta silloin, kun rakennetaan ja askarrellaan. Tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys hauskuttavat, koska oman ajattelun voi piirtää silmin nähtäväksi kuvioksi. Todennäköisyyden omakohtaisiin kokemuksiin perustuvat harjoitukset, kuten nopanheitto, synnyttävät uusia oivalluksia.

Kolmas hyvä syy pitää matematiikasta on uusien asioiden oppiminen, jolla kymmenvuotias tarkoittaa asioiden ymmärtämistä ja tajuamista. Jotta voisi oppia uusia asioita, täytyy oppitunnilla osallistua, harjoitella ja kerratakin. Uusien asioiden oppimista edistävät innostus ja kiinnostus, ja päinvastoin oppiminen lisää innostusta ja kiinnostusta:

> *Tiina: Opin tietenkin uusia juttuja opettelemalla ja kertaamalla myös olemalla jutussa mukana.*

> *Kanerva: Matematiikka minusta on hauskaa koska on kiva oppia uusia asioita. Olen myös innostunut ja aika kuluu nopeasti varsinkin jos on joku uusi ja kiva asia opittavana. Jos joku asia tuntuu vaikealta niin kun sen tajuaa se tuntuu helpolta. Kun on tajunnut innostuu enemmän. Matematiikassa hauskinta on ollut puudiagrammien tekeminen ja moni muu asia.*

Neljänneksi myönteiset kokemukset matematiikasta ovat yhteydessä myös oppiaineen rakenteeseen. Matematiikan sisällöllisesti kumuloituva rakenne, jolloin uusi opittava asia perustuu aiemmin opitulle, herättää oppilaassa myönteisiä tunteita. Näin oppilas voi kokea, että aiemmin opitut asiat ovat jatkossakin tarpeellisia.

> *Enni: Matikka (matematiikka) on lempiaineeni, koska kun siirrytään uuteen asiaan edellistä ei unohdeta, vaan sitä saatetaan käyttää uudessa asiassa.*

Viides syy pitää matematiikasta ovat erilaiset tehtävät. Mieleisimmät tehtävät oppilaista ovat päättelyä ja loogista ajattelua vaativat sanalliset ongelmaratkaisuharjoitukset, joissa oppilaat keksivät ratkaisutavan ilman valmista mallia ja joissa ratkaisuja oli useampi kuin yksi. Yksi tällainen oppilaiden mieleiseksi kuvaama tehtävä oli päätellä penkillä istuvien lasten järjestys iän ja istumapaikan avulla. Hauskaa on myös lukujärjestelmien tutkiminen *pussittamalla*, kuten lapset asian ilmaisevat:

> *Helmi: Matematiikka on hauskaa, koska siinä on tosi kivoja tehtäviä. Hauskaa ovat kertaistukset (kuinka monikertainen), kertolaskut ja pussitukset. Tosi hauskoja ovat lämpötilat ja pussitukset. Matematiikan tunnilla on tosi hauskaa kun ällitällejä (ongelmia) ratkaistaan. Aika kuluu tosi nopeasti ja olen innostunut matematiikasta, koska on monellaista tekemistä paljon.*

Pussitus tarkoitti tässä luokkayhteisössä konkreettista toimintaa, jossa esimerkiksi kasa nappeja laitetaan kymmenen kappaleen läpinäkyviin pusseihin, kunnes jäljelle jääviä nappeja on vähemmän kuin kymmenen. Kymmenen napin pussit laitetaan edelleen satapusseihin, joita edelleen kymmenen kappaletta tuhatpusseihin. Nappien pussittamisen jälkeen luetaan tuhat-, sata-ja kymmenpusseista sekä irtonapeista niiden lukumäärä. Näin oppilaalla oli mahdollisuus konkreettisesti havaita kymmenjärjestelmän rakentumisen periaate. Vastaavalla tavalla harjoiteltiin myös kertomisen periaatteen ymmärtämistä. Kertolaskut koettiinkin jakolaskuja miellyttävimpinä laskutoimituksina. Kertotaulun harjoitteleminen pienten testien kertotaululappujen avulla oli kivaa, koska niistä näki välittömästi itse tarkistettuaan oman osaamisensa.

Välineet ovat kuudes syy pitää matematiikkaa mukavana oppiaineena:

Heidi: Matematiikan tekee hauskaksi myös se että siitä voi tehdä kaikenlaista ja siinä voi käyttää kaikenlaisia tavaroita kuten tilkkuja ja nappeja.

Silja: Opin parhaiten välineillä. Tykkään tehtävistä joissa on kuvia. Niistä tajuan.

Heidin, Siljan ja muidenkin lasten aiemmin edellä kertomat esimerkit ilmentävät, mikä merkitys toimintavälineillä on myönteiseen tunnekokemukseen matematiikasta. Se on luonteeltaan abstraktista ja symbolista, mutta abstraktisia symboleja on mahdollista esittää konkreettisesti esineillä ja kuvilla. Nämä eri esitysmuodot tarjoavat oppilaalle toisaalta vaihtelua ja toisaalta konkretiaa ymmärtämisen edistämiseksi.

Seitsemäs syy pitää matematiikasta on sen tärkeys, koska se on hyödyllistä ja tarpeellista eri elämänvaiheissa, mistä Heidi kertoo:

Heidi: Matematiikka on minulle sekä lempiaineena että tärkeimpänä aineena 1:nen, koska siitä on paljon hyötyä isona ja myös pienenä. Erityisesti isona, kun pitää käydä esimerkiksi kaupassa. Tarvitsen sitä uskoakseni aikuisena enemmän kuin lapsena. Tarvitsen matikkaa paljon koulussa ja jonkin verran kotona. Tarvitsen sitä aikuisena sekä ammatissa että vapaa-ajalla. Oppitunneilla sitä tarvitsee yllissä (ympäristö- ja luonnontieto), ranskassa ja teknisessä työssä.

Toiminta, tekeminen, kuten lapset asian ilmaisevat, on kahdeksas syy pitää matematiikasta. Kun matematiikan oppitunnilla on aktiivista toimintaa, aika kuluu nopeasti. Jos sitä ei ole, tylsistyttää. Vaikka toiminta sinällään on kymmenvuotiaalle tärkeää, toiminnalla on oppimisen lisäksi oltava lapsen omaan elämään liittyvä tavoitteellinen konkreettinen lopputulos käyttötarkoituksineen:

Risto: Matikka on sillon kivaa kun tehdään juttuja. Mukavinta oli sinipunasuikaleen taittelut (hahmottamisharjoituksia geometriassa). Tein niistä lohikäärmeitä.

Matti: Matikka on hauskaa erityisesti päättelytehtävät ja pelikortit dominoon.

Mielikuvitus ja luovuus, vaikkapa lohikäärmeiksi, ovat mahdollisuus syventää matematiikan tietojen ja taitojen oppimista käyttämällä leikkejä ja pelaamista yhteistoiminnassa.

Monen neljäsluokkalaisen mielestä yhdeksäs hyvä syy pitää matematiikasta on yhteistyö. Luokkakavereiden kanssa toimitaan ennen tunnin alkua, tunnin aikana, sen jälkeen ja ruokailussakin, mikä ilmenee monista lasten piirroksista. Yhdessä tekeminen, mutta myös ystävyyssuhteiden solmiminen puhututtaa matematiikan tunnin kuluessakin, kuten Sauli kysyy Kallelta Tiinan piirroksessa, voisiko tämä olla hänen kanssaan seuraavalla välitunnilla.

Kymmenes ilmeinen syy neljäsluokkalaisen myönteisiin matematiikkakokemuksiin on myös opettaja ja hänen myönteinen suhteensa matematiikkaan, jonka myös lapset ovat havainneet:

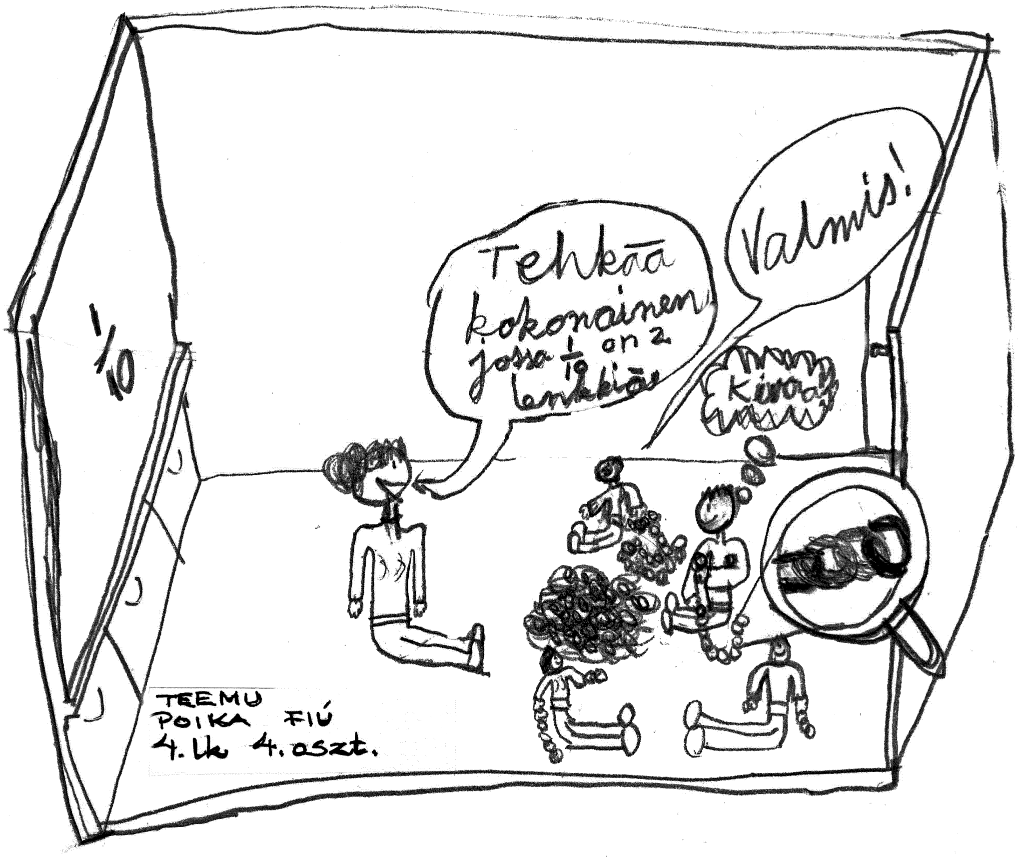
Heidi: Matikka on lempiaineeni siksi että opettajakin pitää aineesta ja on innostunut siitä.

Kalle: Matematiikka on hauskaa koska ope tekee sen hauskaksi.

Myönteisiä tunnekokemuksia matematiikasta ilmenee myös lasten piirroksissa, joista esimerkkinä Teemun piirros 6.1.3.1. Siinä oppilaat ja opettaja istuvat lattialla lähellä toisiaan muoviliitinkasan ympärillä. Myönteiset tunnekokemukset ovat pääteltävissä oppilaiden ja opettajan ilmeistä: kaikki ovat hymyssä suin. Myönteisyys on havaittavissa myös oppilaiden puhekuplista.

Teemun kuvaaman oppitunnin aiheena on murtolukujen kymmenesosien harjoittelu. Tarkoituksena on koota muoviliittimistä yksi kokonainen, kun yksi kymmenesosa on kaksi liitintä.

Muoviliittimet ovat olleet Teemulle merkittäviä, koska ne ovat erikoislähikuvassa, suurennuslasissa. Muoviliittimet, kuten muutkin matematiikan toimintavälineet, ovat tärkeitä oppilaiden kuvaamina myönteisten tunne- ja oppimiskokemusten vuoksi.



PIIRROS 6.1.3.1 Murtolukuja muoviliittimistä

Kooste

Suomalaiset Varga–Neményi -opetusryhmän neljännen luokan oppilaat kokevat matematiikan mieleisenä oppiaineena. Se on mieleistä, koska se tarjoaa tilaisuuksia ajatella, miettiä ja pohtia. Matematiikka koetaan vaihtelevana monipuolisten sisältöjensä ansiosta. Siitä pidetään, koska sen parissa opitaan ymmärtämään, tajuamaan, keksimään ja oivaltamaan uusia asioita. Oppiaineen kumuloituva rakenne saa oppilaan kokemaan, että aiemmin opitut asiat ovat jatkossakin tarpeellisia. Monipuoliset ja vaihtelevat tehtävät tekevät matematiikasta mieleisen oppiaineen. Konkreettiset toimintavälineet edistävät symbolien ja abstraktioiden ymmärtämistä ja tuovat vaihtelua, mikä saa oppilaan pitämään matematiikasta. Myös hyödyllisyys, tarpeellisuus ja käyttökelpoisuus herättävät myönteistä suhdetta oppiaineeseen. Myönteiselle suhteelle matematiikkaan on eduksi, jos sen opetukseen sisältyy tavoitteellista toimintaa lopputuloksineen oppimisen lisäksi. Yhteistoiminnalliset työtavat edistävät oppilaiden myönteisiä kokemuksia matematiikasta. Merkittävää oppilaan ja matematiikan suhteen muodostumiselle on opettajan suhde opettamaansa aineeseen. Matematiikka ei ole yhdestäkään oppilaasta vastenmielinen oppiaine.

6.1.4 Matematiikka, helppoa vai vaikeaa?

Suomalaisten Varga–Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaisten oppilaiden kokemuksia matematiikasta analysoitiin kirjoitelmista, joissa he pohtivat, miltä matematiikka tuntuu. Lasten pohdinta tuotti kahdenlaisia näkökulmia, toisaalta oppilaat kertoivat, että matematiikka tuntuu mukavalta, kivalta tai hauskalta, toisaalta helpolta tai vaikealta. Lasten helppous–vaikeus -kokemukset olivat luokiteltavissa neljään ryhmään: 1) matematiikka on helppoa, 2) matematiikka ei ole helppoa eikä vaikeaa, vaan sopivaa, 3) matematiikka on helppoa ja vaikeaa, ja 4) matematiikka on vaikeaa.

Matematiikka on helppoa

Matematiikka tuntuu silloin helpolta, kun sitä kokee oppivansa. Oppiminen on kymmenvuotiaan neljäsluokkalaisen mukaan ymmärtämistä, tajuamista, oivaltamista ja keksimistä matematiikassa.

Oppiminen on helpointa toimintavälineillä, koska silloin oppilas itse voi havaita niistä konkreettisesti opittavan asian. Matematiikka tuntuu helpolta silloin, kun opettaja selittää. Ongelmaratkaisutehtävät (ällitällit) haastavat oppilaita aktiiviseen omakohtaiseen pohdintaan. Kokeet ja tehtävien tarkistetut ratkaisut antavat oppilaalle palautetta oppimisesta. Niiden perusteella oppilas tekee päätelmänsä matematiikan helppoudesta tai vaikeudesta:

> *Kanerva: Matikka on tosi helppoa, jos joku asia tuntuu vaikealta niin kun sen tajuaa sitten se tuntuu helpolta. Opin matematiikka mielestäni helposti. Opin helpoimmin välineistä ja open selittämisestä. Matikka on tosi helppoa. Sen näkee kokeista ja oikein menneistä tehtävistä.*

> *Teemu: Matikka tuntuu helpolta ja kivalta. Matikan oppiminen on helpointa välineillä ja haasteilla. Haasteita eli ällitällejä (ongelmanratkaisut) on ollut tarpeeksi. Ällit ja tällit on tosi hauskoja, koska niitä pitää miettiä paljon. Olen innostunut vain niissä.*

Kukaan näistä kuudesta lapsesta (ks. taulukkoa 6.1.4.1) ei maininnut ainoatakaan matematiikan sisältöaluetta tai tehtävää vaikeaksi. Olisiko mahdollista, että matematiikan helpoksi aineeksi kuvaavat oppilaat ovat kokeneet opetuksen ja opiskelun liian yksinkertaiseksi ja vaivattomaksi ja että heillä olisi edellytyksiä vaativampiinkin suorituksiin? Oppilaiden kirjoitelmissa ilmenevät pitkäkestoista ajattelua vaativat ongelmanratkaisut ja niiden sopiva määrä myönteisenä, joten oppilaille on ollut tarjolla eritasoisia tehtäviä. Näiden oppilaiden mukaan oppitunnilla onkin tylsää, jos on liian helppoja tehtäviä. Helppoa on erilaisten diagrammien tekeminen. Matematiikka on mieleistä, jos se on monipuolista ja siinä pääsee ajattelemaan.

Matematiikka ei ole vaikeaa eikä helppoa

Silloin kun matematiikka ei ole vaikeaa eikä helppoa, se on sopivaa vaikeustasoltaan. Matematiikan oppiminen on mahdollista vain opiskelemalla ja yrittämällä rohkeasti:

> *Heikki: Matematiikka ei ole vaikeaa eikä helppoa ainakaan minun mielestäni, vaan sopivaa Matikkaa oppii ainoastaan opiskelemalla koska jos ei tohdi edes yrittää on mahdotonta oppia.*

Heikki kokee osaavansa laskea kertolaskut ja kaikki muutkin tehtävät, mutta ei vielä koe osaavansa kovin hyvin jakolaskua. Ilmaus *ei vielä* viestii, että hän luottaa kykyihinsä oppia ne myöhemmin. Hänellä on yleensä hauskaa matematiikan tunneilla, mutta hän kertoo väsyvänsä fyysisesti helposti, jolloin alkaa pitkästyttää.

Matematiikka on helppoa ja vaikeaa

Matematiikka koetaan sekä helpoksi että vaikeaksi jostain syystä, jota oppilaat eivät pohtineet vapaamuotoisissa kirjoitelmissaan. He kiinnittivät huomiota kuitenkin niihin toimintoihin, joiden avulla he kokevat oppivansa. Oma toiminta välineiden avulla ongelmaratkaisutehtävien ja opettajan selittämisen lisäksi saavat oppilaan tuntemaan, että hän oppii. Ongelmien ratkaiseminen on mukavaa päättelyn vuoksi, mutta sitä ei ole tarpeeksi. Oppilas päättelee matematiikan olevan helppoa ja vaikeaa tehtävien ja kokeiden perusteella. Nämä oppilaat kuten eivät matematiikkaa helppona oppiaineena pitävät oppilaatkaan maininneet opettajan suhdetta matematiikan helppouteen tai vaikeuteen:

> *Heidi: Matikka on minusta yleensä helppoa. Sen päättelen kokeista ja tehtävistä. Opin yleensä parhaiten välineillä ja kuvista. Joskus myös parhaiten, kun ope selittää.*

> *Helmi: Matikka on joskus helppoa ja joskus vaikeaa. Minä opin matematiikkaa niin että harjoittelen.*

> *Maija: Matematiikassa on vähän vaikeita juttuja ja helppoja juttuja. Minä opin sen siten että teen käsillä sen saman kuin se lasku on.*

> *Tiina: Mielestäni matikka on hauskaa, silloin kun sitä osaa, koska se on silloin helpompaa. Opin tietenkin matikkaa opettelemalla ja kertaamalla myös olemalla jutussa mukana. Opin matikkaa myös open selittämisestä ja ällitälleistä eli mukavista tehtävistä, joita on liian vähän.*

> *Risto: Se on helppoa ja vaikeeta. Riippuu tehtävästä. Opin tekemällä hyvin. Ällitälli on mukavaa kun saa päätellä vastausta. En jaksa samanlaisia laskuja kauan.*

Merkittäviä oppimisen edistäjiä ovat oma harjoittelu, oppitunnilla osallistuminen ja asioiden kertaaminen. Kertaamisen oppilaat kokivat myönteiseksi, mutta myös kielteiseksi, koska tuttujen asioiden toistaminen kyllästyttää. Harjaantumisvaihe on oppimismotivaation kannalta arka, koska silloin ei enää ole sitä uutuudenviehätystä, joka on asiaa ensi kertaa opeteltaessa. Kerrattaessa oppilaan edessä on usein tietynlainen mekaaninen harjoitussarja. Tällaiset päinvastaiset kokemukset osoittavat, miten erilaisia tulkintoja oppilailla on samasta opiskelusta. Nämä oppilaat kertoivat tuntien olevan yleensä mieleisiä, mutta ajoittain tylsiä kun hauskoja tehtäviä ei ole valittavana. Helppoja tehtäviä ovat diagrammit, suuret luvut ja joskus mittayksiköt muunnoksineen. Vaikeita tehtäviä ovat päässälaskut ja kertaistukset sadalla ja tuhannella. Nämä ovatkin ymmärrettäviä vaikeuskokemuksia, koska oppilaat kokevat oppimista helpottaviksi konkreettiset toimintavälineet, mutta päässälaskuissa ei ole havaittavaa tilannetta käytettävissä. Myös sata- ja tuhatkertaistukset ovat hankalia havainnollistettavia ja havaittavia suuren esinemäärän vuoksi.

Matematiikka on vaikeaa

Vain Silja 20 tutkitusta neljännen luokan oppilaasta koki matematiikan vaikeaksi, koska hän ei ole menestynyt kokeissa niin hyvin kuin toivoo. Matematiikan oppiminen on kuitenkin helppoa silloin, kun hänellä on käytössään välineitä ja kuvia, jotka auttavat ymmärtämään konkretian avulla. Siljan suhteelle matematiikkaan olisi eduksi, jos hän voisi käyttää välineitä tai kuvia tukenaan koetilanteissakin. Häntä voisi ohjata visualisoimaan itsenäisestikin ratkaistavia tehtäviä.

> *Silja: Matematiikka on mielestäni vaikeaa. Matematiikka on vaikeaa päättelen kokeista. Matematiikan oppiminen on melko helppoa. Opin parhaiten välineillä. Tykkään tehtävistä joissa on kuvia. Niistä tajuun.*

Seuraavassa piirroksessa 6.1.4.1 Silja kuvaa oppituntia, jolla matematiikka tuntui hänestä vaikealta. Silja istuu Maijan vieressä takarivissä vasemmalta toisena. Oppilaat päättelevät yhteistyössä lasten nimiä asustetuntomerkkien pohjalta. Silja ja Maija pohtivat ääneen tehtävää, mutta molemmat ajattelevat, että sitä on mahdotonta ratkaista. Tyttöjen vasemmalla puolella joku muukin toteaa tehtävän vaikeaksi ja sinkoaa epätoivoisena tehtäväpaperin lattialle. Etualalla oleva poikapari kiistelee pyyhekumista. Kolmatta poikaa kyllästyttää poikaparin toistuva sählääminen pyyhekumin kanssa. Tytöt takarivissä oikealla ovat jo ratkaisseet tehtävän. Heidän vieressään istuva Teemu arvioi tehtävän olevan ainakin osaksi oikein, mutta loppua hänkään ei koe osaavansa. Oppilaiden takana oleva opettaja on huomannut oppilaiden vaikeudet ja toteaa, että vaikea tehtävä katsotaan yhdessä.

PIIRROS 6.1.4.1 Tää on mahoton

Kooste

Suomalaiset Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaat kokevat matematiikan helpoksi, sopivaksi, helpoksi ja vaikeaksi tai vaikeaksi. Tämän he ovat päätelleet sekä koemenestyksestään, harjoitustehtävistään että oppimiskokemuksistaan. Oppiminen on ymmärtämistä, tajuamista, keksimistä ja oivaltamista. Jotta oppiminen on mahdollista, on oppilaiden mukaan osallistuttava, kerrattava ja päästävä aktiivisesti ratkaisemaan haasteellisia ongelmia. Toimintavälineet ja opettajan selittäminen tukevat merkittävästi oppimista. Seuraavassa taulukossa on kooste matematiikan helppoudesta tai vaikeudesta lasten kokemana.

TAULUKKO 6.1.4.1 Matematiikka, helppoa vai vaikeaa?

Onko matematiikka helppoa vai vaikeaa?	Amanda	Enni	Heidi	Helmi	Iiris	Kanerva	Katja	Maija	Silja	Tiina	Ari	Eero	Heikki	Ismo	Jussi	Kalle	Matti	Risto	Sauli	Teemu
Helppoa (H)					**H**	**H**									**H**	**H**			**H**	**H**
Sopivaa (S)													**S**							
Helppoa ja vaikeaa (HV)	**HV**	**HV**	**HV**	**HV**			**HV**	**HV**		**HV**	**HV**	**HV**		**HV**			**HV**	**HV**		
Vaikeaa (V)									**V**											

6.1.5 "Se (matematiikka) on tärkeää jokaiselle, ei pelkästään minulle."

Varga–Neményi -opetusryhmän kaikki neljäsluokkalaiset kertoivat kirjoitelmissaan *Minä matematiikan oppijana*, että matematiikka on todella tärkeää, tärkeää tai ainakin melko tärkeää – he pitivät sitä merkittävänä oppiaineena. Monet olivat myös verranneet matematiikan merkitystä muihin oppiaineisiin järjestyslukujen avulla tärkeysluetteloksi, jossa matematiikka oli sijalla 1 – 5. Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman 2004 mukaan neljännellä luokalla on yhdeksän oppiainetta. Matematiikka ei ollut yhdenkään oppilaan tärkeysluettelon viimeisenä eli yhdeksäntenä. Enemmistö oppilaista perusteli matematiikan merkitystä erilaisilla käyttötarkoituksilla. Matematiikalla on käyttöä oppilaiden mukaan 1) lasten arkielämässä, 2) eri oppiaineissa koulussa, 3) aikuiselämässä, ammatissa ja työssä sekä 4) monissa muissa asioissa. Seuraavaksi oppilaat esittelevät omin sanoin, miten tärkeää matematiikka on ja missä sitä voi käyttää.

Lapsen arjen matematiikkaa

Neljäsluokkalaisilla oli selvästi omakohtaisia kokemuksia matematiikan käytöstä. Se on tarpeellista, hyödyllistä ja käyttökelpoista arkielämän käytännöissä, kuten ostoksilla, matkoilla, ruuanlaitossa ja lapsen omien rahavarojen laskemisessa. Jotta olisi selvillä euron ja markan välisestä arvosta, on tärkeää oppia matematiikkaa. Näin lasten käsityksissä kuvastui muutaman vuoden takainen yhteiskunnallinen tilanne:

> *Ari: Matematiikka on mielestäni tärkeä oppiaine, koska ilman matematiikkaa olisin täysin avuton tavallisessa arjessa, esimerkiksi kaupassa. Matematiikka onkin tärkeysjärjestyksessä äidinkielen kanssa ensimmäisenä.*
>
> *Risto: Matikka (matematiikka) on tärkeää sitä tarvii monessa paikassa. Minä olen käyttänyt matikkaa ulkomaan matkoilla rahan vaihossa.*

Teemu: Matikka on aika tärkeää esimerkiksi tiedän paljonko pitää laittaa ruokaa. Aikuisena tarvitaan tosi paljon matikkaa.

Silja: Tarvitsen matematiikkaa esimerkiksi rahojeni laskemiseen. Matikka on melko tärkeää. 1. Kässä (käsityö) 2. Kuvis (kuvataide) 3. Liikunta 4. Uskonto 5. Englanti 6. Matikka. Luulen tarvitsevani matikkaa aikuisena.

Tiina: Matikka on tärkeää oppia, koska se on hyödyllistä esimerkiksi euroissa: 1 euro = noin 6 markkaa. 6 euroa = noin 30 markkaa. Matikka on 3. tärkeysjärjestyksessä, jossa on 1. Ylli (ympäristö- ja luonnontieto) ja 2. Äikkä (äidinkieli).

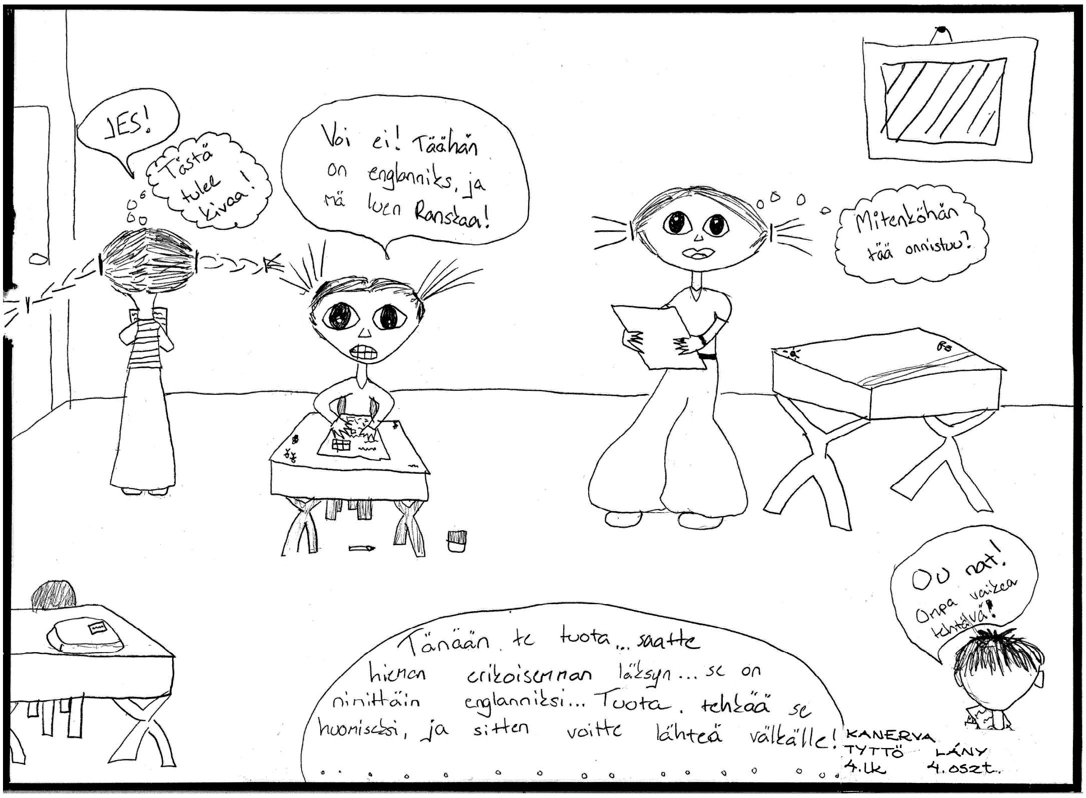
Matematiikka koulussa eri oppiaineissa

Oppilaiden kertomusten mukaan matematiikkaa on käytetty matematiikan oppituntien lisäksi muissakin oppiaineissa. Ranskan tunneilla matematiikkaa tarvitaan suurissa luvuissa, joissa käytetään sekä yhteen- ja kertolaskua. Ranskan kielessä yli kuudenkymmenen menevissä lukusanoissa on yhdistelmärakenne, mutta sitä edeltävillä luvuilla on itsenäinen nimi: 10 = dix, 20 = vingt, 30 = trente, 40 = guarante, 50 = cinquante, 60 = soixante, 70 = soixante-dix (60+10), 80 = quatre-vingts (4x20) ja 90 = quatre-vingt-dix (4x20+10) (Barrow 1999, 103). Lisäksi oppilaat ovat tehneet tehtäviä, joissa värien käyttöä ohjattiin ranskan kielellä kirjoitetuilla lukusanoilla.

Kanerva: Matikkaa tarvitsee koulussa melkein kaikissa aineissa. Teknisissä käsitöissä tarvitaan matikkaa mittaluvuissa. Yllissä tarvitaan usein matikkaa. Matematiikka on oppiaineiden tärkeysjärjestyksessä ensimmäinen.

Iiris: No, ainakin sitä tarvitsee koulussa matikan tunnilla ja kaupassa. Matikkaa tarvitaan äikässä (äidinkielessä), yllissä (ympäristö- ja luonnontiedossa), ranskassa ja kässässä (teknisessä ja tekstiilikäsityössä). Ranskassa numeroissa 60 eteenpäin. Matikka on aineiden tärkeysjärjestyksessä 4.

Äidinkielessä oppilaat ovat kirjoittaneet kertomuksia ja opiskelleet mm. sanaluokkia ja oikeinkirjoitussääntöjä jäsentäen niitä puudiagrammin avulla, joka lasten mielestä on matematiikkaa. Ympäristö- ja luonnontiedossa on mitattu janamittakaavan avulla välimatkoja kartasta. Sekä teknisissä että tekstiilikäsityössä oppilaat ovat arvioineet, laskeneet ja mitanneet eri materiaaleja töitään varten. Oppilaiden piirroksista ilmenee, että matematiikkaa opiskellaan vieraallakin kielellä. Seuraavassa piirroksessa 6.1.5.1 Kanerva kuvaa englanninkielisen matematiikan kotitehtävän aiheuttamaa luokkatunnelmaa.



PIIRROS 6.1.5.1 YES! Tästä tulee kivaa!

Kanervan piirroksessa matematiikan oppitunti on loppumassa ja opettaja antaa englanninkielisen kotitehtävän matematiikasta. Yksi tytöistä kauhistelee tehtävää hiukset koholla, koska hän opiskelee ranskaa eikä englantia. Toinen tyttö aprikoi mielessään tehtävän onnistumista. Poika manailee tehtävän vaikeutta, mutta Kanervalla itsellään on myönteisiä odotuksia vieraskielisestä matematiikan tehtävästä: "YES! Tästä tulee kivaa!"

Matematiikka aikuisena, ammatissa ja työssä

Oppilaat uskoivat tarvitsevansa ja käyttävänsä matematiikkaa aikuisena enemmän kuin nyt lapsena. Aikuisena se on hyödyllistä ammatissa ja työelämässä vapaa-ajan vieton lisäksi. Lasten tulevaisuuskuvissa heijastuivat toiveammatit. Toiveammatteja, joissa matematiikkaa tullaan todennäköisesti käyttämään, ovat mm. eläinlääkäri, yritysjohtaja, yksityisyrittäjä tai arkkitehti.

Heidi: Matematiikka on minulle sekä lempiaineena että tärkeimpänä aineena ykkönen, koska siitä on paljon hyötyä isona ja myös pienenä. Erityisesti isona, kun pitää käydä esimerkiksi kaupassa. Tarvitsen matikkaa paljon koulussa ja jonkin verran kotona. Tarvitsen sitä uskoakseni aikuisena enemmän kuin lapsena. Tarvitsen sitä aikuisena sekä ammatissa että vapaa-ajalla.

Monessa muussakin asiassa tarvitaan matematiikkaa

Lapsen oman arkielämän, koulun oppiaineiden, tulevan ammatin ja työn lisäksi matematiikkaa tarvitaan monessa muussakin asiassa, jolloin se on tarpeellista jokaiselle, ei vain oppilaalle itselleen:

Heikki: Matematiikka on hyvin tärkeää elämässä sitä tarvitaan melkein joja (joka) paikassa. Se on tärkeää jokaiselle, ei pelkästään minulle.

Kalle: Matematiikka on hyvin tärkeää koska sitä tarvitaan monessa asiassa ja ilman sitä ei tule toimeen ammatissa. Tarvitsen matematiikkaa elämään.

Kooste
Varga–Neményi -opetusryhmän neljännen luokan oppilaat pitävät matematiikkaa todella tärkeänä, tärkeänä tai melko tärkeänä, siis merkittävänä oppiaineena, koska sillä on käyttöä lapsen omassa arkielämässä, koulussa eri oppiaineissa, aikuisena ammatissa ja työssä sekä monessa muussakin asiassa elämässä.

6.1.6 "Olen mielestäni matikassa aika hyvä"

Kirjoitelmissaan *Minä ja matematiikka* neljäsluokkalaiset oppilaat arvioivat itseään matematiikan oppijoina. Useimmat lasten itsearvioinnit olivat perusteltuja. Oppilaiden itsearvioinnit ryhmiteltiin kolmeen luokkaan: 1) olen kiitettävä, hyvä tai ihan hyvä, 2) melko, aika tai kohtuullisen hyvä ja 3) keskiverto. Näillä itsearvioinneilla tarkoitetaan tässä tutkimuksessa oppilaiden oppiaineeseen liittyvää minäkäsitystä siitä, millaisia oppijoita he kokevat olevansa matematiikassa. Kiitettävät, hyvät ja ihan hyvät itsearvioinnit tulkitaan myönteiseksi minäkäsitykseksi, melko, aika ja kohtuullisen hyvät itsearvioinnit varauksellisen myönteiseksi minäkäsitykseksi ja keskivertoarviointilauseet neutraaliksi minäkäsitykseksi.

"Olen hyvä tai kiitettävä matikassa" – myönteinen minäkäsitys

Puolet Varga–Neményi -opetusryhmän suomalaisista neljäsluokkalaisista arvioi olevansa kiitettävä, hyvä tai ihan hyvä, joten heillä on myönteinen käsitys itsestään matematiikan oppijana. Useimmat heistä perustelivat käsityksensä. Oppilaiden perustelujen mukaan merkittäviä 9–10-vuotiaan minäkäsityksen muodostajia ovat opettajan suullinen palaute, menestyminen kokeissa, onnistuminen tehtävissä ja kokemus oppimisesta ja hyvästä osaamisesta. Oppilas, esimerkiksi Maija, saattaa havainnoida oma-aloitteisesti myös, miten aktiivisesti tai passiivisesti osallistuu oppitunnilla. Näiden havaintojen pohjalta rakentuu käsitys itsestä oppijana:

Iiris: Olen kiitettävä, ope on sanonut ja kokeista oon saanu aika hyviä arvosanoja.

Katja: Olen mielestäni matikassa ihan hyvä, koska olen oppinut asiat hyvin.

Maija: Minä olen varmaan hyvä matskassa, vaikka en viittaa juuri ollenkaan. Päättelin sen tuntitehtävistä.

Tiina: Olen mielestäni ihan hyvä tai peräti voisin olla vaikka kiitettävä.

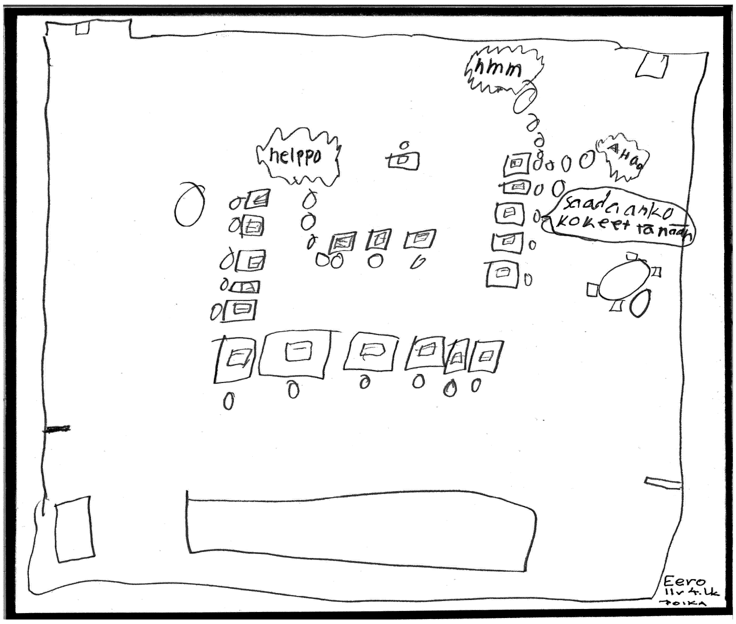
Eero: Olen oppinut matskaa todella paljon. Mielestäni olen hyvä matskassa hyvien kokeiden perusteella.

Kalle: Omasta mielestäni olen hyvä koska ope niin sanoo.

Risto: Olen matikassa ainakin hyvä omasta mielestäni. Monet laskut on menneet oikein.

Teemu: Olen kiitettävä matikassa. Tunnilla yleensä tiedän melkein jokaiseen kysymykseen ja tehtävään. Olen huomannut kaikissa tehtävissä että olen melkein erinomainen.

Useimmat lapset korostavat, että kyse on nimenomaan itsearvioinnista käyttämällä ilmaisuja *mielestäni, minusta* tai *omasta mielestäni*. Kukaan näistä oppilaista ei verrannut itseään muihin oppilaisiin eikä kukaan kertonut, että heitä olisi verrattu toisiin. Heidän käsityksensä perustui havaintoihin tehtävistä, opettajan palautteesta tai kokeista. Seuraavassa piirroksessa Eero kuvaa luokkatilannetta, jossa odotetaan matematiikan kokeiden palauttamista:



PIIRROS 6.1.6.1 Saadaanko me kokeet tänään?

”Olen aika hyvä matikassa” – varauksellisen myönteinen minäkäsitys

Minäkäsitys välittyy hienovivahteisena lasten kirjoitelmissa. Vivahteet ilmentyvät intensiteettiä kuvaavista ilmaisuista aika, melko ja kohtuullinen. Sanat *aika, melko* ja *kohtuullinen* viestivät varauksellisesta minäkäsityksestä matematiikassa. Varauksellisen myönteinen minäkäsitys liittyy kokemuksiin joistakin vaikeista tehtävistä tai asioista. Varauksellinen minäkäsitys on tyypillisempää tytöille kuin pojille tässä lapsiryhmässä:

> *Amanda: Minusta olen aika hyvä matikassa, mutta selittäminen on vaikeaa. En tiedä, mistä se johtuu, mutta niin se on.*
>
> *Enni: Olen mielestäni aika hyvä matikassa, se varmaan johtuu siitä että olen käynyt matikkakerhossa.*
>
> *Heidi: Itseni mielestä olen matematiikassa aika hyvä, mutta jotkin asiat ovat vaikeampia. Vaikeat asiat oppii kuitenkin, kun vain harjoittelee tarpeeksi. Olen matematiikassa hyvä osittain siksi, koska opettaja opettaa asiat hyvin. Osittain siksi, että opin yleensä uudet asiat helposti.*
>
> *Helmi: Olen itseni mielestä aika hyvä ja joskus tehtävät tuntuvat vaikeilta. Itseni mielestä olen tyytyväinen ja päättelin siitä, koska ope on kehunut minua.*
>
> *Kanerva: Mielestäni olen aika hyvä matematiikassa. Olen matematiikassa kiitettävä opettajan kehujen mukaan.*
>
> *Silja: Olen matematiikan tunnilla melko hyvä. Kokeet ovat menneet huonosti. Olen tyydyttävä matematiikassa.*
>
> *Ari: Matematiikan oppiana olen mielestäni kohtuullisen hyvä, koska olen saanut mielestäni parempia koetuloksia ja matematiikka on ruennut tuntumaan helpommalta kuin ennen.*

Hyvät taidot eivät ole itsestään selvyys, vaan ne on hankittava esimerkiksi harjoittelemalla tai harrastamalla, kuten Enni ja Heidi esittävät. Käsitys itsestä oppijana tulee myönteisemmäksi, kun matematiikan oppiminen on helpompaa kuin aiemmin, mitä todistaa myös menestyminen kokeissa. Nämäkin lapset, kuten edellisen ryhmänkin oppilaat, muodostivat käsityksensä itsestään kokeiden, tehtävien ja opettajan antaman palautteen perusteella. Vaikka opettaja antaisikin myönteistä palautetta, se voi olla jostain syystä tehotonta: Kanerva on mielestään vain aika hyvä, vaikka opettaja pitää häntä kiitettävänä. Kukaan näistäkään oppilaista ei verrannut itseään luokkakavereihin.

”Olen matikassa keskiverto” - neutraali minäkäsitys

Kolme poikaa arvioi olevansa ns. keskivertoja. Oppilas, jonka minäkäsitys matematiikassa on neutraali, perustelee arviointia havainnoillaan omasta osaamisesta. Jotkut asiat, kuten kertotaulu, ovat hallinnassa, mutta toisissa, esimerkiksi jakolaskussa, on vielä opiskeltavaa. Omien osaamishavaintojen lisäksi matematiikan tehtävät ja kokeet antavat oppilaalle palautetta siitä, millainen hän on matematiikassa. Kukaan näistä pojista ei verrannut itseään toisiin oppilaisiin tai kertonut opettajan antamasta palautteesta:

> *Heikki: Olen matikassa keskiverto koska minä osaan laskea kertotaulut ja kaikki muut paitsi en osaa vielä kovin hyvin jakolaskua.*
>
> *Ismo: Välillä tiedän asioita, mutta joskus en osaa mitään.*
>
> *Matti: Olen matikassa kohtalainen, päättelin tehtävistä ja kokeista.*

Kooste
Seuraavassa taulukossa on koottuna Varga–Neményi -opetusryhmän neljännen luokan oppilaiden minäkäsitys matematiikassa. Oppilaiden käsitys itsestään matematiikan oppijana on neutraali, varauksellisen myönteinen tai myönteinen. Kukaan ei koe olevansa huono matematiikassa. Tyttöjen minäkäsitys vaihtelee varauksellisen myönteisestä myönteiseen, poikien neutraalista myönteiseen.

TAULUKKO 6.1.6.1 Minäkäsitys matematiikassa

Minäkäsitys matematiikassa	Amanda	Enni	Heidi	Helmi	Iiris	Kanerva	Katja	Maija	Silja	Tiina	Ari	Eero	Heikki	Ismo	Jussi	Kalle	Matti	Risto	Sauli	Teemu
Myönteinen (M)					**M**		**M**	**M**		**M**		**M**			**M**	**M**		**M**	**M**	**M**
Varauksellisen myönteinen (VM)	**VM**	**VM**	**VM**	**VM**		**VM**			**VM**		**VM**									
Neutraali (N)													**N**	**N**			**N**			

6.1.7 Perustelevan ongelmanratkaisijan kokema matematiikan opetussuunnitelma

Suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden matematiikkaan liittyviä uskomuksia, asenteita ja käsityksiä keskeisinä tutkimustuloksina kootaan tyypin *perusteleva ongelmanratkaisija* ja hänen kokemansa matematiikan opetussuunnitelman (ks. kuviota 6.1.7.1) avulla. *Perusteleva ongelmanratkaisija* ymmärretään tässä tutkimuksessa opetussuunnitelman kokijatyypiksi, jonka tavoitteena on abstrahoida yksilöllisiä uskomuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta, matematiikka-asenteita ja käsityksiä itsestä sen oppijana.

Tyyppi löytyi monen oppilaiden kokemaa opetussuunnitelmaa kuvaavien kirjoitelmien ja piirrosten lähiluennan ja analysoinnin tuloksena. Tyypin löytymistä auttoi mahdollisuus verrata kolmen opetusryhmän kokemaa opetussuunnitelmaa. Tyyppi muotoutui keskeisesti kahdesta tekijästä: toisaalta tämän opetusryhmän lasten tavasta kertoa kokemuksistaan ja toisaalta nimittää matematiikan ongelmanratkaisutehtäviä ällitälleiksi ja haasteiksi, joita muut oppilaat eivät käyttäneet. Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaiden kerrontatavalle on tyypillistä perustella kokemuksiaan. Perustelut ilmenevät erityisesti koska-, sillä- ja siksi-alkuisista lauseista, joiden lisäksi perustelut ovat löydettävissä *sen päättelin* -tyyppisistä fraaseista. Perusteluksi tässä tutkimuksessa ymmärretään myös vertaaminen, joka ilmenee mm. lasten lempiainelistoina ja oppiaineiden tärkeysluetteloina järjestyslukujen avulla. Perustelut, ällitällit ja haasteet ovat löydettävissä kaikkien tämän ryhmän lasten kirjoitelmista. Perusteluja kahden muun opetusryhmän kokemusten kuvauksissa on vain muutamia. *Perustelevan ongelmanratkaisijan* koettuun opetussuunnitelmaan (kuvio 6.1.7.1) sisältyy *ongelmanratkaisijan* käsitys itsestä matematiikan oppijana, uskomukset matematiikasta, sen opetuksesta ja oppimisesta sekä matematiikka-asenteet.

Seuraava *perustelevan ongelmaratkaisija* -tyypin esittely etenee hänen minäkäsityksestään uskomuksiin ja asenteisiin. Sitten tarkastellaan matematiikan opetusta ja opettajaa ongelmanratkaisijan silmin. Lopuksi pohditaan tämän ryhmän matematiikan opetuksen kehittämishaasteita. Tyyppi esitellään lasten perustelevan kerrontatavan avulla.

Perusteleva ongelmanratkaisija on suomalainen perusopetuksen neljännen luokan oppilas, jonka matematiikan oppimista on ohjattu unkarilaisella Varga–Neményi -opetusmenetelmällä. Hän on 9–10-vuotias tyttö tai poika. Hänen minäkäsityksensä matematiikan oppijana on neutraali, varauksellisen myönteinen tai myönteinen. *Ongelmanratkaisijan* minäkäsitys perustuu hänen omiin havaintoihinsa opiskelutehtävien onnistumisesta, koemenestyksestä ja opettajan antamaan palautteeseen. Hän ei vertaa itseään toisiin oppilaisiin. *Ongelmanratkaisijan* harrastuksiin kuuluu matematiikankerho, joka edistää hänen taitojaan, jotka vahvistavat minäkäsitystä. *Ongelmanratkaisija* tekee vapaaehtoisesti laajahkoja kotitehtäviä, joissa esimerkiksi loogisen päättelyn ja puudiagrammin avulla valmistetaan loogiset pelikortit yhteistoimintaa varten.

Perustelevan ongelmanratkaisijan uskomukset matematiikan sisällöistä ovat jokseenkin monipuolisia, koska niihin sisältyvät algebraa lukuun ottamatta luvut laskutoimituksineen, geometria ja mittaaminen, tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys, logiikka ja erityisesti ongelmanratkaisu. Sitä 9–10-vuotias *ongelmanratkaisija* nimittää ällitälliksi tai haasteeksi. Nämä tarkoittavat tehtäviä, joiden ratkaisutapa ja ratkaisu eivät ole välittömästi havaittavissa, vaan ne on oivallettava itse. Ratkaisuja ongelmaan on useampi kuin yksi, koska tehtävä on tulkinnallinen.

Ongelmanratkaisijan matematiikka-asenne:

1) *Ongelmanratkaisija* pitää matematiikasta, koska se tarjoaa tilaisuuksia ajatella, miettiä ja pohtia ja koska se on vaihtelevaa ja monipuolista sisällöiltään. *Ongelmanratkaisija* pitää myös uusien asioiden ymmärtämisestä ja tajuamisesta. Hän kokee matematiikan kumuloituvan rakenteen myönteisesti, koska aiemmin opitut asiat ovat jatkossakin tarpeellisia. Matematiikan sisällöllinen monipuolisuus mahdollistaa myös monipuoliset ja vaihtelevat tehtävät, jotka ovat *ongelmanratkaisijasta* mieleisiä. Konkreettiset toimintavälineet edistävät symbolien ja abstraktioiden ymmärtämistä ja tuovat myös vaihtelua toimintaan, joka vahvistaa ongelmanratkaisijan matematiikka-asennetta. Myönteisen matematiikka-asenteen kehittymiseksi on suotuisaa, jos opetukseen sisältyy tavoitteellista toimintaa konkreettisine lopputuloksineen oppimisen lisäksi.

2) Matematiikka on *ongelmanratkaisijalle* tosi tärkeää, tärkeää tai ainakin melko tärkeää. Tosi tärkeää tai tärkeää se on silloin, kun hän on soveltanut sitä omaan elämäänsä. Matematiikka on vain melko tärkeää, kun mahdollisuuksia soveltaa on ollut vähän. Matematiikka on tärkeä oppiaine *ongelmanratkaisijan* koulussa, jossa sitä opiskellaan äidinkielen lisäksi myös ranskan ja englannin kielellä ja myös matematiikkaa opiskellaan vieraiden kielten tunneilla. Matematiikka integroituu myös äidinkielen, ympäristö- ja luonnontiedon sekä käsitöiden opiskeluun. *Ongelmanratkaisijalla* ja matematiikalla on yhteinen tulevaisuus, koska hän haaveilee ammatista, jossa matematiikalla on käyttöä. Hän uskoo, että matematiikka kuuluu aikuisena vapaa-aikaankin.

3) *Ongelmanratkaisija* kokee matematiikan helpoksi, sopivaksi, helpoksi ja vaikeaksi tai vaikeaksi, minkä hän on päätellyt sekä koemenestyksestään, harjoitustehtävistään että oppimiskokemuksistaan. Jos matematiikan tehtävät ovat liian helppoja, hän tylsistyy. Tylsistyttäviä tehtäviä ovat myös samanlaisina toistuvat harjoitukset, joten ihanteelliset tehtävät ovat sisällöiltään ja ratkaisutavoiltaan vaihtelevia.

Suomalaisen *perustelevan ongelmanratkaisijan* opetusryhmässä asenne matematiikkaan on yksiselitteisen myönteinen seitsemällä, ambivalenttisen myönteinen 12:lla ja ambivalenttisen kielteinen yhdellä ongelmanratkaisijalla. Yksiselitteisyys on pääteltävissä, kun *ongelmanratkaisijasta* matematiikka on hauskaa, helppoa ja tärkeää. Asenteen ambivalenttisuus on pääteltävissä, kun matematiikka on ongelmanratkaisijasta esimerkiksi kivaa, helppoa ja vaikeaa (ambivalenssi) ja tärkeää. Yksiselitteisen myönteinen asenne matematiikkaan on kahdella tytöllä ja viidellä pojalla, ambivalenttisen myönteinen asenne seitsemällä tytöllä ja viidellä pojalla, ambivalenttisen kielteinen vain yhdellä tytöllä perustelevan *ongelmanratkaisijan* ryhmässä.

Ongelmanratkaisija työskentelee matematiikan oppitunnilla useimmiten yhteistoiminnallisesti ja oppilaskeskeisesti parin kanssa, pienryhmässä tai yksilöllisesti. Nämä työtavat tarjoavat *ongelmanratkaisijalle* merkittäviä kokemuksia oppimisesta, joka hänen mukaansa on ymmärtämistä, tajuamista, keksimistä ja oivaltamista. Merkittävää on myös ajattelu ja työskentely vuorovaikutuksessa luokkakavereiden ja opettajan kanssa haasteellisten ongelmien parissa.

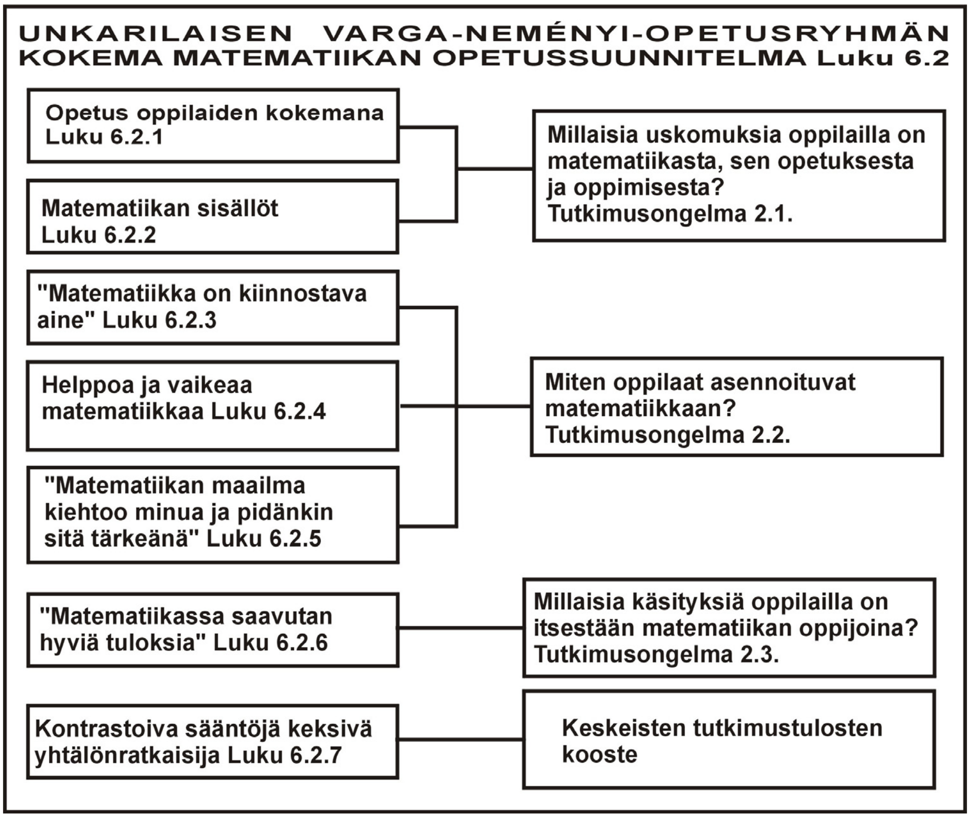
Konkreettiset, jokaisen omakohtaisessa käytössä olevat toimintavälineet havainnollistavat matematiikan sisältöjä ja tarjoavat aktiivista toimintaa *ongelmanratkaisijalle*. Hänestä on tärkeää, että ajoittain on esittävää opetusta, jolloin selitetään, selvennetään ja näytetään konkreettisesti opittavia asioita, koska se aktivoi oppimaan ja ajattelemaan. Kyselevä opetus on ihanteellista, kun sen avulla kootaan tai tarkistetaan pari- tai yksilöllisen työn tuloksia, joista tarkastellaan erilaisia tapoja ratkaista tehtäviä ja tehdään niistä johtopäätöksiä. Kyselyn avulla myös kerrataan opittuja asioita, mutta kyselyn on aktivoitava haasteelliseen toimintaan, jotta se innostaisi *ongelmanratkaisijaa*. Opettajajohtoinen kyselevä opetus herättää *ongelmanratkaisijassa* myös epävarmuutta tai ärsyyntymistä luokkakavereihin. *Ongelmanratkaisijan* kokema opetussuunnitelma on seuraavassa kuviossa.

KUVIO 6.1.7.1 Matematiikka ongelmanratkaisijan kokemana

Ongelmanratkaisijan opettajan haasteet matematiikan opetuksen kehittämiseksi ovat seuraavat: Jotta *ongelmanratkaisijan* matematiikkakuva monipuolistuisi, olisi algebran sisältöaluetta käsiteltävä mielikuvia synnyttävällä tavalla, jotta se ilmenisi *ongelmanratkaisijan* kokemuksissakin. *Ongelmanratkaisijalle* olisi tarjottava mahdollisuus opetuskeskusteluun väittelyineen pienryhmää suuremmassa oppilasryhmässä, jotta matemaattinen kielentäminen ja argumentointi kehittyisi. Matematiikan kokeiden olisi syytä olla eriytettyjä matemaattiselta esitysmuodoltaan *ongelmanratkaisijan* edellytysten mukaisesti, jotta ne eivät liian abstraktisina heikentäisi *ongelmanratkaisijan* käsitystä itsestään matematiikan oppijana. Vaikka *ongelmanratkaisijan* käytössä on vapaavalintaisia toimintavälineitä suhteellisen runsaasti, luokassa olevaa tietokonetta tulisi hyödyntää tehokkaammin työskentelyn eriyttämisessä, samalla tietotekniset taidotkin kehittyvät. Luokan ulkopuolinen työskentely edistäisi *ongelmanratkaisijan* taitoja soveltaa matematiikkaa omaan elämäänsä ja edistäisi näin hänen käsitystään matematiikan tärkeydestä käyttökohteiden rikastuessa. Koska vapaamuotoiset kirjoitelmat ja piirrokset osoittavat *ongelmanratkaisijan* suhteen matematiikkaan emotionaaliseksi, on hänelle jatkossakin annettava mahdollisuus ilmaista tunteensa matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta eri tavoin, jotta voitaisiin havaita mahdolliset muutokset negatiiviseen suuntaan ja vahvistaa myönteistä suhdetta matematiikkaan.

6.2 Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän kokema opetussuunnitelma

Kuvio 6.2.1 kuvaa tutkimustulosten esittelyn etenemistä tutkimusongelmien mukaisessa järjestyksessä unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän osalta.



KUVIO 6.2.1 Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän kokema matematiikan opetussuunnitelma tutkimusongelmittain

Keskeiset tutkimustulokset tämän oppilasryhmän osalta esitetään *kontrastoiva sääntöjä keksivä yhtälönratkaisija* -tyyppikuvauksen ja hänen kokemansa matematiikan opetussuunnitelman (kuvio 6.2.7.1) avulla.

6.2.1 Opetus oppilaiden kokemana

Matematiikan työtavoiksi Varga (1969c) suositteli oppilaiden itsenäistä työskentelyä yksilöllisesti ja pienryhmissä, joita ohjataan erilaisilla toimintavälineillä tai työkorteilla. Hän uskoi, että oppilaiden itsenäinen työskentely edistyy, jos oppilaille tarjotaan mahdollisuus valita matematiikan tehtävänsä. Opettajalla, joka ohjaa oppilaiden itsenäistä työskentelyä, on erilaiset tehtävät kuin perinteisellä opettajalla, joka esittää asioita luokan edessä liitutaulun avulla näyttäen. Hänen on varattava sekä nopeille että hitaimmille oppilaille etenemisnopeuden mukaisia tehtäviä. Opettaja oppii tuntemaan oppilaat paremmin, kun he työskentelevät yksilöllisesti tai pienryhmissä kuin silloin, kun opettajat puhuvat heille pöydän takaa. Koko luokan työskentelyä käytetään peleissä ja kilpailuissa. Liitutaulua saatetaan käyttää tilanteissa, joissa taululle kerätään erilaisia tehtävien ratkaisuja. (Varga 1969c, 59–65). Unkarin perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2003, 45–61) mukaan matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää orientoitumista tilaan, aikaan ja määrään, kognitiivisia toimintoja, tietojen ja taitojen soveltamista, ongelmanratkaisua, luovuutta sekä emootioita yhteistyössä ja vuorovaikutuksessa sekä opettajan että vertaisryhmän kanssa.

Unkarilaisten Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaiden kokemuksia oppilaskeskeisistä yhteistoiminnallisista ja opettajajohtoisista työtavoista tarkastellaan piirros- ja kirjoitelma-aineiston pohjalta. Opettajajohtoisia työtapoja ovat opettajan esitys ja kysely. Esittävässä opetuksessa opettaja kertoo opittavasta asiasta ja havainnollistaa sitä. Kyselevässä opetuksessa opettaja esittää kysymyksiä, joihin oppilas vastaa puheenvuoron saatuaan. Oppilaskeskeisiä ja yhteistoiminnallisia työtapoja ovat opetuskeskustelu, pari- ja ryhmätyö sekä yksilöllinen työskentely. Opetuskeskustelussa oppilasjoukko puhuu tai väittelee keskenään ilman opettajan jakamia puheenvuoroja. Pari- ja ryhmätyössä kahdesta neljään oppilasta toimii yhteistyössä tehtävien parissa. Yksilöllisessä työskentelyssä oppilas tekee tehtäviä itsenäisesti. Oppilaiden kokemusten tarkastelu etenee opettajajohtoisista oppilaskeskeisiin yhteistoiminnallisiin työtapoihin.

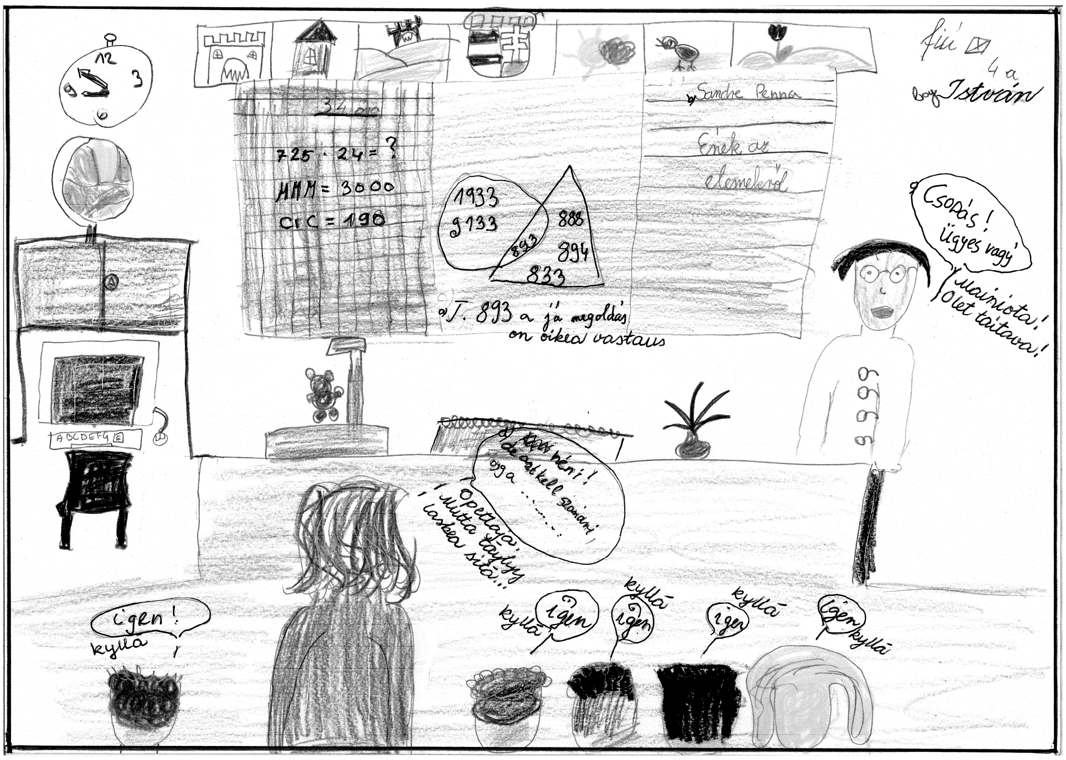
”Miksi 20 on ratkaisu?”

Opettajajohtoista kyselevää opetusta unkarilaiset perusopetuksen vuosiluokan Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaat kuvasivat piirroksissaan eniten. Tällöin opettaja seisoo luokan edessä liitutaulun vieressä opettajapöydän takana etäällä oppilaista. Hän ohjaa oppilaiden ajattelua *kuinka paljon* - ja *miksi* -kysymyksillä. Opettajan suullisten kysymysten lisäksi liitutaululle kirjoitetut tehtävät ohjaavat oppilaita pohtimaan tehtävän tulosta. Oppilaat viittaavat saadakseen puheenvuoroja, jotka viestivät luottamuksesta omiin kykyihin –

minä tiedän – kuten oppilas huudahtaa Lillan piirroksessa. Kyselevästä opetuksesta piirtäneet lapset kertoivat kirjoitelmissaan, että he pitävät ja nauttivat matematiikan oppitunneista ja että niillä on yleensä kivaa, viihdyttävää ja mielenkiintoista. Vaikka yleensä tunnit ovat kivoja, toiminnalliset demonstraatiotunnit ovat muita tunteja mieleisempiä. Opettajan ja oppilaiden välinen vuorovaikutus kyselevässä opetuksessa välittyy piirroksissa täsmällisinä symboleina. Seuraavat esimerkit lasten piirroksista kuvaavat opettajan ja oppilaiden vuorovaikutusta kyselevän opetuksen aikana:

> *Liitutaululla C x C = □ □ = ? Opettaja: Kuinka paljon se on? Oppilas: Minä tiedän! (Lillan piirros)*
>
> *Opettaja: 5 x 5 + □ - (3 x 8) + 3 - □ =3+ □ + 1+ 4 x 10. □ = ?*
> *Oppilas: □ = 8. (Károlyn piirros)*
>
> *Liitutaululla (5 x 5) – 5 = □ □= 20. Oppilas: 20 on ratkaisu. Opettaja: Miksi 20 on ratkaisu? (Zsuzsannan piirros)*

Opettaja ohjaa oppilaita myös perustelemaan saatuja ratkaisuja, mikä on havaittavissa edellä olevasta Zsuzsannan esimerkistä. Kun oppilas on vastannut oikein, selittänyt ratkaisutavan tai perustellut vastauksensa, opettaja antaa niistä myönteistä palautetta, kuten seuraavassa Istvánin piirroksessa 6.2.1.1.



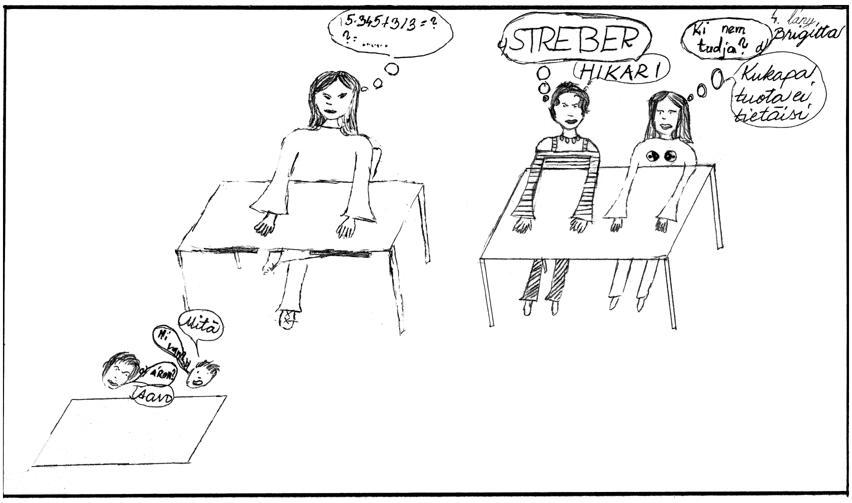
PIIRROS 6.2.1.1 Mainiota! Olet taitava!

Istvánin piirroksessa liitutaulun tehtävät ovat ohjanneet oppilaita tutkimaan joukkojen avulla lukujen yhteisiä ominaisuuksia. Joukkojen leikkauksessa oleva alkio 893 on oikea vastaus. Taulutyön perusteella matematiikan oppitunnilla on opiskeltu myös roomalaisia numeroita. Parhaillaan mietitään lausekkeen 725 x 24 arvoa. Seisova oppilas selittää, mitä tehtävässä on laskettava ensin. Opettaja kehuu oppilasta taitavaksi ja suoritusta mainioksi. Muut oppilaat kannustavat kuorossa luokkakaverin selittämistä.

Kavereiden kannustuksen vastakohta on heidän pilkkansa väärinvastattaessa. Tämä on niin kova kokemus, että se ehkäisee oppilaan osallistumista kyselevään opetukseen, mistä esimerkkinä Doriánin kokemus:

> *Dorián: Eräänä päivänä vastasin väärin matematiikan tunnilla. Tein virheen kirjallisessa yhteenlaskussa. Luokkakaverit pilkkasivat olimme juuri harjoittelemassa yhteenlaskua. Opettaja sanoi että harjoittelisin lisää. Aloin itkeä. Tilanne tuntui minusta hyvin pahalta.*
> *- Kuvittele äiti, tein kirjallisen yhteenlaskun väärin ja minua pilkattiin, kerroin kotona.*
> *- Se ei haittaa harjoitellaan yhdessä, äiti lohdutti.*
> *Äiti on kyllä oikeassa ja me harjoiteltiin. En enää mielelläni vastaa tunnilla.*

Dorián kuvasikin oppituntipiirroksessaan yksilöllistä työskentelyä, jossa vuorovaikutusta ei ole opettajan ja oppilaiden välillä eikä oppilaidenkaan välillä. Luokkakaverin nokkelat vastaukset kyselevän opetuksen aikana herättävät joissakin oppilaissa kateutta ja väheksyntää kuten seuraavassa Brigíttan piirroksessa 6.2.1.2. Nokkelasti vastannut oppilas on jonkun mielestä hikari eli kadehdittu supersuorittaja. Kaikkihan tietävät vastauksen kysymykseen 5 x 345 + 313 = ?, joten sen osaamisessa ei ole mitään erityistä. Brigíttan piirros kuvaa myös, miten oppilaiden tarkkaavaisuus saattaa herpaantua kyselyn aikana ja he alkavat supatella keskenään, kuten Áron ja hänen vieruskaverinsa:



PIIRROS 6.2.1.2 Hikari

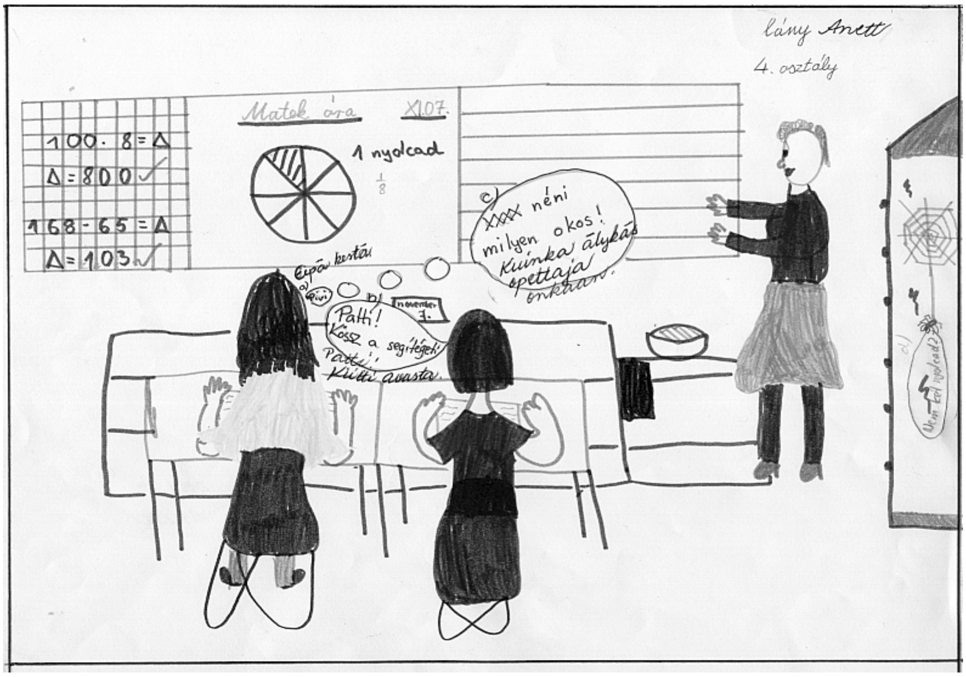
Kyselevän opetuksen aikana toimintavälineet ovat esillä luokan avohyllyköissä, mutta niitä sen enempää kuin luokan tietokonetta ja piirtoheitintäkään ei käytetä lasten piirrosten mukaan. Joitakin abstraktisia symboleita havainnollistetaan liitutaululla olevilla kuvioilla. Kyselevässä opetuksessa harjoitellaan eniten yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisua. Näissä tuntematon on neliö, kolmio tai kysymysmerkki. Laskulausekkeiden, kerto- ja yhteenlaskujen yhdistelmälausekkeiden laskeminen on toiseksi kuvatuin matematiikan sisältöalue oppituntipiirroksissa. Kertotaulun harjoittelu luettelemalla on niin mieleistä, että siitä kilpaillaan. Roomalaiset numerot, kombinatoriikka, negatiiviset kokonaisluvut ja lukusuora ovat tämän unkarilaisen neljännen luokan arkipäivää.

”Mitä hän mahtaa kirjoittaa?”

Unkarilaiset neljäsluokkalaiset Varga–Neményi -opetusryhmästä kuvasivat oppituntipiirroksissaan toiseksi eniten yksilöllistä työskentelyä kirjallisten tehtävien parissa. Tällöin oppilailla on mahdollisuus vapaasti käyttää toimintavälineitä tehtäviä ratkaistessaan, koska jokaisen oppilaan yksilöllisessä käytössä oleva toimintavälinepakki on hänen pulpetillaan. Mahdollisuudesta huolimatta ne eivät ole käytössä piirrosten mukaan. Yksilöllisen työskentelyn aikana oppilaat ratkaisevat yhtälöitä ja epäyhtälöitä, harjoittelevat murtolukuja, laskevat kertolaskulaskulausekkeita ja yhteenlaskuja allekkain, harjoittelevat murtoluvun kertomista kokonaisluvulla, pohtivat pinta-aloja ja lukualuetta kymmenestä äärettömään. Yksilöllisissä kirjallisissa tehtävissä ensin luetaan tehtävä, sitten se tulkitaan, ratkaistaan, lasketaan ja lopuksi tarkistetaan itse tai yhdessä opettajan ja vieruskaverin kanssa:

> *Károly: Teen tehtäväni niin että luen, ratkaisen tehtävän ja tarkistan sen.*
>
> *Mátyas: Opin sitä niin, että luen, tulkitsen ja lasken.*
>
> *Zoltán: Opiskelen sitä niin, että lasken tehtävän ja tarkistan sen opettajan ja vieruskaverin kanssa.*
>
> *Cecília: Ensin luen tehtävän, sitten ratkaisen sen kunnollisesti ja lopulta tarkistan sen.*

Tehtävien tarkistamisen lisäksi opettaja auttaa oppilaita pyydettäessä ja seuraa työskentelyä yksilöllisen työskentelyn aikana. Vaikka oppilaat työskentelevät yksilöllisesti, heillä on mahdollisuus keskustella ajoittain vieruskaverin kanssa, koska he istuvat paripulpeteissa. Kun vieruskaveri on auttanut, häntä kiitetään kohteliaasti kuten seuraavassa Anetten piirroksessa 6.2.1.3.



PIIRROS 6.2.1.3 Kiitti avusta

Anetten kuvaamalla oppitunnilla on käsitelty murtolukuja, kerto- ja vähennyslaskulausekkeita, jotka ovat oikein liitutaulun v-merkistä päätellen. Luokan nurkassa asustava hämähäkki kyseenalaistaa murtoluvun pintamallin: ”Eikö kaksi kahdeksasosaa?” Liitutaulun ääressä puuhailee opettaja, jonka älykkyyttä oppilas ihailee työskentelynsä lomassa. Opettaja on merkittävä unkarilaisten neljäsluokkalaisten kirjoitelmienkin mukaan, koska hänen ansiostaan tunnit ovat mielenkiintoisia, humoristisia, ja oppilas pitää matematiikasta.

Zoltán: Matematiikka on tosi kivaa ja mielenkiintoista, mistä voin kiittää opettajaa. Hän tekee tunneista tosi kiinnostavia.

Dorián: Opettaja opettaa tunnilla vitsikkäästi ja minä pidän siitä tosi paljon.

Virág: Aloin pitämään matikasta, kun minulla on ollut sellaisia opettajia, jotka tunneilla, jotka eivät ole olleet ollenkaan tylsiä, saivat minut pitämään matikasta.

Yksilöllisesti tehtävät kokeet puhututtavat unkarilaisen Varga-Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaisia huomattavasti vähemmän kuin suomalaisia ikätovereitaan Varga–Neményi -opetusryhmässä. Kun oppitunti on koetilanne, se tuntuu lapsesta kovalta ja sydämettömältä, vaikka oppitunnit muuten ovat hänestä mieleisen vitsikkäitä:

Károly: Tunnit ovat ihan leikillisiä, mutta jos on koetilanne, niin armoa ei ole!

Yksilöllisestä oppituntityöskentelystä piirtäneiden lasten mukaan oppitunnit ovat yleensä kiinnostavia, viihdyttäviä ja kivoja. Kuitenkin leikkiminen, pelaaminen ja jokaisen oppilaan omakohtaisessa käytössä olevat toimintavälineet ovat kirjallisia tehtäviä merkittävämpiä tekijöitä, joilla pidetään yllä kymmenvuotiaan mielenkiintoa matematiikasta:

Simón: Tunnit ovat erittäin leikillisiä, teemme paljon leikkisiä asioita.

Brigítta: Tunnit ovat kiinnostavia, mutta demonstraatiossa se (matematiikka) on innostavaa. Niillä tunneilla meillä on monia apuvälineitä sanotaan vaikka lukusuora, värisauvat, loogiset palat …

Éva: Usein tunnit ovat mielenkiintoisia, mutta demonstraatiotunnit ovat kaikkein parhaita. Teemme matikkaa apuvälineillä ja yksinkertaisin menetelmin.

Mária: Usein tunnit ovat hauskoja demonstraatioiden ansiosta, mutta yleensäkin tunnit ovat viihdyttäviä.

"Se voidaan laskea yksinkertaisemminkin"

Oppilaskeskeisellä opetuskeskustelulla ymmärretään tässä käsillä olevassa tutkimuksessa sitä, että oppitunnilla oppilasjoukko puhuu tai väittelee keskenään ilman opettajan jakamia puheenvuoroja. Opetuskeskustelussa joku unkarilaisen opetusryhmän oppilaista on liitutaululla tai piirtoheittimen ääressä esittelemässä matematiikan tehtävän ratkaisua toisille oppilaille. Muut oppilaat väittävät esittelevää oppilasta vastaan esimerkiksi, että tehtävä on ratkaistavissa yksinkertaisemmallakin tavalla. Oppilasesityksen lisäksi oppilas kyselee toisilta oppilailta tehtävien ratkaisutapoja tai tuloksia, toiset vastaavat ja esittävät vastakysymyksiä.

Opetuskeskustelussa opittavat asiat havainnollistuvat taulupiirroksina lukusuorien, janamallien tai lukuristikoiden avulla. Tällöin opettaja seuraa oppilaiden keskustelua ja antaa myönteistä palautetta oppilaiden ajattelusta, suorituksista tai älykkyydestä.

Opettajan palaute on havaittavissa seuraavasta Tamaran oppituntipiirroksesta 6.2.1.4. Hänen piirroksessaan oppilas on esittelemässä kertolaskuyhtälön ratkaisua. Joku luokkakavereista viittaa päästäkseen kommentoimaan. Tamaran piirroksessa opettaja pitää oppilaan esitystä älykkäänä.

Opetuskeskustelusta piirtäneet lapset pitävät matematiikan oppitunteja yleensä kivoina, jännittävinä, kiinnostavina ja mukaansa tempaavina, kuten lapset kuvaavat osallistumistaan keskusteluun.

PIIRROS 6.2.1.4 Oppilas esittelee tehtävän ratkaisua

Kooste

Unkarilaisten Varga–Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaisten kirjoitelmat ja piirrokset osoittavat, että he havaitsevat matematiikan oppitunneilla erilaisia toimintoja, joilla tarkoitetaan tässä tutkimuksessa työtapoja. Opettajajohtoinen kyselevä opetus on tämän unkarilaisen opetusryhmän kuvauksissa hallitsevin työtapa. Opettajan ja oppilaiden välisessä vuorovaikutuksessa on ominaista käyttää täsmällisiä symbolisia ilmaisuja ja merkintöjä. Opettaja ohjaa oppilaita perustelemaan ratkaisuja. Kyselevän opetuksen aikana oppilaat kannustavat toisiaan, kadehtivat, väheksyvät tai pilkkaavat toistensa vastauksia. Oppilaskeskeisessä yksilöllisessä työskentelyssä painottuu täsmällinen symbolisten operaatioiden ratkaiseminen opitun ratkaisumallin mukaan, jossa ensin luetaan tehtävä, sitten se tulkitaan, lasketaan, lopuksi se tarkistetaan kaverin ja opettajan kanssa. Opettaja on merkittävä, koska hänen ansiostaan matematiikan tunnit ovat mielenkiintoisia, mutta kokeet ovat armottomia neljäsluokkalaisen kokemana. Yksilöllisessä työskentelyssä leikkiminen, pelaaminen ja toimintavälineet innostavat kymmenvuotiasta enemmän kuin kirjalliset tehtävät. Oppilaskeskeisessä opetuskeskustelussa oppilas esittelee tehtävän ratkaisua, tulosta tai kysyy toisilta oppilailta. Muut luokkatoverit vastaavat ja esittävät vastakysymyksiä. Tällöin opettaja antaa myönteistä palautetta älykkyydestä ja suorituksista.

6.2.2 Matematiikan sisällöt

Unkarilaisessa Varga–Neményi -opetusmenetelmässä pyritään laajaan pohjustukseen matematiikan eri sisältöalueista, joukko-opista, logiikasta, algebrasta, funktioista, lukujonoista, kombinatoriikasta, todennäköisyydestä, tilastoista, geometriasta ja mittaamisesta aritmetiikan lisäksi (Oravecz & Kivovics 2005, 26; Varga 1969c, 66–67, 1971b, 16–21). Unkarin peruskoulun opetussuunnitelman 2003 matematiikan keskeiset sisältöalueet ovat oivaltamistaitojen kehittäminen, määrällinen orientoituminen maailmaan, säännönmukaisuudet ja funktiot, geometria ja mittaaminen sekä todennäköisyys ja tilastot. Oivaltamistaitoja kehitetään luokittelemalla, etsimällä avoimen lausekkeen ratkaisujoukkoa ja kombinatorisilla tehtävillä.

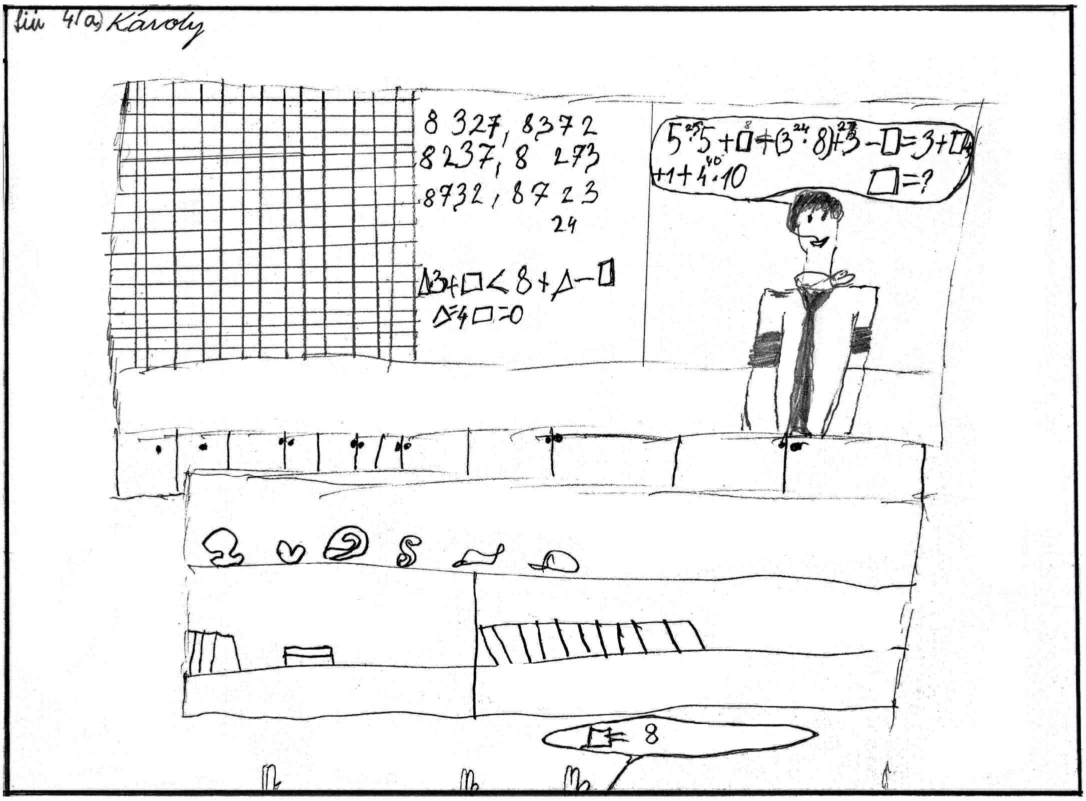
Määrällinen orientoituminen maailmaan –sisältö-alueeseen kuuluvat lukualue 0-10 000, peruslaskutoimitukset, avoimet lausekkeet, algebran pohjustus ja kokemusten hankkiminen murtoluvuista. Säännönmukaisuuksien ja funktioiden sisältöalueella ohjataan oppilasta jatkamaan, muodostamaan, etsimään ja merkitsemään sääntöjä. Kerätään tietoja, taulukoidaan niitä, etsitään niistä yhteyksiä, joita tarkastellaan myös piirin ja pinta-alan väliltä.

Geometriassa ja mittaamisessa tutkitaan suoria ja kuvioita, rakennetaan ja suuntaudutaan tilassa sekä mitataan. Todennäköisyyttä ja tilastoja harjoitellaan hankkimalla kokemuksia välineiden avulla, valmistamalla diagrammeja, joita luetaan lukualueella 0-10 000 päättelyn lisäksi. Seuraavaksi esitellään matematiikan sisältöalueet unkarilaisten Varga–Neményi –opetusryhmän neljäsluokkalaisten kokemana opetussuunnitelman mukaisessa järjestyksessä.

Oivaltamistaitojen kehittäminen

Unkarilaisten oppituntipiirroksissa opetussuunnitelman sisältöalueella *oivaltamistaitojen* kehittäminen oppilas pohtii avoimen lausekkeen ratkaisujoukkoa lukualueelta nollasta äärettömään. Luvun numeroiden kombinatoriikka, yhdistelmämahdollisuudet, mietityttävät, kun muodostetaan numeroilla 2, 3, 7 ja 8 kaikkia mahdollisia nelinumeroisia lukuja.

Lukujen numeroiden yhdistelmämahdollisuuksien tutkimista kuvataan Karólyn piirroksesta 6.2.2.1. Nelinumeroisista luvuista kahdeksikolla alkavat kuusi lukua ovat liitutaululla järjestettynä ryhmäksi, jonka alla oleva luku 24 kertoo numeroyhdistelmien määrän, kun numeroita käytetään vain kerran kussakin luvussa. Károlyn piirroksessa lukujen kombinatoriikan lisäksi taululla on myös epäyhtälö ratkaisuineen. Opettaja matematiikan oppitunnin keskeisenä henkilönä liitutaulun ääressä esittää suullisesti pitkän yhtälön oppilaiden pohdittavaksi. Muutamien oppilaiden viittaavat kädet pilkottavat piirroksen alaosassa. Joku oppilaista on ratkaissut pitkän yhtälön.



PIIRROS 6.2.2.1 Lukujen kombinatoriikkaa

Määrällinen orientoituminen maailmaan

Matematiikan neljännen luokan sisältöalueen *määrällinen orientoituminen maailmaan* unkarilaiset oppilaat kokevat joko viihdyttäväksi tai tylsäksi. Luku- ja numerokäsitteiden erottamista harjoitellaan laskemalla yhteen luvun numeroiden summa tai muodostamalla joukkoja ja niiden leikkauksia luvun numeroiden ominaisuuksien perusteella. Lukualue kymmenestä äärettömään on käytössä, kun pohditaan avoimen lausekkeen ratkaisujoukkoa. Lukujen suuruusvertailua havainnollistaa lukusuora.

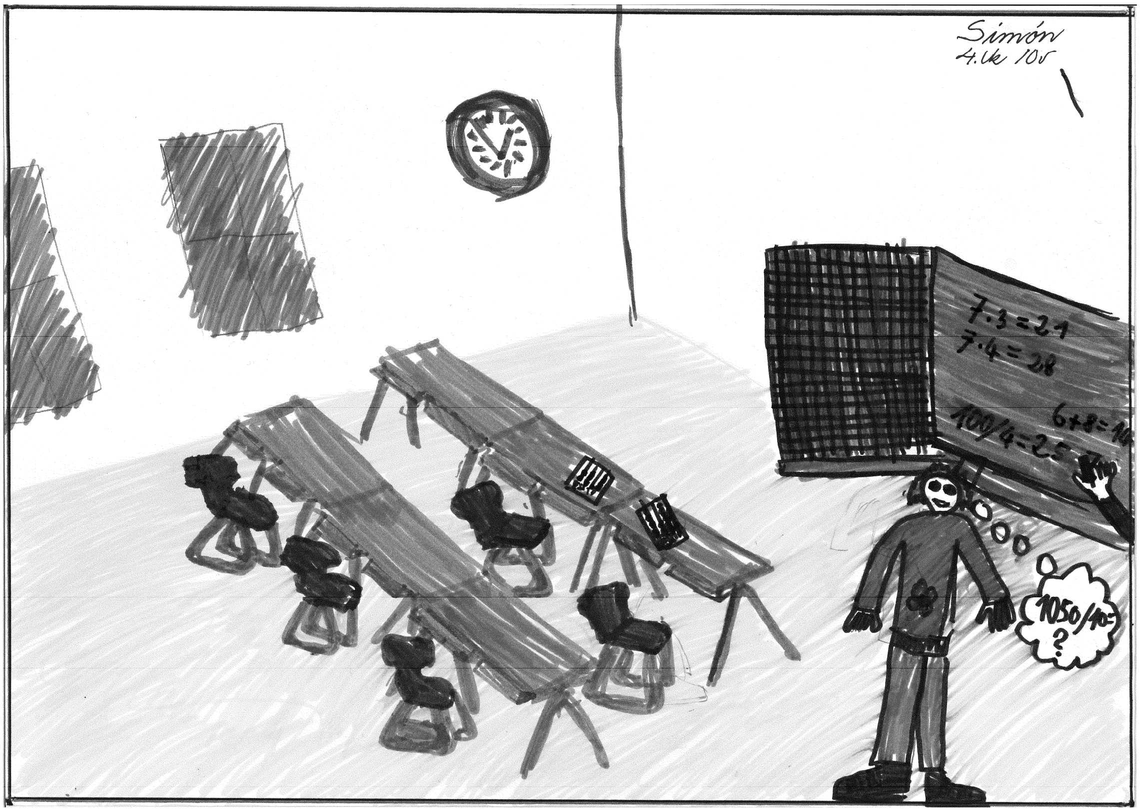
Roomalaisten numeroiden tunnukset I, C ja M ovat muutamien piirrosten mukaan mieleisiä ja helppoja. Murtoluvun ymmärtämistä tukee pintamalli, jossa kokonainen jaetaan yhtä suuriin osiin ja tietty osa merkitään värittämällä. Murtolukujen operaatioista harjoitellaan murtoluvun kertomista kokonaisluvulla. Pitkät yhteenlaskut ovat jostain syystä tylsiä, mutta vähennyslaskut mieleisiä. Luvuilla laskeminen on kuitenkin tylsempää kuin logiikka, mutta se on yhtä mukavaa kuin geometria:

Simón: Pitkät yhteenlaskut ovat tylsiä, mutta pidän miinuslaskuista.

Éva: Logistiikka (logiikka?) on erittäin viihdyttävää, mutta laskeminen on vähän tylsää.

Eszter: Tuntien hauskuus riippuu (aiheesta?) geometria on minusta kivaa laskeminen on kivaa.

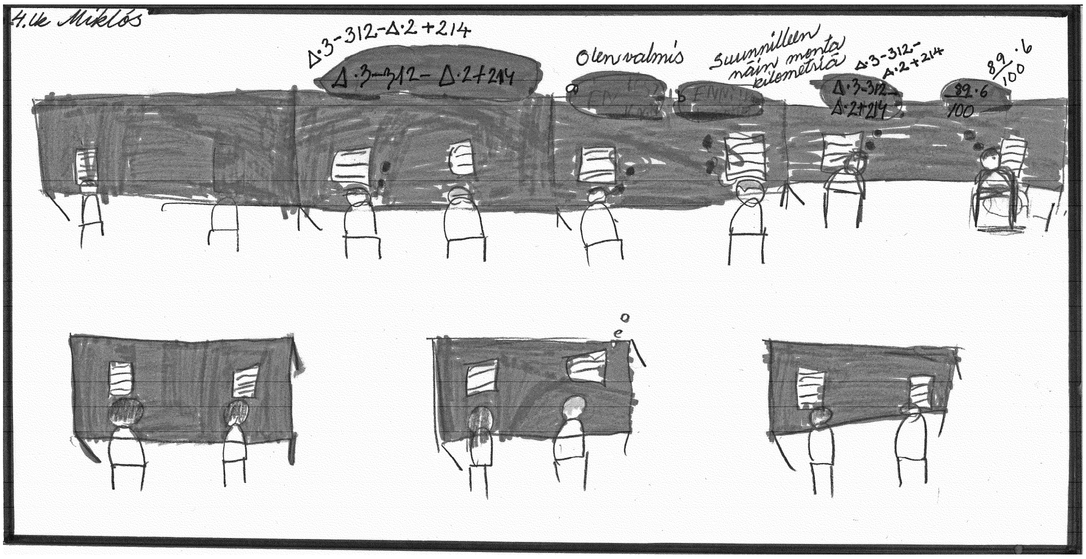
Peruslaskutoimitukset, vaikka ne eivät kaikkia innostakaan, mietityttävät muutamia oppilaita vielä matematiikan oppitunnin jälkeenkin, kuten seuraavassa Simónin piirroksessa:



PIIRROS 6.2.2.2 Koulupäivän jälkeenkin pohditaan

Simónin piirroksen mukaan oppitunnilla on käsitelty seitsemän kertotaulua, kokonaislukujen yhteenlaskua, jakolaskun sisältöjakoa, jota piirroksen oppilas pohtii, vaikka luokkakaveri viittoilee lähtemään kotimatkalle. Kellohan on jo vaille kaksi, mikä kertoo lapsen koulupäivän olevan päättymässä. Helmitaulut jäävät odottamaan pulpeteille seuraavan päivän oppituntia.

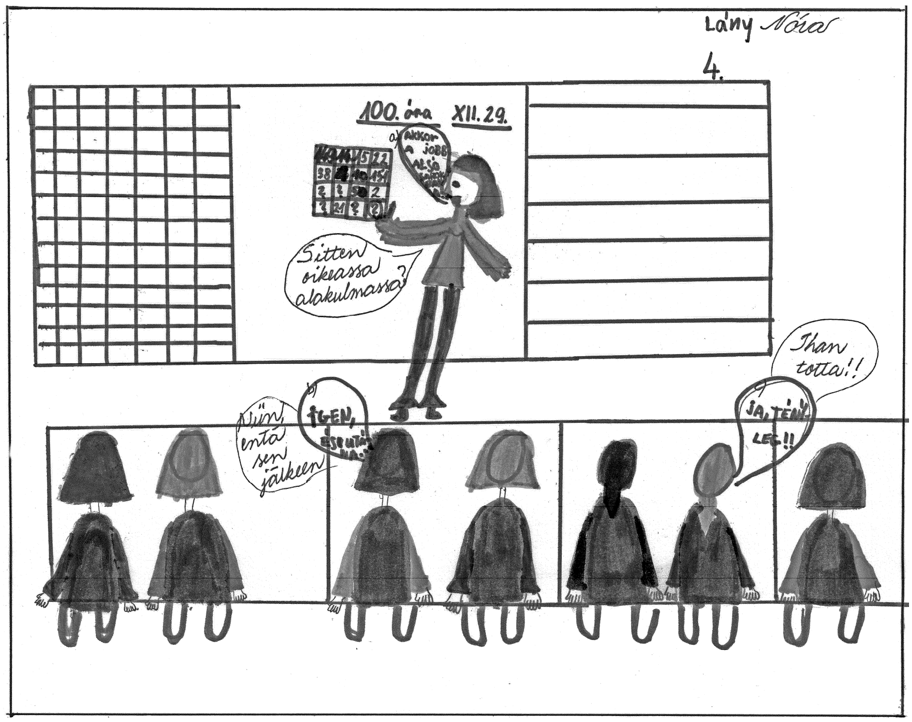
Eniten nämä unkarilaiset neljäsluokkalaiset kuvasivat piirroksissaan määrällisen maailmaan suuntautumisen sisältöalueelta yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemista. Yhtälöitä ja epäyhtälöitä pohditaan intensiivisesti yksilöllisesti tehtävissä kirjallisissa harjoituksissa, mikä ilmenee seuraavasta Miklósin piirroksesta 6.2.2.3. Hänen piirroksensa kuten edellä olevan Károlynkin piirroksen 6.2.2.1 ajatuskuplat viestivät suhteellisen pitkistä yhtälöistä. Yhtälöitä ja epäyhtälöitä työstetään myös opettajan ohjauksessa kyselevän opetuksen aikana. Oppilaskin toimii opettajana esitellessään niiden ratkaisemista luokkakavereilleen.



PIIRROS 6.2.2.3 Yhtälöitä ratkaisemassa

Säännönmukaisuudet ja funktiot

Unkarilaisen opetussuunnitelman 2003 mukaan *säännönmukaisuuden ja funktioiden sisältöalueella* kerätään tietoja ja järjestetään niitä taulukkoon, jonka avulla etsitään lukujen välisiä yhteyksiä. Näistä esimerkkinä on seuraava Nóran piirros 6.2.2.4.



PIIRROS 6.2.2.4 Säännönmukaisuuksia etsimässä

Nóran piirroksessa oppilas esittelee päätelmiään taulukkoon sijoitetuista luvuista luokkakavereilleen. Joku heistä on innostunut jo seuraavasta luvusta, toinen puolestaan vahvistaa esittelyn paikkansa pitävyyttä. Taulumerkintä kertoo kuvatun matematiikan tunnin olevan lukuvuoden sadas tunti joulukuun 29. päivä joululoman aikana. Merkintä lienee lapsen mielikuvitusta, mutta se kertoo kuitenkin, miten roomalaiset numerot ovat käytössä Unkarissa päivämäärämerkinnöissä.

Näiden unkarilaisten kymmenvuotiaiden oppilaiden kirjoitelmissakin korostui säännönmukaisuuksien etsiminen merkittävänä tapahtumana matematiikan opiskelussa opetussuunnitelman mukaisesti. Lapselle säännön etsiminen merkitsee keksimistä, joka synnyttää oivaltamisen iloa. Kun säännöt on keksitty, niitä kerrataan usein, jotta ne jäisivät mieleen:

> *István: Opiskelen matikkaa hyvin ja mielestäni se on helppoa jos pystyn keksimään säännön tehtäviin.*
>
> *Miklós: Innostun kun keksitään sääntöjä tehtävistä.*
>
> *Valéria: Jos opiskelemme jotain uutta, yritän kerrata itsekseni säännöt.*

Geometria ja mittaaminen

Geometria on yhtä mukavaa kuin luvut ja niillä laskeminen neljäsluokkalaisen mielestä. Pinta-alan laskeminen ilmenee lasten piirroksissa ajatuskuplien välittäminä neliömillimetreinä. Geometrian ja mittaamisen sisältöalue sijoittuu usein lukuvuoden alkuun ja loppuun, mikä lienee syynä siihen, että tämä sisältöalue esiintyy lasten kirjoitelmissa ja piirroksissa suhteellisen vähän. Spiraaliperiaatteen mukaisen opetussuunnitelman yksittäiset tapahtumat geometriasta ja mittaamisesta lienevät lapsista niin arkipäiväisiä, että ne ilmenevät niukasti lasten kokemuksissa, kuten matematiikan opetussuunnitelman sisältöaluekin *todennäköisyys ja tilastot* lukuun ottamatta roskis-peliä, josta tarkemmin seuraavassa alaluvussa.

Kooste

Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaisten kirjoitelmissa *Minä matematiikan oppijana* ja *Meidän luokka matematiikan oppitunnilla* –piirroksissa esiintyvät Unkarin opetussuunnitelman 2003 matematiikan sisältöalueista oivaltamistaitojen kehittäminen, määrällinen orientoituminen maailmaan, säännönmukaisuudet, geometria ja mittaaminen sekä todennäköisyys ja tilastot.

6.2.3 ”Matematiikka on kiinnostava aine”

Kuten suomalaiset ikätoverinsa unkarilaiset Varga–Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaiset kertoivat kirjoitelmissaan, miltä matematiikka tuntuu. Suomalaiset kuvasivat tunnekokemuksiaan hauskoiksi, mukaviksi ja kivoiksi. Unkarilaiset lapset kuvasivat matematiikkaa mukavaksi – tylsäksi aineeksi kuten suomalaisetkin, mutta he kuvasivat matematiikkaa suomalaisia useammin myös kiinnostavaksi – ei kiinnostavaksi tai viihdyttäväksi – ei viihdyttäväksi oppiaineeksi. Jokseenkin neutraalit kokemukset matematiikasta merkitsevät hienoista pitkästymistä, kun ei ole kiinnostunut eikä innostunut. Tällöin ei pidetä matematiikasta, mutta ei sitä inhotakaan. Tämä jokseenkin neutraali kokemus matematiikasta ilmaistiin tehostaen monilla kielteisillä ilmaisuilla, joista esimerkkinä Fannín kokemus:

Fanní: Matikka (matematiikka) ei ole mielestäni viihdyttävää mutta ei se niin tylsääkään ole. En pidä matematiikasta mutta en sitä inhoakaan.

Ambivalenttinen kokemus matematiikasta on lasten mukaan vaihtelevasti hauskaa ja tylsää, jolloin matematiikka ajoittain kiinnostaa, ajoittain ei ja jolloin sen parissa joskus viihtyy, joskus ei, kuten Eszter kertoo.

Eszter: Joskus matikka on tylsää, mutta useimmiten se on kivaa. Mielestäni useimmat asiat matematiikassa ovat kiinnostavia. Joskus se on kuitenkin tylsää, muuten se on viihdyttävää.

Myönteinen kokemus matematiikasta on silloin, kun pitää matematiikasta, se on mukavaa, mielenkiintoista ja viihdyttävää. Matematiikan mieleisenä oppiaineena kokevat oppilaat kuvasivat tekijöitä, joiden vuoksi he viihtyvät matematiikan parissa.

Viisi syytä viihtyä matematiikan parissa

Yksi syy viihtyä matematiikan parissa on sen kiehtova maailma, joka on lapsesta jotain salaperäistä ja lumoavaa. Matematiikan kiehtova maailma herättää lapsen uteliaisuuden ennen kokemattomasta. Matematiikan salaperäinen maailma houkuttelee seikkailuun saada vihiä jostain yllätyksellisestä:

Anett: Tykkään matematiikasta erittäin paljon. Mielestäni se on viihdyttävää.

Virág: Matematiikan maailma kiehtoo minua paljon, pidänkin sitä tärkeänä. Ajoittain opiskelen sitä lumoutuneena.

Zoltán: Se on tosi kivaa ja mielenkiintoista. Se on viihdyttävää seikkailua jossa vainutaan aavistuksia.

Kymmenvuotiaalle matematiikka koulussa merkitsee tehtäviä, joskus tylsiä, joskus kiinnostavia, ajoittain helppoja ja ajoittain vaikeita. On kyllä tärkeää kokea matematiikka helpoksi, jolloin tuntee itsensä päteväksi ja kyvykkääksi. Jos olisi pelkästään helppoja tehtäviä, tylsistyisi. Tarvitaan vaikeitakin tehtäviä, jotta voisi kokea sääntöjen keksimisen iloa. Keksimisen ilo viihdyttää.

Vaikeustasoltaan erilaiset tehtävät ovatkin toinen syy viihtyä matematiikan parissa:

Mátyas: On tehtäviä, jotka sujuvat hyvin. Mutta on vaikeitakin tehtäviä. Se on silloin kivaa kun on vaikeita tehtäviä.

Simón: Jos keksii sääntöavaimen tehtävään niin. Matikka on viihdyttävää.

Mária: On tehtäviä, jotka ovat vaikeita, mutta niillekin löytyy oma ratkaisunsa. Siihen tarvitaan älyä pidänkin matikkaa huvittavana.

Opettaja, kolmas viihdyttäjä, on merkittävä tekijä unkarilaisen neljäsluokkalaisen myönteisissä kokemuksissa matematiikasta. Opettajaa ihaillaan matematiikan taitojen vuoksi. Hänellä on tarjottavana erilaisia leikkejä ja pelejä, joiden avulla voi laittaa vaikka tarpeettomia lukuja roskikseen pelin sääntöjen mukaan:

Károly: Loistava opettajamme tekee siitä (matematiikasta) vieläkin mielenkiintoisempaa. Sehän olisi aika kiusallista jos opettaja ei osaisi matematiikkaa.

Lilla: Opettajalla on paljon leikkisiä asioita ja pelejä. Mielipelini on roskis.

Roskis-pelissä pelinjohtaja arpoo lukuja esimerkiksi lukualueelta 0 - 50. Pelaajilla on viisiruutuinen paperiliuska, johon sijoitetaan viisi arvottua lukua suuruusjärjestykseen. Tavoitteena on saada mahdollisimman pian luvut järjestykseen. Luku, joka on järjestykseen sopimaton, heitetään roskikseen, josta peli on saanut nimensä. Nopeimmin liuskan täyteen ja oikeaan järjestykseen saanut voittaa pelin. Se harjoittaa lukujen suuruusvertailun lisäksi todennäköisyyden alkeita.

Neljänneksi matematiikka on viihdyttävää, tarjoaahan se monia kiinnostavia asioita. Yleisluonteisesti ilmaistut asiat matematiikassa ovat kymmenvuotiaan unkarilaisen lapsen mukaan sellaisia, että ne saavat hänet kuuntelemaan ja opiskelemaan tarkasti. Matematiikan asioiden avulla lapsi kokee tulevansa niin viisaaksi, että pystyy keksimään lentävän auton tai toimimaan pankkiirina. Kun on oppinut paljon asioita matematiikasta koulussa ja kotona, kehittyy ihmisenäkin. Lisäksi matematiikan sisältöjen avulla voi välttyä tyhmyydeltä ja huijaukselta:

Cecília: Sen (matematiikan) asiat tempaavat kuuntelemaan tarkasti.

Tamara: Se joka ei osaa matikan asioita on tyhmä.

István: Matikan asioilla viisastuu, voi keksiä lentävän auton ja jos on viisas voi olla pankkiiri.

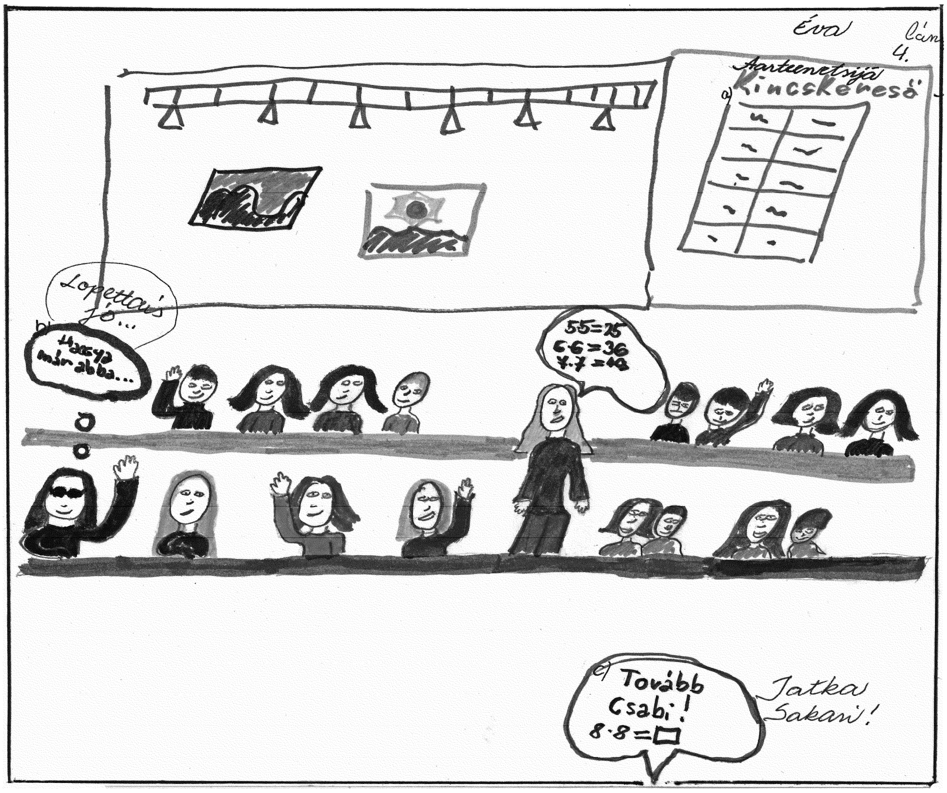
Zoltán: Matikka on miltei kaikkien asioiden pohja. Täten minua ei voi huijata.

Lopuksi viides syy viihtyä matematiikan parissa on siitä pitäminen. Pitäminen on puolestaan lasten mukaan yhteydessä oppiaineen sekä kiinnostavuuteen että tärkeyteen. Kun on kiinnostunut, oppii ikään kuin huomaamattaan helposti ja vaivattomasti. Matematiikka on tärkeä mieliaine tarpeellisten opittujen asioiden vuoksi:

Mátyas: Pidän matematiikasta. Se on niin kiinnostava aine että sitä yksinkertaisesti oppii.

Dorián: Pidän matematiikasta kuten kaverinikin. Eihän se muuten olisi minulle tärkeää. Isona tarvitsen oppimiani matemaattisia taitoja melkein kaikkialla.

Éva kuvaa seuraavassa piirroksessaan 6.2.3.1, miltä matematiikan opetustilanne oppilaista saattaa tuntua.



PIIRROS 6.2.3.1. Lopettais jo …

Tyttö eturivissä luettelee kertotaulua. Hymyilevä silmälasipäinen tyttö toivoo, että kaveri lopettaisi ja että hän pääsisi jatkamaan tehtävää. Muutamat oppilaat kokevat kertotaulutehtävän myönteisesti ilmeistä pääteltynä. Takarivissä puhekuplan oikealla puolella olevan pojan ilme viestii negatiivisesta kokemuksesta. Hänen vieressään viittaava poika viittaa, mutta hänen olonsa vaikuttaa surkealta.

Kooste
Unkarilaiset neljäsluokkalaiset Varga–Neményi -opetusryhmästä kokevat matematiikan myönteisesti, jokseenkin neutraalisti sekä ambivalenttisen myönteisesti ja kielteisesti. Tyypillisimpiä olivat myönteiset ja ambivalenttiset tunnekokemukset. Matematiikka viihdyttää kymmenvuotiasta tarjoamalla salaperäisen, lumoavan ja houkuttelevan seikkailun vainuta aavistuksia jostain yllätyksellisestä. Toinen syy viihtyä matematiikan parissa ovat vaikeustasoltaan vaihtelevat tehtävät. Kolmas merkittävä tekijä kokea matematiikka myönteisenä oppiaineena on taitava ja ihailtu opettaja, joka tarjoaa mahdollisuuden pelata ja leikkiä matematiikkaa. Näiden lisäksi matematiikka tarjoaa asioita, jotka saavat oppilaan opiskelemaan tarkkaavaisesti ja kehittymään ihmisenä niin viisaaksi, että voi toimia keksijänä. Matematiikan avulla välttyy tyhmyydeltä ja huijaukselta kymmenvuotiaan mukaan. Viides tekijä matematiikan parissa viihtymiseksi on siitä pitäminen kiinnostavuuden ja tärkeän tarpeellisuuden vuoksi.

6.2.4 Helppoa ja vaikeaa matematiikkaa

Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän kaikki neljännen luokan oppilaat kertoivat kirjoitelmissaan ja oppituntipiirroksissaan matematiikkaan liittyvistä helpoista ja vaikeista oppimiskokemuksista. Nämä lasten kokemukset matematiikasta olivat ryhmiteltävissä aineiston pohjalta 1) helpoiksi, 2) ei helpoiksi eikä vaikeiksi, 3) helpoiksi ja vaikeiksi ja 4) vaikeiksi.

Kun matematiikka on helppoa

Matematiikka on helppoa silloin, kun sen opiskelu sujuu hyvin ja helposti. Opiskelu on unkarilaisen neljäsluokkalaisen mukaan miettimistä, ymmärtämistä ja keksimistä. Keksimisen tarkoituksena on löytää sääntö ratkaista matematiikan tehtävä. Säännön keksimisen jälkeen matematiikka tuntuu helpolta. Sääntöjen keksiminen on hauskaa ja yksinkertaista silloin, kun opettaja avustaa. Koska on tärkeää oppia itse keksityt säännöt, niitä on luettava ja toistettava monta kertaa, jotta ne jäisivät mieleen:

> *István: Opiskelen matikkaa hyvin, ja mielestäni se on helppoa jos pystyn keksimään säännön tehtäviin.*

> *Virág: Opiskelemme matematiikkaa hauskasti ja yksinkertaisesti opettajan avustamana keksimällä sääntöjä. Luen ne monesti läpi sitten toistan niitä moneen kertaan mielessäni.*

Matematiikkaa helppona oppiaineena pitävien oppilaiden (ks. taulukkoa 6.2.4.1) oppituntipiirroksissa matematiikan opiskelu sujuu hyvin ja helposti. Opiskelun myönteisyys ilmenee oppilaiden ilmeistä, eivät puhe- eivätkä ajatuskuplatkaan viesti, että matematiikka olisi vaikeaa.

Helppoa ja vaikeaa matematiikkaa

Kun opiskelu tuntuu ajoittain hieman vaivalloiselta ja ajoittain vaivattomalta, matematiikka on helppoa ja vaikeaa. Miettiminen ja ymmärtäminen ovat vakavan matematiikan opiskelun tuntomerkkejä. Vakava opiskelu tarkoittaa tosissaan yrittämistä, ei ilottomuutta, ovathan matematiikan oppitunnit viihdyttäviä, koska opettaja opettaa vitsikkäästi. Vaikka matematiikka on ajoittain vaikeaakin, kaikki on kuitenkin ratkaistavissa, jos tietää säännöt. Ne tekevät matematiikasta aika helppoa. Jotta oppisi muistamaan säännöt kunnollisesti, on oppitunnilla kuunneltava ja kerrattava sääntöjä kotona. Muistitehtävät tehdään kotona, mutta koulussa matematiikan tunneilla opitaan erilaisia tapoja ratkaista tehtäviä:

> *Károly: Se on mielestäni ajoittain vaikeaa ja ajoittain helppoa, mutta loistava opettajamme osaa opettaa sitä meille. Yritän opiskella sitä yhtä vakavasti kuin muitakin aineita.*

> *Viktor: Se on vähän vaikeaa, mutta kaikkeen löytyy ratkaisu. Opiskelen yleensä kotona, tunneilla taas opimme useita ratkaisuja. Mielestäni matikka on aika helppoa, jos tiedät säännöt.*

> *Dorián: Matikan tunti on viihdyttävä ja minulle helppo, mutta ajoittain on jotain vaikeaa. Opettaja opettaa tunnilla vitsikkäästi ja minä pidän siitä tosi paljon. Opin matikkaa helposti.*

> *Eszter: Kuuntelen tunnilla säännöt ja kertaan ne. Osa matikasta on helppoa, osa taas vaikeata.*

Ei matematiikka ole helppoa eikä vaikeaa

Matematiikka on keskinkertaista silloin, kun unkarilainen neljäsluokkalainen kokee opiskelunsa sujuvan hyvin, mutta ei kuitenkaan liian hyvin. Vahvistaakseen näkemystään muutamat unkarilaiset lapset ilmaisivat kantansa matematiikan helppoudesta ja vaikeudesta negaation avulla. Säännöt ovat tärkeätä opittavaa näille lapsille kuten matematiikkaa helppona aineena pitäville lapsillekin. Kotona illalla harjoitellaan koulussa keksittyjä ja opiskeltuja matematiikan sääntöjä, jos on aikaa:

> *Simón: Se (matematiikka) ei ole liian helppoa eikä liian vaikeatakaan mutta jos mietit, osaat ratkaista sen. Minä opiskelen niin matikkaa, että luen säännöt useasti läpi, sitten toistan ne useasti päässäni.*

> *Fanní: Opiskelu ei suju mitenkään liian hyvin, mutta on tehtäviä, jotka sujuvat hyvin. Mielestäni matikka ei ole niin vaikeaa, mutta ei se helppoakaan ole. Kun illalla pääsen kotiin ja minulla on aikaa istuudun työpöytäni ääreen harjoittelemaan sääntöjä.*

Lilla: Mielestäni matikka on keskinkertainen.

Kun matematiikka tuntuu vaikealta

Matematiikka tuntuu vaikealta, jos ei ymmärrä. Ymmärtämisen tavoitteena ovat säännöt ja niiden logiikka. Kun säännöt ovat ymmärrettäviä, tuntuu oppiainekin helpolta. Jotta oppisi uuden asian, on kerrattava sääntöjä:

Ádám: Mielestäni matikka on vaikeaa.

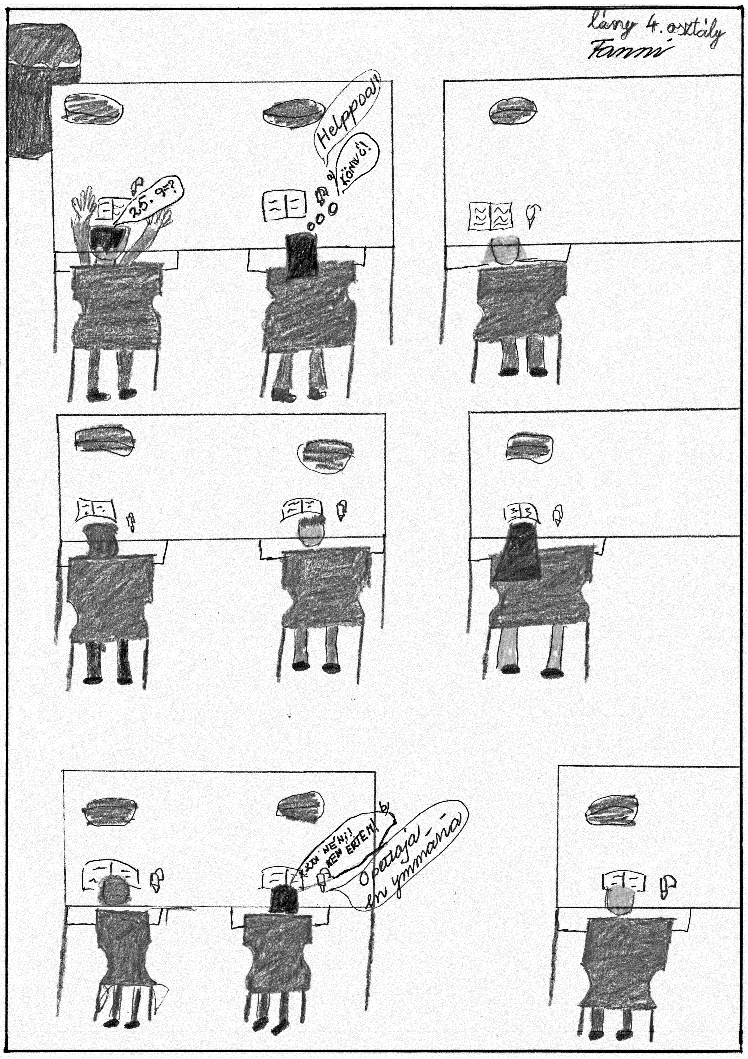
Brigitta: Pidän matikkaa tärkeänä, mutta vaikeana. Jos opimme jotain uutta, yritän kerrata itsekseni säännöt.

Valéria: Pidän matikkaa kivana joskin en aina ymmärrä sen sääntöjen logiikkaa. Minulla matikan opiskelu tuottaa vähän vaikeuksia. Sille joka ymmärtää matikkaa se on helppoa.

Piirroksessa (6.2.4.1) Fanní kuvaa matematiikan oppituntia, jolloin matematiikka oppilaista tuntuu sekä helpolta että vaikealta. Oppilaat tekevät yksilöllisesti kirjallisia kertolaskuja, mikä on pääteltävissä edessä istuvan oppilaan puhekuplasta. Vaikka jokaisen oppilaan pulpetilla on toimintavälinepakit, niitä ei tällä kertaa käytetä. Edessä istuvan oppilaan mielestä tehtävä on helppo, mutta takana istuva kertoo opettajalle, ettei ymmärrä.

Kooste

Unkarilaisista Varga–Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaisista matematiikka on helppo, keskinkertainen, helppo ja vaikea tai vaikea oppiaine heidän opiskelukokemustensa mukaan (ks. taulukkoa 6.2.4.1). Matematiikan opiskelu on miettimistä, ymmärtämistä ja keksimistä. Keksimisen tarkoituksena on, että oppilas itse löytää säännön ratkaista tehtäviä. Sääntöjen keksiminen on yksinkertaista opettajan ohjauksessa. Koska säännöt ovat tärkeitä, niitä painetaan mieleen kerraten koulussa ja kotona.



PIIRROS 6.2.4.1 Opettaja, en ymmärrä!

TAULUKKO 6.2.4.1 Onko matematiikka helppoa vai vaikeaa?

Onko matematiikka helppoa vai vaikeaa?	Anett	Brigitta	Cecília	Dorián	Esztér	Eva	Fanni	Lilla	Mária	Nóra	Tamara	Valéria	Viraág	Zsuzsanna	Adám	István	Károly	Mátyás	Miklós	Péter	Simon	Viktor	Zoltán
Helppoa (H)						**H**			**H**				**H**	**H**		**H**							
Keskin-kertaista (K)							**K**	**K**												**K**	**K**		
Helppoa ja vaikeaa (HV)	**H V**		**H V**	**H V**	**H V**					**H V**	**H V**						**H V**	**H V**	**H V**			**H V**	**H V**
Vaikeaa (V)		**V**										**V**			**V**								

6.2.5 *"Matematiikan maailma kiehtoo minua ja pidänkin sitä tärkeänä."*

Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän kaikki 23 neljäsluokkalaista kertoivat kirjoitelmissaan *Minä matematiikan oppijana*, miten tärkeää matematiikka on. Oppilasenemmistön mukaan se on tärkeä oppiaine. Tärkeyden intensiteettiä korostettiin usein erittäin-sanalla. Vain yksi unkarilainen oppilas piti matematiikkaa melko tärkeänä. Tämän oppilasryhmän kirjoitelmista analysoitiin, samoin kuin suomalaistenkin oppilasryhmien kirjoitelmista, oppilaiden kokemuksia ja uskomuksia matematiikan tarpeellisuudesta ja käyttötarkoituksista 1) lasten arkielämässä, 2) koulussa eri oppiaineissa, 3) aikuiselämässä, ammatissa ja työssä sekä 4) muita yleisluonteisemmin ilmaistuja käyttötarkoituksia, kuten matematiikkaa tarvitaan kaikkialla.

Unkarilaisen lapsen arjen matematiikka

Kukaan näistä unkarilaisista neljäsluokkalaisista ei kertonut kirjoitelmissaan tai kuvannut piirroksissaan, että olisi käyttänyt matematiikkaa omassa arkielämässään koulun ulkopuolella. Seuraavaksi he kertovat omin sanoin, miten tärkeää matematiikka kuitenkin on, miten he käyttävät sitä koulussa ja uskovat käyttävänsä myöhemmin elämässään.

Koulussa matematiikka on tärkeä oppiaine

Sen lisäksi, että matematiikka on tärkeä oppiaine, nämä unkarilaiset neljäsluokkalaiset pitävät sitä tarpeellisena, hyödyllisenä ja jopa välttämättömänä, jotta viisastuisi, sivistyisi, oppisi numerot, osaisi laskea ja ajatella järkevästi. Välttämätöntä matematiikka on erityisesti tulevissa opinnoissa, yläasteella ja lukiossa. Unkarilaisten lasten käsityksistä ilmenee selvästi, että myös vanhemmat ja koulu arvostavat matematiikkaa ja sen osaamista. Koulu onkin lasten mukaan kuuluisa matematiikan opetuksestaan. Se, että osaa laskea, on tärkeämpää kuin oppiaineesta pitäminen, kuten Cecília kertoo. Pari hänen luokkakaveriaan ovat eri mieltä: Kun matematiikasta pitää tai se on salaperäisyydessään kiehtovaa, se on tärkeää ja päinvastoin – siis matematiikasta pitäminen ja sen arvostus voivat olla yhteydessä toisiinsa. Näistä esimerkeistä on havaittavissa, miten oppilaat voivat kokea saman oppiaineen eri tavoin:

> *Tamara: Mielestäni matikka on yksi tärkeimmistä aineista. Tulen tarvitsemaan sitä enemmän yläasteella, mutta kaikkein eniten tulen tarvitsemaan sitä, jos pääsen lukiossa matematiikkalinjalle.*

> *Dorián: Minulle se on erittäin tärkeätä, koska osa tästä koulusta on kuuluisa matematiikasta, ja koska tämä aine on minulle tärkeä.*

> *Zsuzsanna: Äitini sanoo aina, että on erittäin tärkeätä osata matikkaa koulussa.*

Cecília: No, minulle se on aika tärkeää, että osaisin laskea, vaikka kuinka vähän pitäisinkin matematiikasta.

Virág: Matematiikan maailma kiehtoo minua ja pidänkin sitä tärkeänä.

Lilla: Koska se on tärkeää minäkin pidän matematiikasta.

István: Matikka on välttämätöntä tulevien opintojen kannalta.

Kukaan näistä unkarilaisista neljäsluokkalaisista ei kertonut, miten matematiikkaa olisi käytetty koulun muissa oppiaineissa. Näin on pääteltävissä, etteivät oppiaineet vielä integroidu heidän mielessään ohjaamatta.

Matematiikka kuuluu aikuiselämään, ammattiin ja työhön

Unkarilaisilla lapsilla on vahva näkemys matematiikan tärkeydestä siksi, että sitä tarvitaan aikuisena arkielämässä ostoksilla ja pankissa. On syytä osata matematiikkaa, ettei tule huijatuksi kaupan kassalla.

Matematiikka on tärkeää myös tulevassa ammatti- ja työelämässä, jonka toiveammatit heijastuvat lasten tulevaisuuskuvissa tulevasta urasta. Lapset haaveilevat mm. lääkärin, asianajajan, insinöörin, kemistin tai fyysikon urasta, mutta on opiskeltava matematiikkaa paljon, jotta saa haaveilemansa laadukkaan työpaikan:

Károly: Minulle matikka on tärkeä oppiaine, toivon, että se liittyy tulevaan työhöni.

Éva: Nyt matikka on tärkeä aine ja joskus tulen tarvitsemaan sitä.

Eszter: Minulle matematiikka on tärkeää, muuten useimmat työpaikat eivät ottaisi minua työhön. Sitä tarvitaan lääkärin, asianajajan tai missä tahansa muussa ammatissa.

Simon: Mielestäni matikka on tärkeää, sitten kun olen aikuinen, tulen tarvitsemaan sitä monissa paikoissa. Jos haluaa saada hyvän työpaikan, pitää opiskella paljon ja matematiikalla on siinä iso rooli.

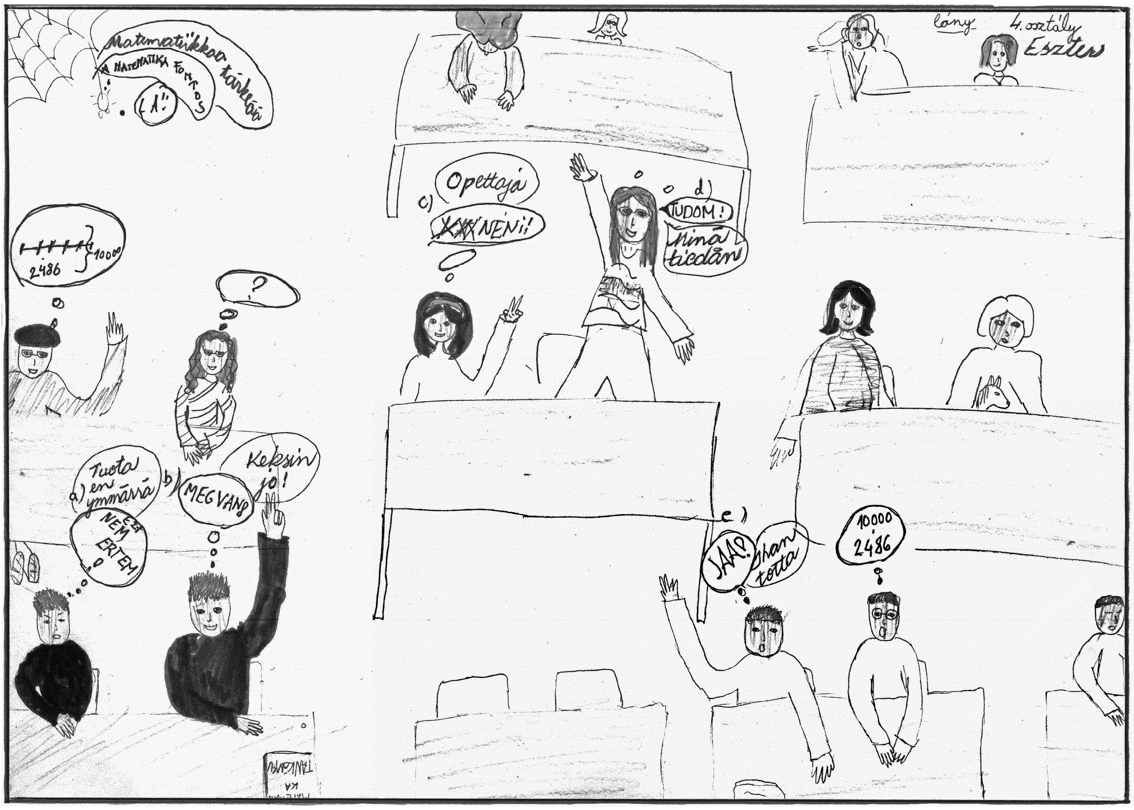
Kaikkialla maailmassa käytetään matematiikkaa

Koulun oppiaineena, tulevan ammatin ja työn lisäksi matematiikka on tarpeellista ja tärkeää, koska sitä käytetään koko maailmassa, joka on matematiikkaa. Näin tuumivat muutamat unkarilaiset neljäsluokkalaiset pojat:

Ádám: Matematiikka on mielestäni kivaa ja tärkeätä ja minä tarvitsen sitä, koska sitä käytetään kaikkialla maailmassa.

> *Péter: Minulle se ei ole vielä erityisen tärkeätä. Tulen tarvitsemaan matematiikkaa kemiassa. Sitä tarvitaan kaikkialla, koko maailma on matematiikkaa.*

”Matematiikkaa, tärkeää!” huudahtaa luokkahuoneen nurkassa verkossaan asustava hämähäkki meneillään olevasta matematiikan oppitunnista alla olevassa Eszterin piirroksen vasemmassa yläkulmassa.



PIIRROS 6.2.5.1 Matematiikka on tärkeää hämähäkinkin mielestä

Valtaosa oppilaista Eszterin piirroksessa on suuntautunut katseiden ja kehon suunnasta pääteltynä matematiikan tehtävään, jota monet pohtivat mielessään. Tehtävänä on nähtävästi ratkaista kertolaskulauseke 10 000 kertaa 2 486, joka näkyy oikealla edessä istuvan pojan ajatuskuplassa ja toisen vasemmalla istuvan oppilaan ajatuskuplassa, jossa on janamalli kertojasta 10 000 ja kerrottavana luku 2 486. Edessä istuva poika ajattelee, ettei ymmärrä. Viisi oppilasta on jo ratkaissut tehtävän ja viittaa saadakseen esittää ratkaisunsa. Innostunut tyttö on noussut seisomaan ja huutaa tietävänsä. Oppilaiden *minäkin tiedän*, *én is tudom* -elämykset ovat kehityksen motiiveja, esittää Nemzeti Alaptanterv (2003, 60), Unkarin perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelma. Oppituntitilanteista on siis havaittavissa opetussuunnitelman pedagogisia periaatteita.

Kooste

Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaiset pitävät matematiikkaa erittäin tärkeänä tai tärkeänä, siis merkittävänä oppiaineena, jota arvostetaan koulussa ja tulevien opintojen, ammatin ja työelämän vuoksi. Se on tarpeellista kaikkialla maailmassa. Kirjoitelma- ja piirrosaineiston perusteella oppilaat eivät ole soveltaneet matematiikkaa omassa arkielämässään, vaan sitä sovelletaan käytäntöön vasta aikuisena.

6.2.6 "Matematiikassa saavutan hyviä tuloksia"

Kirjoitelmissa *Minä matematiikan oppijana* unkarilaiset Varga–Neményi-opetusryhmän neljännen luokan oppilaat arvioivat itseään matematiikan oppijoina. Oppilaiden itsearvioinnit olivat aineistolähtöisesti luokiteltavissa kolmeen ryhmään 1) olen tosi hyvä, hyvä tai ihan hyvä 2) melko hyvä tai 3) keskinkertainen, jolloin oppilas ei koe olevansa hyvä eikä huono matematiikassa. Näillä itsearvioinneilla tarkoitetaan tässä käsillä olevassa tutkimuksessa oppilaiden aineittaista minäkäsitystä siitä, millaisia he kokevat olevansa matematiikassa. Tosi hyvät, hyvät ja ihan hyvät itsearvioinnit tulkitaan myönteiseksi minäkäsitykseksi, melko hyvät itsearvioinnit varauksellisen myönteiseksi ja keskinkertainen-arviointilauseet neutraaliksi minäkäsitykseksi. On huomattava, ettei kukaan näistä unkarilaisista neljäsluokkalaisista kokenut itseään huonoksi matematiikassa. Seuraava tarkastelu etenee myönteisestä varauksellisen myönteiseen ja neutraaliin minäkäsitykseen.

"Olen hyvä matikassa" – myönteinen minäkäsitys

Monilla unkarilaisilla neljäsluokkalaisilla on myönteinen käsitys itsestään matematiikan oppijana (ks. taulukkoa 6.2.6.1). Unkarissa järjestetään vuosittain sekä paikallisia että valtakunnallisia matematiikkakilpailuja (esim. Zrínyi 1998, 2000, 2003, 2004), joissa menestyminen on oppilaalle merkityksellinen tapahtuma myönteisen minäkäsityksen näkökulmasta, kuten Istvánille. Kun oppiminen on vaivatonta ja kotitehtävät onnistuvat, oppilas kokee itsensä taitavaksi. Minäkäsitys voi syntyä myös silloin, kun on mahdollisuus verrata itseä toisiin: Brigítta on havainnut, että toisilla on vaikeuksia, mutta hänellä ei. Simón puolestaan kokee olevansa nopea tehtävissään, mutta joku on parempi kuin hän, joten hän ei koe olevansa paras:

> *István: Matematiikassa saavutan hyviä tuloksia, yhdessä valtakunnalli-sessa kilpailussa sijoituin kolmanneksi.*
>
> *Mátyás: Minä pidän matikasta ja olenkin hyvä siinä. Opin asiat yleensä helposti.*
>
> *Simón: Olen yleensä nopeasti valmis matikan läksyjen kanssa, yleensä ne onnistuvat hyvin, mutta en ole mitenkään paras matikassa.*
>
> *Brigitta: Minä olen tosi hyvä matikassa. Matikka on minulle helppoa mutta muut tuskailevat sen kanssa usein.*

Dorián: En tiedä, mutta mielestäni olen hyvä matematiikassa. Opin matikkaa helposti.

Mária: Olen hyvä matematiikassa. Matikan opiskelu on minulle helppoa. Matikka on muutenkin helppoa.

Tamara: Arvosanani matikasta on kymmenen. Minulta matikka sujuu hyvin.

Unkarissa käytetään peruskoulun ala-asteella numeroarviointia, mikä näkyy oppilaiden minäkäsityksissä. Tamara kertookin, että hänellä matematiikasta viitonen, joka on Unkarissa korkein mahdollinen ja vastaa Suomen arvosanaa kymmenen. Matematiikka sujuukin häneltä hyvin.

”Olen melko hyvä matikassa” - varauksellisen myönteinen minäkäsitys

Kun oppilas oppii matematiikkaa ajoittain vaivattomasti, hän kokee olevansa aika tai melko hyvä. Vaikka oppiminen tuntuu helpolta, matematiikan oppimisen uskotaan olevan vaikeampaa myöhemmin, kuten Éva ja Zsuzsanna esittävät. Tytöillä on varauksellisen myönteinen minäkäsitys useammin kuin pojilla tässä unkarilaisessa Varga–Neményi -opetusryhmässä:

Zoltán: Olen melko hyvä matikassa.

Éva: Minä olen aika hyvä matikassa. Monesti matikan oppiminen sujuu helposti. Vielä nyt matikka on minulle helppoa.

Cecília: En ole mitenkään liian hyvä matikassa, mutta jos minulta kysytään tunnilla jotain, niin osaan vastata. Opin matikkaa hieman vaivalloisesti.

Nóra: Matikassa olen enimmäkseen melko hyvä päässälaskuissa ja kirjallisissa tehtävissä.

Fanní: En ole mitenkään liian hyvä matikassa mutta en erityisen huonokaan vaan aika hyvä. Tehtävät ei aina suju hyvin, mutta on tehtäviä jotka sujuvat hyvin.

Valéria: En ole erityisen taitava matikassa. Minulla matikan opiskelu tuottaa vähän vaikeuksia.

Zsuzsanna: En ole mitenkään liian hyvä matematiikassa, vaikka se on mielenkiintoista ja sen voi vielä ymmärtää helposti. Olen minä jokseenkin hyvä.

Muutamat unkarilaiset lapset kertovat itsestään matematiikan oppijoina kielteisten ilmaisujen avulla: Ensin kerrotaan, millainen oppilas ei koe olevansa, minkä jälkeen täsmennetään kielto myönteisellä ilmauksella.

”En ole hyvä enkä huono” - neutraali minäkäsitys

Kielteiset ilmaisut ovat tyypillisiä oppilaille, joiden minäkäsitys määriteltiin tässä yhteydessä neutraaliksi. He eivät koe olevansa hyviä eivätkä huonoja matematiikassa, vaan keskinkertaisia Lillan tavoin, joka kertoo aavistavansa asioita. Nemzeti Alaptanterv (2003, 52), Unkarin perusopetuksen opetussuunnitelma kehottaa, että opetuksessa on ohjattava oppilaita muotoilemaan aavistuksiaan sanallisesti ajattelun kehittämiseksi. Kiinnostavissa ja mieleisissä matematiikan asioissa neljäsluokkalainen kokee olevansa hyvä ja päinvastoin huono vähän kiinnostavissa ja vastenmielisissä asioissa:

Adam: Mielestäni en ole huono enkä hyvä matikassa.

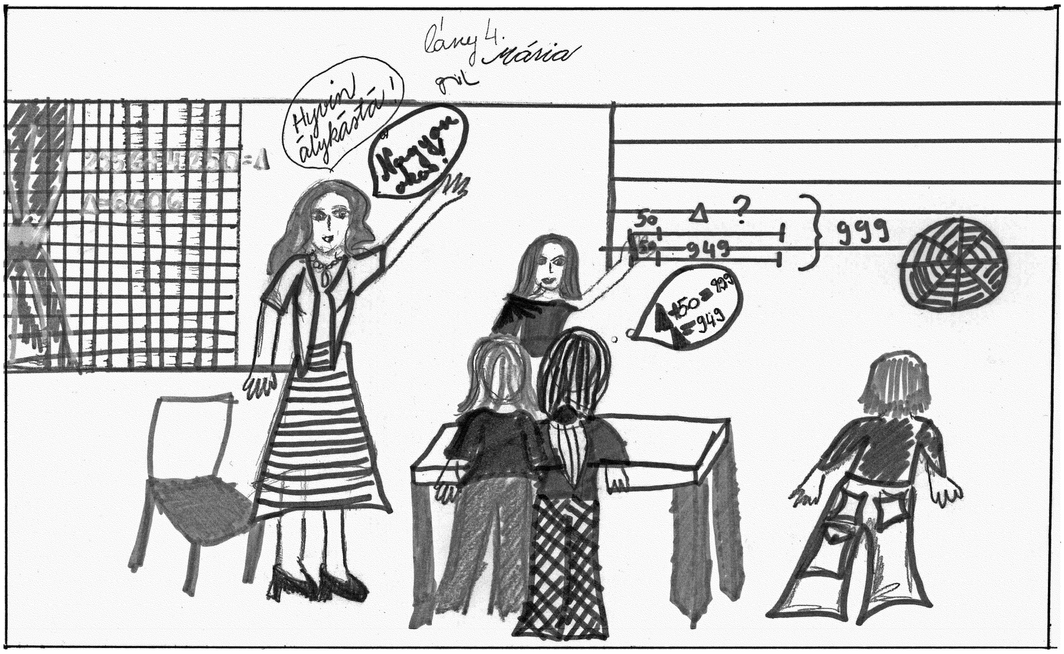
Anett: Minä en ole matematiikassa mitenkään erityisen hyvä enkä huono.

Eszter: Jos jokin asia ei vielä kiinnosta minua niin paljon, ja niissä en olekaan hyvä, mutta asioissa, joista pidän olen hyvä. Yleensä siltä väliltä.

Lilla: Matikassa olen keskinkertainen, joskus en ymmärrä siitä yhtään mitään, joskus minulla on aavistus ja joskus osaan asiat todella hyvin.

Virág: Keskiarvoni matikasta on kahdeksan enkä pidä itseäni erityisen hyvänä enkä erityisen huononakaan.

Numeroarviointi on merkittävää palautetta lapselle, koska lapsi muodostaa sen pohjalta käsitystä itsestään matematiikan oppijana. Sen sijaan opettajan antamasta suullisesta palautteesta matematiikan oppituntien aikana kukaan lapsista ei kertonut kirjoitelmassaan, mutta se on havaittavissa unkarilaisten neljäsluokkalaisten oppituntipiirroksista, joista esimerkkinä seuraava Márian piirros (6.2.6.1). Piirroksessa kuvataan meneillään olevaa opetuskeskustelua yhteenlaskuyhtälön ratkaisusta, jota yksi oppilaista on havainnollistamassa janamallin avulla liitutaululla. Yksi oppilaista ratkaisee yhtälön oikein. Opettajasta suoritus on hyvin älykäs:



PIIRROS 6.2.6.1 Hyvin älykästä!

Kooste

Seuraavassa taulukossa koostetaan unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän neljännen luokan oppilaiden minäkäsityksistä matematiikassa. Oppilaiden käsitys itsestään matematiikan oppijana on neutraali, varauksellisen myönteinen tai myönteinen. Kukaan ei koe olevansa huono matematiikassa. Sekä tyttöjen että poikien minäkäsitys vaihtelee neutraalista myönteiseen.

TAULUKKO 6.2.6.1 Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän minäkäsitykset

Minäkäsitys matematiikassa	Anett	Brigitta	Cecília	Dorián	Esztér	Èva	Fanní	Lilla	Mária	Nóra	Tamara	Valéria	Virágg	Zsuzsann	Àdám	István	Károly	Mátyás	Miklós	Péter	Simon	Viktor	Zoltán
Myönteinen (M)		**M**		**M**					**M**		**M**					**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	
Varauksellisen myönteinen (VM)						**VM**	**VM**			**VM**		**VM**		**VM**									**VM**
Neutraali (N)	**N**		**N**		**N**			**N**					**N**		**N**								

6.2.7 Kontrastoivan sääntöjä keksivän yhtälönratkaisijan kokema matematiikan opetussuunnitelma

Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaisten matematiikkaan liittyviä uskomuksia, asenteita ja käsityksiä keskeisistä tutkimustuloksista kootaan tyypin *kontrastoivan sääntöjä keksivän yhtälönratkaisijan* ja hänen kokemansa matematiikan opetussuunnitelman avulla. *Kontrastoiva sääntöjä keksivä yhtälönratkaisija* käsitetään tässä tutkimuksessa opetussuunnitelman kokijatyypiksi, jonka tavoitteena on abstrahoida 23 unkarilaisen neljäsluokkalaisen uskomuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta, matematiikka-asenteita ja käsityksiä itsestä matematiikan oppijana.

Tyyppi on usean neljäsluokkalaisten matematiikkakokemuksia kuvaavien kirjoitelmien ja piirrosten lähiluennan ja analysoinnin tulosta. Tyypin löytymistä tuki mahdollisuus rinnastaa kolmen eri opetusryhmän matematiikkakokemuksia. *Kontrastoiva sääntöjä keksivä yhtälönratkaisija* -tyyppi sukeutui olennaisesti kahdesta tekijästä: toisaalta tämän unkarilaisen opetusryhmän kymmenvuotiaiden lasten tavasta kertoa kokemuksistaan, toisaalta painottaa matematiikan oppimisessa sääntöjen keksimistä ja yhtälönratkaisua, joita suomalaisryhmissä ei esiintynyt. Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaisille on tyypillistä paikoitellen kertoa matematiikkaan liittyvistä kokemuksistaan kielteisten ja myönteisten vastakohtien avulla, kontrastoiden. Tästä lasten tavasta kertoa on esimerkkinä Fannín kertomus:

> *Fanní: En ole mitenkään liian hyvä matikassa mutta en erityisen huonokaan vaan aika hyvä. En pidä matematiikasta mutta en sitä inhoakaan. No, se on tärkeää jotta osaisin laskea. Mielestäni matikan tunti ei ole kiinnostava mutta se on tärkeää ja on tunteja jotka ovat kivoja. Opiskelu ei suju mitenkään liian hyvin mutta on tehtäviä jotka sujuvat hyvin. Mielestäni matikka ei ole vaikeaa mutta ei se helppoakaan ole. Kun illalla pääsen kotiin ja minulla on aikaa istuudun työpöytäni ääreen harjoittelemaan sääntöjä. Matikka ei ole mielestäni viihdyttävää mutta ei se niin tylsääkään ole. Mielestäni tulen tarvitsemaan matikkaa myöhemmin elämä on vaikeampaa ilman laskemista.*

Kielteisten ja myönteisten vastakohtien lisäksi unkarilaisten lasten kertomuksissa esiintyi adversatiivisia konjunktioita (mutta, vaan, vaikka) enemmän kuin suomalaisoppilaiden kirjoitelmissa. Näin voimakasta kontrastoivaa tapaa kertoa kokemuksistaan ei esiintynyt suomalaisilla neljäsluokkalaisilla. *Kontrastoivan sääntöjä keksivän yhtälönratkaisijan* kokemaan matematiikan opetussuunnitelmaan (kuvio 6.2.7.1) sisältyvät yhtälönratkaisijan käsitys itsestä matematiikan oppijana, sen opetuksesta ja oppimisesta sekä matematiikka-asenteet.

Kontrastoiva sääntöjä keksivä yhtälönratkaisija -tyypin esittely etenee hänen minäkäsityksestään matematiikan sisältöihin ja tunnekokemuksiin. Sitten tarkastellaan matematiikan opetusta ja opettajaa yhtälönratkaisijan silmin. Lopuksi pohditaan tämän ryhmän matematiikan opetuksen kehittämishaasteita. Tyyppi esitellään paikoitellen näiden unkarilaisten oppilaiden kontrastoivaa kerrontatapaa tyylikeinona käyttäen.

Kontrastoiva sääntöjä keksivä yhtälönratkaisija on unkarilainen peruskoulun neljännen luokan oppilas iältään kymmenvuotias tyttö tai poika, jonka matematiikan oppimista on ohjattu Varga–Neményi -opetusmenetelmällä. Hänen minäkäsityksensä matematiikan oppijana on neutraali, varauksellisen myönteinen tai myönteinen, mutta ei kielteinen. Hän ei koe olevansa huono matematiikassa. *Yhtälönratkaisijan* minäkäsitys perustuu oppimiskokemuksiin, oppilaiden keskinäiseen vertailuun, todistuksen numeroarviointiin, opettajan suulliseen palautteeseen tai menestykseen matematiikkakilpailussa. *Yhtälönratkaisija* kertaa kotiläksynä ratkaisten koulussa keksittyjen sääntöjen matematiikan tehtäviä.

Kontrastoiva sääntöjä keksivä yhtälönratkaisija uskoo matematiikkaan kuuluvan runsaasti määrällistä orientoitumista maailmaan ja oivaltamistaitojen kehittämistä, mutta ei niin paljon geometriaa, mittaamista, säännönmukaisuuksia, todennäköisyyttä eikä tilastoja. Vaatii oivaltamista, kun *yhtälönratkaisija* miettii, kuinka monta erilaista lukua on mahdollista muodostaa sovitulla määrällä numeroita, missä auttaa järjestelmällinen ryhmittely. Orientoituessaan määrällisesti maailmaan *yhtälönratkaisija* laskee peruslaskutoimituksia kokonais- ja murtoluvuilla, mutta niitä merkittävämpiä kokemuksia ovat yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaiseminen.

Yhtälönratkaisijan matematiikka-asenne:

1) Unkarilainen *kontrastoiva sääntöjä keksivä yhtälönratkaisija* kokee matematiikan myönteisesti, neutraalisti tai ambivalenttisen myönteisesti ja kielteisesti, mutta ei tyystin kielteisesti. Myönteinen kokemus matematiikasta tuntuu viihdyttävältä, kiinnostavalta ja kivalta. Neutraali kokemus matematiikasta on silloin, kun se ei viihdytä eikä ole tylsää. *Yhtälönratkaisija* kokee matematiikan ambivalenttisesti, kun se ajoittain tuntuu kivalta, viihdyttävältä ja kiinnostavalta, joskus taas ei. Tyypillisimpiä ovat myönteiset ja ambivalenttiset tunnekokemukset. Matematiikka viihdyttää kymmenvuotiasta *yhtälönratkaisijaa* tarjoamalla salaperäisen, lumoavan ja houkuttelevan seikkailun vainuta aavistuksia jostain yllätyksellisestä. Vaikeustasoltaan vaihtelevat matematiikan tehtävät ovat *yhtälönratkaisijasta* huvittavaa ajanvietettä. Hän ihailee taitavaa opettajaansa, jolla on tarjottavana pelejä ja leikkejä matematiikasta. Siinä on tarjolla myös asioita, jotka saavat *yhtälönratkaisijan* opiskelemaan tarkkaavaisesti ja kehittymään ihmisenä niin viisaaksi, ettei voi olla toimimatta keksijänä. Matematiikan avulla ei voi olla välttymättä tyhmyydeltä tai huijaukselta. *Yhtälönratkaisija* pitää matematiikasta, onhan se kiinnostavaa ja tarpeellista.

2) Matematiikka on unkarilaiselle *yhtälönratkaisijalle* erittäin tärkeä tai tärkeä oppiaine, jonka osaamista arvostetaan sekä koulussa että kotona. Vaikka *yhtälönratkaisija* ei ole vielä soveltanut matematiikkaa omassa arkielämässään

eikä se vielä integroidu hänen mielessään muihin kouluaineisiin, hän pitää sitä tärkeänä tulevissa opinnoissa, ammatissa ja työelämässä. Hän ei voi olla unelmoimatta ammatista, jossa matematiikkaa on mahdollista käyttää. Se on tarpeellista myös kaikkialla maailmassa. Jos matematiikkaa ei olisi, elämä olisi vaikeaa ilman sitä.

3) Unkarilainen *kontrastoiva sääntöjä keksivä yhtälönratkaisija* kokee matematiikan helpoksi, keskinkertaiseksi, helpoksi ja vaikeaksi tai vaikeaksi oppiaineeksi. Matematiikan opiskelu on *yhtälönratkaisijasta* miettimistä, ymmärtämistä ja keksimistä. Keksimisen tarkoituksena on, että *yhtälönratkaisija* itse löytää säännön ratkaista matematiikan tehtäviä. Sääntöjen keksiminen ei ole monimutkaista, vaan yksinkertaista silloin, kun opettaja ohjaa sitä. Koska säännöt ovat tärkeitä, niitä painetaan mieleen kerraten koulussa ja kotona.

Yhtälönratkaisijan opetusryhmässä asenne matematiikkaan on yksiselitteisen myönteinen yhdeksällä, ambivalenttisen myönteinen 12:lla ja ambivalenttisen kielteinen kahdella *yhtälönratkaisijalla*. Yksiselitteisyys on tulkittavissa, kun *yhtälönratkaisijasta* matematiikka on esimerkiksi kiinnostavaa, helppoa ja tärkeää. Asenne tulkitaan ambivalenttiseksi, kun matematiikka on *yhtälönratkaisijasta* esimerkiksi viihdyttävää, helppoa ja vaikeaa (ambivalenssi) ja tärkeää. Yksiselitteisen myönteinen asenne matematiikkaan on unkarilaisessa ryhmässä seitsemällä tytöllä ja kahdella pojalla, ambivalenttisen myönteinen asenne kuudella tytöllä ja pojalla, ambivalenttisen kielteinen yhdellä tytöllä ja pojalla. Seuraavassa kuviossa 6.2.7.1 on *kontrastoivan sääntöjä keksivän yhtälönratkaisijan* kokema matematiikan opetussuunnitelma.

Kontrastoiva sääntöjä keksivä yhtälönratkaisija työskentelee matematiikan oppitunnilla useimmiten opettajan johdolla kyselevän opetuksen parissa. Opettajan ja *yhtälönratkaisijan* välisessä vuorovaikutuksessa on ominaista käyttää täsmällisiä symboleja merkintöineen. Opettaja ohjaa *yhtälönratkaisijaa* perustelemaan ajatteluaan, vaikka hän ei erityisen paljon käytäkään sitä kirjoittaessaan vapaamuotoisesti matematiikasta. Kyselevän opetuksen aikana *yhtälönratkaisija* kannustaa ja kadehtii mielessään ikätoveriaan, halveksii kaverin nokkelia vastauksia matematiikan oppitunnilla ja pilkkaa kaveriaan vääristä vastauksista. Oppilaskeskeisessä yksilöllisessä työskentelyssä *yhtälönratkaisija* ratkaisee täsmällisiä symbolisia operaatioita oppimansa ratkaisumallin mukaan, jossa ensin luetaan tehtävä, sitten se tulkitaan, lasketaan ja lopuksi se tarkistetaan kaverin ja opettajan kanssa. Yksilöllisessä työskentelyssä *yhtälönratkaisijaa* innostavat kirjallisia tehtäviä enemmän leikkiminen, pelaaminen ja toimintavälineet, mutta kokeet tuntuvat armottomilta. Oppilaskeskeisessä opetuskeskustelussa *yhtälönratkaisija* esittelee luokkakavereilleen tehtävän ratkaisuja, tuloksia tai kysyy toisilta *yhtälönratkaisijoilta*. Luokkakaverit vastaavat ja esittävät vastakysymyksiä.

Koettu matematiikan opetussuunnitelma

OPETUSUSKOMUKSET
* Opettajajohtoista kyselyä
* Oppilaskeskeistä yksilöllistä työskentelyä
* Oppilaskeskeistä opetuskeskustelua

MATEMATIIKKAUSKOMUKSET
* Oivaltamistaidot
* Määrällinen orientoituminen maailmaan
* Säännönmukaisuudet
* Geometria ja mittaaminen
* Todennäköisyys ja tilastot

MATEMATIIKKA-ASENTEET
*Viihdyttävää, kiinnostavaa ja kivaa, joskus viihdyttävää, joskus ei tai ei viihdyttävää eikä tylsää
* Helppoa, sopivaa, helppoa ja vaikeaa tai vaikeaa
* Erittäin tärkeää, tärkeää tai melko tärkeää

MINÄKÄSITYS
* Myönteinen
* Varauksellisen myönteinen tai
* Neutraali

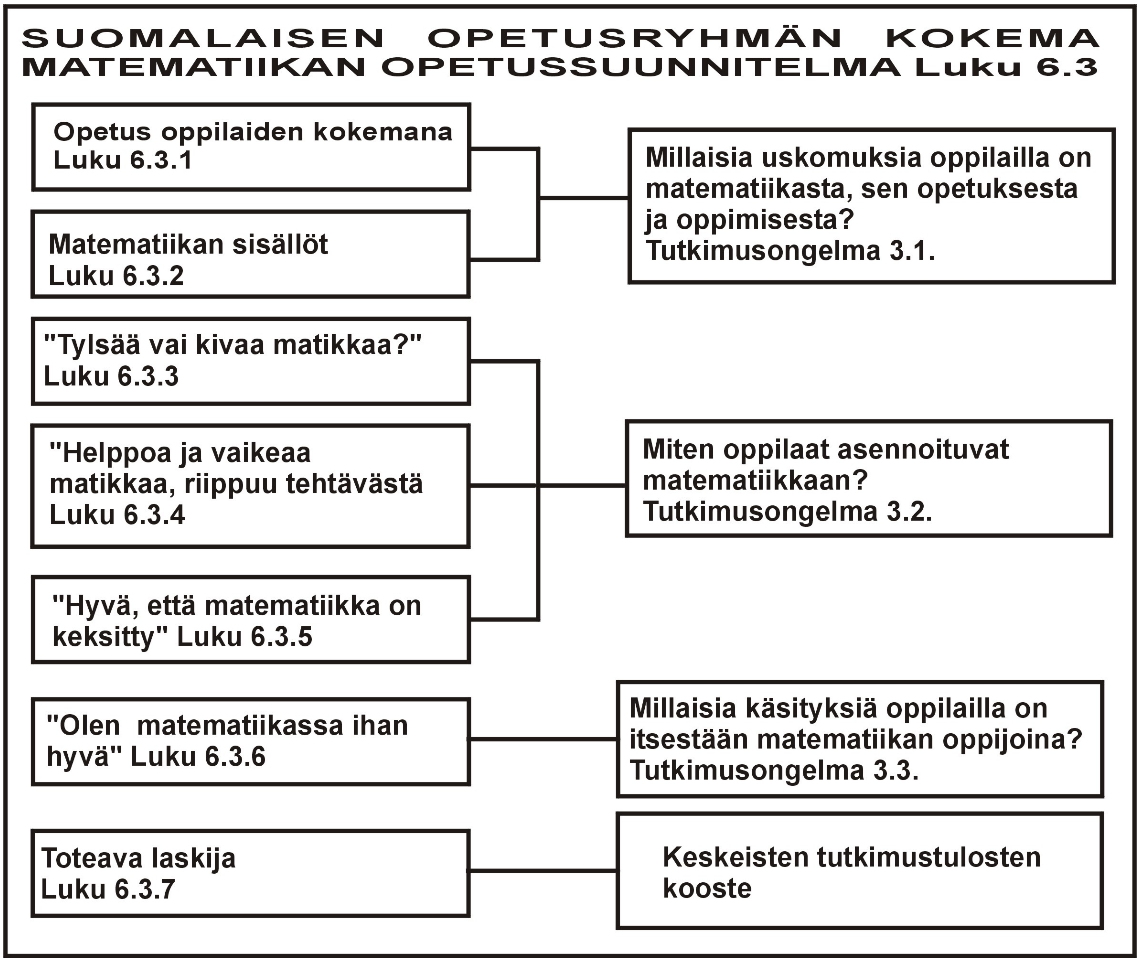
KUVIO 6.2.7.1 Matematiikka yhtälönratkaisijan kokemana

Yhtälönratkaisijan kuvaamana unkarilainen opettaja ohjaa matematiikan oppimista opettajajohtoisesti kysellen useammin kuin oppilaskeskeisillä yhteistoiminnallisilla työtavoilla. Opettajan ja *yhtälönratkaisijan* välinen vuorovaikutus on abstraktisen symbolista kyselevän opetuksen aikana. Opettaja ohjaa *yhtälönratkaisijaa* tehtävien ratkaisujen perustelemiseen. Hän antaa myönteistä palautetta suorituksista ja älykkyydestä. Yksilöllisen työskentelyn aikana *yhtälönratkaisijan* opettaja auttaa pyydettäessä ja seuraa työskentelyä. Opetuskeskustelussa opettaja seuraa *yhtälönratkaisijoita* ja antaa myönteistä palautetta. Yhtälönratkaisija ihailee opettajansa taitoja ja älykkyyttä, hänen ansiostaan matematiikan oppitunnit ovat mielenkiintoisia, humoristisia ja yhtälönratkaisija pitää matematiikasta.

Yhtälönratkaisijan opettajan haasteet matematiikan opetuksen kehittämiseksi ovat seuraavanlaisia: Jotta *kontrastoivan sääntöjä keksivän yhtälönratkaisijan* matematiikkakuva monipuolistuisi, olisi geometrian, tilastojen ja todennäköisyyden sisältöalueita käsiteltävä mielikuvia synnyttävämmällä tavalla, jotta ne ilmenisivät *yhtälönratkaisijan* kokemuksissa merkittävinä. *Yhtälönratkaisijalle* olisi tarjottava tilaisuus pari- ja ryhmätyöskentelyyn, jotta yhteistoiminnallinen työskentely kehittyisi. Koska matematiikan kokeet tuntuvat armottomilta, itsearviointi voisi totuttaa häntä arviointitilanteeseen ulkopuolista arviointia lempeämmällä tavalla. Koska *yhtälönratkaisijan* luokassa on runsaasti käytettävissä erilaisia vapaavalintaisia toimintavälineitä ja tietokonekin, niitä voisi hyödyntää oppilaskeskeisissä yhteistoiminnallisissa työtavoissa ja opiskelun eriyttämisessä. Niin toimintavälineet ja tietokone kuin luokan ulkopuolinen työskentelykin rikastaisivat *yhtälönratkaisijan* käsityksiä matematiikan käyttökelpoisuudesta ja taitoja soveltaa sitä arkielämässään jo nyt lapsena. Koska kymmenvuotiaan *yhtälönratkaisijan* suhde matematiikkaan on emotionaalinen, olisi jatkossakin annettava hänelle mahdollisuus tunne-ilmaisuun matematiikasta, jotta voitaisiin havaita mahdolliset negatiiviset muutokset ja vahvistaa myönteistä matematiikkasuhdetta.

6.3 Suomalaisen opetusryhmän kokema opetussuunnitelma

Tutkimustulosten esittelyn etenemistä kuvataan kuviossa 6.3.1 tutkimus-ongelmien mukaisessa järjestyksessä suomalaisen neljännen luokan opetus-ryhmän oppilaiden kokemasta matematiikan opetussuunnitelmasta.



KUVIO 6.3.1 Suomalaisen opetusryhmän kokema matematiikan opetussuunnitelma tutkimusongelmittain

Keskeiset tutkimustulokset tämän oppilasryhmän osalta esitetään *toteava laskija* -tyyppikuvauksen ja hänen kokemansa opetussuunnitelman (kuvio 6.3.7.1) avulla.

6.3.1 Opetus oppilaiden kokemana

Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004, 16–17) mukaan opetuksessa tulee käyttää oppiaineelle ominaisia menetelmiä ja monipuolisia työtapoja, joiden avulla tuetaan ja ohjataan oppilaan oppimista. Työtapojen tehtävänä on kehittää oppimisen, ajattelun ja ongelmanratkaisun taitoja, työskentelytaitoja ja sosiaalisia taitoja sekä aktiivista osallistumista. Työtapojen tulee antaa mahdollisuuksia myös eri ikäkausille ominaiseen luovaan toimintaan, elämyksiin ja leikkiin. Opettaja valitsee työtavat. Hänen tehtävänään on opettaa ja ohjata sekä yksittäisen oppilaan että koko ryhmän oppimista ja työskentelyä. Oppiminen ymmärretään yksilölliseksi ja yhteisölliseksi tietojen ja taitojen rakennusprosessiksi. Se tapahtuu tavoitteellisena opiskeluna erilaisissa tilanteissa itsenäisesti, opettajan ohjauksessa sekä vuorovaikutuksessa opettajan ja vertaisryhmän kanssa.

Suomalaisen perusopetusryhmän neljännen luokan oppilaiden kokemuksia oppilaskeskeisistä yhteistoiminnallisista ja opettajajohtoisista työtavoista tarkastellaan piirros- ja kirjoitelma-aineiston pohjalta. Opettajajohtoisia työtapoja ovat opettajan esitys ja kysely. Esittävässä opetuksessa opettaja kertoo opittavasta asiasta ja havainnollistaa sitä. Kyselevässä opetuksessa opettaja esittää kysymyksiä, joihin oppilas vastaa puheenvuoron saatuaan. Oppilaskeskeisiä ja yhteistoiminnallisia työtapoja ovat opetuskeskustelu, pari- ja ryhmätyö sekä yksilöllinen työskentely. Opetuskeskustelussa oppilasjoukko puhuu tai väittelee keskenään ilman opettajan jakamia puheenvuoroja. Pari- ja ryhmätyössä kahdesta neljään oppilasta toimii yhteistyössä tehtävien parissa. Yksilöllisessä työskentelyssä oppilas tekee tehtäviä itsenäisesti. Tarkastelu etenee opettajajohtoisista työtavoista oppilaskeskeisiin yhteistoiminnallisiin työtapoihin.

”5 x 8 = 40”

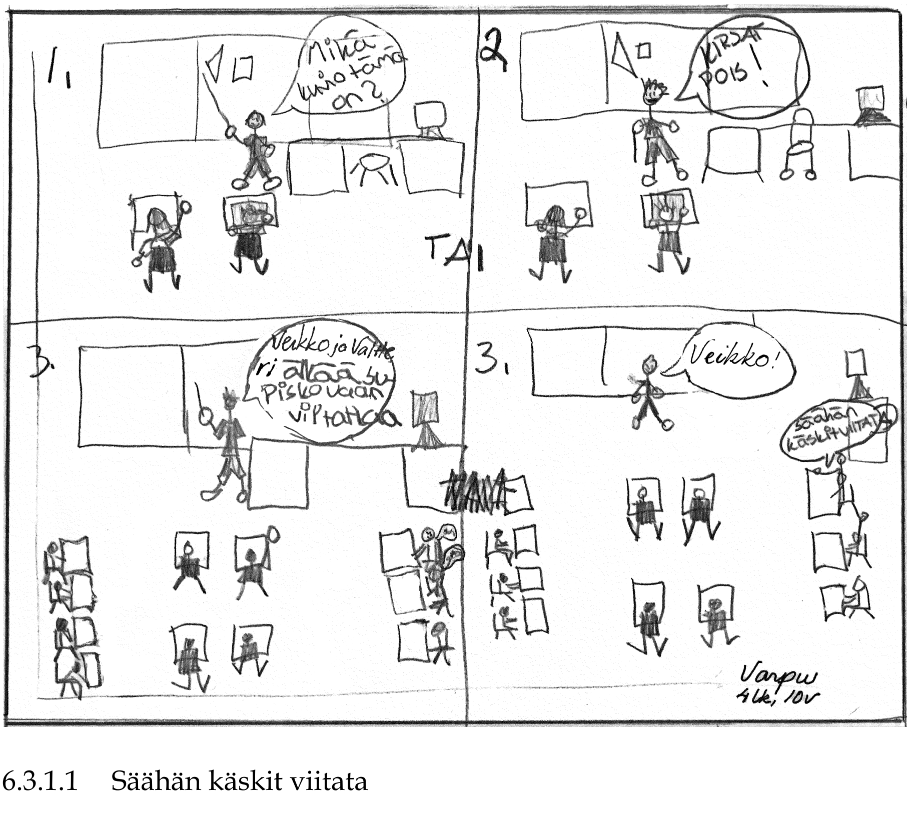
Opettajajohtoista esittävää opetusta kuvattiin kolmen oppilaan oppituntipiirroksessa. Tällöin opettaja seisoo opetusryhmän edessä liitutaulun vieressä, jolta hän näyttää karttakepillä tai sormellaan esitettävää asiaa. Oppilaat seuraavat opettajan esitystä, kysyvät tai toteavat, etteivät ymmärrä. Joku oppilaista väsähtää kesken esityksen ja nukahtaa. Esittävän opetuksen aiheina ovat kokonaislukujen peruslaskutoimitukset lukualueella 1–40. Opittava asia havainnollistuu taulutyön avulla, toimintavälineet tai oppikirjat eivät ole käytössä oppilaiden piirrosten mukaan. Kaikki kolme esittävästä opetuksesta piirtänyttä lasta kertoi kirjoitelmissaan, että matematiikan tunnilla on kivaa, mukavaa tai ainakin aika hauskaa ja helppoa.

> *Valo: Matematiikan tunnilla minulla on aika hauskaa ja helppoa.*

"Mikä kuvio tämä on?"

Opettajajohtoista kyselevää opetusta matematiikan oppitunnilla suomalaisen opetusryhmän neljäsluokkalaiset kuvasivat piirroksissaan yhtä paljon kuin yksilöllistä työskentelyäkin. Tällöin opettaja seisoo liitutaulun ääressä opetusryhmän edessä ja näyttää karttakepillä opittavaa asiaa taululta tai kirjoittaa uutta tehtävää taululle. Kyselyn aiheina ovat peruslaskutoimitusten tulokset tai geometristen kuvioiden nimeäminen. Oppilaat viittaavat saadakseen vastata opettajan kysymykseen. Vastaamisen lisäksi oppilaat kysyvät opettajalta, mitä oppitunnilla on tarkoitus tehdä. Joku oppilas protestoi kyselyn aikana, miksi ei häneltä kysytä ikinä. Kyselevän opetuksen aikana jollakin oppilaalla on tarve päästä vessaan, minkä hän ilmoittaa luokalle. Joku toinen oppilas muistelee kaverin kanssa edellispäivän tapahtumia. Opittavat asiat, peruslaskutoimitukset ja geometriset kuviot, havainnollistuvat kirjoituksina tai piirroksina liitutaululla. Toimintavälineitä kuten ei luokan tietokonettakaan tai piirtoheitintäkään käytetä kyselevän opetuksen aikana oppilaiden piirroksissa.

On luvatonta pitää oppikirjoja esillä kyselyn aikana, vaan niiden paikka on pulpetissa. Tästä esimerkkinä on Varpun seuraava sarjakuva 6.3.1.1 kyselevästä opetuksesta:

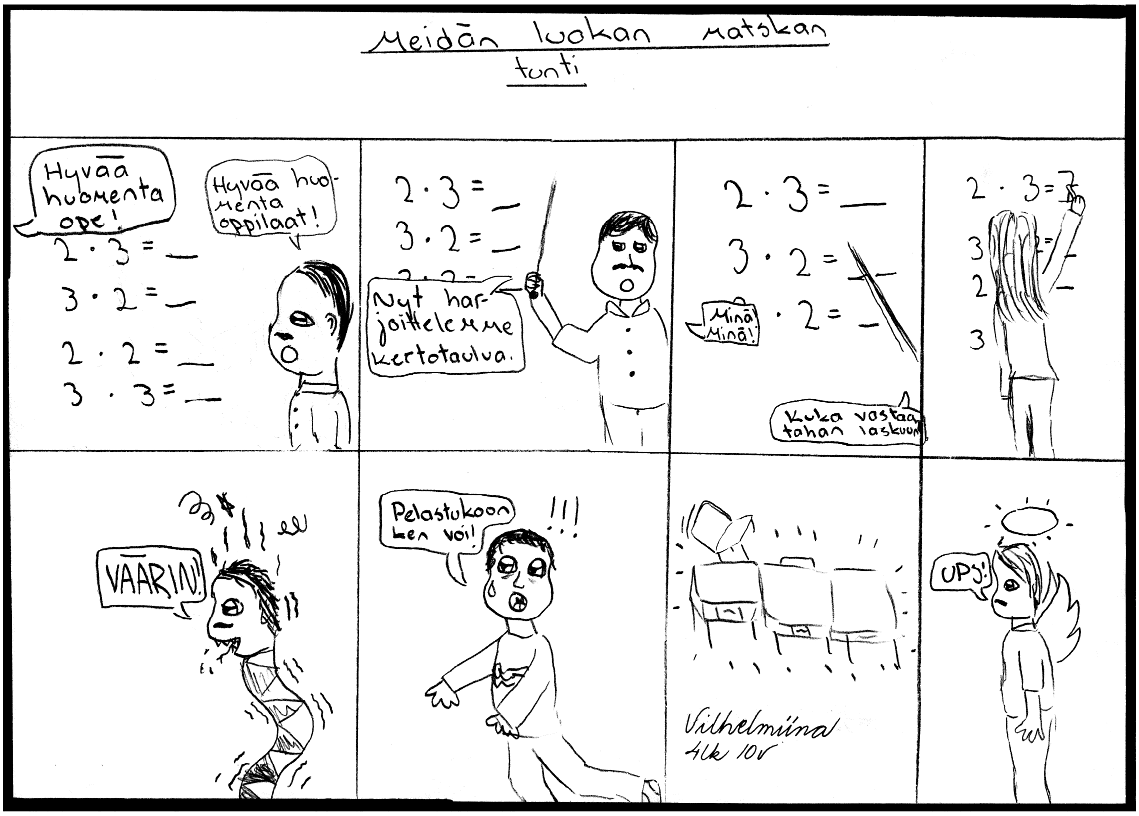


PIIRROS 6.3.1.1 Säähän käskit viitata

Sarjakuvassa opettaja osoittaa kuviota taululta ja kysyy sen nimeä. Hän havaitsee jollakin oppilaalla oppikirjan ja käskee laittaa sen pois. Veikko ja Valtteri supisevat. Tästä heitä ojennetaan viittaamaan ennen puheenvuoroa. Veikko tottelee opettajaa ja viittaa. Saatuaan puheenvuoron hän vitsailee:

”Säähän käskit viitata.” Sarjakuvan piirtänyt Varpu kertoo piirroksensa kääntöpuolella: ”Tein tollaset kuvat koska meidän luokassa on tollaista.”

Kyselevästä opetuksesta piirtäneet oppilaat ovat tyytyväisiä matematiikan oppitunteihin kirjoitelmien mukaan. Ne ovat heidän mielestään yleensä kivoja ja hauskoja. Välillä on tylsää, kun kysellään asioita, vaikka osaa jo tehtävät. Joskus matematiikan oppitunnilla on tyhmää, kuten lapset asian ilmaisevat, mutta vain harvoin. Kyselevä opetus herättää tämän ryhmän oppilaissa voimakkaita tunteita, niin kuin suomalaisissa ja unkarilaisissa Varga–Neményi -opetusryhmien oppilaissakin. Jotkut suomalaiset kymmenvuotiaat oppilaat huudahtelevat oppituntipiirroksissaan ääneen, että on kivaa ja helppoa. Joku puolestaan buuaa opetustilanteessa. Väärinvastaaminen kyselyn aikana on kokemus, joka on kuvaamisen arvoinen ja merkittävä. Tästä on esimerkkinä seuraava Vilhelmiinan sarjakuvapiirros 6.3.1.2.



PIIRROS 6.3.1.2 Kuka vastaa tähän laskuun?

Sarjakuvan alussa opettajaa tervehditään toivottamalla hyvää huomenta. Hän vastaa tervehdykseen koko oppilasryhmälle yhteisesti. Opettaja on valmistautunut matematiikan tuntiin ja kirjoittanut etukäteen taululle ryhmän kertolaskulausekkeita kahden ja kolmen kertotaulusta. Opettaja osoittaa karttakepillä taululta kertolaskuja kahden ja kolmen kertotaulusta ja tavoitteellistaa oppitunnin kertotaulun harjoitteluksi. Hän kysyy luokalta: ”Kuka vastaa tähän laskuun?” Joku oppilaista huutaa innostuneesti saadakseen vastata: ”Minä! Minä!” Tyttö pääsee taululle kirjoittamaan vastauksen ensimmäiseen kertolaskuun 2 x 3, joka on hänen mielestään seitsemän. Opettaja arvioi vastauksen huutamalla vääräksi. Kokemuksen väärin vastaamisesta Vilhelmiina kuvaa kyykäärmeeksi, jolla on opettajan pää myrkkyhampaineen ja kielineen. Käärmeopettaja on voimakkaan fyysisen tunteen vallassa: hän tärisee, kipinöi ja sylkee. Joku luokan pojista kokee tilanteen uhkaavana ja huutaa: ”Pelastukoon ken voi!” Poika kyynelehtii tai hikoilee. Hän on pinkaissut juoksuun pelastuakseen, jos vain mahdollista. Oppilasryhmä on paennut luokasta kiireesti, yksi tuoleista on kaatumaisillaan. Pulpetit jäävät sädehtimään tyhjyyttään. Käärmeopettaja muuttuu murheelliseksi enkeliksi, jolla on sädekehä päänsä yläpuolella. Katuen käytöstään enkeliopettaja pyytää anteeksi suomalaiseen tapaan: ”UPS!”

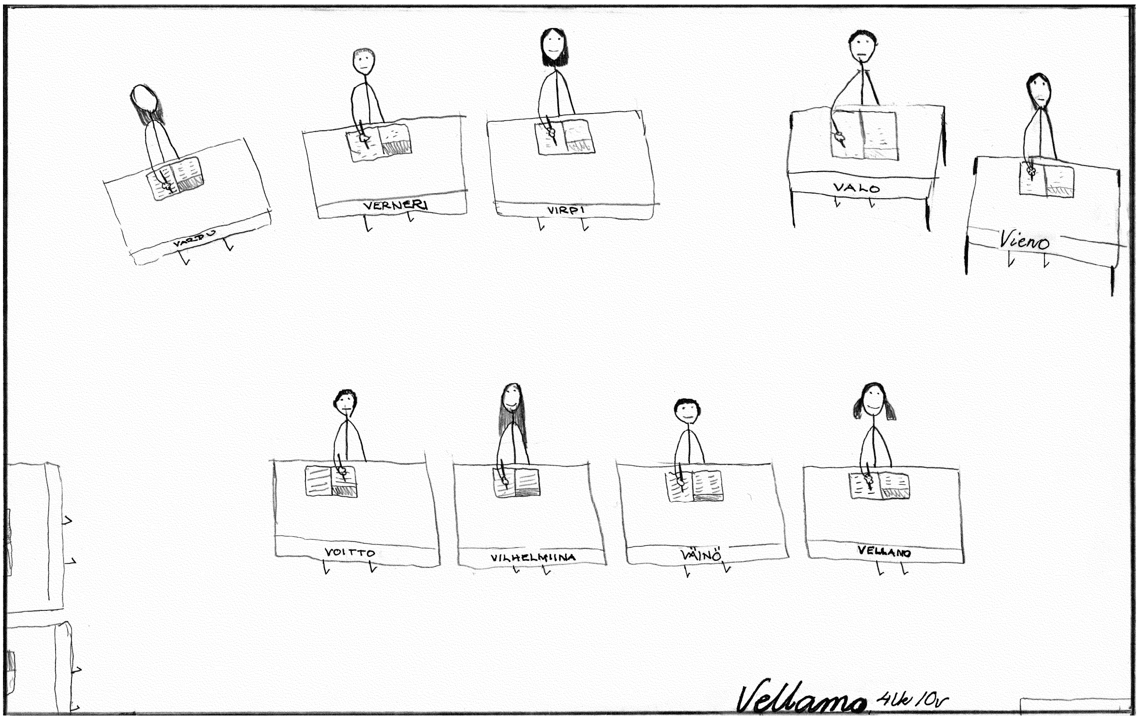
”Pelle”

Oppilaskeskeistä yhteistoiminnallista ryhmätyöskentelyä kuvattiin kerran tämän suomalaisryhmän piirroksissa. Tällöin oppilaat työskentelevät kirjallisten tehtävien parissa neljän hengen ryhmissä. Piirroksesta on mahdotonta päätellä ryhmätyön matematiikkaan liittyvää aihetta. Toimintavälineitä ei ole havaittavissa piirroksesta, jossa oleva piirtoheitinkin on sammuksissa. Toisessa oppilasryhmässä on käynnissä oppilaiden keskinäinen pelleily, koska oppilas toruu toista nimeltä, toinen puolestaan nimittää toista pelleksi. Toisessa ryhmässä on vaikeuksia, opettajaa pyydetään auttamaan. Opettajaa ei ole kuvattu tässä piirroksessa. Ryhmätyön piirtäjä Veli ei kommentoi matematiikan oppitunteja kirjoitelmassaan, mutta piirroksen kahdeksasta oppilaasta kuusi on iloisia ja hymyssä suin.

”Laskekaa vihkoon”

Oppilaskeskeistä yksilöllistä työskentelyä matematiikan oppitunnilla suomalaisen opetusryhmän neljäsluokkalaiset kuvasivat piirroksissaan yhtä paljon kuin opettajajohtoista kyselevää opetustakin. Yksilöllinen työskentely käynnistyy opettajan ohjauksella laskea tehtävä vihkoon tai oppikirjan tietty aukeama. Oppilaalle on tärkeää tietää, kuinka paljon on tarkoitus laskea, joten hän varmentaa, tarkoitetaanko koko aukeamaa. Jotkut oppilaat kyselevät yksilöllisen työskentelyn ohjeet saatuaan vielä sivunumeroita ja lisäohjeita. Yksilöllinen työskentely herättää oppituntipiirrosten oppilaissa tunteita: toisista se on mieleistä, toisista vastenmielistä. Jos oppilaalla on yksilöllisen työskentelyn aikana vaikeuksia, hän pyytää opettajalta apua. Opettaja on valmis auttamaan.

Oppikirjat ja vihot ovat yksilöllisessä työskentelyssä käytetyt välineet, mutta toimintavälineet, tietokone tai piirtoheitin eivät ole käytössä. Oppilaat harjoittelevat yksilöllisesti kokonaislukujen tai desimaalilukujen peruslaskutoimituksia, yhteen-, kerto- ja jakolaskuja. Yksilöllisestä työskentelystä piirtäneiden oppilaiden mielipiteet matematiikan oppitunnista vaihtelevat tosi kivasta tylsään. On pitkästyttävää laskea helppoja laskuja. Yksilöllinen työskentely tarjoaa mahdollisuuden nopeuskilpailuun, kuka saa laskut ensimmäisenä valmiiksi. Seuraavassa piirroksessa 6.3.1.3 Vellamo kuvaa oppilaiden yksilöllistä työskentelyä oppikirjan parissa. Kirjan aukeaman vasemmassa yläkulmassa tummennettu värialue tarkoittanee matematiikan oppikirjan väripohjaa, jolla esitellään aukeaman aihe eli opetettava asia lyhyesti muutamilla käsitteillä, havaintomallein ja -esimerkein. Väripohjan jälkeen seuraavat ryhmitellyt harjoitustehtävät. Vellamon piirroksessa oppilaat tekevät tehtäviään iloisina tai vakavina. Muut ovat edenneet aukeaman toiselle sivulle, paitsi eturivin vasemmalla oleva poika aloittaa ensimmäisiä harjoituksia tummennetun värialueen jälkeen.



PIIRROS 6.3.1.3 Oppikirjan tehtäviä tekemässä

Kooste

Suomalaisten kymmenvuotiaiden neljännen luokan oppilaiden kirjoitelmat ja piirrokset osoittavat, että he havaitsevat matematiikan oppitunneilla erilaisia toimintoja, joilla tarkoitetaan tässä käsillä olevassa tutkimuksessa työtapoja. Opettajajohtoinen kyselevä opetus ja oppilaskeskeinen yksilöllinen työskentely oppikirjan ohjaamana ovat hallitsevia työtapoja tämän suomalaisryhmän lasten kuvauksissa. Kuvatut työtavat tarjoavat oppilaille merkittäviä kokemuksia peruslaskutoimituksista ja geometrisista kuvioista. Nämä työtavat herättävät oppilaissa myönteisiä tunnekokemuksia, jolloin on kivaa ja helppoa, mutta myös kielteisiä tunnekokemuksia, kuten väärinvastaaminen kyselevän opetuksen aikana. Myös opettajajohtoinen esittävä opetus ja yhteistoiminnallinen oppilaskeskeinen ryhmätyö ilmenivät lasten kokemuksissa, joten Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman 2004 mukaisesti työtavat ovat jokseenkin monipuolisia, koska viidestä työtavasta (esittävä ja kyselevä opetus, opetuskeskustelu, pari- ja ryhmätyö sekä yksilöllinen työskentely) puuttuu vain yksi, opetuskeskustelu.

6.3.2 Matematiikan sisällöt

Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004, 159–160) keskeiset matematiikan sisältöalueet ovat luvut ja laskutoimitukset, algebra, geometria sekä tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys, joihin sisältyy myös ongelmaratkaisutaitojen kehittäminen. Seuraavaksi tarkastellaan suomalaisen perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden kokemuksia matematiikan sisällöistä opetussuunnitelman mukaisessa järjestyksessä.

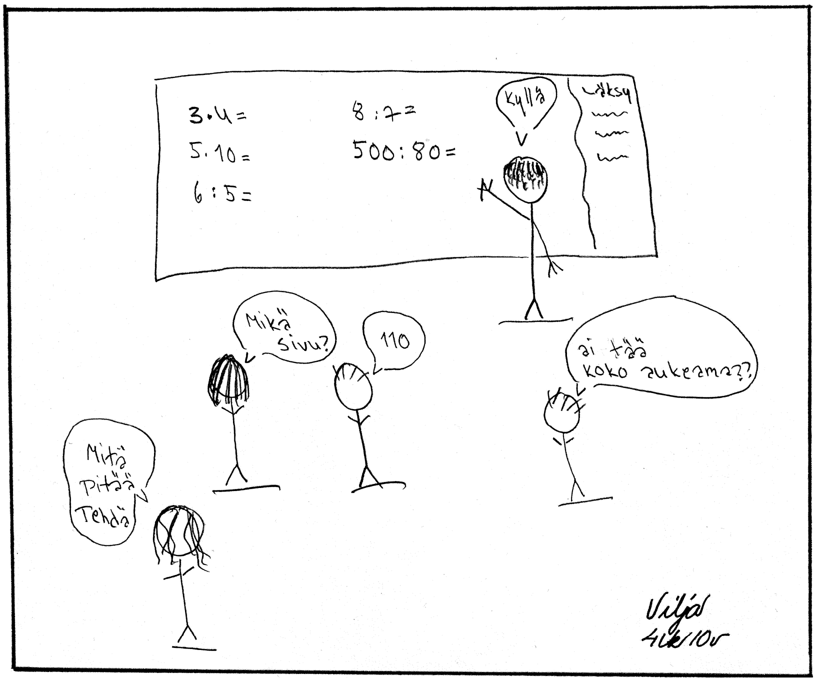
Luvut ja laskutoimitukset

Kertolasku matematiikan opetussuunnitelman *luvut ja laskutoimitukset* –sisältöalueelta on merkittävä kokemus suomalaisryhmän neljäsluokkalaisille. Heistä kertolaskujen laskeminen on kivaa ja hauskaa harjoittelua. Matematiikka oppiaineena tuntuu helpolta hallinnassa olevien kertotaulujen ansiosta, vaikka se ajoittain tuntuisikin muuten vaikealta:

> *Väinö: Tunnilla on hauskaa laskea kertolaskuja.*
>
> *Varpu: Ainakin kertolaskut on kivoja.*
>
> *Virve: Tykkään harjoitella kertolaskuja. Välillä matikka (matematiikka) on helppoa niin kuin kertotaulut välillä on vaikeaa.*
>
> *Valtteri: Eniten pidän tehtävistä joissa pitää kuvio tiettyihin osiin.*

Mieleisten kertolaskujen lisäksi usein piirroksissa kuvattuja peruslaskutoimituksia ovat numeromerkein kirjoitetut yhteen-, vähennys- ja jakolaskulausekkeet. Niiden laskemistavat tulevat tutuiksi opettajan esityksen ja kyselyn ohjaamana. Yksilöllisessä työskentelyssä harjoitellaan itsenäistä laskutaitoa.

Murtolukukäsitteen pohjustaminen on mieleistä, se tarjoaa kymmenvuotiaalle mahdollisuuden kuvalliseen ilmaisuun, kuten Valtteri yllä esittää. Seuraava Viljan piirros 6.3.2.1 kuvaa oppilaiden mielikuvia peruslaskutoimituksista:



PIIRROS 6.3.2.1 Mikä sivu?

Geometria

Kaksiulotteiset yksinkertaiset kuviot, kuten kolmio ja neliö, ovat painuneet merkittävinä neljäsluokkalaisten mieleen, onhan niihin ominaisuuksineen tutustuttu havainnoiden ensimmäisestä luokasta alkaen. Kolmion kulmien merkitseminen kaarella on neljäsluokkalaista puhutteleva kokemus, mikä on helposti merkittävissä piirrokseen. On tärkeää tuntea geometristen kuvioiden nimitykset, joten opettaja harjoituttaa muistamaan niitä kyselyn avulla, kuten piirroksessa 6.3.1.1 "Säähän käskit viitata", joka on edellisessä luvussa kyselevän opetuksen yhteydessä.

Algebra, tietojen käsittely ja todennäköisyys

Matematiikan opetussuunnitelman kaksi sisältöaluetta, niin algebra kuin tietojen käsittely ja todennäköisyys harjoituksineen, ovat vielä niin etäisiä näiden suomalaisten neljäsluokkalaisten kokemuksissa, etteivät ilmenneet vapaamuotoisissa kirjoitelmissa ja oppituntipiirroksissa.

Kooste

Suomalaisen opetusryhmän neljännen luokan oppilaiden kirjoitelmissa *Minä matematiikan oppijana* tai *Meidän luokka matematiikan oppitunnilla* piirroksissa esiintyvät Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman 2004 matematiikan sisältöalueista luvut ja laskutoimitukset ja geometria. Algebra, tietojen käsittely, tilastot, todennäköisyys ja ongelmanratkaisu odottavat vielä näiden oppilaiden kokemuksissa mielikuvia herättäviä merkityksiä.

6.3.3 ”Tylsää vai kivaa matikkaa?”

Se, miltä matematiikka tuntuu, on oppilaista niin merkittävää, että siitä pitää väitellä. Vesa kuvaa alla olevassa piirroksessa 6.3.3.1 oppilaiden väittelyä tunnekokemuksista. Vieno, Vesa ja Vappu ovat tällä kertaa sitä mieltä, että matematiikka on tylsää. Heidän ilmeensä tehostaa kielteistä tunnekokemusta. Voiton mielestä kaverit ovat väärässä. Oppilasryhmittelykin ilmentää tunnekokemuksia: vasemmalla matematiikan kielteisesti kokevat, oikealla matematiikan myönteisesti kokeva poika.

PIIRROS 6.3.3.1 Väittely, onko matematiikka tylsää vai ei

Kuten edellä olevassa Vesan piirroksessa ja kolmessa muussakin oppituntipiirroksessa kuvattiin tunnekokemuksia matematiikasta ambivalenttisina, hauskoina ja tylsinä, mutta kirjoitelmissaan *Minä matematiikan oppijana* tämän suomalaisopetusryhmän neljäsluokkalaiset luettelivat aimo liudan myönteisiä adjektiiveja matematiikkaan liittyvistä kokemuksistaan: tosi kivaa, kivaa, ihan kivaa, mukavaa, hauskaa, aika hauskaa sekä minä pidän matematiikasta. Ambivalenttisia kokemuksia kuvattiin vaihteleviksi: välillä hauskaa, välillä tylsää, siltä väliltä, ja matematiikka on ihan siedettävää. Kielteisimpien kokemusten mukaan matematiikka on ikävää, tyhmää ja tylsää.

Pari syytä pitää matematiikasta

Oppimisen vuoksi tämän suomalaisryhmän neljäsluokkalainen pitää matematiikasta. Oppimisella neljäsluokkalainen tarkoittaa ymmärtämistä ja tajuamista. Matematiikka on mieleistä silloin, kun oppii lisää ja enemmän, tiedot ja taidot lisääntyvät aiempaan verrattuna. Oppimisen tavoite matematiikassa on laskeminen. Vaikka laskemisen oppiminen on mieleistä, aina ei kuitenkaan jaksaisi laskea, vaan ajatukset harhailevat:

> *Veli: Matikka tuntuu sillon hyvältä kun oppii enemmän. Matikka on hauskaa jos osaa.*

Voitto: Minusta matematiikka on tosi kivaa. Minä tykkään siitä tosi paljon, että opin laskemaan ja ymmärtämään tehtävät.

Edellä olevan Vesan piirroksenkin (6.3.3.1) mukaan Voitto pitää matematiikasta ja esittää rohkeasti eriävän mielipiteensä luokkakavereille, jotka eivät pidä matematiikasta.

Kirjallisia tehtäviä on tarjolla runsaasti sekä matematiikan oppikirjassa että vihkossa, minkä vuoksi neljäsluokkalainen tyttö pitää matematiikasta. Vastaavan ikäinen poika pitää kyllä matematiikasta, mutta vihkotyö on hänestä vastenmielistä:

Venla: Matematiikka on minusta sen takia kivaa koska se on helppoa ja tykkään tehdä kirjan tehtäviä ja vihkoon.

Veikko: Matikka on hauskaa mutta en oikein tykkää vihkotyöstä.

Miksi matematiikka on vastenmielistä?

Viola: Matska (matematiikka) tuntuu tyhmältä, koska se ei ole kivaa.

Valtteri: Matikka on välillä tylsää mutta yleensä aika hauskaa.

Kuten Viola ja Valtteri, lapset kertoivat oppiaineeseen liittyvistä tylsistyttävistä kokemuksista kuvaamatta niitä tarkemmin kuin että silloin ei ole kivaa.

Kooste

Suomalaisen neljännen luokan opetusryhmän oppilaat kokevat matematiikan myönteisesti, ambivalenttisesti tai kielteisesti. Tyypillisimpiä ovat myönteiset ja ambivalenttiset tunnekokemukset matematiikasta. Matematiikassa on myönteinen kokemus oppia eli ymmärtää ja tajuta. Tavoitteena on tietää ja taitaa aiempaa enemmän sekä laskeminen. Toinen syy pitää matematiikasta oppimisen lisäksi on se, että matematiikassa on tarjolla runsaasti kirjallisia tehtäviä.

6.3.4 ”Helppoa ja vaikeaa matikkaa, riippuu tehtävästä”

Kaikki suomalaisen opetusryhmän neljäsluokkalaiset, joiden matematiikan oppimista on ohjattu suomalaisittain, kertoivat kirjoitelmissaan *Minä matematiikan oppijana*, millaista matematiikka on helppoudeltaan tai vaikeudeltaan. Nämä oppimiskokemukset olivat luokiteltavissa seuraavasti: matematiikka on 1) helppoa tai aika helppoa, 2) sekä helppoa että vaikeaa vaihtelevasti ja 3) vaikeaa tai aika vaikeaa. Tämän ryhmän oppilaat totesivat lyhyesti parilla sanalla oppiaineen helpoksi tai vaikeaksi. Muutamat pohtivat oppimistaan paria sanaa laajemmin vapaamuotoisissa kirjoitelmissaan.

Matematiikka on helppoa tai aika helppoa

Kun kokee oppivansa matematiikkaa helposti ja nopeasti, niin oppiaine tuntuu helpolta tai ainakin helpohkolta. Tämän ryhmän käytetyin tapa kuvata oppimista on aikaan liittyvä ilmaus, nopeasti. Tuttujen asioiden oppiminen neljäsluokkalaisen kokemana on nopeampaa kuin uusien ja outojen:

> *Vesa: Matematiikka on helppoa minulle. Aika nopeasti opin matematiikkaa.*

> *Vappu: Aika helpolta se on tuntunut. Opin matematiikkaa aika nopeasti ja helposti jos ei tule mitään uutta asiaa.*

> *Viola: Matikka on aika helppoa. Opin matematiikkaa aika nopeasti.*

> *Veikko: Matematiikka on aika helppoa. Opin matematiikkaa kun minun äitini on opettaja. Hän opettaa minulle matematiikkaa pääasiassa olen oppinut koulussa.*

Enemmistö yhdeksästä matematiikkaa helppona pitävästä neljäsluokkalaisesta tässä ryhmässä on poikia, kolmen tytön mielestä matematiikka on aika helppoa (ks. taulukkoa 6.3.4.1). Kukaan matematiikan helpoksi kokevista lapsista ei kuvannut piirroksissaan vaikeus- tai helppouskokemuksia.

Matematiikka on helppoa ja vaikeaa vaihtelevasti

Kun matematiikkaa opitaan ihan hyvin, laskemalla, kokeilemalla tai jollakin epämääräisellä tavalla, mutta kuitenkin samaa tahtia kuin muutkin luokkakaverit, se tuntuu tehtävän ja taitojen mukaan vaihtelevasti helpolta tai vaikealta. Merkittäviä auttajia vaikeuksissa ovat äiti ja muu kotiväki opettajan lisäksi. Opettajalta pyydetään apua matematiikan oppitunnilla myös lasten piirroksissa. Hän auttaa mielellään tarvittaessa. Vaikka opettaja tekee parhaansa auttaessaan, silti oppilaalle saattaa jäädä tunne, ettei ymmärrä. Äiti on erityisen taitava auttamaan, jos hän sattuu olemaan opettaja. Pääasiassa matematiikkaa opitaan kyllä koulussa, mutta jossain määrin myös kotona. Matematiikan opetuksen eteneminen askarruttaa neljäsluokkalaista: välillä edetään liian nopeasti, välillä liian hitaasti. Nopeuteen liittyvät aikailmaukset liittyivät matematiikkaa helppona ja vaikeana aineena pitävien lasten oppimiskokemuksiin kuten ainetta helppona pitävienkin kokemuksiin, jolloin opitaan samaa tahtia kuin luokkakaveritkin:

> *Vellamo: Vaikeaa ja helppoa. Riippuu tehtävästä. Opin laskemalla.*

> *Virpi: Matematiikka on vaihtelevaa. Oppii nopeasti. Opettaja auttaa aina jos on vaikeuksia, silti en joskus ymmärrä.*

> *Virve: Välillä matikka on helppoa niin kuin kertotaulut välillä vaikeata. Välillä mennään liian nopeasti ja toisaalta välillä liian hitaasti edetään matikan asioissa.*

Vuokko: Matematiikka on joskus vaikeaa ja joskus helppoa riippuu laskuista ja taidoista. Opin matematiikkaa äidiltä ja opelta ja vain laskemalla ja kokeilemalla.

Valtteri: Matikka on välillä helppoa ja välillä vähän vaikeampaa. Matikkaa opin samaa tahtia kuin muutkin luokallamme.

Vaikea matematiikka

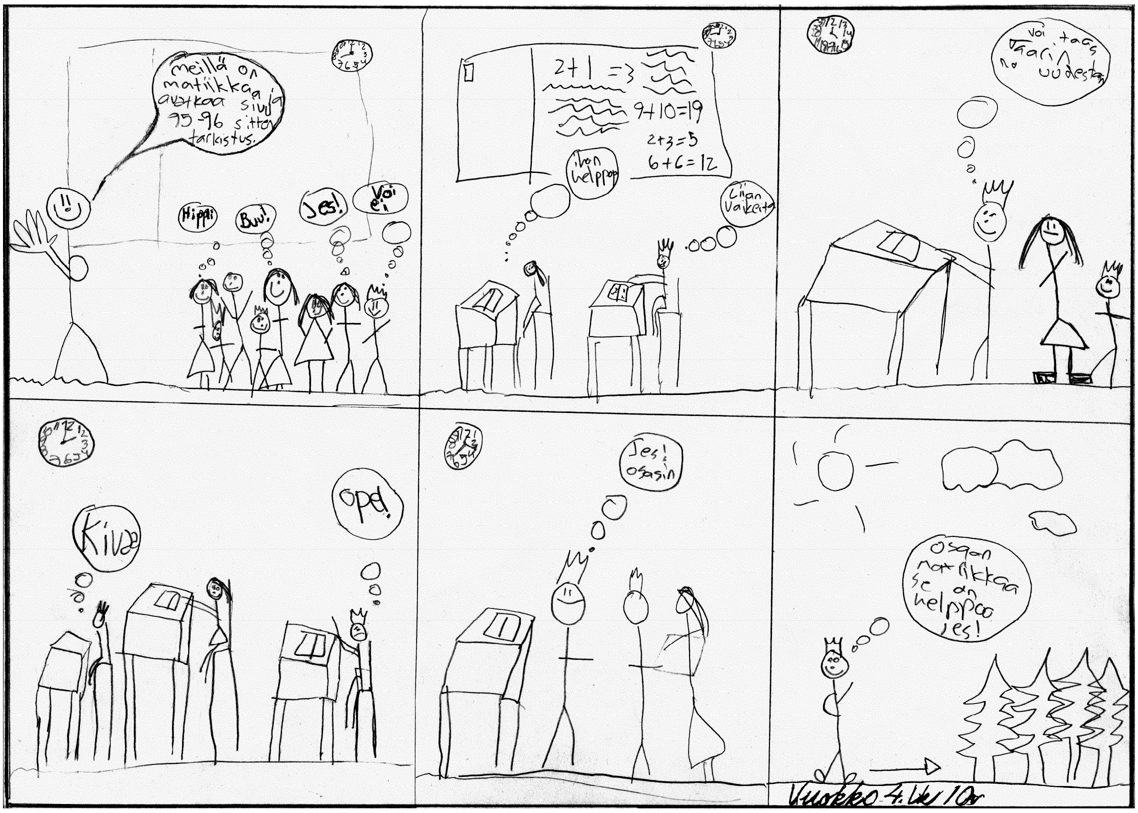
Kymmenvuotias toteaa, ettei tiedä syytä siihen, miksi matematiikka tuntuu vaikealta, mutta sitä opitaan kuitenkin laskemalla. Oppituntipiirroksessaan Väinö kuvaa tilannetta, jolloin opettaja näyttää oppilaille kaavan $E = mc^2$ ja kysyy, ymmärtävätkö he. Oppilaat eivät tajua. Väinön piirroksen jälkikirjoitus vakuuttaa matematiikan vaikeutta: ”Kukaan ei tajuu laskuja, vaikka ei meillä ihan tollasii oo.” Tuollaiset laskut viittaavat Albert Einsteinin suhteellisuusteorian yhtälöön energian ja aineen riippuvuudesta.

Väinö: Matikka tuntuu vaikealta en tiedä miksi.

Vanamo: Matikka on aika vaikeata. Opin matikkaa laskemalla.

Tämän suomalaisen oppilasryhmän neljäsluokkalaiset ovat vakuuttuneita, että matematiikkaa opitaan laskemalla. Heidän oppimiskäsitystään argumentoikoon seuraava piirros (6.3.4.1) Vuokolta, jonka kokema matematiikka on sekä helppoa että vaikeaa.

Sarjakuvassa *Matematiikkaa opitaan laskemalla* oppilaat ovat tulleet kouluun aamulla kello kahdeksan. Iloinen opettaja aloittaa koulupäivän ohjaten oppilaat matematiikan oppikirjatyöskentelyyn: ”Meillä on matiikkaa ja avatkaa sivu 95-96 sitta (sitten) tarkistus”, mikä herättää oppilaissa tunnekuohun. Kaksi hymyilevää tyttöä pitää tehtävästä: ”Hippiii” ja ”Jes!”, mutta kolmas tyttö ei: ”Buu!”, vaikka hymyileekin. Yksi pojista, tarinan sankari, huokaisee: ”Voi ei.” Puhdas liitutaulu häämöttää taustalla.



PIIRROS 6.3.4.1 Matematiikkaa oppii laskemalla

Tuntia myöhemmin liitutaulu on voimissaan matematiikasta: positiivisten kokonaislukujen yhteenlaskulausekkeita lukualueella 1–19. Oppilaat laskevat pulpettijonoissa kirjallisia tehtäviä hiljaa itsekseen. Tyttö iloitsee onnistumisestaan: ″Ihan helppoja″, mutta hänen takanaan istuva poika on eri mieltä: ″Liian vaikeita.″ Keskipäivällä sankaripoika ahertaa edelleen matematiikan kimpussa. Hän arvioi tehtäväänsä huokaisten: ″Voi taas väärin.″ Sankari on sinnikäs eikä luovuta: ″No uudestaan.″ Luokkakaverit odottavat. Iltapäivällä kello 14 yhä lasketaan. Pulpettijonon ensimmäinen poika nauttii matematiikan tehtävästä: ″Kivaa.″ Tyttökin iloitsee. Useita tunteja ahertanut sankari pulpettijonon viimeisenä toivoo mieli maassa ja allapäin apua: ″Ope!″ Tunnin päästä sankarin sinnikäs aherrus saa palkkansa – onnistumisen ilon: ″Jes! osasin.″ Koulupäivän päätyttyä kotimatkalla poika hymyilee leveästi: ″Osaan matiikkaa se on helppoo jes!″ Helottava aurinko ja pilvenhattarat jakavat sankarin ilon.

Kooste

Suomalaisen opetusryhmän neljäsluokkalaiset kokevat matematiikan oppiaineena helpoksi, aika helpoksi, sekä helpoksi että vaikeaksi, aika vaikeaksi tai vaikeaksi. Matematiikan oppimistaan he luonnehtivat aika nopeaksi tapahtumaksi, jossa laskeminen on merkittävää. Ymmärtämisvaikeuksissa auttavat mielellään opettaja ja äiti. Oppikirja ja liitutaulu ovat tärkeitä oppimisvälineitä. Seuraavassa taulukossa (6.3.4.1) on kooste tämän ryhmän kokemasta matematiikasta.

TAULUKKO 6.3.4.1 Matematiikan helppous ja vaikeus

Onko matematiikka helppoa vai vaikeaa?	Vanamo	Vappu	Varpu	Vellamo	Venla	Vieno	Vilhelmiina	Vilja	Viola	Virpi	Virve	Vuokko	Valo	Valtteri	Veijo	Veikko	Veli	Verneri	Vesa	Voitto	Väinö
Helppoa tai aika helppoa (H/aH)		**aH**					**aH**		**aH**				**aH**		**H**	**aH**		**H**	**H**	**H**	
Helppoa ja vaikeaa (HV)			**HV**	**HV**	**HV**	**HV**		**HV**		**HV**	**HV**	**HV**		**HV**			**HV**				
Vaikeaa tai aika vaikeaa (V/aV)	**aV**																				**V**

6.3.5 ”Hyvä, että matematiikka on keksitty”

Kaikki 21 suomalaista neljäsluokkalaista pohtivat kirjoitelmissaan *Minä matematiikan oppijana*, miten tärkeää matematiikka on. He pitivät sitä tosi tärkeänä, tärkeänä tai aika tärkeänä. Yhden oppilaan mielestä se ei ole mitenkään tärkeätä, toinen puolestaan kertoi, ettei tiedä, miten tärkeää matematiikka on, joten valtaosa oppilaista arvosti matematiikkaa tarpeellisena ja merkittävänä oppiaineena. Se on tarpeellista heidän mukaansa 1) lapsen arkielämässä, 2) koulussa laskemisessa, 3) aikuisena ammatissa ja 4) melkein kaikessa. Seuraavaksi neljäsluokkalaiset kertovat omin sanoin, kuinka tärkeätä matematiikka on ja missä se on tarpeellista.

Matematiikka lapsen arjessa

Suomalaisilla kymmenvuotiailla neljännen luokan oppilailla on ilmeisen selvästi omakohtaisia kokemuksia käyttää matematiikkaa omassa arkielämässään koulun ulkopuolellakin, jopa päivittäin. Matematiikka on lasten mukaan erityisen tarpeellista kaupassa ostoksia kassalla maksettaessa. Matematiikka ei ole erityisen tärkeää, mutta kuitenkin tärkeää silloin, kun on laskettava urheilukilpailuiden tuloksia. Kotiaskareissa sitä käytetään eri aineiden ja materiaalien mittaamisessa, ruuanlaitossa, ompelussa ja rakentamisessa.

Oppilas kokee matematiikan tarpeelliseksi, jotta voi laskea omat rahavaransa. Vaikka se liittyy lasten mielessä erityisesti päivittäisiin askareisiin ja vaikka nämä neljäsluokkalaiset eivät liitä matematiikan oppimiseensa keksimistä, niin matematiikka ei ole kuitenkaan syntynyt itsestään, vaan se on keksivän ihmisen luovan toiminnan tulosta. Tähän viittaa Virpi kirjoituksessaan:

Veikko: Matematiikka on tärkeää. Käytän matematiikkaa joka päivä esimerkiksi kun käyn kaupassa lasken riittääkö rahat ostoksiin.

Vappu: On se minulle aika tärkeätä arkielämässä. Kun käyn ostoksilla niin tarvitsen matematiikkaa.

Valtteri: Se ei ole minulle kovin tärkeää. Sen verran tärkeätä että tarvitsen sitä urheilutulosten laskemisessa.

Virpi: Se on minulle osittain tärkeää. Tarvitsen sitä kotona ruuan laittoon ja kankaan ja puun mittaamiseen. Minusta on hyvä, että matematiikka on keksitty.

Voitto: Minä tarvitsen matematiikkaa rahani laskemiseen.

Viola: Se ei ole minulle mitenkään tärkeää. Tarvitsen sitä kassalle.

Koulussa laskemisessa

Koulussa matematiikka on tärkeä tai ainakin melko tärkeä oppiaine, jotta oppisi laskemaan. Laskutaito on oppilaasta, kuten Vilhelmiinasta, niin olennaista, että matematiikan on kuuluttava oppiaineiden joukkoon. Tehtävien ymmärtäminen on niiden laskemisen lisäksi tekijä, joka tekee oppiaineesta merkittävän.

Kukaan tämän suomalaisryhmän oppilaista ei kertonut kirjoitelmissaan, että matematiikkaa olisi käytetty muissa oppiaineissa. Näin on pääteltävissä, ettei matematiikka vielä integroidu ohjaamatta oppilaiden mielessä toisiin oppiaineisiin. Kuitenkin oppilaan tunnekokemuksetkin ovat olennaisia, jotta oppiaine tuntuisi tärkeältä, kuten Väinö esittää:

Vilhelmiina: Matematiikka on tärkeä oppiaine. Jos saisi valita haluaako ottaa matematiikan pois oppiaineista niin en ottaisi! Enhän oppisi muuten laskemaan.

Voitto: Minulle matematiikassa tärkeää on se, että opin laskemaan ja ymmärtämään tehtävät.

Veli: Matematiikka tuntuu tärkeältä kun oppii enemmän laskemaan.

Vanamo: Jaa että miten tärkeää, aika tärkeätä. Matikkaa tarviin laskemiseen.

Väinö: Matikka on tosi tärkeä, kun se on kivaa.

Matematiikka aikuisena ammatissa

Oppilaat uskovat, että matematiikka on melkoisen tarpeellista ja hyödyllistä sitten isona ja vanhempana, siis aikuisena. Vaikka oppilaat uskovat, että matematiikka on tärkeää eri ammateissa, he eivät kuitenkaan tarkentaneet, missä ammateissa matematiikka olisi mahdollisesti tarpeellista.

Valo: Matematiikka on minulle aika tärkeää. Uskon tarvitsevani sitä isona aika paljon.

Veikko: Minä tarvitsen sitä eri ammatteihinkin.

Virve: Matematiikka on tarpeellista monessa asiassa. Onhan matikasta hyötyä sitten vanhempana ja ainahan sitä tarvitsee melkein päivittäin.

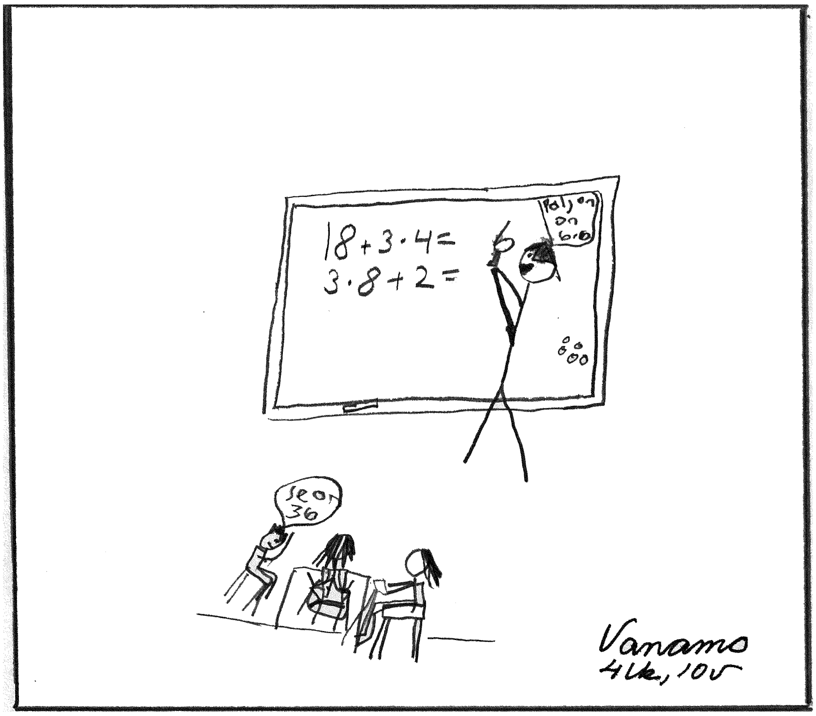
Melkein kaikessa tarvitaan matematiikkaa

Koululaisen oman arkielämän, koulussa tapahtuvan laskemisen ja tulevan ammatin lisäksi matematiikkaa tarvitaan näiden neljäsluokkalaisten mukaan melkein kaikessa, vähän kaikkeen, jossain ja joihinkin tärkeisiin juttuihin. Monien ikäistensä tavoin he ilmaisevat matematiikan käyttötarkoitukset yleisluontoisesti. Oppilas saattaa olla myös epätietoinen tai epävarma matematiikan tarpeellisuudesta, kuten Vilja:

Vellamo: Miten tärkeää matematiikka on minulle? No… On sitä hyvä oppia. Nimittäin sitä saattaa tarvita jossain! Ja joihinkin tärkeisiin juttuihin.

Vilja: En tiedä, onko matematiikka tärkeää. En tiedä mihin sitä tarvii. Kaipa johonkin.

Yhdessäkään tämän suomalaisen oppilasryhmän piirroksessa, kuten ei suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmänkään piirroksissakaan, ollut mainintaa matematiikan tärkeydestä. Nämä neljännen luokan oppilaat, joiden matematiikan oppimista on ohjattu suomalaisittain, kuvasivat kirjoitelmissaan ja erityisesti piirroksissaan runsaasti laskemista, josta esimerkkinä on seuraava Vanamon piirros 6.3.5.1. Vanamosta matematiikka hänen kirjoitelmansa mukaan on aika tärkeä oppiaine, jota tarvitaan, jotta oppii laskemaan. Hän kuvaakin matematiikan oppituntia, jolla harjoitellaan numeerisia laskulausekkeita, joissa yhdistyy sekä yhteen- että kertolaskuja. Opettaja on kirjoittamassa piirroksessa uutta laskutehtävää liitutaululle ja kysyy, kuinka paljon on kuusi kertaa kuusi. Oppilasryhmä pohtii. Poika ryhmästä viittaa ja vastaa oikein, että se on 36.



PIIRROS 6.3.5.1 Paljon on 6 kertaa 6?

Kooste

Valtaosa suomalaisen neljännen luokan oppilaista pitää matematiikkaa tosi tärkeänä, tärkeänä tai melko tärkeänä, siis merkittävänä oppiaineena. Se on tarpeellista lapsen omassa arkielämässä, mikä ilmenee selvästi omakohtaisina käyttökokemuksina. Matematiikka on myös tarpeellista koulussa, jotta oppii laskemaan, aikuisena ammatissa ja melkein kaikkialla.

6.3.6 "Olen matematiikassa ihan hyvä"

Kirjoitelmissa *Minä matematiikan oppijana* kaikki suomalaiset neljännen luokan oppilaat arvioivat itseään matematiikan oppijoina. Oppilaiden itsearvioinnit luokiteltiin aineistolähtöisesti neljään ryhmään 1) olen hyvä tai ihan hyvä, 2) kohtuullisen hyvä, aika hyvä, 3) tavallinen, jolloin oppilas ei koe olevansa hyvä eikä huono matematiikassa, tai 4) huono matematiikassa. Näillä itsearvioinneilla tarkoitetaan tässä käsillä olevassa tutkimuksessa oppilaiden aineittaista minäkäsitystä siitä, millaisia he kokevat olevansa matematiikassa. Hyvät ja ihan hyvät itsearvioinnit tulkitaan myönteiseksi minäkäsitykseksi, kohtuullisen ja aika hyvät itsearvioinnit varauksellisen myönteiseksi, tavallinen -arvioinnit neutraaliksi ja huono-itsearvioinnit kielteiseksi minäkäsitykseksi. Monet itsearvioinnit olivat lyhyitä kolmen neljän sanan toteamuksia, jotkut pitempiä. Seuraavassa tarkastelussa edetään myönteisestä minäkäsityksestä kielteiseen minäkäsitykseen. Neljäsluokkalaisten lyhyistä arvioinneista on kaksi esimerkkiä myönteisen ja varauksellisen myönteisen minäkäsityksen yhteydessä, kaikki pitemmät itsearvioinnit ovat näytteenä. Oppilaiden minäkäsitysten kooste on taulukossa 6.3.6.1 tämän alaluvun lopussa.

”Olen hyvä matikassa” - myönteinen minäkäsitys

Yhdeksällä neljäsluokkalaisella on myönteinen käsitys itsestään matematiikan oppijana tässä suomalaisessa ryhmässä. Merkittäviä myönteisen minäkäsityksen muodostajia matematiikassa ovat omakohtainen kokemus ymmärtämisestä ja asioiden oppimisesta, vaikka aina ei onnistukaan keskittymään opittaviin asioihin parhaalla mahdollisella tavalla:

Veli: Minä olen matematiikassa hyvä.

Vanamo: Minä olen matematiikassa ihan hyvä.

Voitto: Olen hyvä matematiikassa. Ymmärrän nopeasti tehtävät.

Virpi: Minä olen matematiikassa oppinut mielestäni kaikki tärkeimmät asiat. Olen matematiikassa ihan hyvä.

Varpu: Matematiikassa olen pärjännyt ihan hyvin kuitenkin joskus ajatukset riehuvat pois laskuista.

Varauksellisen myönteinen minäkäsitys

Varauksellisen myönteinen käsitys itsestään matematiikan oppijana on kahdeksalla neljäsluokkalaisella. Varauksellisuus ilmenee sanoista aika, melkoisen ja kohtuullinen. Oppilaan tavoitteena on laskea hyvin ja nopeasti. Tavoite jää saavuttamatta, jos ei osaa, ei opi tai tulee virheitä. Nämä ovat oppilaasta lannistavia kokemuksia, kuten Vuokosta. Hänestä on kuitenkin hyvä, että voi kokea vaikeuksiakin. Niiden avulla oppii sinnikkyyttä.

Vilja: Olen matematiikassa aika hyvä.

Valtteri: Minä olen matematiikassa melkoisen hyvä.

Vuokko: Olen kohtuullisen hyvä ja nopea laskija. Lannistun nopeasti jos en osaa jotain laskua tai en opi jotain laskua. Lannistun myös siitä jos joku lasku menee väärin. Toisaalta on hyvä että tulee vaikeitakin laskuja. Olen kohtuullisen hyvä kokeissa.

Veikko: Minä olen kohtuullinen matematiikassa osaan laskea vaikeitakin laskuja.

Vappu: Olen ihan kohtalaisen hyvä välillä on pikkuisen vaikeata.

Väinö: Olen kohtalaisen hyvä. Osaan kertolaskut hyvin. Luin ison veljen kirjoja kun olin päiväkodissa.

Vaikeiden tehtävien selvittäminen ja koemenestys ovat *mittareita*, joiden perusteella voi pitää itseään aika hyvänä matematiikan osaajana. Hyvän kertolaskujen osaamisen taustalla ovat vanhemman sisaruksen kirjat, joita pikkuveli on opiskellut päiväkodissa.

Neutraali minäkäsitys

Itsensä tavallisiksi matematiikan oppijoiksi arvioivia oppilaita on kaksi. Heidän käsityksistään välittyy kaksijakoisuus: luuseri – nero, perusoppimäärä – lisäoppimäärä. Vilhelmiina on valmis tekemään töitä matematiikan oppimisen vuoksi, koska ei koe olevansa erityisen lahjakas. Virve puolestaan kokee oppineensa perusasiat koulussa reilun kolmen vuoden aikana ja kehittyneensä tavalliseksi. Kun osaa perusasioiden lisäksi ylimääräisiäkin asioita, voisi lapsen mielestä olla hirveän hyvä.

> *Vilhelmiina: Olen tavallinen oppilas matematiikassa. En ole luuseri enkä nero.*
>
> *Virve: En ole matematiikassa hirveän hyvä mutta kyllä minä osaan perusasiat. Olenhan käynyt koulua jo kolme ja puoli vuotta. Olen itseni mielestä kehittynyt tavalliseksi.*

Kielteinen minäkäsitys

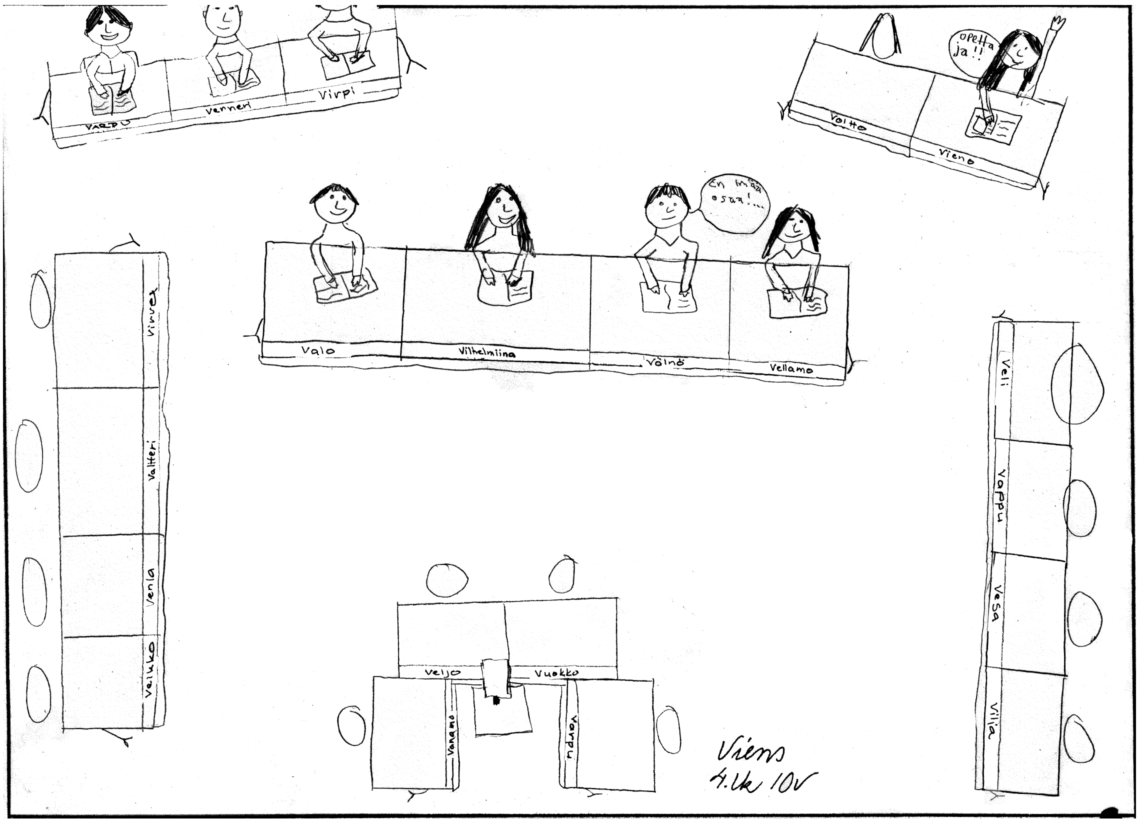
Kaksi tyttöä arvioi itsensä huonoiksi matematiikassa. Kirjoitelman mukaan matematiikka tuntuu Vienosta kivalta, tärkeältä sekä helpolta että vaikealta. Hänellä on matematiikan tunnillakin mukavaa. Hän kokee oppivansa nopeasti matematiikkaa, jota tarvitaan laskemiseen. Joten hänen kokemuksensa ovat minäkäsitystä lukuun ottamatta suhteellisen myönteisiä.

Violan kirjoitelman mukaan matematiikka tuntuu tyhmältä, koska se ei ole kivaa eikä tärkeää. Hän ei tiedä, millainen olo hänellä on tunnilla. Hän kokee oppivansa ihan hyvin, onhan matematiikka aika helppoa. Hän on käyttänyt matematiikkaa kaupassa kassalla. Violan kokemukset ovat negatiivisempia kuin Vienon. Syvempiä syitä näihin kielteisiin kokemuksiin ei ole tulkittavissa kirjoitelma-aineistoista.

> *Vieno: Omasta mielestäni olen huono matematiikassa.*
>
> *Viola: Olen huono matematiikassa.*

Viola kuvaa piirroksessaan matematiikan oppituntia lintuperspektiivistä, joten oppilaiden tunnekokemuksia ja vuorovaikutusta on mahdotonta päätellä. Opettaja seisoo taulun ääressä suu auki ja osoittaa karttakepillä liitutaulua. Nähtävästi hän kertoo opittavasta asiasta.

Vienon seuraavassa oppituntipiirroksessa (6.3.6.1) oppilaat tekevät yksilöllisesti kirjallisia tehtäviä. Muut oppilaat hymyilevät paitsi poika, joka toteaa, ettei osaa. Vieno itsekin on hymyssä suin, mutta viittaa käsi ojossa opettajalle. Nähtävästi hänellä on vaikeuksia tehtävässä. Joten Vienon kokemukset ovat tulkittavissa jokseenkin samansuuntaisiksi kirjoitelma- ja piirrosaineiston pohjalta lukuun ottamatta minäkäsitystä. Kielteinen minäkäsitys lienee yhteydessä oppimisvaikeuksiin, vaikka Vieno kokee oppivansa matematiikkaa nopeasti ja se on sekä helppoa että vaikeaa. Vienon kielteisiä kokemuksia on löydettävissä Vesan piirroksesta (ks. 6.3.3.1), jonka mukaan matematiikka on Vienosta tylsää, mitä tehostaa tytön tyytymätön ilme.



PIIRROS 6.3.6.1 En minä osaa!

Kooste

Suomalaisen neljännen luokan oppilaiden käsitys itsestään matematiikan oppijana on kielteinen, neutraali, varauksellisen myönteinen tai myönteinen. Tyttöjen minäkäsitys vaihtelee kielteisestä myönteiseen, poikien varauksellisen myönteisestä myönteiseen. Seuraavassa taulukossa on kooste tämän oppilasryhmän minäkäsityksistä.

TAULUKKO 6.3.6.1 Suomalaisen neljännen luokan minäkäsitykset

Minäkäsitykset matematiikassa	**Vanamo**	**Varpu**	**Vappu**	**Vellamo**	**Venla**	**Vieno**	**Vilhelmiina**	**Vilja**	**Viola**	**Virpi**	**Virve**	**Vuokko**	**Valo**	**Valtteri**	**Veijo**	**Veikko**	**Veli**	**Verneri**	**Vesa**	**Voitto**	**Väinö**
Myönteinen (M)	**M**	**M**								**M**			**M**		**M**		**M**	**M**	**M**	**M**	
Varauksellisen myönteinen (VM)			**VM**	**VM**	**VM**			**VM**				**VM**		**VM**		**VM**					**VM**
Neutraali (N)							**N**				**N**										
Kielteinen (K)						**K**			**K**												

6.3.7 Toteavan laskijan kokema matematiikan opetussuunnitelma

Suomalaisen opetusryhmän neljäsluokkalaisten matematiikkaan liittyviä uskomuksia, asenteita ja käsityksiä keskeisistä tutkimustuloksista kootaan tyypin *toteava laskija* ja hänen kokemansa matematiikan opetussuunnitelman avulla (kuvio 6.3.7.1). *Toteava laskija* ymmärretään tässä tutkimuksessa matematiikan opetussuunnitelman kokijatyypiksi, joka abstrahoi suomalaisen opetusryhmän oppilaiden yksilöllisiä uskomuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta, matematiikka-asenteita ja käsityksiä itsestä sen oppijana.

Toteava laskija-tyyppi löytyi monen oppilaiden matematiikkakokemuksia kuvaavien kirjoitelmien ja piirrosten lähiluennan ja analysoinnin tuloksena. Kokemustyypin löytymistä tuki mahdollisuus rinnastaa kolmen opetusryhmän, yhteensä 64 oppilaan, matematiikkakokemuksia. *Toteava laskija*-tyyppi muotoutui keskeisesti kahden tekijän avulla: toisaalta tämän opetusryhmän oppilaiden tavasta kertoa kokemuksistaan ja toisaalta kuvata pääsääntöisesti matematiikan sisältöjä peruslaskutoimitusten laskemisena. Tämän suomalaisryhmän neljäsluokkalaisten tyypillinen tapa kertoa matematiikkaan liittyvistä kokemuksistaan on todeta asia ja sen tila. Esimerkiksi oppilas kertoo, että matematiikka on kivaa, matematiikka on helppoa, pidän matematiikasta. *Toteavan laskijan* matematiikkakuvaan, kuvio 6.3.7.1, sisältyvät laskijan käsitys itsestä matematiikan oppijana, matematiikan sisällöt, opetus ja tunnekokemukset matematiikasta. Seuraavassa *toteava laskija*–tyypin esittelyssä edetään hänen minäkäsityksestään matematiikan sisältöihin ja asenteisiin. Sitten tarkastellaan matematiikan opetusta ja opettajaa *toteavan laskijan* silmin. Lopuksi pohditaan tämän ryhmän matematiikan opetuksen kehittämishaasteita. Tyypin esittelyssä käytetään lasten toteavaa kerrontatapaa tyylikeinona.

Toteava laskija on suomalainen perusopetuksen neljännen luokan oppilas. Hän on kymmenvuotias tyttö tai poika. Hänen matematiikan oppimistaan on ohjattu suomalaisittain. Hänen minäkäsityksensä matematiikan oppijana on kielteinen, neutraali, varauksellisen myönteinen tai myönteinen. Tyttölaskijan minäkäsitys vaihtelee kielteisestä myönteiseen, poikalaskijan varauksellisen myönteisestä myönteiseen. *Toteavan laskijan* minäkäsitys perustuu omakohtaisiin kokemuksiin matematiikan ymmärtämisestä, oppimisesta ja tehtävien vaikeudesta tai helppoudesta. Hänen minäkäsityksensä rakentuu myös koemenestyksen perusteella. Hän vertaa itseään matematiikan oppijana toisiin laskijoihin, kun kilpailee laskunopeudesta tai kun kokee oppivansa samaa tahtia kuin toisetkin luokkatoverit.

Toteava laskija kertoo matematiikkaan kuuluvan lukuja, peruslaskutoimituksia ja hieman geometriaa. Algebra, tietojen käsittely, tilastot, todennäköisyys ja ongelmanratkaisu puuttuvat *toteavan laskijan* kokemasta opetussuunnitelmasta. Kymmenvuotiaan laskijan kokemaan opetussuunnitelmaan kuuluu kokonais-, desimaali- ja murtolukuja. Kokonaisluvuilla lasketaan numeerisia yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja. Peruslaskutoimituksista mieleisiä ja helppoja ovat kertolaskut. Desimaaliluvut liittyvät *toteavan laskijan* opetussuunnitelmassa numeerisiin yhteen- ja vähennyslaskuihin. Murtolukukäsitteen pohjustus visuaalisina harjoituksina tarjoaa mieleistä toimintaa *toteavalle laskijalle*.

Toteavan laskijan matematiikka-asenne:

1) *Toteavasta laskijasta* matematiikka on usein hauskaa, kivaa ja mukavaa eli hän kokee matematiikan myönteisesti, ajoittain ambivalenttisesti, sekä mukavana että tylsänä, tai kielteisesti, jolloin matematiikka tuntuu tylsältä. Tyypillisin on myönteinen tai ambivalenttinen tunnekokemus matematiikasta. *Toteava laskija* pitää matematiikasta silloin, kun hän kokee oppivansa. Oppiminen on *toteavan laskijan* mukaan ymmärtämistä ja tajuamista. Oppimisen tavoitteena on laskeminen sekä tietää että taitaa aiempaa enemmän. *Toteava laskija* pitää matematiikasta myös silloin, kun on runsaasti kirjallisia tehtäviä.

2) *Toteavasta laskijasta* matematiikka on helppo, aika helppo, sekä helppo että vaikea, aika vaikea tai vaikea oppiaine. Matematiikan oppimisen *toteava laskija* kokee aika nopeaksi tapahtumaksi, joka on tajuamista ja ymmärtämistä. Jos on ymmärtämisvaikeuksia, niin opettaja koulussa ja äiti kotona auttavat mielellään. *Toteavan laskijan* mukaan matematiikkaa opitaan laskemalla, jolloin oppikirja ja liitutaulu ovat tärkeitä oppimisvälineitä.

3) *Toteava laskija* pitää matematiikkaa tosi tärkeänä, tärkeänä tai melko tärkeänä, siis merkittävänä oppiaineena. *Toteavalla laskijalla* on omakohtaisia käyttökokemuksia matematiikasta omassa arkielämässään koulun ulkopuolella mm. ostoksilla, urheilutulosten laskemisessa ja kotiaskareissa. Matematiikka on myös tarpeellista koulussa, jotta oppii laskemaan. *Toteavan laskijan* mielessä

matematiikka ei vielä integroidu ohjaamatta koulun muihin oppiaineisiin. Hän uskoo matematiikan olevan tarpeellista aikuisena eri ammateissa ja melkein kaikkialla. *Toteava laskija* saattaa vielä olla epävarma tai tietämätön siitä, mihin matematiikkaa tarvitaan, jolloin se ei ole tärkeätäkään.

Suomalaisen *toteavan laskijan* opetusryhmässä asenne matematiikkaan on yksiselitteisen myönteinen yhdeksällä, ambivalenttisen myönteinen yhdeksällä ja ambivalenttisen kielteinen kolmella laskijalla. Yksiselitteisyys on tulkittavissa, kun laskijasta matematiikka on esimerkiksi hauskaa, helppoa ja tärkeää. Asenne tulkitaan ambivalenttiseksi, kun matematiikka on laskijan mukaan esimerkiksi mukavaa, helppoa ja vaikeaa (ambivalenssi) ja tärkeää. Yksiselitteisen myönteinen asenne matematiikkaan on suomalaisryhmässä kolmella tytöllä ja kuudella pojalla, ambivalenttisen myönteinen asenne seitsemällä tytöllä ja kahdella pojalla, ambivalenttisen kielteinen kahdella tytöllä ja yhdellä pojalla.

Toteava laskija työskentelee matematiikan oppitunnilla useimmiten opettajan kysymysten tai yksilöllisesti oppikirjan ohjaamana. Niin opettajan kysymykset kuin oppikirjan tehtävät tarjoavat toteavalle laskijalle merkittäviä kokemuksia peruslaskutoimituksista ja geometrisista kuvioista. Erityisen merkittäviä kokemuksia ovat kertotaulut ja -laskut. Ne herättävät laskijassa myönteisiä tunnekokemuksia, jolloin on kivaa ja helppoa, mutta myös kielteisiä tunnekokemuksia, kuten väärinvastaaminen kertolaskuun kyselevän opetuksen aikana. Vuorovaikutuksella toteavan laskijan ja opettajan välillä kyselevän opetuksen aikana pyritään numeeriseen laskutoimituksen tulokseen tai geometristen kuvioiden nimeämiseen. Kyselevän opetuksen aikana *toteava laskija* toivoisi saavansa vastata useammin kuin on mahdollisuus.

Liitutaulu havainnollistaa laskijalle opittavia asioita matematiikasta kyselyn aikana, yksilöllisessä työskentelyssä vihkot ja oppikirjat ovat käytetyimmät oppimisvälineet. Laskijan yksilöllisen laskemisen määrällisenä tavoitteena on laskea oppikirjan koko aukeama. Tällöin on tilaisuus kilpailla, kuka saa laskut ensimmäisenä valmiiksi.

Kun opettaja kertoo ja näyttää opittavia asioita, *toteava laskija* seuraa esitystä ja kysyy, jos ei ymmärrä, mutta hän saattaa nukahtaa kesken esityksen. *Toteava laskija* toimii mielellään matematiikan oppitunnilla ryhmässä, mutta työskentely saattaa mennä pelleilyksi, jolloin on syytä torua kaveria ja tulla itsekin torutuksi sopimattomasta käytöksestä. Seuraavassa kuviossa 6.3.7.1 on *toteavan laskijan* kokema matematiikan opetussuunnitelma.

Opettaja *toteavan laskijan* kuvaamana ohjaa matematiikan oppimista sekä opettajajohtoisesti kysellen ja esittäen että yhteistoiminnallisilla oppilaskeskeisillä työtavoilla. Opettajan ja laskijan välinen vuorovaikutus tähtää peruslaskutoimitusten tuloksiin ja geometristen kuvioiden nimeämiseen kyselyn ja esityksen aikana. Opettaja on *toteavalle laskijalle* merkittävä. Opettajalle ilmaistaan rohkeasti oppimistilanteissa heränneitä sekä myönteisiä että kielteisiä tunteita. Opettajan ohjeet voivat olla *toteavan laskijan* vitsailun aiheita. Kun laskijalla on vaikeuksia matematiikan tehtävissä, opettajalta pyydetään apua. Hän auttaa mielellään. Hän on myös valmis pyytämään laskijalta anteeksi erehdystään.

Koettu matematiikan opetussuunnitelma

OPETUSUSKOMUKSET
* Opettajajohtoista kyselyä ja esitystä
* Oppilaskeskeistä yksilöllistä työskentelyä
* Yhteistoiminnallista ryhmätyötä

MATEMATIIKKA-ASENTEET
* Mukavaa, hauskaa ja tylsää tai tylsää
* Helppoa, helppoa ja vaikeaa tai vaikeaa
* Tosi tärkeää, tärkeää, melko tärkeää tai ei tärkeää

MATEMATIIKKAUSKOMUKSET
* Lukuja ja laskutoimituksia
* Geometriaa

MINÄKÄSITYS
* Myönteinen
* Varauksellisen myönteinen
* Neutraali tai
* Kielteinen

KUVIO 6.3.7.1 Matematiikka toteavan laskijan kokemana

Toteavan laskijan opettajan haasteita matematiikan opetuksen kehittämiseksi ovat seuraavat: Jotta toteavan laskijan matematiikkakuva monipuolistuisi ja rikastuisi, olisi algebran, geometrian ja mittaamisen, tietojen käsittelyn, tilastojen ja todennäköisyyden sekä ongelmanratkaisun sisältöalueita käsiteltävä mielikuvia synnyttävällä tavalla. Mielikuvia kymmenvuotiaalle saattavat herättää konkreettiset toimintavälineet rikkaammin kuin oppikirjan symboliset tehtävät. Samalla ne tarjoaisivat laskijalle mahdollisuuden kokea monipuolisia tehtäviä, joita hän tekee mielellään. Luokan tietokoneen ja piirtoheittimen käyttö myös monipuolistaisi laskijan matematiikkakuvaa oppimisvälineistä. Ohjaaminen ajattelun perustelemiseen syventäisi laskijan sekä matemaattista ilmaisua että muutakin ilmaisua.

Oppilaskeskeinen ja yhteistoiminnallinen opetuskeskustelu väittelyineen harjoittaisi perustelemista luontevasti paritöissä, joissa on mahdollista yksittäisen oppilaan puhua useammin kuin koko luokan tai pienryhmäkeskusteluissa. *Toteavalla laskijalla* on omakohtaisia käyttökokemuksia matematiikasta koulun ulkopuolella omassa arkielämässään. Niitä kokemuksia hyödyntäen voisi ohjata *toteavaa laskijaa* havaitsemaan ja soveltamaan matematiikkaa myös muissa koulun oppiaineissa, mikä edelleen rikastaisi laskijan matematiikkakuvaa sisällöistä. Koska vapaamuotoiset kirjoitelmat ja oppituntipiirrokset osoittavat laskijan suhteen matematiikkaan olevan affektiivinen, olisi jatkossakin annettava hänelle mahdollisuus ilmaista tunteitaan matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta eri tavoin. Näin laskija näyttää rohkeasti tekevänkin oppitunneilla piirrosten mukaan. Tällöin on tilaisuus havaita negatiivisia matematiikkakokemuksia, joiden myönteistämiseksi laskijalla itselläänkin saattaa olla varteenotettavia ehdotuksia. Samalla on tilaisuus vahvistaa myönteisiä kokemuksia ennalta ehkäisten kielteisiä kokemuksia.

6.4 Eroja ja yhtäläisyyksiä koetuissa matematiikan opetussuunnitelmissa

Aluksi verrataan suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden uskomuksia matematiikan opetuksesta, oppimisesta ja matematiikan sisällöistä. Seuraavaksi tarkastellaan oppilaiden matematiikka-asenteita ja käsityksiä itsestä matematiikan oppijana. Lopuksi verrataan suomalaisten ja unkarilaisten kerrontatapoja matematiikasta ja pohditaan niiden mahdollista yhteyttä matematiikan opetukseen. Eroja ja yhtäläisyyksiä havainnollistavat taulukkomuotoiset rinnastukset, joissa vertailtavat teemat ovat ylhäältä alas laskevassa kuvatuimmuusjärjestyksessä.

6.4.1 Uskomuksia matematiikan opetuksesta, oppimisesta ja sisällöistä

Suomalainen Varga–Neményi -opetusryhmän *perusteleva ongelmanratkaisija* kuvaa matematiikan oppitunteja yhteistoiminnalliseksi pari- ja ryhmätyöksi useammin kuin suomalaiset ja unkarilaiset ikätoverinsa, jotka kuvaavat useimmin opetusta opettajajohtoiseksi kyselyksi (taulukko 6.4.1.1). Oppilaskeskeinen yksilöllinen työskentely on kaikkien kolmen tyypin toiseksi eniten kuvaama työtapa. Unkarilainen Varga–Neményi -opetusryhmän *yhtälönratkaisija* kuvaa myös oppilaskeskeistä opetuskeskustelua, jota suomalaiset eivät kuvaa. Suomalaiset kuvaavat matematiikan oppituntia myös yhteistoiminnallisena pari- ja ryhmätyöskentelynä, jota unkarilainen *yhtälönratkaisija* ei kuvaa ollenkaan. Suomalaisoppilaiden kuvaamat työtavat matematiikan oppitunneilla ovat monipuolisempia kuin unkarilaisen *yhtälönratkaisijan* kuvaamat.

Kyselevän opetuksen aikana suomalainen *ongelmanratkaisija* tarkastaa matematiikan tehtäviään opettajan johtamana. Opettaja myös ohjaa *ongelmanratkaisijaa* kysellen tarkastelemaan liitutaululta erilaisia tapoja ratkaista tehtäviä ja tekemään niistä johtopäätöksiä. Opettajan kyselyn avulla kerrataan myös aiemmin opittuja asioita, mikä kyllästyttää *ongelmanratkaisijaa*, jos hän kokee osaavansa tehtävät hyvin. Muuten kyselevä opetus on *ongelmanratkaisijasta* ajattelemista aktivoivaa ja haasteellista toimintaa, joka innostaa häntä. Unkarilaisen *yhtälönratkaisijan* kuvaamana kyselevä opetus on *määrällistä orientoitumista maailmaan* -tehtävien ratkaisemista, jossa on tärkeää ratkaista yhtälöitä ja kombinatorisia tehtäviä lukujen tutkimisen lisäksi. Kyselevän opetuksen aikana *yhtälönratkaisija* kannustaa kaveriaan nokkelista vastauksista, jotka herättävät hänessä myös kateutta ja vähättelyä. Opettaja antaa *yhtälönratkaisijalle* vain myönteistä palautetta. Suomalaisen laskijan opettaja kysellessään ohjaa karttakepillä havainnoimaan liitutaululla olevia peruslaskutoimituksia tai geometrisia kuvioita. Laskija viittaa saadakseen vastata. Hän protestoi, jos kokee, ettei pääse vastaamaan. Kyselevän opetuksen aikana hän saattaa mennä toilettiin ja muistella edellispäivän tapahtumia. Matematiikan oppitunnilla laskijalla on yleensä kivaa ja hauskaa. Välillä hän tylsistyy, kun kysellään asioita, jotka hän kokee osaavansa.

TAULUKKO 6.4.1.1 Suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden kuvaamia työtapoja

Suomalainen ongelmanratkaisija	**Unkarilainen yhtälönratkaisija**	**Suomalainen laskija**
Yhteistoiminnallinen pari- ja ryhmätyö	Opettajajohtoinen kysely	Opettajajohtoinen kysely
Oppilaskeskeinen yksilöllinen työ	Oppilaskeskeinen yksilöllinen työ	Oppilaskeskeinen yksilöllinen työ
Opettajajohtoinen kysely	Oppilaskeskeinen opetuskeskustelu	Opettajajohtoinen esitys
Opettajajohtoinen esitys		Yhteistoiminnallinen ryhmätyö

Niin *ongelmanratkaisija-*, *yhtälönratkaisija-* kuin *laskijatyttökin* saattavat kokea opettajajohtoisen kyselevän opetuksen arveluttavana. *Ongelmanratkaisijatyttö* luulee toisten oppilaiden pilkkaavan häntä mahdollisesta väärästä vastauksesta. Myös kavereiden ääntely häiritsee häntä kyselyn aikana. *Yhtälönratkaisijatyttö* kokee tulleensa pilkatuksi vastattuaan väärin, joten hän ei mielellään vastaa matematiikan tunnilla. Väärin vastaaminen on myös *laskijatytöstä* niin merkittävä kokemus, että hän kuvaa sitä käärme-metaforan avulla. Tällöin opettaja saa hirviömäisiä piirteitä.

Yksilöllistä työskentelyä *ongelmanratkaisijan* kuvauksen mukaan ohjaavat kirjalliset tehtävät ja toimintavälineet logiikan, tietojen käsittelyn, tilastojen ja todennäköisyyden sekä peruslaskutoimitusten harjoitteluun. Yksilöllisenä työnä *ongelmanratkaisija* kirjoittaa myös matematiikkatarinoita. Oppikirjaa hän pitää merkittävänä oppimisvälineenä, mutta sitä parempia ovat toimintavälineet ja kuvat. Unkarilaisen *yhtälönratkaisijan* kuvaamana yksilöllistä työskentelyä ohjaavat kirjalliset tehtävät määrällisestä orientoitumisesta maailmaan, geometriasta ja mittaamisesta. Yksilöllinen työskentely on *yhtälönratkaisijasta* kiinnostavaa, viihdyttävää ja kivaa, mutta leikkiminen, pelaaminen ja omakohtaiset toimintavälineet demonstraatioissa ovat kirjallisia tehtäviä merkittävämpiä mielenkiinnon ylläpitäjiä. Suomalainen *laskija* esittää yksilöllisen työskentelyn käynnistyvän opettajan ohjaamana laskemalla vihkoon tai oppikirjan aukeamalla kokonaislukujen ja desimaalilukujen laskutoimituksista. Laskijasta yksilöllinen työskentely on kivaa tai tylsää. Pitkästyttäviä ovat liian helpot laskut, mutta mahdollisuus kilpailla, kuka laskee nopeimmin oppikirjan laskut, piristää.

Suomalaisesta *ongelmanratkaisijasta* on tärkeää, että ajoittain on esittävää opetusta, jolloin opettaja selittää, selventää ja näyttää konkreettisesti opittavia asioita, koska se aktivoi oppimaan ja ajattelemaan. *Laskija* kuvaa esitystä pitävän opettajan seisomassa liitutaulun vieressä ja näyttämässä siltä karttakepillä peruslaskutoimituksia. *Laskija* seuraa opettajan esitystä ja kysyy, jos ei ymmärrä. Joskus *laskija* saattaa nukahtaa opettajan esityksen aikana.

Pari- ja ryhmätyössä *ongelmanratkaisija* ratkaisee ongelmia, tekee pieniä tutkimustehtäviä ja pelaa peruslaskutoimituksia harjoittavia pelejä. *Laskijan* ryhmätyöskentely saattaa mennä pelleilyksi, josta *laskijat* toruvat toisiaan. Jos ryhmätyössä on vaikeuksia, opettajaa pyydetään apuun. Hän auttaakin mielellään. Niin *ongelmanratkaisijasta* kuin *laskijastakin* yhteistoiminnallinen oppilaskeskeinen työskentely on mieleistä.

Oppilaskeskeisessä opetuskeskustelussa unkarilainen *yhtälönratkaisija* esittelee kavereilleen liitutaulun tai piirtoheittimen avulla matematiikan tehtävän ratkaisua, josta syntyy kavereiden kesken väittelyä. *Yhtälönratkaisija* kyselee toisilta tehtävien ratkaisutapoja ja tuloksia, toiset vastaavat ja esittävät vastakysymyksiä. Opettaja antaa opetuskeskustelusta myönteistä palautetta.

Käsityksiä matematiikan oppimisesta

Niin suomalaisten kuin unkarilaisten oppilaiden kirjoitelmista oli pääteltävissä, mitä he tarkoittivat oppimisella matematiikassa, vaikka heitä ei pyydetty määrittelemään sitä, vaan ainoastaan kuvaamaan, miltä oppiminen tuntuu. Suomalaisesta *laskijasta* ja *ongelmanratkaisijasta* sekä unkarilaisesta *yhtälönratkaisijasta* matematiikan oppiminen on ymmärtämistä ja tajuamista (ks. taulukkoa 6.4.1.2).

TAULUKKO 6.4.1.2 Suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden käsityksiä oppimisesta

Suomalainen ongelmanratkaisija	**Unkarilainen yhtälönratkaisija**	**Suomalainen laskija**
Matematiikan oppiminen on ymmärtämistä, tajuamista, oivaltamista ja keksimistä.	Matematiikan oppiminen on ymmärtämistä, tajuamista, oivaltamista ja keksimistä.	Matematiikan oppiminen on ymmärtämistä ja tajuamista.

Oppiminen on *ongelman-* ja *yhtälönratkaisijan* mukaan ymmärtämisen ja tajuamisen lisäksi oivaltamista ja keksimistä. Keksimisen tarkoituksena on, että unkarilainen *yhtälönratkaisija* itse löytää säännön tehtävien ratkaisemiseksi. Sääntöjen keksimistä suomalaiset *ongelmanratkaisija* ja *laskija* eivät liitä matematiikan oppimiseen. Kun säännöt matematiikassa on keksitty, ovat ne unkarilaisen *yhtälönratkaisijan* mukaan niin tärkeitä, että niitä painetaan mieleen sekä koulussa että kotona, jotta muistaisi ne jatkossakin.

Käsityksiä matematiikan sisällöistä

Suomalainen *ongelmanratkaisija*, unkarilainen *yhtälönratkaisija* ja suomalainen *laskija* kuvaavat maidensa matematiikan opetussuunnitelmien sisältöjä oppilaan näkökulmasta, mutta heidän kuvauksissaan on painotuseroja, mikä on havaittavissa taulukosta 6.4.1.3. Taulukossa sisällöt esitetään kuvatuimmuusjärjestyksessä ylhäältä alas.

TAULUKKO 6.4.1.3 Käsityksiä matematiikan sisällöistä

Suomalainen ongelmanratkaisija	**Unkarilainen yhtälönratkaisija**	**Suomalainen laskija**
Ongelmanratkaisua	Määrällistä orientoitumista maailmaan	Lukuja ja laskutoimituksia
Lukuja ja laskutoimituksia	Oivaltamistaitoja	
Tietojen käsittelyä, tilastoja ja todennäköisyyttä	Säännönmukaisuuksia	
Geometriaa ja mittaamista	Geometriaa ja mittaamista	Geometriaa ja mittaamista
Logiikkaa	Todennäköisyyttä ja tilastoja	

Suomalainen *ongelmanratkaisija* kuvaa matematiikan sisältöjä jokseenkin monipuoliseksi, koska matematiikkaan sisältyy algebraa lukuun ottamatta lukuja laskutoimituksineen, geometriaa ja mittaamista, tietojen käsittelyä, tilastoja ja todennäköisyyttä, logiikkaa ja erityisesti ongelmanratkaisua. Unkarilainen *yhtälönratkaisija* näkee, että matematiikkaan kuuluu runsaasti määrällistä orientoitumista maailmaan ja oivaltamistaitojen kehittämistä, mutta ei niin paljon geometriaa, mittaamista, säännönmukaisuuksia, todennäköisyyttä eikä tilastoja. *Yhtälönratkaisija* uskoo, että järjestelmällinen ryhmittely auttaa oivaltamaan, kuinka monta erilaista lukua on mahdollista muodostaa sovitulla määrällä numeroita kombinatorisissa tehtävissä. Orientoituessaan määrällisesti maailmaan *yhtälönratkaisija* laskee peruslaskutoimituksia kokonais- ja murtoluvuilla, mutta niitä merkittävämpiä ovat yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaiseminen. Suomalainen laskija näkee, että matematiikkaan kuuluu paljon lukuja, peruslaskutoimituksia ja hieman geometriaa. Algebra, tietojen käsittely, tilastot, todennäköisyys ja ongelmanratkaisu puuttuvat *laskijan* kuvauksista.

6.4.2 Matematiikka-asenteita ja käsityksiä itsestä oppijana

Useimmilla 9-10-vuotialla niin *ongelman-* ja *yhtälönratkaisijoilla* kuin *laskijoillakin* on yksiselitteisen tai ambivalenttisen myönteinen asenne matematiikkaan (taulukko 6.4.2.1). Suomalainen *ongelmanratkaisija* pitää monesta syystä matematiikasta kokonaisuutena, koska se tarjoaa tilaisuuksia ajatella, miettiä ja pohtia ja koska se on vaihtelevaa ja monipuolista sisällöiltään. *Ongelmanratkaisija* pitää myös uusien asioiden ymmärtämisestä ja tajuamisesta. Hän kokee matematiikan kumuloituvan rakenteen myönteisesti, koska aiemmin opitut asiat ovat jatkossakin tarpeellisia. Matematiikan sisällöllinen monipuolisuus mahdollistaa myös monipuoliset ja vaihtelevat tehtävät, jotka ovat *ongelmanratkaisijasta* mieleisiä. Konkreettiset toimintavälineet edistävät symbolien ja abstraktioiden ymmärtämistä ja tuovat myös vaihtelua toimintaan, mikä vahvistaa *ongelmanratkaisijan* myönteistä asennetta matematiikkaan. Myönteiselle asenteelle on eduksi, jos sen opetukseen sisältyy tavoitteellista toimintaa konkreettisine lopputuloksineen oppimisen lisäksi. On suotuisaa, että opettajakin pitää matematiikasta ja sen opettamisesta.

Unkarilainen *yhtälönratkaisija* pitää matematiikasta, koska se viihdyttää kymmenvuotiasta *yhtälönratkaisijaa* tarjoamalla salaperäisen, lumoavan ja houkuttelevan seikkailun vainuta aavistuksia jostain yllätyksellisestä. Vaikeustasoltaan vaihtelevat matematiikan tehtävät ovat *yhtälönratkaisijasta* huvittavaa ajanvietettä. Hän ihailee taitavaa opettajaansa, jolla on tarjottavana pelejä ja leikkejä matematiikasta. Siinä on tarjolla myös asioita, jotka saavat *yhtälönratkaisijan* opiskelemaan tarkkaavaisesti ja kehittymään ihmisenä niin viisaaksi, ettei voi olla toimimatta keksijänä. Matematiikan avulla ei voi olla välttymättä tyhmyydeltä tai huijaukselta. *Yhtälönratkaisija* pitää matematiikasta, onhan se kiinnostavaa ja tarpeellista. Suomalainen *laskija* pitää matematiikasta silloin, kun hän kokee oppivansa. Oppimisen tavoitteena on laskeminen sekä tietäminen että taitaminen aiempaa enemmän. *Tyttölaskija* pitää matematiikasta myös silloin, kun on runsaasti kirjallisia tehtäviä, erityisesti vihkoon.

Oppiaineen helppouden tai vaikeuden suomalainen *ongelmanratkaisija* kertoo päätelleensä koemenestyksestään, harjoitustehtävistään ja oppimiskokemuksistaan. Unkarilaisesta *yhtälönratkaisijast*a matematiikasta tulee helppoa, jos pystyy keksimään ja ymmärtämään säännön ratkaista tehtäviä. Sääntöjen keksiminen on yksinkertaista opettajan ohjauksessa. Koulussa keksityt säännöt ovat tärkeitä, niitä kerrataan kotona, jotta ne jäisivät mieleen. Suomalaisesta *toteavasta laskijasta* matematiikka on helppoa, kun oppii nopeasti tajuamaan ja ymmärtämään. Jos on vaikeuksia ymmärtää, niin opettaja ja äiti auttavat. Matematiikkaa opitaan *toteavan laskijan* mukaan laskemalla.

TAULUKKO 6.4.2.1 Matematiikka-asenteita

Suomalaisesta ongelmanratkaisijasta matematiikka on	Unkarilaisesta yhtälönratkaisijasta matematiikka on	Suomalaisesta laskijasta matematiikka on
Mukavaa, hauskaa ja kivaa Helppoa tai sopivaa tai helppoa ja vaikeaa tai vaikeaa Tosi tärkeää tai tärkeää tai melko tärkeää	Viihdyttävää, kiinnostavaa ja kivaa tai joskus viihdyttävää, joskus ei tai ei viihdyttävää eikä tylsää Helppoa tai sopivaa tai helppoa ja vaikeaa tai vaikeaa Erittäin tärkeää tai tärkeää tai melko tärkeää	Mukavaa tai sekä hauskaa että tylsää tai tylsää Helppoa tai sopivaa tai helppoa ja vaikeaa tai vaikeaa Tosi tärkeää tai tärkeää tai melko tärkeää tai ei tärkeää
Yksiselitteisen tai ambivalenttisen myönteinen asenne 19 oppilaalla, yhdellä ambivalenttisen kielteinen asenne matematiikkaan.	Yksiselitteisen tai ambivalenttisen myönteinen asenne 21 oppilaalla, kahdella ambivalenttisen kielteinen asenne matematiikkaan.	Yksiselitteisen tai ambivalenttisen myönteinen asenne 18 oppilaalla, kolmella ambivalenttisen kielteinen asenne matematiikkaan.

Matematiikka on suomalaiselle *ongelmanratkaisijalle* tosi tärkeää, tärkeää tai ainakin melko tärkeää. Tosi tärkeää tai tärkeää se on silloin, kun hän on soveltanut sitä omassa elämässään. Se on vain melko tärkeää, kun mahdollisuuksia soveltaa on ollut vähän. Matematiikka on tärkeä oppiaine *ongelmanratkaisijan* koulussa, jossa sitä opiskellaan myös äidinkielen lisäksi ranskan ja englannin kielellä ja päinvastoin matematiikkaa opiskellaan vieraiden kielten tunneilla. Matematiikka integroituu myös äidinkielen, ympäristö- ja luonnontiedon sekä käsitöiden opiskeluun. *Ongelmanratkaisijalla* ja matematiikalla on yhteinen tulevaisuus, koska hän haaveilee ammatista, jossa matematiikalla on käyttöä. Hän uskoo, että matematiikka kuuluu aikuisena vapaa-aikaankin.

Matematiikka on unkarilaiselle *yhtälönratkaisijalle* erittäin tärkeä, tärkeä tai melko tärkeä oppiaine, jonka osaamista arvostetaan sekä koulussa että kotona. Vaikka *yhtälönratkaisija* ei ole vielä soveltanut matematiikkaa omassa arkielämässään eikä se vielä integroidu hänen mielessään muihin kouluaineisiin, hän pitää sitä tärkeänä tulevissa opinnoissa, ammatissa ja työelämässä. Hän ei voi olla unelmoimatta ammatista, jossa matematiikkaa on mahdollista käyttää. Se on tarpeellista myös kaikkialla maailmassa. Jos matematiikkaa ei olisi, niin elämä olisi vaikeaa ilman sitä. Suomalainen *laskijakin* pitää matematiikkaa tosi tärkeänä, tärkeänä tai melko tärkeänä, siis merkittävänä oppiaineena.

Laskijalla on omakohtaisia käyttökokemuksia matematiikasta omassa arkielämässään koulun ulkopuolella mm. ostoksilla, urheilutulosten laskemisessa ja kotiaskareissa. Matematiikka on myös tarpeellista koulussa, jotta oppii laskemaan. *Laskijan* mielessä matematiikka ei vielä integroidu ohjaamatta koulun muihin oppiaineisiin. Hän kuitenkin uskoo matematiikan olevan tarpeellista aikuisena eri ammateissa ja melkein kaikkialla. Joku *laskija* saattaa olla vielä epävarma tai tietämätön siitä, mihin matematiikkaa tarvitaan, jolloin se ei ole tärkeätäkään.

Oppilaiden käsityksiä itsestä matematiikan oppijana

Sekä *ongelmanratkaisijan*, *yhtälönratkaisijan* että *laskijan* minäkäsitys matematiikan oppijana on myönteinen, varauksellisen myönteinen tai neutraali, joiden lisäksi *tyttölaskijan* minäkäsitys matematiikassa saattaa olla kielteinenkin (ks. taulukkoa 6.4.2.2). *Ongelmanratkaisijan* minäkäsitys perustuu havaintoihin opiskelutehtävien onnistumisesta ja koemenestyksestä sekä opettajan antamaan palautteeseen. Hän ei vertaa itseään toisiin oppilaisiin, kun taas *laskija* vertaa laskunopeuttaan ja oppimistaan toisten laskijoiden vastaaviin. *Toteavan laskijan* minäkäsitys perustuu omakohtaisiin kokemuksiin matematiikan ymmärtämisestä, oppimisesta ja tehtävien vaikeudesta sekä koemenestyksestä. *Yhtälönratkaisijan* minäkäsitys perustuu oppimiskokemuksiin, oppilaiden keskinäiseen vertailuun, todistuksen numeroarviointiin, opettajan palautteeseen tai menestykseen matematiikkakilpailussa.

TAULUKKO 6.4.2.2 Ongelmanratkaisijan, yhtälönratkaisijan ja laskijan minäkäsitys

Suomalaisen ongelmanratkaisijan minäkäsitys	**Unkarilaisen yhtälönratkaisijan minäkäsitys**	**Suomalaisen laskijan minäkäsitys**
Myönteinen 10 oppilaalla, Varauksellisen myönteinen 7 oppilaalla, Neutraali 3 oppilaalla	Myönteinen 11 oppilaalla, Varauksellisen myönteinen 6 oppilaalla, Neutraali 6 oppilaalla	Myönteinen 9 oppilaalla Varauksellisen myönteinen 8 oppilaalla, Neutraali 2 oppilaalla Kielteinen 2 oppilaalla

6.4.3 Kerrontatavat ja matematiikan opetus

Lopuksi tarkastellaan suomalaisen *perustelevan ongelmanratkaisijan*, unkarilaisen *kontrastoivan sääntöjä keksivän yhtälönratkaisijan* ja suomalaisten *toteavan laskijan* kerrontatapoja. Kussakin tutkitussa kolmessa opetusryhmässä oli sille ominainen tapa kertoa kokemuksista matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta. Opetusryhmien välillä oli havaittavissa eroja kerrontatavoissa. Näytteet kerrontavoista ovat taulukossa 6.4.3.1. Valitsin nämä näytteet harkitusti. Kaikki kolme kertojaa eri opetusryhmistä ovat samaa sukupuolta.

Suomalaisista opetusryhmistä olisi voinut valita kenet tahansa oppilaan kirjoitelman näytteeksi, joten Heidin ja Varpun kirjoitelmat edustavat hyvin ryhmiään. Fannín kirjoitelmassa ilmenee eniten ja selkeimmin unkarilaisten oppilaiden tapa kertoa kokemuksistaan. On huomattava, ettei suomalaisen *ongelmanratkaisijan* kertomus ole taulukossa kokonaisuutena pituuden vuoksi.

TAULUKKO 6.4.3.1 Kerrontatapojen vertailua

Suomalaisen ongelman-ratkaisijan kerrontaa	**Unkarilaisen yhtälön-ratkaisijan kerrontaa**	**Suomalaisen laskijan kerrontaa**
Heidi: …Olen matikassa hyvä osittain siksi, koska opettaja opettaa asiat hyvin. Osittain siksi, että opin yleensä uudet asiat helposti. … Matematiikka on minulle sekä lempiaineena että tärkeimpänä aineena 1:nen, koska siitä on paljon hyötyä isona ja myös pienenä. Matikka on minusta yleensä helppoa. Sen päättelen kokeista ja tehtävistä. … Matematiikka on minulle tärkeää, koska tarvitsen matikkaa paljon koulussa ja jonkin verran kotona. Tarvitsen sitä uskoakseni aikuisena enemmän kuin lapsena. … Matikka on lempiaineeni siksi että opettajakin pitää aineesta ja on innostunut siitä.	Fanní: En ole mitenkään liian hyvä matikassa mutta en erityisen huonokaan vaan aika hyvä. En pidä matematiikasta mutta en sitä inhoakaan. No, se on tärkeää jotta osaisin laskea. Mielestäni matikan tunti ei ole kiinnostava mutta se on tärkeää ja on tunteja jotka ovat kivoja. Opiskelu ei suju mitenkään liian hyvin mutta on tehtäviä jotka sujuvat hyvin. Mielestäni matikka ei ole vaikeaa mutta ei se helppoakaan ole. Kun illalla pääsen kotiin ja minulla on aikaa istuudun työpöytäni ääreen harjoittelemaan sääntöjä. Matikka ei ole mielestäni viihdyttävää mutta ei se niin tylsääkään ole. Mielestäni tulen tarvitsemaan matikkaa myöhemmin elämä on vaikeampaa ilman laskemista.	Varpu: Matematiikassa olen pärjännyt ihan hyvin kuitenkin joskus ajatukset riehuvat pois laskuista. Matematiikka on ihan kivaa. Ainakin kertolaskut on kivoja! Matematiikka on tärkeää niin koulussa kuin muuallakin. Kun käy kaupassa tarvitsee matematiikkaa kassalla ostosmaksuissa. Matematiikka on helppoa joskus. Opin sitä ihan hyvin. Sitä oppii ihan hyvin kun laskee tunnilla laskut. Matematiikka on joskus vaikeaa. Matematiikka on hauskaa kertolaskut on kivoja. Tykkään tehdä tehtäviä kertolaskusta. Matematiikkaa tarvitsee melkein kaikkeen.

Suomalaiselle *ongelmanratkaisijalle* on tyypillistä kertoa käsityksistään argumentoiden niitä havainnoillaan ja kokemuksillaan. Argumentointi ilmenee kertomuksessa *sillä-*, *koska-* ja *siksi*-alkuisina lauseina *sen päättelin* -fraasien lisäksi. Argumentoinniksi ymmärretään myös oppiainemieltymysten ja tärkeyden vertailut. *Ongelmanratkaisijan* tapa kertoa kokemuksistaan saattaa olla yhteydessä siihen, että matematiikan opetuksessa on painotetusti ohjattu kuvaamaan, selittämään ajattelua ja perustelemaan sitä. Perustelu matematiikassa voi siirtyä tapaan kuvata kokemuksia, kuvataanhan kirjoitelmissa ja piirroksissa juuri matematiikkaa. Joissakin *ongelmanratkaisijan* piirroksissa kuvataan opettajaa ohjaamassa perustelemiseen. Tätä ohjausta ei esiinny *toteavan laskijan* kuvauksissa, joissa matemaattinen vuorovaikutus oppilaan ja opettajan välillä on laskutoimitusten kysymistä ja niiden tulosten toteamista. *Toteava laskija* nimensä mukaisesti toteaa asian ja sen tilan.

Unkarilaisen *kontrastoivan sääntöjä keksivän yhtälönratkaisijan* tapa kertoa matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta kielteisten vastakohtien avulla on mahdollisesti yhteydessä logiikan alkeiden opetukseen, jossa korostuu leikkimielinen negaatioiden harjoittelu toimintavälineiden ja ns. kieltokorttien avulla. Kieltokortissa saattaa olla esimerkiksi punainen väriläiskä, jonka päällä on rasti kiellon symbolina. Negaation harjoittelussa näytetään punaista kieltokorttia ja oppilaat tunnistavat sinisistä, punaisista, keltaisista ja vihreistä loogisista paloista ne, jotka tarkoittavat ei-punaista eli sinistä, keltaista ja vihreää loogista palaa. Nämä loogiset palat kuuluisivat ei-kieltä käyttäen: Siniset, keltaiset ja vihreät palat ovat ei-punaisia tai palat eivät ole punaisia. Erittäin varovaisesti on pääteltävissä, että matematiikan opetuksessa harjoiteltu kieli mahdollisesti vaikuttaa lasten kieleen.

Negaatioilmauksia ja kontrastointia, vastakohtaistamista, ei ole havaittavissa 6–7-vuotiaiden kiinalaisten, unkarilaisten ja ruotsalaisten lasten narratiiveissa Asplund Carlssonin, Pramling Samuelssonin, Soponyain ja Wenin (2001) vertailevassa tutkimuksessa kuten tässä tutkimuksessa. Lapset 6–7-vuotiaina ovat perusopetuksen ensimmäisellä luokalla, joten järjestelmällinen matematiikan opetus logiikasta on todennäköisesti vasta alullaan, joten on ymmärrettävää, ettei vastakohtaistaminen heidän arkikielessään ilmenekään. Sen sijaan esimerkiksi unkarilaisen C. Neményin (2005) 16 sivua pitkässä artikkelissa *4. luokan matematiikan rakenne* 13 sivulla on yksi tai useampia negaatioilmauksia. Artikkelissaan matemaattisen koulutuksen saanut C. Neményi kuvaa neljännen luokan logiikan opetustakin. Tämän löydöksen varmistamiseksi logiikan ja arkikielen mahdollisesta yhteydestä tarvitaan syventävää lisätutkimusta.

6.4.4 Kooste eroista ja yhtäläisyyksistä

Suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden kirjoitelma- ja piirrosaineistoon perustuvan koetun matematiikan opetussuunnitelman kerrontatavan ja matematiikan sisältöjen perusteella voitiin muodostaa kolme tyyppiä opetusryhmittäin (taulukko 6.4.4.1):

- *Perusteleva ongelmanratkaisija* suomalaisesta Varga–Neményi –opetusryhmästä, jossa oli 20 oppilasta
- *Kontrastoiva, sääntöjä keksivä yhtälönratkaisija* unkarilaisesta Varga–Neményi –opetusryhmästä, jossa oli 23 oppilasta ja
- *Toteava laskija* suomalaisesta opetusryhmästä, jossa oli 21 oppilasta.

TAULUKKO 6.4.4.1 Kooste koetun matematiikan opetussuunnitelman keskeisistä eroista ja yhtäläisyyksistä

Koettu matematiikan opetussuunnitelma opetusryhmittäin	**Ongelmanratkaisija suomalainen Varga–Neményi -opetusryhmä**	**Yhtälönratkaisija unkarilainen Varga–Neményi -opetusryhmä**	**Laskija suomalainen opetusryhmä**
Tapa kertoa matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta	Perusteleva	Kontrastoiva, vastakohtaistava	Toteava
Matematiikan sisällöt	Ongelmanratkaisua, lukuja ja laskutoimituksia	Määrällistä orientoitumista maailmaan (yhtälöiden ratkaisua) ja oivaltamistaitoja	Lukuja ja laskutoimituksia
Asenne: matematiikasta pitäminen, helppous ja tärkeys	Yksiselitteisen tai ambivalenttisen myönteinen 19 oppilaalla, 1:llä ambivalenttisen kielteinen	Yksiselitteisen tai ambivalenttisen myönteinen 21 oppilaalla, 2:lla ambivalenttisen kielteinen	Yksiselitteisen tai ambivalenttisen myönteinen 18 oppilaalla, 3:lla ambivalenttisen kielteinen
Minäkäsitys	Myönteinen tai varauksellisen myönteinen 17 oppilaalla, 3:lla neutraali	Myönteinen tai varauksellisen myönteinen 17 oppilaalla, 6:lla neutraali	Myönteinen tai varauksellisen myönteinen 17 oppilaalla, neutraali 2:lla ja kielteinen 2:lla
Oppiminen	Ymmärtämistä, tajuamista, oivaltamista ja keksimistä	Ymmärtämistä, tajuamista, oivaltamista ja keksimistä	Ymmärtämistä ja tajuamista
Opetus	Yhteistoiminnallista parityötä ja oppilaskeskeistä yksilöllistä työskentelyä	Opettajajohtoista kyselyä ja oppilaskeskeistä yksilöllistä työskentelyä	Opettajajohtoista kyselyä ja oppilaskeskeistä yksilöllistä työskentelyä

Käytetystä opetusmenetelmästä riippumatta 9–10-vuotiailla suomalaisilla ja unkarilaisilla perusopetuksen neljäsluokkalaisilla on pääsääntöisesti yksiselitteisen tai ambivalenttisen myönteinen asenne matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen. Valtaosalla heistä on myös myönteinen tai varauksellisen myönteinen käsitys itsestään matematiikan oppijana.

Samalla kun opitaan matematiikkaa, opitaan myös, mitä oppiminen on: Niin *ongelman-* ja *yhtälönratkaisijan* kuin *laskijankin* mukaan se on ymmärtämistä ja tajuamista. Varga–Neményi -opetusryhmissä opiskelleiden mukaan matematiikan oppimiseen liittyy myös oivaltamista ja keksimistä. Yhteistoiminnallisissa paritöissä Varga–Neményi -opetusryhmässä Suomesta keksitään yhteistyössä, miten ratkaista tulkinnallisia ongelmia, joissa voi olla yksi tai useampi ratkaisu. Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän opettaja ohjaa oppilaita kysellen keksimään sääntöjä matematiikan tehtävien ratkaisemiseksi, kun taas suomalaisryhmässä opettaja ohjaa kysellen toteamaan peruslaskutoimitusten tuloksia.

7 TAVOITETTIINKO KOETTU MATEMATIIKAN OPETUSSUUNNITELMA LUOTETTAVASTI?

"Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin" Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana sopii tutkimusraportin nimeksi monesta syystä. Nimen alkuosa välittää suomalaisen Amandan (ks. piirrosta 6.1.2.4) ennakkokäsitystä matematiikasta, että se olisi vaikeaa ja tylsää. Suotuisat oppimiskokemukset saivat Amandan tiedostamaan, pohtimaan ja muuttamaan ennakkokäsityksiään. Tutkimusraportin nimen loppuosa kertoo koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta, miten suomalais- ja unkarilaisoppilaat ovat tulkinneet maansa virallista matematiikan opetussuunnitelmaa ja sen opetusmenetelmää. Unkarilaisen neljännen luokan tytön piirros tutkimusraportin kannessa kuvaa yhteistyötä matematiikan oppitunnilla. Yhteistyö ystävien kesken saa matematiikan ja sen oppimisen tuntumaan odotettua helpommalta ja hauskemmalta. Piirroksen tarkoitus unkarinkielisine puhekuplineen on herättää kiinnostusta. Se ilmentää myös haasteellista tutkimusaineistoa. *Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin* symbolisoi myös tutkijan ennakko-olettamusta tutkimustyöstä. Se osoittautui haasteelliseksi, mutta ennakoitua hauskemmaksi.

Laadullisista tutkimuksista arvioidaan usein uskottavuutta, vastaavuutta (credibility), siirrettävyyttä (transferability), luotettavuutta, tutkimustilanteen arviointia, varmuutta, riippuvuutta (dependability) ja vahvistettavuutta, vakiintuneisuutta, vahvistuvuutta (confirmability) (Groenewald 2004; Huss & Cwikel 2005; Johnson & Waterfield 2004; Morrow 2005; Shenton 2004; Tobin & Begley 2004). Laadullisten tutkimusten oppaissa ja artikkeleissa ehdotetaan käsitteiden validiteetti ja reliabiliteetti hylkäämistä tai korvaamista. Näistä seikoista johtuen laadullisen tutkimuksen luotettavuutta kuvaavat käsitteet ovat saaneet monenlaisia tulkintoja ja suomalaisessa kirjallisuudessa monenlaisia käännöksiä (Tuomi & Sarajärvi 2003, 134–138). Edellä oleva luettelo kuvaa käännösten kirjavuutta.

Koetun matematiikan opetussuunnitelman tutkimuksen luotettavuutta arvioidaan Perttulan (1995, 102–104) yhdeksällä yleisellä kokemuksen tutkimisen kriteerillä. Ne ovat luontevia tutkimusaiheen vuoksi ja ohjaavat arvioimaan tutkimusprosessia kokonaisuutena uskottavuutta, siirrettävyyttä, luotettavuutta ja vahvistettavuutta laajemmin. Kokonaisarvioinnissa pohditaan tutkitun ilmiön, koetun opetussuunnitelman rakennetta. Tarkastellaan myös teoreettista viitekehystä, aineiston hankintaa ja analyysia sekä tutkijan subjektiivisuutta. Yhdeksän kriteerin yhteydessä arvioidaan myös tutkimuksen uskottavuutta, siirrettävyyttä ja vahvistettavuutta. Seuraavassa tarkastelussa esitetään yhdeksän arviointia ohjaavaa kriteeriä kursiivilla, josta on erotettavissa niiden soveltaminen tässä tutkimuksessa.

7.1 Tutkimusprosessin johdonmukaisuus

Tutkittavan ilmiön perusrakenteen, tutkimuksen aineiston hankintatavan, teoreettisen lähestymistavan, analyysimenetelmän ja tutkimuksen raportointitavan välillä tulee olla looginen yhteys. Loogisuuden tulee ulottua sekä ontologiselle että reaalisisältöjä kuvaavalle tasolle. (Perttula 1995, 102).

Koetun matematiikan opetussuunnitelman perusrakenne oli ennakoitavissa epäyhtenäiseksi Lindenskovin (1993) tutkimuksen pohjalta, koska oppilaat tulkitsevat matematiikan opetussuunnitelmaa ja sitä toteuttavaa opetusmenetelmää runsassisältöisesti. Jotta 9–10-vuotiaiden suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten rikkaasti kokema matematiikan opetussuunnitelma mahdollistuisi, käytettiin aineiston hankinnassa vapaamuotoisia kirjoitelmia ja piirroksia. Niillä oppilaat voivat kuvata kokemuksiaan matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta mahdollisimman ohjaamattomasti. Oppilaiden kirjoittamista ja piirtämistä ohjattiin mahdollisimman lyhyillä ohjeilla, jotta tavoitettaisiin heidän aitoja kokemuksiaan.

Suomalaisilta ja unkarilaisilta oppilailta kerätty tutkimusaineisto koostui 64 piirroksesta ja yhtä monesta kirjoitelmasta. Piirrosten systemaattisesta analysoinnista kertyi noin sata A4-havainnointilomaketta ja kirjoitelmien taulukkomuotoisesta analysoinnista noin 120 sivua. Oppilailta saatu aineisto osoittautui rikkaaksi, eläväksi ja pulppuavaksi lähteeksi hakea vastauksia tutkimusongelmiin koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta.

Aluksi askarrutti se, mitkä käsitteet tekisivät oikeutta 9–10-vuotiaiden lasten matematiikkaan liittyvien kokemusten kirjolle. Koetun matematiikan opetussuunnitelman mahdollisen epäyhtenäisyyden hallitsemiseksi valittiin keskeiset kokemuslaadut, tunteet, asenteet, uskomukset ja käsitys itsestä matematiikan oppijana kokemuksen tutkimuksen teorian (Latomaa 2005; Perttula 2005) pohjalta. Oppilaiden matematiikkaan liittyviä tunteita, asenteita, uskomuksia ja matemaattista minäkäsitystä pohdittiin teoreettisessa viitekehyksessä suhteellisen laajasti, jotta voi ymmärtää ja tulkita nuoren oppilaan matematiikkaan liittyviä kokemuksia. Affektit (tunteet, asenteet, uskomukset ja minäkäsitys) voidaan nähdä ontologialtaan kolmenlaisina: affektit subjektiivisena kokemuksena, fysiologisena prosessina tai sosiaalisena tekstinä (Hannula 2004, 10-12; Popper & Ecceles 1977). Tässä tutkimuksessa affektit ymmärretään suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten subjektiivisiksi kokemuksiksi, joita välittävät kirjoitelmat ja piirrokset ovat sosiaalista tekstiä kuvata kokemuksia. Luvussa ”Oppilaat ja matematiikka” tarkasteltiin eri maiden lasten ja nuorten suhdetta matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen monipuolisen näkemyksen saavuttamiseksi.

Monentasoiset opetussuunnitelmat (ks. kuviota 1.1 johdannossa) ovat haasteellisia tutkittavia, koska niihin sisältyy monia muuttujia ja vaikuttavia tekijöitä. Yksittäisen tutkijan on rajauduttava tarkastelemaan niitä rajatusta näkökulmasta, jotta voisi saada jäsentynyttä ja tarkoituksenmukaista tietoa tutkimuskohteestaan. Tämän tutkimuksen vahvuutena on, että se on pyrkinyt selvittämään koettua matematiikan opetussuunnitelmaa kiinteässä yhteydessä unkarilaiseen Varga–Neményi –opetusmenetelmään ja suomalaisiin opetusmenetelmiin (toteutettavaan opetussuunnitelmaan), suomalaiseen mahdolliseen opetussuunnitelmaan (matematiikan oppikirjojen opettajanoppaisiin ja toimintavälineisiin) sekä Suomen ja Unkarin perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelmaan (tarkoitettuun viralliseen opetussuunnitelmaan) kolmessa opetusryhmässä kahdessa maassa. Tällöin on ollut mahdollista saada kansallista laajempaa tietoa oppilaiden matematiikkaan liittyvistä koulukokemuksista erilaisissa konteksteissa.

Tutkimusraportin runko-osa eli varsinainen teksti sisältää johdannon (Introduction) lisäksi teoreettisen tarkastelun koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta. Teoreettisessa viitekehyksessä määriteltiin tunteet, asenteet, matemaattinen minäkäsitys ja uskomukset sekä esiteltiin tutkimustuloksia niistä. Luvussa ”Kuinka tavoittaa koettua matematiikan opetussuunnitelmaa?” (Methods) esiteltiin tutkimuksen ongelmat, tutkittavat oppilaat ja tutkijan suhde tutkittaviinsa. Tutkimusaineiston perusteet, hankinnan vaiheet ja analysointi kuvattiin ja selitettiin yksityiskohtaisesti, jotta lukija voi arvioida aineiston ja menetelmän asianmukaisuutta ja tulosten luotettavuutta. Tutkimuksen luotettavuuden varmistamiseksi vertaisselvittäjä kyseenalaisti aineiston analyysia.

Tulosten (Results) esittely etenee opetusryhmittäin, mutta on kuitenkin mahdollistanut oppilaiden yksilöllisten kokemusten säilyttämisen mahdollisimman pitkään. Suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden koetun matematiikan opetussuunnitelman vertailussa yksilölliset kokemukset abstrahoituvat. Tutkimusote on luonteeltaan induktiivinen, se päätyy yksittäisten oppilaiden kokemuksista niiden yleisempiin merkityksiin. Pohdinnassa (Discussion) monivaiheisesti analysoituja kokemuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta verrataan aiempiin tutkimustuloksiin. Varsin runsas joukko aiemmista tutkimustuloksista vahvistaa suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta. Niistä on tehty päätelmiä ja suosituksia matematiikan opetuksen kehittämiseksi.

Näillä perusteilla tutkimusprosessi kokonaisuudessaan ja tutkimusraportti IMRD-rakenteisena arvioidaan johdonmukaisiksi.

7.2 Tutkimusprosessin reflektointi

Tutkijan on kyettävä perustelemaan tutkimukselliset valintansa kaikissa tutkimusprosessin vaiheissa. Tutkimusraportin on annettava lukijoille mahdollisuus hahmottaa tutkimusprosessin kulku ja kokonaisuus. Tutkijan on kiinnitettävä erityistä huomiota tutkimusaineiston analyysin konkreettisen etenemisen kuvaamiseen. (Perttula 1995, 102).

Koetun matematiikan opetussuunnitelman tutkimusprosessia on kuvattu ja pohdittu suhteellisen tarkasti. Jotta tutkimusta voisi arvioida, on perusteltu teoreettisia ja tutkimusmenetelmällisiä valintoja asianmukaisissa yhteyksissään. Lukijan on mahdollista hahmottaa tutkimuksen etenemistä ja kokonaisuutta raportin avulla. Sekä kirjoitelma- että piirrosaineiston perusteita, hankkimista ja analyysia on kuvattu varsin seikkaperäisesti luvussa ”Kuinka tavoittaa koettua matematiikan opetussuunnitelmaa?”.

Tutkimusprosessin arviointi sai myös pohtimaan, mikä on suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokeman matematiikan opetussuunnitelman ”todellinen” kulku: 9–10-vuotiaiden oppilaiden itsensä, luokkakaverien, vanhempien vai opettajien kokema? Jokaisen oppilaan kertomus kirjoitelmineen ja piirroksineen omasta kokemuksestaan matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta jää yksipuoliseksi. Kaikista jää jotain puuttumaan. Eikö sitten ”todellista” koettua matematiikan opetussuunnitelmaa ole olemassakaan? Olisi otettava huomioon kaikki koettuun matematiikan opetussuunnitelmaan liittyvät kokemukset, täysin vastakkaisetkin. Sellaista hahmottajaa ei ole. Kertojan ei ole mahdollista tekstittää tai kuvittaa kaikkea kokemaansa, vaan hän kertoessaan valikoi, mitä kokemuksistaan kertoo. Tästä neljäsluokkalaisten valikoinnista esimerkkeinä ovat suomalaisen opetusryhmän Vapun ja Valtterin itsensä kirjoittamat matematiikan oppituntipiirrosten taustatekstit:

> *Vappu: Valitsin just ton kuvan koska se näyttää siltä niinku oikee tunti.*
>
> *Valtteri: Valitsin kuvan koska teemme uusista aiheista suunnilleen aina vihko tehtäviä.*

Ja toisaalta valikoinnin lisäksi: mikä kaikki kuuluu oppilaiden kokemaan matematiikan opetussuunnitelmaan? Kaikkien ihmisten, paikkojen ja tapahtumien yksityiskohtainen – miten yksityiskohtainen - kuvaus? Miten pitkälle lapsen matematiikkaan liittyvien tunteiden, asenteiden ja uskomusten kuvaus olisi vietävä? Jokainen tulkitsee sen omalla tavallaan. Saukkonen (2001, 17) esittää, että oli kuvaus mikä tahansa, on mahdotonta jälkikäteen verifioida, että se on tosi. Tässä tutkimuksessa uskomukset koetun matematiikan opetussuunnitelman neljästä säätelevästä tekijästä määriteltiin seuraavasti:

Oppilaiden matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen liittyvät uskomukset ovat implisiittisiä tai eksplisiittisiä subjektiivisia käsityksiä, joita he pitävät totena.

Onko jälkikäteen mitenkään verifioitavissa, että suomalaisten ja unkarilaisten neljännen luokan oppilaiden uskomukset matematiikan oppitunneista olisivat tosia? Kun oppilaat kertoivat suullisesti piirtämisen jälkeen piirroksestaan, he kuvasivat oppituntitapahtumia vakuuttavasti. Suullisen kuvauksen lisäksi 25 piirroksen takaa sekä suomalaisten että unkarilaisten oppilaiden piirroksista on löydettävissä argumentteja siitä, että he pitävät opetus-uskomuksiaan totena. Suomalaisryhmän oppilaat, joita on opetettu suomalaisittain, vakuuttavat uskomuksiaan piirroksen tausteksteillään seuraavasti:

Varpu: Siksi tein tollaiset kuvat koska meidän luokassa on tollaista.

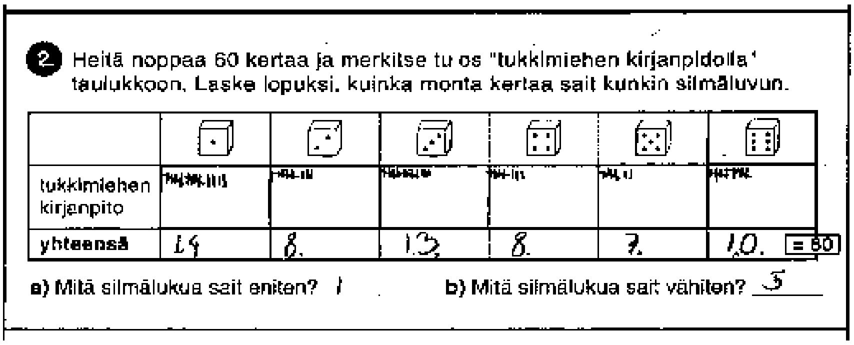
Voitto: Se kuvaa meidän tavallista matikantuntia.

Väinö: Tavallinen matematiikan tunti.

Suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän puolesta Heidi todistaa uskomusten paikkansapitävyyttä. Seuraavan piirroksen 7.2.1 yläosassa on Heidin todellinen todennäköisyysharjoitus, jossa on heitetty noppaa. Siinä on merkitty tukkimiehen kirjanpidolla, kuinka monta kertaa Heidi on saanut nopasta ykkösiä ja muita silmälukuja. Piirroksen 7.2.1 alaosassa on leikkaus Heidin matematiikan oppituntipiirroksesta 6.1.2.3 luvusta kuusi. Piirros esittää juuri tuota oppituntia todennäköisyyden harjoittelusta. On huomattava, että varsinaisen matematiikan oppitunnin ja piirtämisen ajankohdan ero on noin puoli vuotta. Aikaerosta huolimatta piirroksessa nopanheiton tulokset ovat täsmälleen samat kuin todellisessa harjoitustehtävässä. Mikä muisti kymmenvuotiaalla onkaan! Tapahtuman on täytynyt olla erittäin merkittävä, koska se on jäänyt noin tarkasti Heidin mieleen. Mahdollisesti hän on tarkastellut todennäköisyystehtävää kansiostaan myöhemminkin, mikä on edistänyt tapahtuman muistamista. Hän on saattanut tutkia tehtävää vähän ennen piirtämistä.

Samansuuntaisia tutkimustuloksia oppilaiden oppituntipiirrosten ja todellisten tapahtumien välisestä yhteydestä on havainnut myös Gulek (1999) multimetodisessa tutkimuksessaan: videoidun opetuksen ja oppituntipiirrosten välillä on merkitsevä yhteys (r= .58).

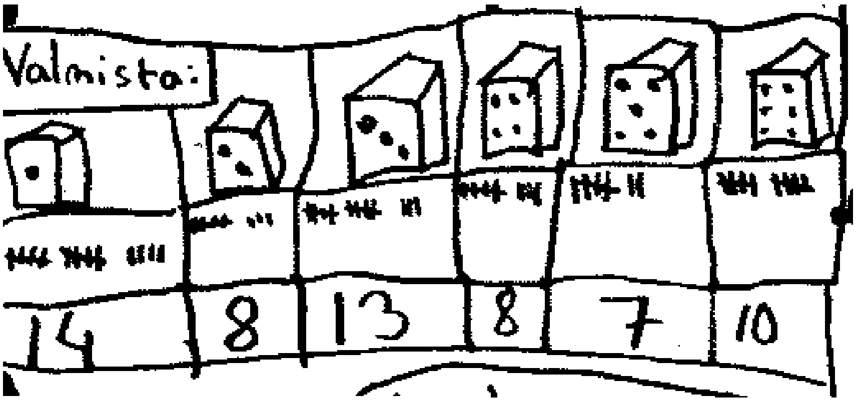
Kaksikymmentä vuotta sitten Schoenfeld (1987) ja Garofalo (1989) väittivät, että oppilaiden uskomukset ovat realistisia päätelmiä luokkahuonetapahtumista matematiikan oppitunneilla.



2 Heitä noppaa 60 kertaa ja merkitse tulos "tukkimiehen kirjanpidolla" taulukkoon. Laske lopuksi, kuinka monta kertaa sait kunkin silmäluvun.

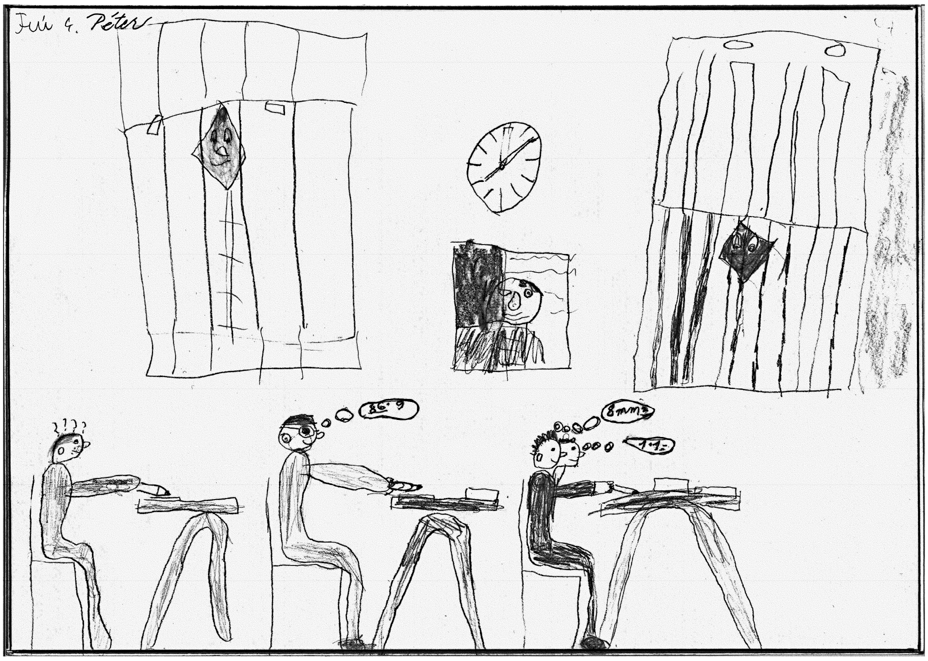
tukkimiehen kirjanpito						
yhteensä	14	8.	13	8.	7.	10. = 60

a) Mitä silmälukua sait eniten? 1 b) Mitä silmälukua sait vähiten? 5



PIIRROS 7.2.1 Todiste oppitunnin todellisesta tapahtumasta

Unkarilaisten Varga–Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaistenkin kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa on argumentatoitavissa todellisuutta vastaavaksi. Seuraavassa Péterin piirroksessa matematiikan oppitunnista ja tutkijan ottamassa valokuvassa luokkahuoneesta on monia yhtäläisyyksiä.



PIIRROS 7.2.2 Leijat piirroksessa

Piirroksessa ja valokuvassa on lähes sama kuvakulma. Kaksi isoa ikkunaa ovat kuvien hallitsevat elementit. Ikkunaruutujen välissä hymyilevät ihmiskasvoiset leijat. Ikkunoiden välisellä seinällä on kello, joka on noin kymmenen yli kahdeksan piirroksessa, mutta valokuvassa yhdeksän. Kellon alapuolella on taulu, jossa on mies. Valokuvassa ikkunanpuoleisessa jonossa istuu vain poikia paripulpeteissa kuten piirroksessakin.

KUVA 7.2.1 Leijat valokuvassa

On kuitenkin huomattava, etteivät kaikki oppilaiden kuvaukset matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta ole realistisia. Esimerkkejä tällaisista epärealistisista kuvauksista ovat hämähäkit unkarilaisten Anetten piirroksessa 6.2.1.3 ja Eszterin piirroksessa 6.2.5.1. Seiteissään asustavat hämähäkit piirroksissa kommentoivat matematiikan sisältöjä ja tärkeyttä. Opetusta seurattaessa tutkimusluokassa ei ollut havaittavissa seittejä eikä hämähäkkejäkään. Suomalaisen opetusryhmän Vilhelmiina kuvaa piirroksessaan 6.3.1.2 opettajaa käärmeeksi. Saman opetusryhmän Vesa kuvaa matematiikan vaikeutta Einsteinin kaavalla $E = mc^2$. Vesa toteaa jälkikirjoituksessaan, ”ettei kukaan tajuu laskuja, vaikka ei meillä ihan tollasii oo”. Nämä kuvaukset voidaan ymmärtää vertauskuviksi, metaforiksi kokemuksista. Matilainen (1989) toteaa, että kymmenvuotiaat neljäsluokkalaiset alkavat käyttää kielikuvia kirjoitelmissaan nuorempiaan useammin ja enemmän. Sarjakuvat ja lastenkirjallisuus ovat mahdollisesti vaikuttaneet neljäsluokkalaisten kuvauksiin kokemuksista matematiikasta.

Edellä esitetyn perusteella tutkimusprosessin pohdinta ja sen kuvaus arvioidaan riittäviksi, jotta lukija voi seurata tutkimuksen etenemistä ja tehtyjä ratkaisuja. Oppilaiden kokema matematiikan opetussuunnitelma on uskottava, koska oppilaat uskovat käsitystensä olevan tosia. Oppilaiden uskomukset ovat argumentoitavissa osittain realistisiksi.

7.3 Tutkimusprosessin aineistolähtöisyys

Tutkimusaineisto on tutkimusprosessin kokonaisuudessa keskeisimmässä asemassa. Kvalitatiivinen tutkimusprosessi etenee tutkimusaineiston ehdoilla. (Perttula 1995, 102).

Pyrin kokoamaan laajaa ja monipuolista tutkimusaineistoa koulutyötä mahdollisimman vähän häiriten: Keräsin oppilailta kirjoitelmat ja piirrokset, jotka tehtiin kunkin opetusryhmän oman opettajan ohjaamana. On mahdollista, että oman opettajan ohjauksessa oppilaat ovat kuvanneet kokemuksiaan myönteisempinä kuin ne todellisuudessa ovat miellyttääkseen opettajaansa (Lankshear & Knobel 2004, 112). Miellyttämisefektistä ei kuitenkaan ole konkreettisia todisteita.

Piirrettyään oppilailla oli mahdollisuus selittää ja kuvata työtään tutkijalle. Näiden lisäksi videoin, valokuvasin ja havainnoin matematiikan oppitunteja muistiinpanoja tehden Unkarissa 12 tutkimusviikon aikana yhteensä 50 tuntia tutkimusluokassa. Haastattelin opettajia Suomessa ja Unkarissa. Unkarilaisopettajien Suomessa pitämien täydennyskoulutuksen videoinnit ja muistiinpanot kuuluvat myös tutkimusaineistoon. Haastattelu-, valokuva- ja videoaineisto sekä muistiinpanot ovat tukeneet erityisesti unkarilaisoppilaiden kirjoitelmien ja piirrosten ymmärtämistä ja tulkintaa.

Koska koetun opetussuunnitelman kirjoitelma-aineisto litteroitiin sanatarkasti ja piirrosten sisällöt kirjattiin yksityiskohtaisesti niiden analyysin hakiessa muotoaan, aineistolähtöisyys varmistui oppilaiden ilmaisua muuttamatta. Näin kunnioitettiin tutkittavien kokemuksia mahdollisimman tarkasti (Lankshear & Knobel 2004, 111–112). Oppilaiden tapa kertoa matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta välittyy autenttisena suorissa lainauksissa heidän kirjoitelmistaan tuloksissa luvussa kuusi. Koettua opetussuunnitelmaa matematiikasta argumentoidaan myös oppilaiden piirroksilla oppitunneista. Taulukoissa on käytetty oppilaiden omaa ilmaisutapaa. Luotettavuuden tarkastelussa ja tutkimuksen pohdinnassakin on esitetty joitakin esimerkkejä oppilaiden kokemuksista. Näin lukijalla on mahdollisuus eläytyä oppilaiden kokemuksiin välittömästi ja vakuuttua niistä autenttisesti eikä välillisesti tutkijan kuvauksen kautta.

Oppilaiden tapa kertoa kokemuksistaan aluksi ihmetytti, koska se oli kolmessa tutkimusryhmässä erilainen. Ilman tätä mahdollisuutta verrata kerrontatapoja olisi siihen tuskin tullut kiinnitetyksi huomiota. Suomalaiset oppilaat Varga–Neményi -opetusryhmässä perustelivat väitteitään, unkarilaiset oppilaat Varga–Neményi -opetusryhmästä vastakohtaistivat kieltomuotojen avulla väitteitään, kolmannen opetusryhmän suomalaisoppilaat totesivat asian. Kerrontatapoja on kuvattu ja pohdittu luvussa 6.4.3, jossa on myös kolmen oppilaan kirjoitelmat taulukossa näytteenä. Perttula (1995) pitääkin laadullisen kokemuksen tutkimusprosessin keskeisinä rakennetekijöinä 1. toisen ihmisen kokemusta, 2. hänen tapaansa ilmaista kokemuksensa, 3. tutkijan kokemusta toisen ihmisen kokemuksesta ja sen ilmaisusta sekä 4. tutkijan tapaa ilmaista kokemuksensa toisen ilmaisemasta kokemuksesta.

Jokaiselta 64 suomalaiselta ja unkarilaiselta oppilaalta on ainakin yksi näyte kirjoitelmasta tai piirroksesta suorana lainauksena, muutamilta oppilailta useampiakin. Tällä menettelyllä pyrittiin tietoisesti välttämään ns. ”eliitti-virhettä”, jonka mukaan aineiston tulkinta perustuisi taitavien, tietävien ja itseään hyvin ilmaisevien oppilaiden kuvauksiin. Eskola (2001, 147) kehottaa tutkijaa harkitsemaan, valitseeko aineistosta mielenkiintoisimmat kohdat vai sen tasapuolisen kuvaamisen. Tässä tutkimuksessa on päädytty oppilaiden kokeman matematiikan opetussuunnitelman tasapuoliseen kuvaukseen, mutta on annettu tilaa myös oppilaille, joiden kokema opetussuunnitelma on antoisampi kuin toisten. Tutkimus on arvioitavissa referentiaalisesti riittäväksi, mikä tarkoittaa viittauksia aineistoon. Näiden avulla lukija voi arvioida johtopäätösten ja luokitusten luotettavuutta.

Tutkimusaineiston mielivaltaisen tulkinnan ehkäisemiseksi ja toistettavuuden lisäämiseksi luetteloitiin taulukoihin kaikki ne merkitysyksiköt, joihin tulkinta perustui. Tätä varten määriteltiin merkitysyksikkö mahdollisimman pieneksi, useimmin lauseen tai muutaman lauseen mittaiseksi. Vaikka merkitysyksiköiden määrittely ja kirjaaminen oli vaivalloista ja aikaa vievää, pyrittiin tietoisesti välttämään sattumanvaraista tulkintaa. Ihannetapauksessa tutkija kykenee ilmoittamaan, montako lausumaa hänen analyysinsa koskee, ei siksi että niitä laskettaisiin, vaan jotta ne olisi identifioitu (Mäkelä 1995, 57). Luvussa kuusi ”Koettu matematiikan opetussuunnitelma Suomesta ja Unkarista” on ilmoitettu merkitysyksiköiden lukumääriä, joihin tulkinnat ja johtopäätökset perustuvat.

Edellä esitetyn perusteella tutkimus koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta arvioidaan sekä teoria- että aineistolähtöiseksi. Tutkimusraportin viitekehyksellä Varga–Neményi -opetusmenetelmästä, matematiikan opetuksesta suomalaisittain sekä Suomen ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelman perusteilla on luotu edellytyksiä tulkita koettua matematiikan opetussuunnitelmaa. Kokemushan ei synny tyhjiössä, vaan suhteessa johonkin.

7.4 Tutkimusprosessin kontekstisidonnaisuus

Kontekstilla viitataan kahteen asiaan: a) ihmisen ulkopuolisen todellisuuden kokonaisuuteen. Kontekstisidonnaisuudella viitataan tällöin tutkimusprosessin sidonnaisuuteen tutkimustilanteeseen. Tutkimuksen tulokset ovat sidoksissa niihin todellisuuden ominaispiirteisiin, jotka tutkimustilanteessa ovat olemassa. b) Ihmisen *koettuun maailmaan, eli tajunnan sisällölliseen kokonaisuuteen. Kontekstisidonnaisuudella viitataan siihen, että toisen ihmisen merkityssuhteet ovat mielekkäästi tutkittavissa vain hänen koetun maailmansa kokonaisuudessa. Se johdattaa kokemuksen kvalitatiivisen tutkimuksen idiografisuuteen. Väljemmin tulkittuna se vaatii säilyttämään yksilökohtaisuuden tutkimusprosessissa mahdollisimman pitkään. (Perttula 1995, 102).*

Suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemia matematiikan opetussuunnitelmia on koko tutkimusprosessin ajan tarkasteltu suhteessa Suomen ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelman perusteisiin, suhteessa mahdollisiin opetussuunnitelmiin (matematiikan oppikirjojen opettajanoppaisiin ja toimintavälineisiin), kahden, suomalaisen ja unkarilaisen Varga–Neményi –opetusryhmän osalta suhteessa matematiikan Varga–Neményi -opetusmenetelmään ja kahden suomalaisen opetusryhmän osalta suomalaisiin opetusmenetelmiin. Teoreettisessa viitekehyksessä tarkasteltiin suhteellisen laajasti matematiikan opetusta Suomessa ja Unkarissa aiemman tutkimustiedon pohjalta, jotta tutkijalla olisi mahdollisimman laaja näkemys tutkimuskonteksteista kahdessa eri maassa. Viitekehyksessä tarkasteltiin myös suomalaisten ja unkarilaisten opettajien käsityksiä matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta. Näkemyksen avartamisella pyrittiin kyseenalaistamaan tutkijan luonnollinen asenne, naiivit ja reflektoimattomat uskomukset, opetuksesta.

Enemmistön suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaista olen tuntenut perusopetuksen ensimmäisestä luokasta saakka, kaksi oppilasta toisesta luokasta ja loput kolmannesta luokasta saakka. Joten tunnen nämä tutkittavat oppilaat hyvin, olenhan ollut heidän opettajansa. Unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaat, opettajan ja koulun olen oppinut tuntemaan niin hyvin kuin 12 viikon aikana on mahdollista. Suomalaisen opetusryhmän tuntemus on edellisiä vähäisempää, mutta vierailin heidän luokassaan useita kertoja ennen ja jälkeen tutkimusaineiston keräämisen. Tutkittavien ja tutkijan välistä suhdetta on luonnehdittavissa luottamukselliseksi. Moilanen (1998, 201) korostaa tutkijan monipuolista tietoa tutkittavistaan: mitä enemmän ja monipuolisempaa tietoa tulkitsijalla on tutkimastaan ihmisestä ja siitä yhteisöstä, johon tämä ihminen kuuluu, sitä vaikeampaa hänen on sitoutua paikkansapitämättömiin tulkintoihin.

Laadullisessa tutkimuksessa siirrettävyys (transferability) on rinnakkainen luotettavuuden kriteeri kvantitatiiviseen tutkimukseen liittyvän ulkoisen validiteetin tai yleistämisen kanssa. Siirrettävyys tarkoittaa sitä, missä määrin lukija voi yleistää tutkimuksen tuloksia omaan tilanteeseensa. Se osoittaa myös ydinkysymyksen: ”Missä määrin tutkija saattaa väittää teoriansa olevan sovellettavissa?” (Gasson 2004, 98). Tässä tutkimuksessa on kuvattu suhteellisen mittavasti Suomen ja Unkarin matematiikan viimeisimpiä opetussuunnitelmia ja kahdessa opetusryhmässä käytetyn unkarilaisen matematiikan Varga–Neményi -opetusmenetelmän pedagogisia periaatteita, suomalaista mahdollista opetussuunnitelmaa ja opetusmenetelmiä. Näin lukijalla on mahdollisuus perehtyä perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemaan matematiikan opetussuunnitelmaan yhteydessä olevaan viitekehykseen. Tutkittavista oppilaista on kerrottu heidän ikänsä, sukupuolensa ja heidän koulunsa koko ja sijainti.

Lukijan mahdollisuutta soveltaa tämän tutkimuksen tuloksia heikentänee se, ettei tutkittavien oppilaiden matematiikan arviointitietoja ollut mahdollista saada käyttöön. Tämä puute on pyritty korvaamaan tarkastelemalla suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten menestystä matematiikassa kansallisten ja kansainvälisten tutkimustulosten avulla.

Tutkimusaineiston hankkimisen perusteet, kokeilut, hankintavaiheet ja analysointi on kuvattu varsin seikkaperäisesti, minkä oletetaan edistävän tutkimusprosessin ja sen tulosten siirrettävyyttä.

Koettu matematiikan opetussuunnitelma arvioidaan kontekstisidonnaiseksi, koska se on tulkittavissa suhteessa Suomen ja Unkarin matematiikan viimeisimpiin opetussuunnitelmiin ja matematiikan Varga–Neményi -opetusmenetelmään ja opetukseen suomalaisittain. Tuloksia voidaan osittain siirtää niiden hyödyntäjän vastuulla, koska tutkija ei tunne siirrettävää kontekstia.

7.5 Tavoiteltavan tiedon laatu

Kvalitatiivisessa tutkimusprosessissa voidaan saavuttaa essentiaalisesti, käsitteellisesti ja persoonakohtaisesti yleistä tietoa. Tieto on ilmaistava kielellisesti. Kokemukseen kohdistuvassa tutkimuksessa essentiaalinen yleinen on ontologisen analyysin tulos ihmisen olemassa olon ja spesifimmin tajunnallisuuden perusrakenteesta. Käsitteellisellä yleisellä viitataan toisaalta ihmisen ajatteluun ja kielen perusluonteeseen ja toisaalta kielellistämisen vaatimukseen. Käsitteellinen yleinen voidaan ulottaa tutkimusprosessin kontekstisidonnaisuuteen liittyen yhden tai useamman ihmisen merkityssuhteiden kuvaamiseen. Persoonakohtainen yleinen on käsitteellistä yleistä, jossa kuvataan yhden koetun maailman merkitysverkostoja. Idiografinen tutkimus tuottaa persoonakohtaista yleistä tietoa. (Perttula 1995, 103).

Koetun matematiikan opetussuunnitelman tutkimuksen tavoitteena oli ymmärtää ja tulkita suomalaisten ja unkarilaisten 9–10-vuotiaiden neljäsluokkalaisten kokemuksia matematiikasta oppiaineena, sen oppimisesta ja opetuksesta mahdollisimman syvällisesti. On kyseenalaista, voiko aikuinen, opettaja ja matematiikasta kiinnostunut ymmärtää ja tulkita nuoren oppijan kokemuksia täydellisesti. Kielikin rajoittaa kokemusten osuvaa kuvausta. Unkarilaisten oppilaiden kokemusten kuvaukset ovat käännöksiä, joissa merkitykset eivät ehkä ole parhaat mahdolliset. Käännöksiä unkarista suomeksi pohdittiin paneutuneesti kahden eri-ikäisen molempia kieliä taitavan syntyperäisen unkarilaisen kanssa. Paneutuneella käännöspohdinnalla pyrittiin mahdollisimman tarkkojen merkitysvastaavuuksien löytämiseen.

Pyrkimys paneutuvaan käännöspohdintaan oli syynä tutkijan vaatimaton unkarin taito. Tutkijana kyseenalaistin käännökset, jotta voisin tavoittaa mahdollisimman osuvat merkitykset lasten kokemuksista. Esimerkiksi unkarin sana *lap* on suomeksi mm. kirjansivu, paperiarkki, paperilappu, laatta, levy, sanomalehti, miekanlape, geometriassa pinta, postikortti tai pelikortti. Pyrin päättelemään asiayhteydestä, mitä näistä merkityksistä lapsi saattaisi tarkoittaa. Vaivasin tulkkeja kiusaantumiseen asti kyseenalaistamisellani. He ihmettelivät ajoittain, mistä tiedän sanojen monia merkityksiä. Sanakirjat tarjosivat monipuolistavaa apua. Käytin myös englannin taitoani tavoittaakseni osuvia merkityksiä. Esimerkkinä mainittakoon suomen sana *laskea*, jolla englannissa on ainakin 15 erilaista merkitystä. Matematiikan yhteydessä näistä huomattavia merkityksiä ovat count, calculate tai compute, jotka tarkoittavat esimerkiksi lukujen luettelemista, määrän laskemista, sormilla tai päässä laskemista ja arvioimista. Selitin tulkeille englannin esimerkeillä, mitä pohdinnallani tavoittelin. Pyrin kääntämään vaatimattoman kielitaitoni tutkimuksen luotettavuuden vahvuudeksi.

Tarkoituksena oli myös saavuttaa käsitteellisesti yleistä tietoa seuraavista kokemuslaaduista: tunteista, asenteista, uskomuksista ja käsityksistä itsestä matematiikan oppijana. Näillä käsitteellisesti yleisillä, yleiskäsitteillä, oli mahdollista havaita yhtäläisyyksiä ja eroja kokemuslaaduissa yksittäisten oppilaiden, opetusryhmien sekä Suomen ja Unkarin välillä. Ihmisen kyky ajatella yleiskäsitteiden avulla mahdollistaa samankaltaisuudet ja erot (Varto 1992). Yhtäläisyyksiä ja eroja tunteista, asenteista, uskomuksista ja käsityksistä itsestä matematiikan oppijana tarkastellaan Suomea ja Unkaria laajemmin seuraavassa pohdintaluvussa.

Koetun matematiikan opetussuunnitelman yleistettävyyteen on suhtauduttava varoen. Yleistämisen suhteen tutkimusaineistolla omat rajoitteensa. Sen perusteella on mahdotonta päätellä, ovatko nämä kokemukset oppilaille pysyviä ja tyypillisiä pitemmällä aikavälillä kokemusten karttuessa matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta tulevina kouluvuosina. Koska kysymyksessä on ainoastaan vain kirjoitelma- ja piirrosaineisto, ei sen perusteella voida tehdä johtopäätöksiä tutkimusryhmien oppilaiden kokemasta matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta kokonaisuudessaan. Tulosten perusteella ei voida myöskään päätellä, miten oppilaat ovat menestyneet tai menestyvät matematiikassa.

Siitä huolimatta, että tutkimuksella on omat rajoitteensa, nähdään tämän tutkimuksen koetun opetussuunnitelman mallin, aineiston analyysimenetelmän ja matematiikan opetussuunnitelman tutkimuksen viitekehyksen olevan siirrettävissä oppilaiden kokeman opetussuunnitelman tutkimiseen yleisemminkin. Sen sijaan yksityiskohtaisia empiirisiä tuloksia voidaan siirtää vain perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemuksiin, jos heitä on opetettu Varga-Neményi -opetusmenetelmällä tai suomalaisittain ja jos oppilaiden opetusta ohjaa suomalainen tai unkarilainen matematiikan opetussuunnitelma.

7.6 Metodien yhdistäminen

Jos ontologinen analyysi osoittaa ilmiön paljastuvan vain usean tutkimusmenetelmän yhdistelmällä, lisää niiden käyttö tutkimuksen luotettavuutta. Tutkimusmenetelmät *valitaan ontologisen analyysin perusteella huomioiden tutkimusmenetelmien ominaislaatuun kuuluva relativistinen käsitys todellisuudesta. (Perttula 1995, 103).*

Tämän tutkimuksen lähtökohtana oli käsitys 9–10-vuotiaasta lapsesta, perusopetuksen neljäsluokkalaisesta: hän luo aktiivisesti omaa opetussuunnitelmaansa tulkiten tarkoitettua, mahdollista ja opettajan toteuttamaa opetussuunnitelmaa eikä vain passiivisesti vastaanota niitä. Ihmiskäsitystä voidaan empiirisen tutkimuksen kannalta luonnehtia siten, että sillä tarkoitetaan kaikkia tutkimuskohdetta koskevia edellytyksiä ja oletuksia (Rauhala 2005, 18), kun taas ihmiskuva muodostuu tutkimuksen tuloksena (Rauhala 2005, 19). Käsitys ihmisestä vaikuttaa tutkijan arvoihin, tutkimuksen rajaamiseen, tutkimusmenetelmien valintaan ja tulkintaan, koska kaikkien tutkimuksellisten toimien taustalla on jokin käsitys ihmisestä sekä ihmisen ja todellisuuden välisestä suhteesta (Perttula 1995, 180). Jotta tutkimuksen luotettavuutta voidaan arvioida, on tuotu esille eksplisiittisesti tutkijan suhde tutkittaviinsa. Tutkimuksen viitekehyksessä on niin ikään tuotu esille se, että tunteet, asenteet, uskomukset ja ihmisen käsitys itsestä ovat kokemuslaatuja ja että kokemus nähdään ihmisen perussuhteena maailmaan.

Tutkin suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa kahdesta aineistosta: oppilaiden kirjoitelmista, joiden aiheena oli ”Minä matematiikan oppijana” ja matematiikan oppituntia esittävistä piirroksista. Näiden kahden aineiston ymmärtämistä ja tulkintaa tutkimuksen taustalla olevan viitekehyksen lisäksi tukivat havainnointi-, valokuva- ja videoaineisto tutkimusmatkoilta Unkarista ja Suomesta. Muistiinpanot täydennyskoulutuksista videoineen (ks. liitettä 1) Varga–Neményi -opetusmenetelmästä edistivät oppilaiden aineiston analyysia, jota selkiytti myös opettajien haastattelu. Aineiston monipuolisuus lisäsi tutkimuksen luotettavuutta, koska oli mahdollisuus sen avulla tarkentaa kirjoitelmista ja piirroksista tehtyä tulkintaa. Kun käytetään useampaa kuin yhtä menetelmää aineiston hankkimisessa, on kysymys menetelmätriangulaatiosta (Cohen, Manion & Morrison 2000, 112–113).

Oppilaat kirjoitelmissaan kertoivat pääasiallisesti itsestään matematiikan oppijana ohjeen mukaisesti, mutta vähemmän opetuksesta. Se on ymmärrettävää, koska oppilaat tarkastelevat opetusta omasta näkökulmastaan. Piirrokset puhekuplineen mahdollistivat oppilaiden matematiikan opetuksesta saamien implisiittisten kokemusten lähestymisen. Myös Hannula (2007, 199) näkee, ettei ole helppoa saada nuoremmilta lapsilta rikkaita kielellisiä vastauksia kysymyksiin. Hän arvioi juuri tässä tutkimuksessa suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten kokemasta matematiikan opetussuunnitelmasta käytetyn piirrosaineiston ja sen analyysin rikkaaksi välineeksi saavuttaa yleisiä uskomuksia itsestä, matematiikasta ja matematiikan opetuksesta. Metodologisena tekniikkana piirrosten käyttö on suositeltavaa Yuenin (2004, 461) mukaan merkityksellisten vastausten saamiseksi lapsilta. Laadullisessa tutkimuksessa yksi isoimmista tutkijan haasteista on kaapata lasten kokemukset ja niiden merkitykset tutkittavien näkökulmasta. Piirrokset useimpien lasten luonnollisena kommunikoinnin välineenä voivat auttaa lapsiryhmien haasteellista tutkimusprosessia, koska ne rentouttavat ilmapiiriä, auttavat tutkijaa näkemään tutkittavaa kohdetta lasten näkökulmasta, jäsentävät ja keskittävät keskustelua ja vähentävät lasten ryhmäajattelun mahdollisuutta. Kuvien avulla lapset saattavat ilmaista ja jakaa kokemuksiaan, joista muuten on vaikea puhua. Piirrosten avulla 5–7-vuotiaat lapset kertovat tapahtumista enemmän kuin pelkän kielellisen haastattelun tai tapahtuman näyttelemisen avulla (Salmon, Roncolato & Gleitzman 2003). Trend ym. (2000, 85) varoittavat lasten piirrosten naiivista ja stereotyyppisestä tulkinnasta: Lapset saattavat piirtää stereotyyppisesti, mutta haastattelu paljastaa lasten kehittyneitä representaatiota tutkittavista asioista. Mm. Bulmer ja Rolka (2005), Halverscheid ja Rolka (2006), Haney ym. (2004), Rolka ja Bulmer (2005), Rolka ja Halverscheid (2006), Swennen ym. (2004) sekä Wetton ja McWhirter (1998) arvostavat piirroksia luotettavina ja valideina keinoina saada näkyväksi ainutlaatuista tietoa oppilaiden ja opettajaopiskelijoiden käsityksistä opetuksesta ja opetussuunnitelmasta.

Tutkimusaineistojen ja –menetelmien lisäksi tutkimuksessa yhdistyivät tutkimusmetodit, hermeneutiikka ja fenomenologia. Koetun matematiikan opetussuunnitelman tutkimuksen aikana joutui pohtimaan sen kuvaamisen lisäksi ymmärtämistä ja tulkintaa, koska on mahdotonta kuvata ilmiötä ymmärtämättä sitä. Ymmärtäessään ilmiötä tutkija samalla tulkitsee sitä. Patton (2002, 546) korostaa tutkimuksen luotettavuutta edistävänä tekijänä triangulaatiota, ilmiön "kaappaamista" monista näkökulmista. Tutkimuksen taustalla olevassa viitekehyksessä yhdistyivät myös koetun opetussuunnitelman lähestymistavat, Suomen ja Unkarin perusopetuksen matematiikan opetussuunnitelmat sekä Varga–Neményi -opetusmenetelmä ja matematiikan opetus suomalaisittain toteutuneena matematiikan opetussuunnitelmana. Tutkimuksessa yhdistyivät myös erilaiset teoreettiset lähtökohdat. Kiinnostus uskomuksiin on peräisin pääasiassa kognitiivisesta psykologiasta, kun taas kiinnostus asenteisiin on tullut sosiaalipsykologiasta. Oppilaan matemaattinen minäkäsitys nähdään tässä tutkimuksessa kasvatustieteellisenä käsitteenä.

Tutkimusmenetelmällisten ratkaisujen yhdistämisen l. triangulaation arvioidaan edistäneen koetun matematiikan opetussuunnitelman tavoittamista ja luotettavuutta.

7.7 Tutkijayhteistyö

Tutkijayhteistyö lisää tutkimuksen luotettavuutta, jos se lisää tutkimuksellisten menettelyjen systemaattisuutta ja ankaruutta. Usean ihmisen käsitys ei sinällään ole yhden ihmisen käsitystä luotettavampi. Myöskään yksittäinen tutkimustulos ei muutu automaattisesti epäluotettavaksi, vaikka toiset tutkimustulokset eivät sitä vahvistaisikaan. Tutkimustulokset kumoutuvat vasta, kun aiemman kanssa ristiriitainen tieto on saatu johdonmukaisesti ontologisesti relevanttien ja systemaattisesti ankarien tutkimuksellisten menettelyjen tuloksena. Tämä kuvaa myös näkemystä tieteellisen tiedon kasautumisesta. Vastaavin ehdoin määrittyy myös luotettavana pidettävä tieto.

Tutkijoiden on tiedettävä, mitä kunkin menetelmällisen toimenpiteen systemaattisuudella ja ankaruudella tarkoitetaan. (Perttula 1995, 103).

Vaikka ei ollut mahdollista tutkia suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa yhteistyössä, hakeuduin aktiivisesti keskusteluun matematiikasta, opetuksesta, Suomen ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelman perusteista perillä olevien ihmisten kanssa. Aineiston analysointia ja tulkintaa testautin useissa opettajien perus- ja täydennyskoulutustilaisuuksissa. Myös arviointi julkaistusta artikkelista "Miten Tytti voikaan kokea matematiikan opetuksen" (Tikkanen 2005) antoi palautetta aineiston analysoinnista ja tulkinnasta. Piirrosaineiston analyysi ja tulkinta testautuivat myös kahdeksan opettajan ja tutkijan välisessä yhteistyössä, jonka tuloksena julkaistiin artikkeli "Hm-mm! Mikä lasku! Suomalaisten alakoululaisten uskomuksia matematiikasta" (Tikkanen 2006). Artikkelissa ei käytetty tämän tutkimuksen aineistoa, vaan kahdeksan opettajan kokoamaa aineistoa.

Budapestissa Finnagorassa pidetty seminaariesitelmä koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta täydensi palautetta aineiston analyysista ja tulkinnasta unkarilaisen opetusmenetelmän ja opetussuunnitelman näkökulmasta. Unkarilaisen tutkimuskoulun kolme opettajaa selvensivät kirjoitelma- ja piirrosaineiston käsittelyä. Aineiston analysointia kyseenalaistettiin myös vertaisselvittäjän avulla, josta tarkempi kuvaus on menetelmäluvussa. Suomen Varga–Neményi -rekisteröidyn yhdistyksen jäsenet ja hallitus esittivät arvokkaita kysymyksiä tutkimuksesta. Tutkimuksen ohjaajat tukivat, miten ilmaista osuvasti tutkimuksen löydöksiä ja selventää tutkimusasetelman välisiä yhteyksiä.

Monet piirrosten katselijoista näkivät kulttuurisia eroja suomalaisten ja unkarilaisten lasten kuvallisessa ilmaisussa. Tutkijana paneuduin piirroksia aineistona käyttäneisiin tutkimuksiin laajasti. Katselin lasten ja aikuisten piirroksia Grönlannista Australiaan ja kaikista maanosista eli maapallon ympäri. Aluksi vierasmaalaiset piirrokset oudoksuttivat. Kun peilasin niitä tietoihini maapallon kasvillisuus- ja ilmastovyöhykkeistä sekä kulttuureista, outouden tunne katosi. Piirrosten ihmiset, talot ja puut myötäilivät piirtäjiensä elinkonteksteja.

Piirroksia analysoivien ja tulkitsevien tutkijoiden välistä yksimielisyyttä pidetään suhteellisen korkeana. Lähes yksimielisestä tulkinnasta kertovat mm. Gillies-Rezo & Bosacki (2003), Huber ja Burton (1995) sekä Gulek (1999). Piirroksissa olevien työtapojen luokittelusta Gulek (1999) havaitsi, että luokittelijoiden välinen korrelaatio työtapojen osalta on .79 - .90 ja merkitsevä, oppimateriaalien osalta .67 - .83 niin ikään merkitsevä. Koetun matematiikan opetussuunnitelman tutkijan ja vertaisselvittäjän yksimielisyys piirrosten kyselevästä opetuksesta ja yksilöllisestä työskentelystä oli sataprosenttinen, muista työtavoista yksimielisyys saavutettiin piirrosten yksityiskohtien tarkastelun jälkeen.

Tutkimusaineiston analyysin toistettavuutta tutkimuksen luotettavuuden kriteerinä korostaa Mäkelä (1995, 53–54). Tällöin analyysin luokittelu- ja tulkintasäännöt esitetään niin yksiselitteisesti, että toinen tutkija päätyy aineistosta samoihin tulkintoihin. Käsitteellinen tulkinta laadullisessa tutkimuksessa täyttää harvoin reversiibeliyden vaatimuksen niin, että aineiston tulkinnoista voitaisiin päästä takaisin aineistoon, kuten on mahdollista kvantitatiivisessa tutkimuksessa esimerkiksi faktorimatriisin ja residuaalien avulla rekonstruoida korrelaatiomatriisi. Laadullisen tutkimuksen analyysin ja tulkinnan vaatimuksena ei kuitenkaan Mäkelän (1995, 59) mukaan ole, että kaksi tulkitsijaa tulee samaan lopputulokseen, vaan että lukijalle annetaan edellytykset arvioida ja mahdollisesti hyväksyä tutkijan ratkaisut.

Tutkijan yhteistyön arvioidaan edistäneen koetun matematiikan opetussuunnitelman systemaattista ja kurinalaista tutkimista sen luotettavuuden lisäämiseksi.

7.8 Tutkijan subjektiivisuus

Tutkijan on tajunnallisena olentona tutkimustyönsä subjekti ja hänen on reflektoitava, analysoitava ja raportoitava sen merkitys tutkimuksen eri vaiheissa. Tutkijan tajunnallisuus on tutkimustyön välttämätön edellytys. (Perttula 1995, 103).

Koetun matematiikan opetussuunnitelman tutkijan subjektiivisuus on tuotu esille eksplisiittisesti antamalla tietoja tutkijan kansalaisuudesta, sukupuolesta, ammatista ja kirjallisesta julkaisutoiminnasta, koska tutkija nähdään tutkimusvälineeksi ymmärtää aineistoa ja sen tulkintaa. Aineiston tulkinnan luotettavuutta lisää tutkijan pitkä työkokemus opettajana, tutkimusmatkat Unkariin, Suomen ja Unkarin opetussuunnitelmien tuntemus, Varga–Neményi -opetusmenetelmän käytännön soveltaminen vuodesta 2000 sekä suhteellisen laaja täydennyskoulutus. Luotettavuutta lisää myös tutkijan ammatillinen perehtyneisyys matematiikan opetukseen suomalaisittain, jota käsiteltiin luvussa 3.2. Tämä tausta lienee vaikuttanut matematiikan unkarilaisen Varga–Neményi -opetusmenetelmän soveltamiseen ja oppilaiden kokeman matematiikan opetussuunnitelman tulkintaan. On huomattava, että suomalaisen Varga –Neményi -opetusryhmän kokemukset matematiikasta perustuvat opettajansa ensimmäisiin kokeiluvuosiin unkarilaisesta opetusmenetelmästä.

Tutkijan rooli on vaihdellut osallistuvan, havainnoivan ja ulkopuolisen roolien välillä. Nämä roolit ovat mahdollistaneet, että tutkija on voinut säädellä suhdetta sekä aineistoon, oppilaisiin että opettajiin. On voitu tutkia matematiikkaa oppilaiden kokemana toisaalta ulkopuolisena, toisaalta sisältäpäin tutkivana opettajana. Mahdollisesti suomalaisten oppilaiden Varga–Neményi -opetusryhmästä myönteiset kokemukset matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta ovat yhteydessä opettajan innostukseen. Muutamat opetusryhmän oppilaat mainitsivatkin sen kirjoitelmissaan. Esimerkiksi Heidi toteaa matematiikan olevan lempiaine siksi, että opettajakin pitää matematiikasta ja on innostunut siitä. Kallesta matematiikka on hauskaa, koska opettaja tekee sen hauskaksi. Jotta opetusmenetelmä olisi vaikuttava ja tuloksellinen, on opettajan oltava innostunut (Varga 1968; 1976, 172, 176–177).

Kokonaisuutena tutkijan subjektiivisuudella on tämänkaltaisessa laadullisessa tutkimuksessa ollut merkittävä asema. Tutkijan subjektiivisuus on ollut voimakkaimmin läsnä aineiston analysoinnissa, luokittelussa, tulkinnassa, autenttisten tekstilainausten ja piirrosten valinnassa. Valinnat ovat perustuneet tutkimuksen ongelmiin ja aineiston teemoihin. Tutkijan subjektiivisuuden vaikutusta pyrittiin ehkäisemään aineiston hankintatavalla (Lankshear & Knobel 2004, 108–110). Oppilaathan kirjoittivat ja piirsivät kokemuksistaan matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta suhteellisen ohjaamattomasti. Tällöin tutkija ei ole yhtä läheisessä kontaktissa tutkittaviinsa kuin esimerkiksi haastattelussa.

Subjektiivisuus tutkimustyön edellytyksenä on suunnannut tutkijaa mielenkiintoisiin kohteisiin, jotka ovat vaikuttaneet tehtyihin ratkaisuihin kuten tarkasteltavien teemojen valintaan. Lasten kirjoitelma- ja piirrosaineistosta löytyy muitakin näkökulmia. Subjektiivisuuden tiedostaen tutkimusprosessista nousseita ajatuksista pidettiin päiväkirjaa, jolla pyrittiin kurinalaisesti hallitsemaan subjektiivisuutta. Tutkimuspäiväkirja mahdollisti tehtyjen ratkaisujen tarkastelun ja kuvaamisen tutkimusraporttiin.

7.9 Tutkijan vastuullisuus

Tutkijan on suoritettava kaikki tutkimukselliset toimenpiteet systemaattisesti. Hän ei kykene välittämään tutkimusraportissa kaikkia tutkimuksellisia yksityiskohtia niin, että toinen ihminen kykenisi konstruoimaan tutkimuksen täsmälleen tapahtuneessa muodossa. Tämän vuoksi tutkijan vastuullisuus on merkittävä osa tutkimuksen luotettavuutta. Se ulottuu tutkimusprosessin kaikkiin vaiheisiin. Vain tutkija voi viime kädessä arvioida vastuullisuutensa toteutumisen. (Perttula 1995, 104).

Tutkijana olen pyrkinyt toimimaan systemaattisen vastuullisesti monella eri tavalla. Tutkimuksen suunnitteluvaiheessa pyrin luomaan luottamuksellisen suhteen suomalaisiin ja unkarilaisiin oppilaisiin, heidän vanhempiinsa, opettajiin ja tutkittavien koulun rehtoreihin käytettävissä olevan ajan ja maantieteellisen etäisyyden rajoissa.

Lähestyin tutkimusaineistoa avoimin silmin, pyrin luomaan ihmettelevää ja ymmärtävää suhdetta siihen. Tutustuin kirjoitelma- ja piirrosaineistoon hyvin, mitä edisti aineiston sanatarkka puhtaaksikirjoitus. Suomalaisena opettajana ja tutkijana olen pyrkinyt parantamaan kykyäni ymmärtää unkarilaisten oppilaiden kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa keskustelemalla unkarilaisopettajien kanssa esiopetuksesta lukioon. Sekä teoreettisen viitekehyksen ohjaaman ja aineistolähtöisen aineiston analyysin rakentamisessa on pyritty huolellisuuteen ja tarkkuuteen. Aineiston analysointi vaiheineen ja esimerkkeineen on esitetty menetelmäluvussa tarkasti.

Olen pitänyt tutkimuspäiväkirjaa tutkimuksen etenemisestä, sen aikana heränneistä ajatuksista ja valinnoistani. Tutkimuspäiväkirja mahdollisti syntyneiden tulkintojen epäilemisen, joita testasin päinvastaisillakin tulkinnoilla. Koska kirjoitelma-aineiston analyysiyksiköt eriteltiin tarkasti ja niille laadittiin tulkintasäännöt, aineiston analyysi oli suhteellisen vaivattomasti toistettavissa. Noin puolen vuoden jälkeen aineiston analyysin jälkeen toistin analyysin ja vuoden päästä toisen kerran. Toistettavuudella pyrin varmistumaan luokittelujeni pysyvyydestä, etteivät ne olisi hetkellisiä mielijohteita. Kirjoitelma-aineiston toistuva analyysi oli välttämätöntä, koska vertaisselvittäjää ei ollut käytettävissä. Aineiston analysoinnin vastuullisuutta lisää se, että tutkija analysoi aineiston ilman ulkopuolista apua. Vertaisselvittäjä kyseenalaisti piirrosaineistonanalyysin, jotta aineiston luokitteluperusteet tulisivat selkeästi ilmaistuiksi ja testatuiksi.

Tutkimusraportissa aineistouskollisuudesta on huolehdittu esittämällä lukijalle runsaasti lainauksia oppilaiden kirjoitelmista ja tuloksia on argumentoitu runsaasti piirrosaineistoa hyödyntäen. On huomattava, että kaikilta oppilailta on lainauksia kirjoitelmista. Piirrosaineiston laajuuden vuoksi vain noin kolmannekselta oppilaista on piirrosnäyte.

Koska tutkittavat olivat lapsia, kiinnitettiin erityistä huomiota heidän anonyymiuteensa (Lankshear & Knobel 2004, 110-111). Kunnioittaen lasten ilmaisutapaa kirjoitelmissa ja piirroksissa, joissa he käyttivät luokkatovereidensa nimiä, muutin alkuperäiset nimet tutkimusnimiksi. Näin tutkijan kädenjälki näkyy piirroksissa mm. pulpeteissa istumajärjestyksessä, puhe- ja ajatuskuplissa sekä kirjallisissa tehtävissä. Tutkimustulokset on pyritty esittämään niin, ettei autenttisista kirjoitelmalainauksista ja piirroksista olisi tunnistettavissa yksittäistä oppilasta. Luultavasti oppilaiden läheiset ja luokkatoverit tunnistavat omia ja toistensa kokemuksia.

Edellä esitetyn perustella arvioin toimintani koetun matematiikan opetussuunnitelman tutkijana vastuullisiksi ja eettisiksi.

7.10 Kooste

Kaiken kaikkiaan koettu matematiikan opetussuunnitelman tavoittaminen arvioidaan luotettavaksi, koska tutkija on toiminut johdonmukaisesti. Tutkimusprosessin pohdinta ja sen kuvaus ovat riittäviä. Näin lukija voi seurata tutkimuksen etenemistä ja tehtyjä ratkaisuja. Oppilaiden kokema matematiikan opetussuunnitelma on uskottava, koska he uskovat käsitystensä olevan tosia. Oppilaiden uskomukset ovat argumentoitavissa osittain realistisiksi. Tutkimus arvioidaan teoria- ja aineistolähtöiseksi. Tutkimusraportin teoreettisella viitekehyksellä Varga–Neményi -opetusmenetelmästä ja matematiikan opetuksesta suomalaisittain sekä Suomen ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelman perusteilla on luotu edellytyksiä ymmärtää ja tulkita koettua matematiikan opetussuunnitelmaa. Koetun matematiikan opetussuunnitelman tutkimuksella on saavutettu käsitteellisesti yleistä tietoa. Tutkimusmenetelmällisten ratkaisujen yhdistäminen l. triangulaatio on edistänyt koetun matematiikan opetussuunnitelman tavoittamista ja luotettavuutta. Tutkijan yhteistyö eri tahojen kanssa on edistänyt systemaattista ja kurinalaista tutkimusprosessia luotettavuuden lisäämiseksi. Tutkijan subjektiivisuus on raportoitu asianmukaisesti ja tutkija on toiminut vastuullisesti ja eettisesti tutkittaviaan kunnioittaen.

8 POHDINTA

Tutkimuksessa selvitettiin 20 suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän perusopetuksen neljäsluokkalaisen, 23 unkarilaisen Varga–Neményi -opetusryhmän neljäsluokkalaisen ja 21 suomalaisen opetusryhmän neljäsluokkalaisen kokemuksia matematiikan opetuksesta, matematiikasta oppiaineena ja sen oppimisesta. Näiden kolmen opetusryhmän oppilaista käytetään nimityksiä suomalainen ongelmanratkaisija, unkarilainen yhtälönratkaisija ja suomalainen laskija opetusryhmiä vastaavassa järjestyksessä koetun matematiikan opetussuunnitelman sisältöjen mukaan. Heidän kuvauksistaan oli luettavissa, miten he tulkitsevat maansa kansallista matematiikan opetussuunnitelmaa ja sitä toteuttavaa opetusmenetelmää. Suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten kokemaa matematiikan opetussuunnitelmaa pohditaan pedagogisesta näkökulmasta Suomen ja Unkarin virallisen tarkoitetun matematiikan opetussuunnitelman ja opetusmenetelmien peilinä. Pohdinnan kursivoiduissa kehystetyissä teksteissä ovat tiivistettyinä tutkimuksen päätulokset, joita peilataan sekä matematiikan opetussuunnitelmiin, opetusmenetelmiin että aiempiin tutkimustuloksiin. Lopuksi pohditaan, miksi tutkia koettua matematiikan opetussuunnitelmaa.

8.1 Koettu matematiikan opetussuunnitelma tarkoitetun opetussuunnitelman ja opetusmenetelmän peilinä

Lasten kokeman matematiikan opetussuunnitelman pohjalta pohditaan matematiikan työtapojen monipuolisuutta, lasten kokemuksia väärinvastaamisesta, oppikirjan merkitystä ja 9–10-vuotiaiden käsityksiä matematiikan oppimisesta. Tarkastellaan myös lasten tunteita, matematiikka-asenteita, uskomusten monipuolisuutta matematiikan sisällöistä ja käsityksiä itsestä matematiikan oppijana. Lopuksi kootaan keskeiset empiiriset tulokset koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta. Empiiristen tulosten pohjalta mallinnetaan koettua matematiikan opetussuunnitelmaa ja sen muodostumista.

8.1.1 Työtapojen monipuolisuus

Suomalainen laskija ja unkarilainen yhtälönratkaisija kuvasivat matematiikan oppitunteja useimmin kyseleväksi opetukseksi ja yksilölliseksi työskentelyksi. Oppilaskeskeinen yksilöllinen työskentely oli sekä laskijan, yhtälönratkaisijan että ongelmanratkaisijan toiseksi eniten kuvaama työtapa. Unkarilainen yhtälönratkaisija kuvasi myös oppilaskeskeistä opetuskeskustelua, jota suomalaiset eivät kuvanneet. Suomalainen ongelmanratkaisija ja laskija kuvasivat matematiikan oppituntia yhteistoiminnallisena pari- ja ryhmätyöskentelynä sekä opettajan esityksenä, mutta unkarilainen yhtälönratkaisija ei. Suomalainen ongelmanratkaisija kuvasi matematiikan oppitunteja yhteistoiminnallisena pari- ja ryhmätyönä useammin kuin suomalainen ikätoverinsa. Lasten kuvauksissa suomalaisten työtavat matematiikan oppitunneilla olivat monipuolisempia kuin unkarilaisten.

Monet tutkimukset osoittavat samankaltaisia tuloksia työtavoista matematiikan oppitunneilla. Andrews ja Hatch (2001) sekä Price (1997) havaitsivat, että matematiikan oppitunneilla Unkarissa oppilaat työskentelevät opettajajohtoisen kyselyn ohjaamana ja oppilaskeskeisesti yksilöllisesti tehtäviä tehden. Suomessakin on 2000-luvun tutkimuksissa tehty samoja havaintoja matematiikan oppituntien työtavoista (Maijala tulossa; Niemi 2001; 2004; Perkkilä 2002; Pietilä 2002). Opettajajohtoista kyselevää opetusta ja yksilöllistä työskentelyä käytetään matematiikan oppimistilanteissa myös eri puolilla maailmaa, kuten Georgiassa Amerikassa (Davis & Barnard 2000), Yhdysvalloissa, Saksassa, Japanissa (Hiebert & Stigler 2000) ja Ghanassa (Mereku 2003). Niin ikään lasten kirjoitelma- ja piirrosaineistoihin perustuvat tutkimukset kertovat saman viestin työtavoista matematiikan oppitunnilla eri mantereilta, Afrikasta, Amerikasta, Australiasta ja Euroopasta (Alerby 2003; Aronsson & Andersson 1996; Gulek 1999; Kankaanranta & Linnakylä 1993; McDonough 2002; Murphy ym. 2004; Picker 2000; Tikkanen 2005; 2006). On pääteltävissä, että kyselevä opetus ja yksilöllinen työskentely matematiikan oppitunneilla ovat yleismaailmallisia ilmiöitä.

Opettajat suosivat juuri kyselevää opetusta, joten on tärkeää tiedostaa, millaiseen vuorovaikutukseen ja ajatteluun kysymykset ohjaavat. Tässä tutkimuksessa lasten kuvauksista välittyivät ensisijaisesti *mitä*-kysymykset, *miksi*- ja *miten*-kysymyksiä esiintyi huomattavasti vähemmän. *Mitä*-kysymyksiin vastataan faktatiedoilla, *miten*-kysymyksiin taitojen pohjalta ja *miksi*-kysymyksiin vastaaminen edellyttää ymmärtämistä ja päättelyä (ks. myös Ahteeta ym. 2005).

Suomalaisen ongelmanratkaisijan kokemana opettajan esitys, jossa kerrotaan ja havainnollistetaan, selventää opittavia matematiikan asioita. Opettajan esitys myös haastaa oppilaita ajattelemaan ja oppimaan. On mahdollisuus kysyä, jos ei ymmärrä. Suomalaisoppilaiden kokemukset esittävästä opetuksesta eroavat amerikkalaisesta havainnointitutkimuksesta (Davis & Barnard 2000), jonka mukaan vuosiluokkien 2–5 oppilaat istuvat suurimman osan matematiikan oppitunnista kuunnellen, katsellen tai kirjoittaen rutiinitehtäviä. Suomalaisoppilaiden kokemukset esittävästä opetuksesta ovat samansuuntaisia kuin yläkoululaisten oppimistulokset Australiassa, jossa matematiikan oppitunnista käytettiin 15 minuuttia opettajan selkeään esitykseen. Australialaiset yläkoululaiset edistyivät matematiikan tiedoissa ja ymmärtämisessä enemmän, ja heillä oli korkeammantasoiset minäpystyvyysuskomukset kuin oppilailla, joiden matematiikan oppitunnilla ei käytetty opettajan esitystä (Farkota 2003, 275–276). Opettajan suoran tai eksplisiittisen esittävän opetuksen on havaittu tukevan tehokkaasti lasten strategioiden kehittymistä (King 1991; Cardelle-Elawar 1992; Meloth & Derring 1994; Weinert & Helmke 1995; Dopkins Stright & Supplee 2002). Kuitenkin koulussa käytettävien työtapojen tulisi tarjota opettajajohtoisen esityksen ja yksilöllisen työskentelyn lisäksi työskentelyä ryhmissä, jotta oppilaiden sosiaaliset taidot ja itseohjautuvuus kehittyisivät.

Suomalaisten ongelmaratkaisijoiden kuvausten mukaan matematiikan oppitunneilla työskennellään pareittain tai ryhmissä. Myös Emmer ja Gerwels (2002, 80) havaitsivat observointitutkimuksessaan, että yhteistoiminnallista ryhmätyötä käytetään amerikkalaisilla ala-asteilla matematiikassa useammin kuin muissa oppiaineissa. Suomalaisen ongelmanratkaisijan kuvaamissa pari- ja ryhmätöissä oppilaat keskustelevat eri tavoin ratkaistavista ongelmista, niiden herättämistä tunteista ja niiden ratkaisemisessa käytettävistä toimintavälineistä. Suomalaisen laskijan kuvausten mukaan ryhmätyössä saatetaan pelleillä ja kokea vaikeuksia, joihin pyydetään opettajalta apua. Myös Dopkins Stright ja Supplee (2002) ovat tehneet samansuuntaisia havaintoja: Perusopetuksen amerikkalaiset kolmasluokkalaiset keskustelevat enemmän ajattelustaan ryhmätöiden aikana kuin opettajajohtoisen ja yksilöllisen työskentelyn aikana. Amerikkalaisilla kolmasluokkalaisillakin on enemmän järjestyshäiriöitä ja he pyytävät enemmän apua ryhmä- ja yksilötyöskentelyssä kuin opettajajohtoisen työskentelyn aikana matematiikan ja luonnontieteen oppitunneilla.

Ryhmätyöskentelyn onnistumiseen vaikuttavat perusteet, joilla ryhmät muodostetaan (Edwards 2004). Oppilaiden ystävyyden perusteella muodostuneet ryhmät toimivat laadukkaammin matematiikassa kuin opettajan määräämät ryhmät. Cantwell ja Andrews (2002) korostavat kognitiivisten ja psykologisten tekijöiden merkitystä oppilaiden kokemuksissa ryhmätyöstä. Oppilaat, jotka pitävät ryhmätyöstä, ovat sosiaalisempia ja vähemmän ahdistuneita sosiaalisista tilanteista. Heillä on myös korkeammat tavoitteet ja metakognitiivinen tietous kuin oppilailla, jotka eivät pidä työskentelystä ryhmissä. Ryhmätyöskentelyn on havaittu edistävän myönteistä asennetta matematiikkaan (Vaughan 2002).

Suomalaiset ja unkarilaiset perusopetuksen neljäsluokkalaiset kuvaavat useimmin käytettyinä työtapoina matematiikan oppitunneilla opettajajohtoista kyselevää opetusta ja yksilöllistä työskentelyä. On aiheellista monipuolistaa opettajajohtoista ja oppilaskeskeistä yksilöllistä työskentelyä oppilaskeskeisiksi yhteistoiminnallisiksi työtavoiksi, joihin Suomen opetussuunnitelman perusteissa 2004 ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelmassa 2003 viitataan. Oppilaiden yhteistoiminnallista työskentelyä painotetaan myös Varga–

Neményi -opetusmenetelmässä, suomalaisessa matematiikan pedagogisessa kirjallisuudessa ja opetusmenetelmissä. Oppilaiden kuvausten mukaan kyselevässä opetuksessa painottui faktojen muistaminen, joten on aiheellista monipuolistaa vuorovaikutuksen laatua kyselevässä opetuksessa.

8.1.2 Väärinvastaaminen kyselevän opetuksen aikana arveluttaa

Niin ongelmanratkaisija-, yhtälönratkaisija- kuin laskijatyttö saattaa kokea opettajajohtoisen kyselevän opetuksen arveluttavana. Suomalainen ongelmanratkaisijatyttö luulee toisten oppilaiden pilkkaavan häntä mahdollisesta väärästä vastauksesta. Myös kavereiden ääntely häiritsee häntä kyselyn aikana. Unkarilainen yhtälönratkaisijatyttö kokee tulleensa pilkatuksi vastattuaan väärin, joten hän ei mielellään vastaa matematiikan tunnilla. Väärinvastaaminen on myös suomalaisesta laskijatytöstä niin merkittävä kokemus, että kuvaa sitä käärmemetaforan avulla, jolloin opettaja saa hirviömäisiä piirteitä.

Matematiikan unkarilaisessa Varga–Neményi -opetusmenetelmässä korostetaan, että on luonnollisesti lupa erehtyä uusia asioita opittaessa, periaate ei kuitenkaan ole vakuuttanut kaikkia oppilaita suomalaisessa eikä unkarilaisessa Varga–Neményi -opetusryhmässä. Oppilaiden kokemia ahdistavia tilanteita matematiikan opetuksen aikana on havaittu muissakin tutkimuksissa. Newsteadin (1998, 66) tutkimuksen yksi tärkeimmistä löydöistä oli, että lapset jo 9–11-vuotiaina kokevat merkittävästi matematiikka-ahdistusta sosiaalisissa tilan-teissa opettajan ja luokkatovereiden kanssa työskennellessään. Osa lapsista oli ahdistuneita ainoastaan näistä matematiikan sosiaalisista tilanteista, eivät niinkään laskemisesta ja numerotyöskentelystä. Newstead (1998) päätteli, että jos oppilaat oppivat matematiikkaa, ennen kuin oppivat selittämään ongelmia ja kommunikoimaan matematiikasta, kysymykset ja tarve selittää voivat aiheuttaa matematiikka-ahdistusta. Niin ikään Hannula (2003, 33–36) raportoi suomalaisen yläkouluikäisen tytön ahdistuksesta matematiikan oppitunnilla, kun hänellä oli vaikeuksia matematiikan tehtävissä. Auttaessaan opettaja ei kuunnellut oppilasta, joka ei saanut tilaisuutta kertoa ajatuksistaan. Opettaja ositti vaikean tehtävän erittäin yksinkertaisiksi laskutoimituksiksi, joita oppilaan oli ratkaistava. Opettaja hermostui oppilaan vääristä vastauksista ja vaikutti oppilaasta jopa vihaiselta. Tällöin tyttö meni lukkoon ja oli lopulta kyvytön ajattelemaan selvästi. Muistellessaan tilannetta myöhemmin hän purskahti itkuun. Myös jotkut englantilaiset perusopetuksen neljäsluokkalaiset kokivat ahdistusta matematiikan tunnilla kyselevän opetuksen aikana, vaikka opettajilla oli lämpimät ja huolehtivat suhteet oppilaisiinsa (Anderson & Boylan 2002).

On pedagoginen haaste, kuinka ennakoiden minimoida mahdollisen väärinvastaamisen aiheuttamaa jännitystä tai ahdistusta. Varga (1968) esitti, miten kysymyksillä ohjataan oppilasta oikean ratkaisun oivaltamiseen. Se on yksi tapa, mutta ei liene ainut. Monia keinoja kannattaa etsiä, kun oppilaan hyvinvointi on kyseessä. Englantilaiset kahdeksasluokkalaiset esittävät, että ennen vastaamista olisi annettava aikaa ajatella, keskustella luokkakaverin kanssa tai oppilaat esittäisivät kysymyksiä (Boylan & Lawton 2000, 12). Anderson ja Boylan (2002, 53) esittävät, että oppilaiden kuorossa vastaaminen saattaisi vähentää mahdollisen väärinvastaamisen aiheuttamaa ahdistusta. Ahdistusta vähentävät myös oppilaiden yksilöllisesti kirjoittamat vastauskortit, jolloin opetusryhmä vastaa yhtä aikaa kortteja näyttäen (Christle & Schuster 2003). Kirjalliset vastauskortit aktivoivat oppilaita osallistumaan kyselevään opetukseen enemmän kuin suullinen vastaaminen. Ne edistävät myös oppilaiden tehtäviin keskittymistä enemmän kuin suullinen vastaaminen kysymyksiin. On kuitenkin huomattava, että oppilaiden kirjoittamien vastauskorttien käyttömahdollisuuksiin vaikuttaa kirjoitustaito, joten vastausten pituuden olisi oltava suhteessa oppilaan kirjoitustaitoon. Oppilaiden itsensä tekemät pikapiirrokset (Riviera, Koorland & Fueyo, 2002) ja mahdollisuus käyttää toimintavälineitä vähentänevät ahdistusta ja jännitystä.

Vaikeuksissa olevan oppilaan tukemiseksi Topping, Kearney, McGee ja Pugh (2004, 355–358) suunnittelivat yhdessä opettajien kanssa mallin *dialogimatikka* (dialog tai duolog maths), kuinka tutor voi ohjata oppilasta matematiikan tehtävässä tai ongelmassa. Tutor voi olla opettaja tai oppilaan vanhempi. Dialogimatikka on prosessi, jossa on kahdeksan vaihetta: 1) Kuunteleminen: Aluksi tutor kuuntelee oppilaan näkemystä, mikä tehtävässä on vaikeaa. 2) Lukeminen: Koska oppilaalla saattaa olla vaikeuksia tehtävän lukemisessa, luetaan se uudelleen tai tarvittaessa tutor lukee sen oppilaalle ja tarkistaa, ymmärtääkö oppilas tehtävän. 3) Kysyminen: Tutor esittää kysymyksiä, jotka ohjaavat oppilaan ajattelua ja kyseenalaistavat väärinkäsitykset. On tärkeää, ettei oppilaan ajattelua arvioida vääräksi. 4) Ääneen ajatteleminen: Rohkaistaan oppilasta ajattelemaan ääneen. Silloin on mahdollisuus havaita, missä ja miten hän erehtyy. 5) Ongelman konkretisointi: Tehdään ongelma välineiden avulla havaittavaksi ja liitetään se oppilaan todelliseen elämään arkikieltä käyttäen. 6) Tarkistaminen: Ongelmanratkaisu tarkistetaan yhdessä oppilaan kanssa muistaen, että todennäköisesti on monia oikeita tapoja ratkaista ongelma. Jos kaikki oppilaat epäonnistuvat, näytetään heille, miten ongelma ratkaistaan samalla ajattelemalla ääneen. 7) Kiittäminen ja rohkaiseminen: Oppilasta kiitetään ja rohkaistaan pienistäkin onnistumista ongelmanratkaisun yksittäisissä vaiheissa. Pidetään hänen luottamustaan korkealla. 8) Yhteenveto ja yleistäminen: Lopuksi tehdään yhteenveto oppilaan päästrategioista ja vaiheista ratkaista ongelma. Pohditaan, missä ongelmaa voisi soveltaa (yleistäminen). Topping ym. (2004, 362–367) havaitsivat tutkimuksessaan, että dialogimatikka edistää matematiikan oppimista merkittävästi, mutta ei matematiikka-asenteita, kun oppilaan vanhemmat toimivat tutoreina. Kuitenkin haastattelussa sekä vanhemmat että oppilaat antoivat yleensä myönteistä palautetta tutoroinnista. Toisessa tutkimuksessa Topping, Campbell, Douglas ja Smith (2004) havaitsivat, että lasten vertaistutorointi (11-vuotias ohjaa seitsemänvuotiasta matematiikkapeleissä) edistää erityisesti nuorempien oppilaiden sekä matematiikan oppimista, myönteisiä asenteita että minäkäsitystä.

Suomessa käytetyt opetusmenetelmät, avoin ongelmanratkaisu ja tarinankerronta ja tosi-matematiikka, saattavat vähentää väärinvastaamisen aiheuttamaa ahdistusta. Esimerkiksi tarinankerronnassa ja tosi-matematiikassa oppilaat voivat vastata esitettyyn kysymykseen yhdessä puhekuorona, jolloin arasteleva oppilas saa tukea toisista. Avoimessa ongelmanratkaisussa oppilaita rohkaistaan soveltamaan ongelman ehtoja omaperäisesti, yhdistämään tietoja uudella tavalla aiemmasta poikkeaviksi ideoiksi. Ratkaisut voivat vaikuttaa epäloogisilta, niitä ei voi todentaa eikä kumota. Tällaiset pedagogiset ratkaisut edistänevät arastelevien oppilaiden osallistumista. Myös toimintavälineiden käytöstä opettajan on mahdollista havainnoida oppilaittensa ajattelua.

On pääteltävissä, että Suomen ja Unkarin matematiikan uusimpien opetussuunnitelmien suositukset oppilaskeskeisistä työtavoista on syytä ottaa vakavasti opetuksessa. Oppilaskeskeisissä työtavoissa opitaan yhteistyötaitoja, ja ne saattavat lievittää myös mahdollisen väärinvastaamisen aiheuttamaa jännitystä.

8.1.3 Oppikirjan vahva asema

Oppikirja matematiikassa välittyy suomalaisoppilaiden kuvauksista vahvemmin kuin unkarilaisoppilaiden. Suomalainen ongelmanratkaisija pitää oppikirjaa hyvänä oppimisvälineenä, vaikka sitä parempia ovat toimintavälineet ja kuvat. Suomalaiselle laskijallekin oppikirja ja vihko ovat tärkeitä, koska niiden avulla oppii laskemaan, ja nopeuskilpailu oppikirjan tehtävissä piristää.

Oppikirjan käyttöön Suomen matematiikan opetussuunnitelma 2004 ja Unkarin matematiikan opetussuunnitelma 2003 eivät ota kantaa, mutta molemmat suosittavat erilaisten esitysmuotojen käyttöä oppilaan abstraktisen ajattelun edistämiseksi. Matematiikan työtavoiksi Varga (1969c) suositteli matematiikan opetukseen toimintavälineitä tai työkortteja, mutta varoitti oppikirjan mekaanisesta käytöstä. Matematiikan oppikirjoja ja niiden käyttöä opetuksessa on tutkittu runsaasti kansainvälisesti (mm. Dowling 1998; Haggarty & Pepin 2002; Harries & Sutherland 1998; Mereku 2003; Nickson 2002; Schmidt ym. 1997). Suomalaista matematiikan opetusta perusopetuksessa, erityisesti alakoulussa, pidetään oppikirjasidonnaisena (Kupari 1999, 154–155; Maijala tulossa; Niemi 2001; 2004, 165; Pehkonen E. & Rossi 2007, 143–144; Pehkonen, L. & Krzywacki-Vainio 2007, 158–159; Perkkilä 2002, 170–172; Perkkilä & Lehtelä 2007, 74–75; Pietilä 2002, 144–147; Törnroos 2004, 32, 218).

TIMSS-tutkimusten perusteella Schmidt ym. (1997) pitävät oppikirjojen käyttöä matematiikan opetuksessa yleismaailmallisena ilmiönä. Käytetyllä matematiikan oppikirjalla on yhteys suomalaisten kuudesluokkalaisten oppimistuloksiin ja asenteisiin (Niemi 2001, 57; 2004, 143). Esimerkiksi Laskutaito-oppikirjaa käyttäneet kuudesluokkalaiset suhtautuivat positiivisemmin matematiikkaan kuin muiden matematiikan oppikirjojen mukaan opiskelleet kuudesluokkalaiset. (Niemi 2001, 71; 2004, 153). Asenne-erot johtunevat siitä, että opettajat pitävät oppikirjaa merkittävämpänä opetus-välineenä kuin opetussuunnitelmaa, koska se antaa paremman perustan opetuksen suunnittelulle ja toteutukselle kuin opetussuunnitelma. Luokan- ja aineenopettajat tunnustivat oppimateriaalien ja opetusvälineiden merkityksen opetussuunnitelmaa korkeammaksi 1980-luvun lopussakin (Kuusisto 1989, 13).

Perusopetuksen viidennen ja kuudennen luokan matematiikan oppikirjat täyttivät hyvin Opetussuunnitelman perusteissa 1994 asetetut tavoitteet alakoulun opetukselle, koska niiden pohjalta oppilailla on ollut mahdollisuus oppia matematiikan perustiedot ja -taidot (Törnroos 2004, 218). Suomessa yleisimmin käytössä olevissa matematiikan kirjasarjoissa on painotuseroja. Esimerkiksi Laskutaito-sarja on asioiden käsittelytavaltaan perinteinen, jolloin oppilasta ohjataan antamalla opittavasta asiatietoa, esimerkkejä ja harjoituksia. Tällainen oppikirja-aukeamarakenne oli havaittavissa myös tässä tutkimuksessa (ks. piirrosta 6.3.1.3 Oppikirjan tehtäviä tekemässä). Samantyyppisen perinteisen kaavamaisuuden sisältöalueiden käsittelyssä havaitsi myös Howson (1995, 38) tutkiessaan kahdeksan maan oppikirjoja laadullisesti. On kuitenkin huomattava, etteivät eri matematiikan oppikirjoja käyttäneiden suomalaisten seitsemäsluokkalaisten asenteet eronneet toisistaan merkitsevästi (Törnroosin puhelinhaastattelu 3.6.2005).

Oppikirjan valta oli erityisen vahva 1990-luvulla matematiikassa ja äidinkielessä, joissa kirjan ”sivujen” tai tehtävien tekeminen oli suomalaisten kolmasluokkalaisten kuvauksissa hallitsevin työtapa (Kankaanranta & Linnakylä 1993, 34). Verrattain tuore tutkimus (Tikkanen 2006) viestii oppikirjan vahvasta asemasta matematiikan opetuksessa, mitä todistavat suomalaisten kolmas- ja neljäsluokkalaisten 94 piirrosta 131 piirroksesta. Vain kuudesta piirroksesta löytyi toimintavälineitä kuten pelikortteja. Tietokonettakin käytetään piirrosten mukaan, mutta vasta sitten, kun oppilas on laskenut oppikirjan laskut.

8.1.4 Matematiikan oppimisesta

Suomalaisesta laskijasta, ongelmanratkaisijasta sekä unkarilaisesta yhtälönratkaisijasta matematiikan oppiminen on ymmärtämistä ja tajuamista. Oppiminen on ongelman- ja yhtälönratkaisijan mukaan ymmärtämisen ja tajuamisen lisäksi oivaltamista ja keksimistä. Keksimisen tarkoituksena on, että unkarilainen yhtälönratkaisija itse löytää säännön ratkaista tehtäviä. Sääntöjen keksimistä suomalaiset ongelmanratkaisija ja laskija eivät liitä matematiikan oppimiseen. Kun säännöt matematiikassa on keksitty, ovat ne unkarilaisen yhtälönratkaisijan mukaan niin tärkeitä, että niitä painetaan mieleen sekä koulussa että kotona, jotta muistaisi ne jatkossakin. Jotta voisi oppia, lasten mukaan on osallistuttava, kuunneltava tarkkaavaisesti, harjoiteltava ja kerrattava.

Myös englantilaisista perusopetuksen toisen ja kuudennen luokan oppilaista oppiminen on ymmärtämistä. Tämän lisäksi se on tietojen ja taitojen hankkimista (McCallum ym. 2000, 282). Englantilaiset oppilaat liittivät oppimiseen myös ajattelun, aivojen käytön, keskittymisen ja keksimisen. Niin ikään suomalaisista peruskoulun kolmasluokkalaisistakin 1990-luvun alussa oppiminen oli kokemista, toimintaa, lukemista, kirjoittamista ja ymmärtämistä (Kankaanranta & Linnakylä 1993, 11). Australialaiset perusopetuksen kahdeksasluokkalaisetkin yhdistävät oppimiseen kertaamisen, harjoittelun, osallistumisen ja tarkkavaisuuden (Askell-Williams & Lawson 2006, 17). Suomalaiset ja unkarilaiset opettajat pitivät ajattelua tärkeimpänä geometrian oppimisessa (Räty-Záborszky 2006, 221). Opettajien käsitykset ajattelemisesta ilmenivät tämän tutkimuksen oppilaiden kuvauksissa matematiikasta. Esimerkiksi Ismo suomalaisesta Varga–Neményi -opetusryhmästä kertoo, että aivot pääsee matematiikassa kuumille.

Suomalainen laskija ja ongelmanratkaisija sekä unkarilainen yhtälönratkaisija liittivät keskustelun matematiikan oppimiseen, kuten englantilaiset ja australialaiset oppilaatkin olivat erittäin tietoisia keskustelun merkityksestä oppimisessa (McCallum ym. 2000, 284; Askell-Williams & Lawson 2006, 15–19). Keskustelu syventää asian ymmärtämistä ja auttaa muistamaan sen paremmin. Kuparin (1999) mukaan suomalaiset nuoremmat opettajat korostivat vuorovaikutusta luokassa vanhempia opettajia painokkaammin. Näin tämän tutkimuksen suomalais- ja unkarilaisoppilaiden kuvauksissa matematiikan oppimisesta ilmenee samanlaisia käsityksiä kuin opettajilla.

Suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden kirjoitelmista ja erityisesti piirroksista välittyi opettajan kuunteleminen. Opettajan kuuntelu nähtiin oppimisstrategiana myös molemmissa englantilaisissa ikäryhmissä (McCallum ym. 2000, 284): Kuudesluokkalaisista kuunteleminen on erityisen tärkeää silloin, kun opettaja esittelee jotain uutta tai vaikeaa käsitettä esimerkiksi matematiikassa. Kuunteleminen on tärkeää silloin, kun opettaja ohjeistaa tehtäviä ja töitä.

Suomalainen ongelmanratkaisija argumentoi, että aktiivinen toiminta konkreettisine lopputuloksineen saa pitämään matematiikasta ja edistää sen oppimista. Englantilaiset kuudesluokkalaisetkin (McCallum ym. 2000, 285) selittivät, että aktiivinen toiminta aktivoi heidän ajatteluaan ja johtaa syvempään ymmärtämiseen. Kuudesluokkalaiset kuvasivat, kuinka kokeileminen, testaaminen ja materiaalien käsittely salli heidän tehdä arviointeja, arvioida tuloksia ja nähdä virheellisiä ennustuksia. Suomalaiset ongelmanratkaisijat, kuten Kanerva, Teemu, Heidi, Matti ja Silja, olivat sitä mieltä, että matematiikan oppimisessa käytetyt toimintavälineet ja kuvat edistivät oppimista. Suomalaisessa matematiikan pedagogisessa kirjallisuudessa sekä opettajien perus- ja täydennyskoulutuksessa on pitkään korostettu toimintavälineiden merkitystä (Häggblom 2006; 43–49; Ikäheimo 1995; Ikäheimo ym. 1998; Ikäheimo & Näätänen 1995, 74–87; Ikäheimo & Risku 2004, 222–230; Ilmavirta 1995, 61–69; Lindgren 1990; 2004; Pehkonen 1989; Perkkilä 2002, 36–42; Pietilä 2002, 40–43). Se on vaikuttanut ongelmanratkaisijan opettajan käsityksiin, mikä ilmenee lasten käsityksissä.

Suomalaisten ongelmanratkaisijoiden käsitykset toimintavälineistä ovat samansuuntaisia kuin suomalaisten ja unkarilaisten opettajien (Räty-Záborszky 2006, 221) ja englantilaisten oppilaiden (McCallum ym. 2000, 285) käsitykset.

Englantilaiset toisluokkalaiset kokivat, että välineillä oli helpompaa saavuttaa vastaus kuin ilman niitä. He eivät tarvinneet mielestään välineitä paljon, ainoastaan uusissa ja vaikeissa asioissa. Englantilaiset kuudesluokkalaiset kertoivat välineiden käytön laskettaessa olevan hyödyllistä, koska ne saivat heidät keskittymään. Myös brasilialaiset opettajaopiskelijat (Amato 2004) kokevat, että toiminnallisuus ja toimintavälineet edistävät matematiikan ymmärtämistä.

Suomalaisten ja unkarilaisten piirrokset matematiikan oppitunneista viestivät katsomisen ja tarkastelun merkityksestä. Jotkut oppilaat piirroksissa pyysivät luokkakaveria katsomaan matematiikan tehtävän ratkaisuaan, jotkut kielsivät uteliaan luokkakaverin tirkistelyn. Myös englantilaisista kuudesluokkalaisista todella huolellinen havainnointi on tapa oppia luonnontieteellisiä prosesseja ja erilaisten materiaalien käyttäytymistä (McCallum ym. 2000, 285). Suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten sekä englantilaisten kuudennen luokan oppilaiden mukaan opettajan tekemien demonstraatioiden katseleminen ja diagrammien tutkiminen ovat hyviä oppimisstrategioita.

Unkarilaisesta yhtälönratkaisijasta itse keksittyjen sääntöjen mieleen painaminen on tärkeää matematiikan oppimisessa. Kanadalaisistakin perusopetuksen kolmas- ja viidesluokkalaisista muistaminen on tärkeää matematiikan oppimisessa Vanayan ym. (1997). Tämä uskomus matematiikasta sääntöjen ja faktojen muistamisena on havaittu monissa uskomustutkimuksissa (Schoenfeld 1983; Cobb 1986; Klein & Habermann 1988; Garofalo 1989; Mtetwa & Garofalo 1989; Frank 1988; Spangler 1992; Bock 1994; Pehkonen & Tompa 1994; Pehkonen & Törner 1996; Henrion 1997; Pehkonen 1998; Picker 2000; Kloosterman 2002; Tikkanen 2005). On kuitenkin huomattava, että muutamien unkarilaisten lasten kuvauksista välittyy se, että heitä ohjataan keksimään itse sääntöjä eikä niitä anneta valmiina.

Näin on pääteltävissä suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden kuvauksista sekä englantilaisten, kanadalaisten että australialaisten oppilaiden vahvistamana, että opiskeltaessa matematiikkaa opitaan myös, mitä oppiminen on ja miten matematiikkaa voidaan oppia. Jotkut suomalaisista ja unkarilaisista neljännen luokan oppilaista mieltävät matematiikan oppimisen kognitiiviseksi prosessiksi ja verbaaliseksi, auditiiviseksi, visuaaliseksi ja kinesteettiseksi tapahtumaksi, johon liittyy myös affekteja.

8.1.5 Tunteiden tulvaa matematiikassa

Niin suomalainen ongelmanratkaisija ja laskija kuin unkarilainen yhtälönratkaisijakin kuvasivat kokeneensa monenlaisia tunteita matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta. Kuvatut tunteet olivat myönteisiä ja kielteisiä. Ne olivat myös lyhyt- ja pitkäkestoisia. Tunteiden voimakkuus välittyi kuvauksista. Oppilaat molemmista maista kertoivat kokeneensa nautintoon liittyviä tunteita, kuten iloa, tyytyväisyyttä, huvittuneisuutta, mielihyvää ja innostusta. He kertoivat kokeneensa rakkauteen liittyviä tunteita esimerkiksi ystävällisyyttä ja ihailua. Vihaankin liittyviä tunteita koettiin, mistä viestivät vastenmielisyys ja ärtymys. Matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen liittyi myös surua, pelkoa ja inhoa: epätoivoa, hermostumista, vähättelyä ja torjuntaa. Nolostuessaan sosiaalisissa oppimistilanteissa oppilaita hävetti. Jotkut oppilaista ennakoivat tulevia oppimiskokemuksia ja odottivat yllätyksiä oppiakseen uutta.

Ongelmanratkaisija, laskija ja yhtälönratkaisija kuvasivat iloitsevansa matematiikasta ja sen oppimisesta. Iloa herättivät kokemukset oppimisesta, osaamisesta ja oivaltamisesta. Myös mahdollisuus opiskella matematiikkaa on iloinen asia, kuten Heikki suomalaisesta Varga–Neményi -opetusryhmästä kertoo. Oppilaat olivat tyytyväisiä, kun saavuttivat tavoitteitaan. Tavoitteiden toteutumisesta kertovat onnistuneet ongelmien ratkaisut ja koemenestys. Oppilaat nauttivat opettajan kertomista vitseistä, jotka rentouttavat ja luovat iloista ilmapiiriä. Myös Op ′t Eynden ym. (1999) tutkimat 14 vuoden ikäiset oppilaat kokivat iloa ratkaistessaan matematiikan ongelmia silloin, kun ei ilmennyt kognitiivisia esteitä ratkaista ongelmaa sujuvasti.

Kun on innostunut, aika tuntuu kuluvan nopeasti. Innostavia asioita ovat matematiikassa, sen oppimisessa ja opetuksessa uusien mielenkiintoisten asioiden oppiminen. Kun on ymmärtänyt ne, innostuu vielä enemmän. Myös brasilialaiset luokanopettajaopiskelijat, jotka pitivät matematiikasta koulussa, kertoivat useimmiten ymmärtäneensä matematiikkaa (Amato 2004). Jotkut suomalaiset ja unkarilaiset oppilaat kokevat olevansa innostuneita vain haasteellisissa tehtävissä. Yläkoululaisetkin kokevat hetkellisesti iloa ponnistelua vaativissa matematiikan tehtävissä, iloa tuottavista kognitiivisista haasteista saattaa seurata pysyvämpi kiinnostus ja motivaatio (Hannula 1999). Helpot ja tutut asiat eivät aina innosta suomalaisia ja unkarilaisia 9–10-vuotiaita.

Se, onko matematiikka tylsää vai kivaa, on oppilaista niin merkittävää, että siitä on väiteltävä. Oppilaiden väittelyä matematiikan herättämistä tunteista kuvaa Vesa piirroksessa 6.3.3.1. Ajoittain suomalaisista ja unkarilaisista oppilaista matematiikka on tylsää, mutta vain ajoittain. Tylsiksi koettuja matematiikan sisältöjä silloin tällöin ovat luvut, niiden tutkiminen ja peruslaskutoimitukset. Pitkät yhteenlaskut, kertotaulut, jakolaskut ja allekkain laskeminen ovat joskus joittenkin mielestä tylsistyttäviä, tylsyyttäviä lasten kieltä käyttääksemme. Myös mittayksiköt muunnoksineen ja lämpötilan mittaaminen koettiin tylsänä. Logiikka luokitteluharjoituksineen oli jostakin oppilaasta tylsää. On pitkästyttävää laskea näitä helppoja perusasioita.

Oppikirjan tehtävien tekeminen on joittenkin oppilaiden mielestä tylsää. Kun on tylsää, ajatukset riehuvat pois laskuista, kuten suomalaisen opetusryhmän Varpu toteaa. Hannula (1999) raportoi myös ikävystymisestä rutiinitehtävissä yläkoululaisten matematiikan oppimistilanteissa.

Vaikka matematiikan tunnit ovat ajoittain kivoja, demonstraatiotunnit ovat hauskimmat. Ne tarjoavat mahdollisuuden toimia välineillä. Välineistä ja kuvista jotkut 9–10-vuotiaat kokevat ymmärtävänsä parhaitten. Luvut ja laskutoimitukset ovat joistakin tylsiä, mutta joistakin kivoja. Kivoja laskutoimituksia ovat joistakin oppilaista kertolaskut ja pitkät vähennyslaskut. Niin ikään Rantala (2005) havaitsi, että kertolaskut aiheuttivat yleensä iloa tai ahdistusta suomalaisissa alkuopetusikäisissä oppilaissa. Geometriaa ja tilastoja kukaan suomalaisista ja unkarilaisista oppilaista ei maininnut tylsäksi. Kun oppilas väsyy matematiikan oppitunnin sosiaaliseen vuorovaikutukseen, oppikirja tarjoaa mahdollisuuden syventyä yksilölliseen työskentelyyn. Oppikirjan ohjaamana yksilöllinen työskentely on joistakin kivaa. Ongelman- ja yhtälönratkaisija sekä laskija ovat yksimielisiä matematiikkapeleistä, ne ovat kivoja. Kun on kivaa, hauskaa ja mukavaa, niin aika tuntuu kuluvan nopeasti.

Tunne ajan kulumisesta välittyi monista oppilaiden kuvauksista. Aika liittyy lasten mielessä erilaisiin sisältöalueisiin, toimintaan ja oppimiseen. Mukavat sisältöalueet kuten ongelmanratkaisu ja päättely tuntuvat oppilaasta menevän nopeasti ohi. Helppoja ja tuttuja sisältöalueita kerrattaessa aika tuntuu matelevan, jolloin keksitään virkistävää oheispuuhaa. Tällaisia puuhia ovat esimerkiksi vessassa käyminen ja nopeuskilpailu oppikirjan tehtävien laskemisesta. Vastaavanlaisia oheistoimintoja välittyy myös Rantalan (2005) tutkimuksessa oppimisen ilon etsimisestä.

Matematiikan kiinnostavuus puhutti erityisesti unkarilaista yhtälönratkaisijaa. Se on salaperäisyydessään niin kiehtovaa, että sitä opiskelee lumoutuneena. Kun on kiinnostunut, silloin yksinkertaisesti ei voi olla oppimatta matematiikkaa. Oppitunnit ovat useimmiten kiinnostavia. Opettaja ja toimintavälineet demonstraatioissa ovat oppitunneilla merkittäviä kiinnostuksen herättäjiä.

Viihtyminen matematiikan oppitunneilla oli toinen asia, joka puhutti unkarilaista yhtälönratkaisijaa. Jotkut kokivat logiikan erittäin viihdyttävänä matematiikan sisältöalueena. Viihtymistä edistää mahdollisuus keksiä ja oivaltaa. Myös SIMS-tutkimuksen mukaan unkarilaiset perusopetuksen yläkoululaiset, ammattikoululaiset ja lukiolaiset keskimäärin tunsivat itsensä hyviksi, kun ratkaisivat matematiikan ongelmia itsenäisesti. He halusivat onnistua matematiikassa. Vähiten he pitivät teoreemojen todistamisesta sekä sääntöjen ja kaavojen muistamisesta. Eniten he pitivät taskulaskimella laskemisesta ja yhtälönratkaisemisesta. (Klein & Habermann 1988, 38–39). Jos unkarilaisen Simónin mukaan keksii sääntöavaimen tehtäviin, silloin viihtyy matematiikan parissa. Zoltánista matematiikka on viihdyttävää seikkailua, jossa vainutaan aavistuksia.

Matematiikka ja sen oppiminen saattaa olla inhottavaakin. On inhottavaa vastata väärin, kun arvelee toisten pilkkaavan. Toisten oppilaiden mahdollisen pilkan vuoksi oppilas on epävarma osallistuessaan sosiaalisissa tilanteissa matematiikan oppitunneilla. Joku oppilas puolestaan viestii, ettei koe matematiikkaa inhottavana oppiaineena.

Luokkakavereiden puheenvuorot matematiikan oppitunneilla herättävät myönteisiä ja kielteisiä tunteita. Kun kaveri selittää oivalluksiaan matematiikasta mainiosti, häntä kannustetaan. Kun ollaan eri mieltä ratkaisusta, niin väitetään vastaan. Tällaisia väittelyitä havaitsi myös Lampert (1990) perusopetuksen viidesluokkalaisten matemaattisessa työskentelyssä. Kaverin mainio oivallus saattaa herättää toisissa kateuttakin, jolloin kaveria nimitetään hikariksi. Muutamat unkarilaiset yhtälönratkaisijat ihastelevat opettajansa älykkyyttä niin piirroksissa kuin kirjoitelmissakin. Muutamat suomalaislaskijat kuvaavat opettajaansa auttajana vaikeuksissa. Suomalaisopettajaa kuvataan myös katuvaksi enkeliksi, joka pyytää anteeksi pelottavaa käytöstään oppilaan vastattua väärin.

Kokiessaan vaikeuksia oppilas saattaa joutua epätoivon valtaan turhautuessaan tehtävän ratkaisemiseen. Tällöin tehtävä sinkoaa lattialle, mikä on havaittavissa suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän Ismon piirroksesta. Myös deBellis (1998) havaitsi alakoululaisten olevan epätoivoisia ja turhautuneita matematiikan ongelmanratkaisussa. Niin ikään Hannula (2001a; 2001b) on havainnut yläkoululaisilla vastaavankaltaisia kognitiivisia emootioita ja metaemootioita. Suomalais- ja unkarilaisoppilaiden kuvauksissa oli kuitenkin vähän epätoivoa, kuten toivoakin.

Matematiikan oppimiseen sisältyy myös tulevan ennakointia oppilaiden kokemusten kuvauksissa. Ennakoidessaan esimerkiksi kotitehtäviään jotkut kauhistelevat niiden mahdollista vaikeutta. Jotkut puolestaan ennakoivat onnistuvansa niissä. Tällöin matematiikan oppituntipiirrosten puhekuplissa kajahtavat myönteiset yes-huudahdukset.

Suomalaisen ongelmanratkaisijan ja laskijan sekä unkarilaisen yhtälönratkaisijan kuvaamista tunteista välittyy niiden naturalistinen näkökulma, jolloin epämiellyttäviä asioita pyritään välttämään ja miellyttäviksi koettuja asioita lähestytään. Näiden oppilaiden kokemat tunteet viestivät myös kognitiivisesta näkökulmasta, jolloin ne ovat kokijan havaitsemia, tulkitsemia ja nimeämiä. Oppilaiden tunteista on luettavissa, miten samat oppimistilanteet ja matematiikan sisällöt saatetaan kokea erilailla. Suomalaiset ja unkarilaiset oppilaat kertovat paikoitellen eri tavoin matematiikan, sen oppimisen ja opetuksen herättämistä tunteista. Tällaisia eroja ovat mm. viihtyminen ja kiinnostus. Nämä erot viestivät tunteiden konstruktiivisesta näkökulmasta eri kulttuureissa.

Tunteet ovat mahdollisuus ja positiivinen voima matematiikan oppimisessa ja opetuksessa. Vaihtelevat tunnekokemukset ovat merkittäviä matematiikan oppimisessa ja haaste matematiikan opetukselle. Kun oppilailla on tilaisuus käsitellä kielteisiä tunteitaan, ne voivat vahvistaa oppimista olennaisesti. On suotuisaa tavoitella myönteisiä tunnekokemuksia, jotta oppilaat lähestyisivät matematiikkaa mielellään. McLeodin (1992) mukaan asenteet muodostuvatkin usein toistuvien tunteenomaisten reaktioiden automatisoitumisena tai uuden tehtävän ennakkoasenteen vahvistumisen kautta matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen.

8.1.6 Matematiikka-asenteita

Niin suomalaisella ongelmanratkaisijalla, unkarilaisella yhtälönratkaisijalla kuin suomalaisella laskijalla on myönteinen asenne matematiikkaan. He pitävät matematiikasta koulun oppiaineena monista syistä: Se on mieleistä, koska se tarjoaa tilaisuuksia ajatella, miettiä ja pohtia. Sen parissa opitaan ymmärtämään, tajuamaan, oivaltamaan ja keksimään uusia asioita. Matematiikka saa opiskelemaan tarkkaavaisesti. Matematiikka on viihdyttävää monipuolisten sisältöjensä takia. Oppiaineen kumuloituva rakenne haastaa oppilaan käyttämään aiemmin opittua. Monipuoliset ja vaikeudeltaan vaihtelevat tehtävät tekevät matematiikasta pidetyn oppiaineen. Pelit ja leikitkin viihdyttävät. Toiminta ja konkreettiset toimintavälineet edistävät ymmärtämistä ja tuovat vaihtelua opiskeluun. Matematiikan käyttökelpoisuus herättää myönteistä suhdetta, jolle on suotuisaa, että opetuksessa on tavoitteellista konkreettista toimintaa. Yhteistoiminnalliset työtavat, opettajan ja luokkakavereiden myönteinen asenne matematiikkaan ovat merkittäviä oppilaan myönteiselle asenteelle. Matematiikka viihdyttää kymmenvuotiasta, koska se tarjoaa salaperäisen seikkailun vainuta aavistuksia yllätyksistä. Se kehittää ihmistä niin viisaaksi, että voi toimia jopa keksijänä.

Perusopetuksen alakoululaisten pääsääntöisesti myönteisiä matematiikka-asenteita on havaittu muissakin tutkimuksissa (Brown, Kreisman & Audrey 1999; Dienes 1966; Klein 1987; Kloosterman, Raymond & Emenaker 1996; Ku & Sullivan 2001; Kupari 1993ab; Nicolaidou & Philippou 2003; Rock & Shaw 2000; Vanayan ym. 1997). Vain parilla suomalaisella ja unkarilaisella neljäsluokkalaisella oli kielteinen asenne matematiikkaan. Kielteisiä alakoululaisten asenteita matematiikkaan ovat havainneet Australiassa Goodnow ja Burns (1985), Suomessa Kupari (1993ab) ja Kanadassa Vanayan ym. (1997). Kaksijakoista asennetta, jolloin toiset oppilaat rakastavat, toiset vihaavat matematiikkaa (Goodnow & Burns 1985; Hendley ym. 1996; Kankaanranta & Linnakylä 1993), ei näiden tutkittujen suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten asenteissa matematiikkaan ollut havaittavissa. Jotkut suomalaiset ja unkarilaiset neljäsluokkalaiset pitivät matematiikkaa jopa mieliaineenaan, ja se kuului miellyttävimpänä pidettyjen oppiaineiden joukkoon kuten Kuparin (1993ab) ja Niemen (2004) tutkimuksissakin.

Edellä mainituista tutkimuksista poiketen suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten kokema matematiikan opetussuunnitelma paljasti syitä, miksi lapset pitävät matematiikasta. Kun tutkija valitsee tietoisesti ja kriittisesti tutkimustavoitteensa saavuttamista edistävän määritelmän matematiikka-asenteesta ja sen perusteella tekee menetelmälliset ratkaisut, hän voi saavuttaa relevanttia tietoa tutkimuksen ja opetuksen kehittämiseksi (Di Martino & Mellone 2005; Di Martino & Zan 2001ab, 2002; Gellert 2001; Hannula 2002a; Tikkanen 2005). Määrällisillä asennetutkimuksilla saavutetaan yleiskuva yhteyksineen oppilaiden asenteista matematiikkaan. Laadulliset asennetutkimukset rikastavat tietoa oppilaiden asenteiden sisällöistä, vaihtelusta, epävakaisuudesta, muutoksista ja argumenteista, koska ne painottavat oppilaan näkökulmaa tutkimusteknisillä ratkaisuilla. Esimerkiksi oppilaan asenne matematiikkaan on myönteinen, koska hän pitää matematiikasta yleensä, vaikka logiikka ja geometria ovat vähän pidettyjä sisältöalueita. Näin oppilaan asenne saattaa vaihdella sisältöalueittain, joita koulumatematiikassa on useita. Tässä tutkimuksessa erityisesti suomalaiset Varga–Neményi -opetusryhmän oppilaat perustelivat, miksi he pitävät matematiikasta ja millaisia he arvioivat olevansa matematiikan oppijoina.

Avainasemassa oppilaiden myönteisten matematiikka-asenteiden saavuttamiseksi koulussa on opettaja. Hän muokkaa opetussuunnitelmassa määritellyt sisällöt optimaalisiksi, jotta oppilaat kokevat oppivansa. Hän valitsee opetusmenetelmät. Suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten myönteisten matematiikka-asenteiden perustelut viestivät samansuuntaisista opetusmenetelmällisistä ratkaisuista kuin Brownin, Kreismanin ja Noblen (1999) tutkimassa innovatiivisessa koulussa. Innovatiivisessa koulussa matematiikan opetuksessa työskennellään pienryhmissä. Matematiikan projektit kestävät useita päiviä. Oppilaat kirjoittavat matematiikasta, jota integroidaan muihin oppiaineisiin. He käyttävät laskimia, tietokonetta ja toimintavälineitä projekteissaan. Matematiikka liittyy oppilaiden arkielämään. Innovatiivisessa koulussa perusopetuksen neljäsluokkalaiset nauttivat matematiikasta enemmän, kokevat olevansa hyviä matematiikassa useammin, odottavat oppivansa enemmän matematiikkaa ja kuvaavat suorituksiaan enemmän kuin ei-innovatiivisessa koulussa. Innovatiivisessa koulussa oppilaat kirjoittivat matematiikasta niin kuin Varga–Neményi -opetusryhmässäkin Suomessa. Kirjoittamisesta matematiikassa argumentoi Ismon kuvaus (ks. piirrosta 6.1.1.2). Tällaiseen kuvaukseen lienevät vaikuttaneet Ismon opettajan pedagogiset ratkaisut, jotka ovat yhteydessä Mieti ja laske -oppikirjasarjan opettajan oppaisiin (2000; 2001) ja tarinankerrontaan opetusmenetelmänä (Hytti 2007).

Opettaja valitsee tai tarjoaa oppilaiden valittaviksi oppimateriaalit, tehtävät ja toimintavälineet, jotka ovat merkittäviä syitä pitää matematiikasta suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden mukaan. Myös Kun ja Sullivanin (2001) mukaan taiwanilaisilla neljäsluokkalaisilla on myönteisempi asenne matematiikkaan ja sen opetukseen, jossa käytetään henkilökohtaisia, tuttuja ja kiinnostavia sanallisia tehtäviä kuin oppilailla, joiden opetuksessa ei niitä käytetä. Matematiikkatupakokeilussa (Lindgren 1990) peruskoulun toisluokkalaiset iloitsivat matematiikan oppimisesta, kun saivat valita tehtäviä ja toimintavälineitä. Lindgrenin (2004) mukaan tytöt pitivät laskemisesta oppikirjaan ja vihkoon, kun taas pojista vihkotehtävät olivat kaikista tylsimpiä. Muutamista tämän tutkimuksen suomalaisista neljäsluokkalaisista tytöistä oli kivaa laskea oppikirjan laskuja ja tehdä vihkotehtäviä, mutta jotkut pojat eivät pitäneet vihkotehtävistä.

Opettajan asenne matematiikkaan, sen oppimiseen ja opettamiseen on merkittävä. Suomalaisista ja unkarilaisista neljäsluokkalaisista on tärkeää, että opettaja pitää matematiikasta ja on innostunut siitä, mikä siivittää matematiikan oppimisen iloa. Englantilaisista yhdeksäsluokkalaisistakin (Nardi & Steward 2003) on tärkeää, että opettaja pitää matematiikasta. Jotta opettajaan syntyisivät hyvät suhteet, häneen olisi voitava luottaa. Ilmapiirin oppitunneilla tulisi olla sellainen, ettei tarvitse pelätä, kokea nöyryytyksiä ja nolauksia. Englantilaisten yhdeksäsluokkalaisten mukaan ilo ei tarkoita kevyttä ja pintapuolista huvittelua. Ilo matematiikan oppimisessa on tarkoituksenmukaista, vaihtelevaa ja jännittävää. Se on jännittävää seikkailua vainuta aavistuksia, kuten unkarilainen kymmenvuotias Zoltán sanoo.

Opettajan moniin tehtäviin on lisättävä myös hänen oma käsityksensä matematiikka-asenteesta. Polo ja Zan (2005) havaitsivat kyselyssään, ettei italialaisilla opettajilla ole selkeää käsitystä matematiikka-asenteesta. Useimmat italialaisopettajien käsitykset asenteesta viittaavat implisiittisesti enemmän moniulotteiseen kuin yksiulotteiseen ideaan. Opettajat ilmeisesti käyttävät asenteen moniulotteista rakennetta arkikielen tapaan, jolloin ei eroteta asenteen määritelmää sen osoittimista. Arkikielen määritelmä ei ole toimiva käytännön opetustilanteissa oppilaiden todellisen käyttäytymisen havainnoimiseksi, vaan se johtaa tulkitsevaan havainnointiin. Opettajien diagnoosi oppilaiden matematiikka-asenteista painottaa enemmän yksittäisen oppilaan epäonnistumisen syitä kuin opetuksen kehittämisen lähtökohtia.

Jotta opettajien käsitykset matematiikka-asenteen merkityksestä ja sen määritelmistä päivittyisivät, tarvitaan perus- ja täydennyskoulutusta asenteiden oppimisesta. Matematiikka-asenteiden kehittäminen haastaa myös oppikirjat opettajanoppaineen ja muun pedagogisen kirjallisuuden päivitettäviksi, jotta opettajilla olisi tukea oppilaittensa asenteen kehittymisen seuraamiseksi. Suomalaisissa matematiikan opettajanoppaissa Laskutaidossa, Matikkamatkassa ja Mieti ja laske -kirjassa, asenteen kehittymisen seuraaminen onkin otettu huomioon. Jotta asenteiden kehittäminen matematiikkaan olisi tavoitteellista, sen olisi oltava myös matematiikan opetussuunnitelman eksplisiittinen tavoite.

Suomalaisesta ongelmanratkaisijasta matematiikka on useimmiten helppoa tai sekä helppoa että vaikeaa. Matematiikan vaikeustason ongelmanratkaisija on päätellyt oppimiskokemuksistaan, harjoitustehtävistään ja koemenestyksestään. Unkarilaisesta yhtälönratkaisijasta matematiikka on helppoa, keskinkertaista tai sekä helppoa että vaikeaa. Matematiikka on yhtälönratkaisijasta helppoa, jos pystyy keksimään ja ymmärtämään säännön ratkaista tehtäviä. Sääntöjen keksiminen on yksinkertaista opettajan ohjauksessa. Koulussa keksityt säännöt ovat tärkeitä, niitä kerrataan kotona, jotta ne jäisivät mieleen. Suomalaisesta laskijasta matematiikka on helppoa tai sekä helppoa että vaikeaa. Matematiikka on helppoa, kun tajuaa ja ymmärtää asiat nopeasti. Matematiikkaa opitaan laskijan mukaan laskemalla.

Useimmista perusopetuksen alakoululaisista matematiikka on helppoa kyselytutkimusten mukaan (Kupari 1993ab, Vanayan ym. 1997). Koska suomalaiset ongelmanratkaisijat arvioivat oppineensa matematiikkaa hyvin kokemustensa ja tehtäviensä pohjalta, on pääteltävissä, että opetus on ollut optimaalista suhteessa oppilaiden taitoihin. Matematiikan kokeet ovat merkittäviä palautteen antajia oppilaalle. Tämä on havaittu muissakin tutkimuksissa (Abu-Hilal 2000; Hannula 2000; Linnanmäki 2004). Oppilaiden käsitykset matematiikan helppoudesta tai vaikeudesta heijastavat niitä tuloksia, joita he saavat kokeista.

Matematiikan vaikeuden metaforana Einstein-efekti kuvastui suomalaisen laskijan piirroksessa, jossa hän kuvasi matematiikan vaikeutta suhteellisuusteorian yhtälöllä $E = mc^2$ energian ja aineen riippuvuudesta. Einstein-efekti on havaittu myös muissa lasten ja nuorten piirrostutkimuksissa matematiikasta. Rock ja Shaw (2000, 554) raportoivat piirrostutkimuksessaan amerikkalaisen alakoululaisen piirtäneen hullun tiedemiehen laboratorioonsa, jonka liitutaululla on suhteellisuusteorian yhtälö. Niin ikään Gulekin (1999, 123) multimetodisessa tutkimuksessa sekä amerikkalaisen että italialaisen alakoulun luokkahuonetapahtumista on havaittavissa kaava $E = mc^2$ liitutaululla oppilaan piirtämänä. Amerikkalaisten lisäksi Picker ja Berry (2000, 85; 2001, 204, 207) havaitsivat Einstein-efektin englantilaisten, suomalaisten, ruotsalaisten ja romanialaisten ainakin yhden 7–8-luokkalaisen piirroksessa. Piirroksissa matemaatikko muistutti Albert Einsteinia, jonka lähiympäristössä oli kaava $E = mc^2$. Eräs amerikkalainen tyttö kommentoi piirrostaan jälkikirjoituksessa, että hänen naismatemaatikkonsa muistutti Albert Einsteinia hiusten vuoksi. Picker ja Berry päättelivät Einstein-efektin olevan peräisin mediasta, vitsikirjoista ja sarjakuvista, koska eräs haastateltu piirtäjä ei muistanut, että kaavaa tai Albert Einsteinia olisi käsitelty koulussa matematiikan tunnilla, vaan hän oli nähnyt sen television piirretyissä.

On pääteltävissä, että lasten koulukokemuksissa matematiikasta heijastuu välittömien kokemusten lisäksi laajempi yhteiskunnallinen kulttuuri. Einstein-efekti matematiikan vaikeuden metaforana näyttää erityisesti tulevan esille piirroksia tutkimusaineistona käyttävissä tutkimuksissa.

Ongelmanratkaisijasta, yhtälönratkaisijasta ja laskijasta matematiikka on tärkeä oppiaine, koska sillä on käyttöä arkielämässä, koulussa eri oppiaineissa, aikuisena työelämässä ja monissa muissa asioissa. Suomalaislapset viestivät käyttäneensä matematiikkaa arkielämässään ja eri oppiaineissa koulussa useammin kuin unkarilaiset, joiden kuvauksista välittyy koulun ja vanhempien voimakkaampi matematiikka-arvostus kuin suomalaislasten kuvauksista.

Suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten uskomukset matematiikasta ja sen käyttökelpoisuudesta ovat samansuuntaisia kuin ikätoverien uskomukset aiemmissa tutkimuksissa (Kloosterman 1996; Kupari 1993ab; Niemi 2004; Vanayan ym. 1997). Kukaan suomalaisista tai unkarilaisista oppilaista ei pitänyt matematiikkaa täysin tarpeettomana, vaikka muutama oppilas kertoi, ettei tiedä, missä matematiikkaa voisi käyttää. Unkarilaisen yhtälönratkaisijan kuvauksen mukaan matematiikkaa käytetään vähän 9–10-vuotiaiden käytännön elämässä. Tämä käsitys on samansuuntainen kuin monien unkarilaisten yläkoululaisten ja ammattikoululaisten käsitykset 1980-luvulta, jolloin he näkivät, ettei matematiikkaa tarvita jokapäiväisessä elämässä (Klein & Habermann 1988, 38–39). Amerikkalaiset 1–3-luokkien oppilaat uskoivat matematiikan olevan hyödyllistä, vaikka eivät osanneet kertoa, miksi se oli hyödyllistä (Kloosterman 1996). Kanadalaisista kolmas- ja viidesluokkalaisistakin (Vanayan ym. 1997) matematiikalla on käyttöä koulun ulkopuolella. Se on tarpeellista, jotta voi saada hyvän työpaikan. Kanadalaisoppilaiden mukaan vanhemmat odottivat lastensa oppivan matematiikkaa. Myös Wilkins ja Ma (2003) korostavat vanhempien vaikutusta lastensa uskomuksiin matematiikan tärkeydestä: Ne oppilaat, jotka kokivat vanhempiensa pitävän matematiikkaa tärkeänä, uskoivat samoin. Suomalaisoppilaidenkin uskomukset matematiikan hyödyllisyydestä kuvastavat aikuisten uskomuksia (Kangasniemi 2000, 51–52).

Suomen perusopetuksen matematiikan perusteet 2004 korostaa, että arkipäivän ongelmia tulee hyödyntää tehokkaasti opetuksessa, mikä ilmeni molempien suomalaisten opetusryhmien käsityksissä. Unkarilaisoppilaat kertoivat käyttäneensä vähän matematiikkaa arkielämässään ja koulun oppiaineissa, vaikka Unkarin perusopetuksen matematiikan perusteet 2003 ja Varga–Neményi -opetusmenetelmä painottavat niitä.

8.1.7 Uskomuksia matematiikasta

Suomalaisen ongelmanratkaisijan uskomukset matematiikan sisällöistä ovat jokseenkin monipuolisia, koska hän liittää matematiikkaan algebraa lukuun ottamatta lukuja laskutoimituksineen; geometriaa ja mittaamista; tietojen käsittelyä, tilastoja ja todennäköisyyttä; logiikkaa ja erityisesti ongelmanratkaisua. Unkarilaisen yhtälönratkaisijankin uskomukset matematiikan sisällöistä ovat monipuolisia: matematiikka on määrällistä orientoitumista maailmaan, oivaltamistaitoja, geometriaa, mittaamista, säännönmukaisuuksia, todennäköisyyttä ja tilastoja. Yhtälönratkaisija kuvaa peruslaskutoimituksia kokonais- ja murtoluvuilla, mutta niitä useammin yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemista. Suomalainen laskija uskoo, että matematiikkaan kuuluu paljon lukuja, peruslaskutoimituksia ja hieman geometriaa. Algebra, tietojen käsittely, tilastot, todennäköisyys ja ongelmanratkaisu puuttuvat toteavan laskijan uskomuksista. Näin on pääteltävissä, että suomalainen laskija uskoo matematiikan olevan pääasiassa laskemista.

Uskomus ”matematiikka on laskemista” on löydetty monissa tutkimuksissa (Schoenfeld 1983; Cobb 1986; Garofalo 1989; Mtetwa & Garofalo 1989; Frank 1988; Spangler 1992; Bock 1994; Pehkonen & Törner 1996; Hoskonen 1996; Henrion 1997; Picker 2000; Picker ja Berry 2000; 2001; Tikkanen 2006). Uusseelantilaiset 10–13-vuotiaat oppilaatkin kuvasivat eniten kokonaislukujen peruslaskutoimituksia, kun he tekivät ikäiselleen sopivia ja tärkeitä tehtäviä matematiikasta (Carr 2003). Seuraavaksi eniten uusseelantilaiset oppilaat tekivät tehtäviä tilastoista, murtoluvuista, geometriasta, ongelmanratkaisusta, algebrasta ja mittaamisesta tässä järjestyksessä. Koska uskomus matematiikasta laskemisena on havaittu monissa tutkimuksissa, sitä voidaan pitää yleisenä, minkä myös suomalaisryhmän oppilaat ovat muodostaneet.

Suomalaisen laskijan uskomus ”matematiikka on laskemista” on ymmärrettävä, koska Suomen matematiikan opetussuunnitelmassa 2004 ensimmäinen sisältöalue, siis tärkein, on luvut ja laskutoimitukset, jolloin opettajat painottanevat sitä muita sisältöalueita enemmän. Näin on pääteltävissä, että lasten uskomukset laskemisesta ovat realistisia päätelmiä luokkahuonetapahtumista, kuten Schoenfeld (1987) ja Garofalo (1989) aikoinaan totesivat.

Suomalaisen laskijan uskomus matematiikasta laskemisena on samansuuntainen kuin Pehkosen (1993) tutkimustulos, jonka mukaan suomalaiset seitsemäsluokkalaiset näkivät matematiikan mekaanisena laskemisena useammin kuin unkarilaiset ikätoverinsa. Munn (1997) korostaa pienten lasten laskemiseen liittyvien uskomusten tutkimisen merkitystä: Englantilaisten 4–5-vuotiaiden lasten oli vaikea selittää, mitä, miten ja miksi he laskevat. Koulussa lasten uskomukset laskemisesta muuttuvat, joten matematiikan opetus ja muu sosiaalinen ympäristö ovat merkittäviä alakoululaisten uskomusten muotoutumisessa. Perusopetuksen ensimmäisellä luokalla syntyneet matematiikkaan liittyvät uskomukset ovat suhteellisen pysyviä vielä kolmannellakin luokalla (Kloosterman ym. 1996). Peruslaskutoimitusten mekaaninen suorittaminen lienee vähäarvoista, jos ei ymmärrä eikä osaa soveltaa niitä. Jos laskeminen perustuu ymmärtämiseen ja on automatisoitunutta, päässälasku voi olla nopeampaa kuin taskulaskimen näppäily. Ajatelkaamme metaforisesti matematiikkaa talona, jonka perustus on loogista päättelyä, sydänmuuri hehkuvine tulisijoineen ongelmanratkaisua, seinät, katto ja kantavat rakenteet muita matematiikan sisältöalueita ja avoimet ikkunat uusia keksintöjä: Peruslaskutoimitukset ovat yksi väline ongelmanratkaisussa.

Kaikilla tämän tutkimuksen suomalaisilla neljännen luokan oppilailla ei ole vain yleisiä uskomuksia matematiikasta, että siihen sisältyisi vain lukuja ja peruslaskutoimituksia. Ongelmanratkaisija Varga–Neményi -opetusryhmästä Suomesta kuvaa kirjoitelmassaan ja piirroksessaan matematiikkaan kuuluvan muita sisältöalueita painotetummin ongelmien ratkaisua, jolloin oppilaat piirrosten mukaan käyttävät toimintavälineitä, puhuvat matematiikasta ja ongelmanratkaisusta työskennellessään pareittain tai pienryhmänä. Tämä tutkimustulos on samansuuntainen kuin Franken ja Careyn (1997) tutkimustulos perusopetuksen ensimmäisen vuosiluokan oppilaiden havainnoista kognitiivisesti ohjatusta matematiikan opetuksesta. Tällaiset uskomukset muodostuvat opetuksessa, jossa tietoisesti korostetaan ongelmanratkaisua ensimmäisestä vuosiluokasta alkaen. Suomalaisen ongelmanratkaisijan uskomuksiin on nähtävästi yhteydessä suomalaisessa pedagogisessa kirjallisuudessa arvostettu ongelmanratkaisu opetusmenetelmänä (esim. Pehkonen 1995; 1997; 2000; Sahlberg ym. 1994) On huomattava, että tätä oppilaiden uskomusta ”matematiikka on ongelmanratkaisuakin” vahvistanevat opetuksen lisäksi suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän julkisuus lehdistössä (Hakola 2002, 3-6; Liinamaa 2003a, 12-14; 2003b, B23). Oppilaat ovat lukeneet koulussa heistä kirjoitettuja artikkeleita. On pääteltävissä, että matematiikkaan liittyvien myönteisten ja monipuolisten uskomusten muodostaminen ja vahvistaminen ei ole vain opettajan, vaan koko yhteiskunnan tehtävä.

Suomalainen ongelmanratkaisija kuvaa geometriaa useammin kuin suomalainen laskija ja unkarilainen yhtälönratkaisija. Tähän lienee syynä ainakin osaltaan ongelmanratkaisijan opettajan käyttämä geometriapainotteinen tosimatematiikan opetusmenetelmä (ks. Malaty 1993; 1994). Sekä 9–10-vuotias suomalainen laskija että unkarilainen yhtälönratkaisija kuvaavat erittäin vähän geometriaa. Tämä tulos on aiempien tutkimustulosten mukainen. Hoskosen (1996) tutkimuksessa vain yksi oppilas 84 suomalaisesta kahdeksasluokkalaisesta mainitsi geometrian. Tikkasen (2006) tutkimuksessa vain kaksi yli sadasta oppilaasta kuvasi geometriaa. Niin ikään Orosz (2000) havaitsi, että unkarilaiset perusopetuksen viidesluokkalaiset eivät ole kiinnostuneita geometrian ongelmista, pitävät niitä vaikeina ja osaavat ratkaista niitä heikommin kuin ongelmia muilta matematiikan sisältöalueilta. Tähän on nähtävästi syynä opetussuunnitelman muiden sisältöalueiden painottaminen. Toisaalta suomalaisopettaja saattaa kokea vaivalloisena ja unkarilaisopettaja jopa pelottavana geometrian oppitunnit (Räty-Záborszky 2006) toimintavälineiden ja vaativan etukäteissuunnittelun vuoksi.

Jokaisen tutkitun ryhmän sisällä, suomalaisessa opetusryhmässä, suomalaisessa ja unkarilaisessa Varga–Neményi -opetusryhmässä oppilaiden uskomukset matematiikan sisällöistä ovat samanlaisia. Tämä tutkimustulos poikkeaa Roddin (1993) haastattelututkimuksesta ja McDonoughin (2002) miellekarttatutkimuksesta, joiden mukaan saman opetusryhmän oppilailla voi olla erilaisia uskomuksia matematiikasta.

Unkarilaisen yhtälönratkaisijan uskomus ”matematiikka on sääntöjen muistamista” on havaittu muuallakin (mm. Buerk 1994; Frank 1988; Juter 2005; Kislenko, Grevholm & Breiteig 2005; Mtetwa & Garofalo 1989; Oaks 1994; Pehkonen & Törner 1996; Tikkanen 2006; Vanayan ym. 1997). On kuitenkin huomattava, että unkarilaisen yhtälönratkaisijan mukaan oppilaita ohjataan keksimään säännöt itse eikä niitä saada valmiina. Tällöin on todennäköistä, että monet oppilaat ymmärtävät säännöt, koska työstävät ne itse. Suomalaisen laskijan uskomus ”matematiikka on helppoa, kun ymmärtää nopeasti” on samansuuntainen kuin amerikkalaisten perusopetuksen yläkoululaisten uskomus ”menestyvät oppilaat oppivat matematiikan asiat nopeasti” (Schommer-Aikins, Duell & Hutter 2005). Suomalaisen ongelmanratkaisijan tai unkarilaisen yhtälönratkaisijan uskomusta nopeasta oppimisesta ei tullut esille. Suomalainen ongelmanratkaisija Risto toteaa: *”Ällitälli (ongelmanratkaisu) on mukavaa kun saa päätellä vastauksia ja erilaisia keinoja saaha vastauksia selville. Tykkään miettiä jotain ällitälliä pitkään niin kun kerhossa tehdään”*. Risto kuvasi piirroksessaan matematiikan kerhon päättymistä, mutta hän jäi vielä keksimään kaverinsa kanssa ratkaisua ongelmaan ja protestoi kerhon loppumista. Oppilaiden uskomuksiin nopeasta oppimisesta vaikuttanevat oppikirjat ja kokeet. Oppikirjat ohjaavat etenemään aukeamaperiaatteella, jolloin oppilaalla on melkoinen määrä laskettavaa oppitunnin aikana. Kokeissa saattaa olla useita tehtäviä, joihin käytetään oppitunti, jolloin yhtä tehtävää kohti on käytettävissä vain muutamia minuutteja.

Alakoululaisten uskomusten kehittymiseksi suotuisat opetusjärjestelyt edellyttävät luokanopettajalta tietoisuutta omista, oppilaiden ja kulttuurillisista matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen liittyvistä uskomuksista. Joustavuus opetusjärjestelyissä auktoriteetin jakamiseksi, mitä Franke ja Carey

(1997) kuvaavat kognitiivisesti ohjatussa oppimisessa, antaa nuorillekin oppilaille mahdollisuuden kasvaa vapauteen ja vastuuseen oppimisestaan sekä kohti uskomusta, että matematiikka on moninaisten suhteiden verkosto. Opettajankouluttajana Joutsenlahti (2005b, 227) esittää, että opettajankoulutus on eräs keino vaikuttaa opettajien tietoisuuteen oppilaiden asenteista ja uskomuksista, jotka voivat toimia muutoksen esteinä. Kuitenkin muutos on aloitettava useimmiten opettajista itsestään.

8.1.8 Oppilaiden käsityksiä itsestä matematiikan oppijana

Sekä perustelevan ongelmanratkaisijan, kontrastoivan yhtälönratkaisijan että toteavan laskijan minäkäsitys matematiikan oppijana on myönteinen, varauksellisen myönteinen tai neutraali, joiden lisäksi toteavan tyttölaskijan minäkäsitys matematiikassa saattaa olla kielteinenkin. Ongelmanratkaisijan minäkäsitys perustuu havaintoihin matematiikan ymmärtämisestä, opiskelutehtävien onnistumisesta ja koemenestyksestä sekä opettajan antamaan palautteeseen. Hän ei vertaa itseään toisiin oppilaisiin, kun taas toteava laskija vertaa laskunopeuttaan ja oppimistaan toisten laskijoiden vastaaviin. Toteavan laskijan minäkäsitys perustuu omakohtaisiin kokemuksiin matematiikan ymmärtämisestä, oppimisesta ja tehtävien vaikeudesta sekä koemenestykseen. Unkarilaisen yhtälönratkaisijan minäkäsitys perustuu oppimiskokemuksiin, oppilaiden keskinäiseen vertailuun, todistuksen numeroarviointiin, opettajan suulliseen palautteeseen ja menestykseen matematiikkakilpailussa.

Tutkimusta suunniteltaessa oletettiin mm. McAdamsin (1990, 1993) ja Lehtovaaran (1994) tutkimusten pohjalta, että varsin nuoret lapset pystyvät ilmaisemaan käsityksiä itsestään matematiikan oppijana suhteellisen ohjaamattomasti, koska minäkäsitys eriytyy lapsen kasvaessa. Suomalaiset ja unkarilaiset 9–10-vuotiaiden neljäsluokkalaisten kuvaukset todentavat oletuksen oikeaksi. Myös Tiedemann ja Billmann-Mahecha (2004) havaitsivat 700 saksalaisen kolmas- ja neljäsluokkalaisen kykenevän muodostamaan käsityksiä itsestään arvioimalla omia ominaisuuksia myönteinen–kielteinen-ulottuvuudella eikä ainoastaan vertaamalla itseä muihin. On kuitenkin vaikea löytää tutkimuksia, joista ilmenisi nuorten oppilaiden minäkäsityksen rakentumisen perusteita heidän itsensä ilmaisemina.

Aiemmissa tutkimuksissa on saatu vastaavansuuntaisia tuloksia alakoululaisten minäkäsityksestä matematiikassa. Amerikkalaisilla perusopetuksen neljäsluokkalaisilla on myönteiset minäpystyvyysuskomukset matematiikassa (Jacobs ym. 2002), mutta ne tulevat vähemmän myönteisiksi myöhempien kouluvuosien aikana. Amerikkalaispojilla on myönteisemmät pystyvyysuskomukset kuin tytöillä matematiikassa. Vuonna 1990 runsas puolet suomalaisista neljäsluokkalaisista uskoi voivansa selviytyä ihan hyvin matematiikassa, mutta vain neljäsosa neljäsluokkalaisista arvioi olevansa hyvä suorittamaan matematiikan tehtäviä (Kupari 1993b). Suomalaisten perusopetuksen kuudesluokkalaisten käsitys itsestään matematiikan oppijana on neutraali, mutta poikien käsitys myönteisempi kuin tyttöjen (Niemi 2004). Kyproslaisten perusopetuksen viidesluokkalaisten minäpystyvyysuskomukset matematiikassa ovat useimmin erittäin myönteisiä, myönteisiä tai neutraaleja (Nicolaidou & Philippou 2003).

Monet suomalaiset ja unkarilaiset neljäsluokkalaiset perustelevat minäkäsitystään oppimiskokemuksillaan matematiikan ymmärtämisestä. Hannula (2000; 2002c) kuvaa neljää suomalaista yläkoululaista, joiden yhtenä tavoitteena matematiikassa oli ymmärtäminen. Myös espanjalainen Kevin Teneriffalta nautti matematiikasta silloin, kun koki ymmärtäneensä (Díaz-Obando, Plasencia-Cruz & Solano-Alvarado 2003). Englantilaiset yhdeksäsluokkalaisetkin pitivät ymmärtämistä matematiikassa eräänä tärkeimmistä syistä tuntea itsensä kyvykkääksi oppiaineessa (Nardi & Steward 2003). Näin on pääteltävissä erimaalaisten ja -ikäisten oppilaiden mukaan, että ymmärtäminen on myönteisen matemaattisen minäkäsityksen yksi edellytys. On vaikeaa kuvitella olevansa hyvä jossakin, jota ei ymmärrä.

Monet suomalaisista ja unkarilaisista oppilaista viittasivat kokeittensa tuloksiin, joista olivat päätelleet, millaisia he ovat matematiikan osaajina. Matematiikan kokeiden harjoittelun perusopetuksen ensimmäisestä luokasta alkaen nähdään olevan tärkein tapahtuma, jossa oppilaat muodostavat käsityksiä akateemisesta kyvykkyydestään (Kasanen, Räty & Snellman 2003). Linnanmäki (2004) toteaa, että yksitoistavuotiaiden käsitykset omista kyvyistään matematiikassa vastaavat niitä tuloksia, joita he saavat kokeissa. Kevin, espanjalainen yläkoululainen Teneriffalta, on tietoinen, että voi menestyä matematiikassa hyvin valmistautumalla kokeisiin (Díaz-Obando, Plasencia-Cruz & Solano-Alvarado 2003). On siis todennäköistä, että oppilaalla, joka menestyy kokeissa, on myönteisempi käsitys itsestään kuin oppilaalla, joka ei onnistu niissä.

On pedagoginen haaste tehdä kokeista optimaalisia oppilaan taitoihin nähden, jos kasvatuksellisena tavoitteena on myönteinen matemaattinen minäkäsitys. Kaikille oppilaille samat kokeet mahdollistavat oppilaiden keskinäisen vertailun. Suomalaisesta yläkoululaisesta Mariasta kokeet olivat kivoja, jotta voi näyttää toisille, miten hyvän numeron saanut, mutta alakoulussa hän oli kokenut vaikeaksi pysyä nopeampien laskijoiden kanssa samassa tahdissa (Hannula 2002c). Joittenkin suomalaisten ja unkarilaisten oppilaiden kuvauksista välittyi kilpailu, kuka laskee nopeimmin matematiikan tehtävät. Oppilaiden välistä kilpailua siivittää uskomus matematiikan nopeasta oppimisesta. Nopeuskilpailu ja uskomus nopeasta oppimisesta heikentävät oppilaan minäkäsitystä, jos hän ei pärjää kilpailussa. Yhteistoiminnalliset työtavat näyttävät ehkäisevän nopeuskilpailua, koska oppilaat yhdessä vastaavat tehtävän edistymisestä, kuten suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän ongelmanratkaisijat piirroksissaan kuvasivat.

Opettajan antama palaute ja sen odotukset kuvastuivat suomalaisten ja unkarilaisten piirroksista ja kirjoitelmista. Lähes aina he kuvasivat opettajan antamassa myönteistä palautetta itselleen tai muille. Suomalaisen Varga–Neményi -opetusryhmän Kalle totesikin olevansa matematiikassa hyvä, koska opettaja sanoo niin. Suomalaiselle yläkoulun Laurallekaan ei pelkkä matematiikan ymmärtäminen riittänyt, vaan hän halusi saada myös kehuja onnistumisestaan joko kokeissa tai tehtävissä (Hannula 2002c) opettajalta, kavereiltaan tai vanhemmiltaan.

On kasvatuksellinen tavoite saada myönteinen minäkäsitys pysymään myönteisenä tai kielteinen minäkäsitys myönteiseksi. Korpinen (2005) arvioi ”unkarilaisen” matematiikan opetuksen kohottavan oppilaan itsetuntoa. Australialaisessa minäkäsitysohjelmassa perusopetuksen kuudesluokkalaisille järjestettiin kahdeksan oppitunnin ohjelma seuraavista alueista: fyysiset kyvyt, ulkonäkö, suhteet tovereihin ja vanhempiin, lukeminen, matematiikka, koulu ja yleinen minä (Hay 2005). Ohjelmassa kehitettiin oppilaiden ajattelutaitoja kuunnella, sarjoittaa, vertailla, muodostaa vastakohtia, muodostaa syyseuraussuhteita ja ratkaista ongelmia. Kaikilla tutkituilla alueilla kuudesluokkalaisten minäkäsitykset paranivat, mutta matematiikassa vähemmän kuin muilla alueilla. Matemaattisen minäkäsityksen edistyminen ei ollut kuitenkaan merkitsevä.

Jotta matemaattinen minäkäsitys paranisi, olisi oppilaiden pohdittava minäkäsityksen perusteita, joita suomalaiset ja unkarilaiset ovat esittäneet kuvauksissaan: miten edistää matematiikan ymmärtämistä, millaisia ovat optimaaliset tehtävät ja kokeet, opettajan ja vanhempien palaute, oppilaiden keskinäinen vertailu, todistusarviointi ja kilpailu. On uskottavaa, että varsin nuoretkin oppilaat oppimisensa parhaina asiantuntijoina voivat tarjota ratkaisuja kasvatuksellisiin kysymyksiin ja edistää myönteistä matemaattista minäkäsitystä.

8.1.9 Koettu matematiikan opetussuunnitelma ja sen muodostuminen

Kuviossa 8.1.9.1 kootaan keskeiset empiiriset tulokset suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemasta matematiikan opetussuunnitelmasta. Empiiristen tulosten koonnassa pyritään myös mallintamaan koettua matematiikan opetussuunnitelmaa ja sen muodostumista. Samalla arvioidaan koettua opetussuunnitelmaa säätelevien tekijöiden (tunteiden, asenteiden, uskomusten ja matemaattisen minäkäsityksen) käsitteellistämisen toimivuutta empiirisen aineiston analysoinnissa. Lopuksi syntetisoidaan koetun matematiikan opetussuunnitelman säätelevien tekijöiden käsitteellistyksiä empiirisen aineiston pohjalta.

Kuvion 8.1.9.1 neljällä samankeskeisellä ja toisensa läpäisevällä ympyrällä mallinnetaan koetun matematiikan opetussuunnitelman sääteleviä tekijöitä: tunteita, asenteita, uskomuksia ja matemaattista minäkäsitystä. Kuvion sisimmässä ympyrässä olevat tunteet nähdään keskeiseksi affektiiviseksi tekijäksi, joka säätelee kokemuksia matematiikasta, sen oppimisesta, opetuksesta ja itsestä matematiikan oppijana. Matematiikka, sen oppiminen ja opetus ovat herättäneet sekä myönteisiä että kielteisiä tunteita. Tunteiden kirjosta huolimatta monilla oppilailla Suomesta ja Unkarista on myönteinen asenne matematiikkaan, koska se on mukava tai ainakin aika mukava oppiaine. Useimmat oppilaat uskovat matematiikan olevan helppoa ja tärkeää. He uskovat matematiikan oppimisen olevan ymmärtämistä, tajuamista ja keksimistä. Matematiikan opetus oppilaiden mukaan on opettajajohtoista kyselevää opetusta sekä oppilaskeskeistä yksilöllistä ja pareittain työskentelyä. Oppilaista matematiikka on laskemista, ongelmien ja yhtälöiden ratkaisua.

Niin tunteiden kirjon, myönteisten asenteiden sekä matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen liittyvien uskomusten pohjalta suomalaisille ja unkarilaisille neljäsluokkalaisille on muodostunut myönteinen käsitys itsestään matematiikan oppijoina. Useimmat suomalaisista ja unkarilaisista oppilaista kokevat olevansa hyviä tai melko hyviä matematiikassa (ks. kuviota 8.1.9.1).

Neljän samankeskeisen ympyrän ulkopuolella kuvataan oppilaiden itsensä kertomia matemaattisen minäkäsityksen, uskomusten, asenteiden ja tunteiden muodostumisen perusteita. Oppilaan kokemus siitä, oppiiko vai ei, herättää myönteisiä tai kielteisiä tunteita, jotka ovat merkityksellisiä matematiikka-asenteen muodostumisessa. Myönteiset tunnekokemukset edistävät matematiikan lähestyttävyyttä, kielteiset tunnekokemukset etäännyttävät siitä tunteiden naturalistisen näkökulman mukaan (vrt. lukuun 2.1). Oppikirjat, monipuoliset tehtävät, toiminta ja toimintavälineet edistävät myönteistä suhdetta matematiikkaan. Matematiikan monipuoliset sisältöalueet ja kumulatiivinen rakenne saavat oppilaan pitämään matematiikasta. Opettajan käsitykset ja palaute sekä oppilaiden keskinäinen vertailu rakentavat oppilaan käsitystä itsestään matematiikan oppijana. Menestys matematiikkakilpailuissa ja kokeissa sekä todistuksen arvosana ovat myös merkityksellisiä niin matemaattisen minäkäsityksen kuin asenteenkin muodostumisessa.

Teoreettisessa viitekehyksessä, luvussa 2 oletettiin koetun matematiikan opetussuunnitelman rakenteen olevan epäyhtenäinen (Lindenskov 1993). Epäyhtenäistä rakennetta pyrittiin eheyttämään säätelevillä tekijöillä (tunteilla, asenteilla, uskomuksilla ja matemaattisella minäkäsityksellä). Niiden tarkoitus oli yhtenäistää kolmen opetusryhmän kokemusten analysointia. Yhtenäistämisen tarkoitus oli siis ehkäistä sattumanvaraisuutta analysoinnissa. Säätelevät tekijät tukivatkin empiirisen aineiston systemaattista analysointia.

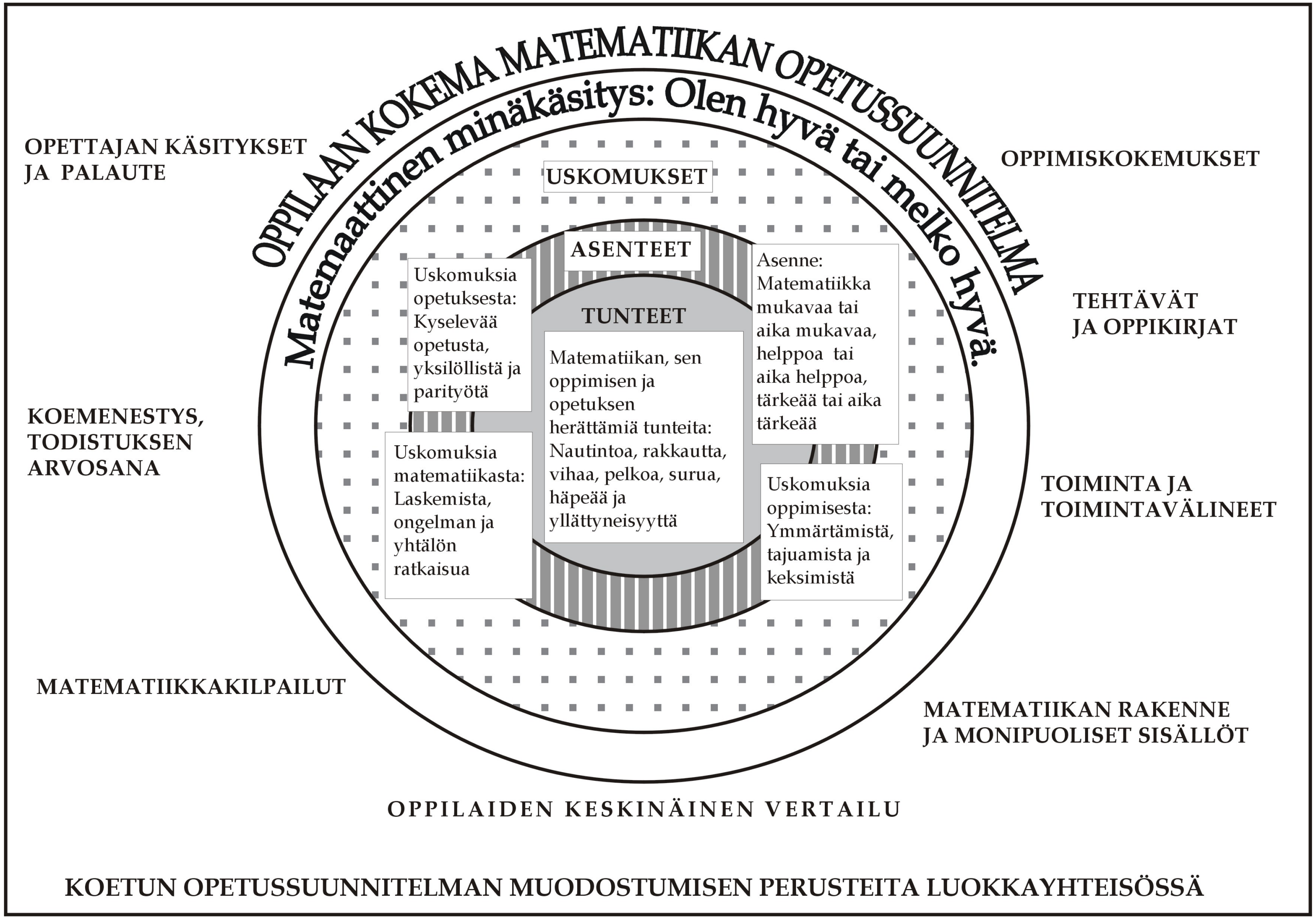
Lisäksi luvussa 2 (ks. kuviota 2.1) oletettiin tunteiden, asenteiden, uskomusten ja matemaattisen minäkäsityksen olevan osittain päällekkäisiä (Furinghetti & Pehkonen 2002; Korpinen 1990; 2000; Pietilä 2002, 21–23; McLeod 1992, 578–579). Näiden säätelevien tekijöiden tarkastelussa pyrittiin eriyttämään ne käsitteellisesti kohteittensa kautta semanttisen empirismin teesin mukaisesti. Semanttisen empirismin teesissä oletetaan sanojen ja lauseiden saavan saman merkityksen käyttäjästä ja käyttöyhteydestä (ajasta ja paikasta) riippumatta (Eskola & Suoranta 1998, 76). Säätelevien tekijöiden käsitteellinen eriyttäminen oli välttämätöntä, jotta empiiristä aineistoa voisi käsitellä johdonmukaisesti: Tunteilla (esimerkiksi ilolla, surulla, vihalla, pelolla, nautinnolla) tarkoitettiin oppilaiden subjektiivisten tuntemusten kuvauksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta. Asenne ymmärrettiin erilaisten arviointiprosessien (tunteiden, assosiaatioiden, odotusten ja arvojen) yhteensulautumisen tuloksena syntyneeksi käyttäytymiseksi tai käyttäytymisvalmiudeksi. Näistä arviointiprosesseista tässä tutkimuksessa painottui aiempien kokemuksien arviointi, jolloin perusopetuksen neljäsluokkalaiset, 9–10-vuotiaat lapset, pohtivat, pitävätkö matematiikasta, ja arvioivat sen vaikeutta tai helppoutta, tärkeyttä ja käyttötarkoituksia. Matemaattinen minäkäsitys sisälsi sen, mitä oppilas tietää ja uskoo itsestään matematiikassa sekä millaiseksi hän arvioi itsensä siinä. Oppilaiden matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen liittyvät uskomukset olivat implisiittisiä tai eksplisiittisiä subjektiivisia käsityksiä, joita he pitivät totena. Nämä käsitteellistykset osoittautuivat toimiviksi empiirisen aineiston johdonmukaisessa analysoinnissa.

Kuvio 8.1.9.1 eroaa luvun 2 kuviosta 2.1, jossa säätelevät tekijät ja minäkäsitys esitettiin kahdella samankeskeisellä ympyrällä. Niillä ilmennettiin sitä, että minäkäsitykseenkin sisältyy tunteita, asenteita ja uskomuksia itsestä. Kuviossa 8.1.9.1 on neljä samankeskistä ympyrää kahden sijasta: Kullakin koetun matematiikan opetussuunnitelman säätelevällä tekijällä on oma ympyränsä.

Tunteet ovat samankeskeisten ympyröiden keskiössä, koska suomalaiset ja unkarilaiset neljäsluokkalaiset kuvasivat eniten juuri tunteitaan matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta. Tämä on ymmärrettävää, koska tunne on kokemuslaaduista ensimmäinen ja perustavalaatuisin (Latomaa 2005; Perttula 2005; Rauhala 2005). Toiseksi sisimmäksi sijoitettiin asenteet, koska niiden muodostumisessa tunteet ovat uskomuksia merkittävämpiä tekijöitä (McLeod 1992). Tämä oli selkeästi havaittavissa suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten, 9–10-vuotiaiden, kuvauksista. Niissä he luettelivat aimo liudan syitä, miksi pitää matematiikasta. Huomattavasti vähemmän he perustelivat, miksi matematiikka tuntuu helpolta tai vaikealta. Näitä perusteluja enemmän he perustelivat, miksi matematiikka on tärkeää. Joten uskomuksia asenteen komponenttina oppilaat perustelivat vähemmän kuin asenteen emotionaalista tekijää. Näistä syistä sijoitettiin uskomukset kolmanneksi keskeltä laskettuna samankeskeisten ympyröiden kuviossa.

Uloimmaksi ympyräksi sijoittui matemaattinen minäkäsitys, koska se sisältää tunteita itsestä, asenteita itseen ja uskomuksia itsestä matematiikan oppijana (Korpinen 1990; 2000; Linnanmäki 2002). Suomalaiset ja unkarilaiset neljäsluokkalaiset perustelivat matemaattista minäkäsitystään esimerkiksi oppimiskokemuksillaan matematiikan ymmärtämisestä, oikein tai väärin ratkaistuilla tehtävillä, koemenestyksellä tai opettajan antamalla palautteella. Matemaattinen minäkäsitys sijoitettiin mallin uloimmaksi ympyräksi, koska se nähdään suotuisten oppimiskokemusten (tunteet, asenteet ja uskomukset) tulokseksi. Lisäksi kuvioon 2.1 on hankalaa teknisesti sijoittaa keskeisiä empiirisiä tuloksia koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta asianmukaisille paikoilleen suhteessa tunteiden, asenteiden ja uskomusten päällekkäisyyteen.

Säätelevien tekijöiden osittaista päällekkäisyyttä kuvataan seuraavassa kuviossa 8.1.9.1 suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemasta matematiikan opetussuunnitelmasta ja sen muodostumisesta luokkayhteisössä.



 KUVIO 8.1.9.1 Koettu matematiikan opetussuunnitelma ja sen muodostumisen perusteita

Matematiikka, sen oppiminen ja opetus herättävät tunteita, joiden pohjalta muotoutuu asenteen emotionaalinen ulottuvuus: matematiikka on useimmille neljäsluokkalaisille mieleinen oppiaine koulussa. Samalla oppilaat muodostavat havaintouskomuksia matematiikan helppoudesta ja tärkeydestä (vrt. Kitcheneriin & Kingiin 1995). Matematiikka on helppoa oppilaiden mukaan silloin, kun sitä oppii ja osaa. Matematiikka on tärkeää silloin, kun sitä voi soveltaa esimerkiksi omaan arkielämään ja koulussa eri oppiaineisiin.

Samalla kun neljäsluokkalaiset oppivat matematiikkaa, kehittyivät uskomukset, mitä matematiikka on, mitä sen oppiminen on ja miten sitä opetetaan. Näin uskomuksiin olivat yhteydessä mm. opettajan, oppikirjan ja oppimistehtävien välittämät käsitykset, joista muodostuvat lasten auktoriteettiuskomukset (Kitchener & King 1995). Vaikka uskomukset matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta ovat kognitiivisesti painottuneita (McLeod 1992, 578–579), niihin sisältyi myönteisten ja kielteisten tunteiden kirjoa. Vaihtelevat matematiikan sisältöalueet, haastavat oppimistehtävät ja yhteistoiminnalliset työtavat saavat oppilaat muodostamaan sosiokonstruktivistisia uskomuksia. Myönteisinä uskomuksina ne edistävät edelleen myönteistä asennetta matematiikan oppimiseen ja opetukseen.

Kun myönteisiä tunnekokemuksia on enemmän kuin kielteisiä, muodostuu myönteinen asenne matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen. Kun asenne niihin on myönteinen ja uskomukset oppijan aktiivista roolia rakentavia, näistä seuraa suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten mukaan myönteinen tai ainakin melko myönteinen käsitys itsestä matematiikan oppijana.

Koetun matematiikan opetussuunnitelman epäyhtenäisen rakenteen ja sitä säätelevien tekijöiden käsitteellisen päällekkäisyyden haastamana oli opettavaa syventyä tutkivana opettajana suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten, 9–10-vuotiaiden, näkemyksiin suotuisasta matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta. Pohtikaamme seuraavaksi, miksi tutkia koettua matematiikan opetussuunnitelmaa.

8.2 Miksi tutkia koettua matematiikan opetussuunnitelmaa?

Perusopetuksen neljännen vuosiluokan oppilailla on koulukokemuksia matematiikasta oppiaineena, sen oppimisesta ja opetuksesta neljältä vuodelta ja mahdollisesti esiopetuksestakin. Sekä Perkkilä (2002) ja Kaasila (2000) haastoivat tutkimaan oppilaiden kokemuksia matematiikan opetuksesta. Kokemukset jäävät marginaaliin, kun tutkitaan opettajien tai opettaja-opiskelijoiden uskomuksia. Koulukokemuksia matematiikasta on tarkasteltu tässä tutkimuksessa koetun matematiikan opetussuunnitelman näkökulmasta. Se paljastaa, mitä oppilas on havainnut matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta ja miten hän on tulkinnut havaintojaan.

Perusopetuksen oppilaiden myönteiset matematiikka-asenteet, uskomukset matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta sekä käsitykset itsestä matematiikan oppijoina perusteluineen voisi ottaa vakavana palautteena opetussuunnitelman ja opetuksen kehittämiseksi. On haaste ylempien luokkien matematiikan opetukselle, että asenteet pysyisivät jatkossakin myönteisinä ja voisivat rikastaa matematiikkaan liittyviä uskomuksia. Myönteinen matemaattinen minäkäsitys on arvokas kasvatuksellinen tavoite, jonka toteutuminen osaltaan tarjoaa aikuistuvalle nuorelle mahdollisuuksia monipuolisiin uravalintoihin.

Koettu matematiikan opetussuunnitelma voi auttaa käytännön opettajia luomaan oppimisympäristöjä, joissa otetaan huomioon oppijan aiemmat kokemukset, jotka tukevat tehokkaasti matematiikan oppimista. Perusopetuksen perimmäinen tehtävä on kasvattaa nuoria ja aikuisia, jotka oppivat, iloitsevat oppimisestaan ja ovat valmiita omaehtoiseen matematiikan oppimiseen koulun ulkopuolellakin. Oppilaiden myönteisesti kokema matematiikan opetussuunnitelma luo kasvatusoptimismia matematiikan opetukseen tuleville vuosikymmenille.

Tutkimus koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta mallinnuksineen tarjoaa perusteita teorian kehittämiselle matematiikan opetussuunnitelman ja opetuksellisten ratkaisujen välisestä yhteydestä. Tutkimus tarjoaa myös lähtökohtia kehittää edelleen teoriaa opetussuunnitelman, uskomusten, asenteiden ja minäkäsityksen välisestä yhteydestä. Nykyinen Suomen arviointiorientoitunut opetussuunnitelma saa tulevalla vuosikymmenellä seuraajansa, jossa olisi syytä ottaa huomioon tunteiden, asenteiden, uskomusten ja matemaattisen minäkäsityksen kehittäminen eksplisiittisenä tavoitteena.

Tutkimus koetusta matematiikan opetussuunnitelmasta haastaa tulevan opetussuunnitelmauudistuksen myös kehityspsykologian ja matematiikan rakenteiden eheyttämiseen: Subitisaatio (ihmisen luontainen kyky havaita pieniä lukumääriä tarkasti) lukukäsitteen oppimisen perustana, kehon symmetria muotojen oppimisen perustana ja loogis-matemaattiset kokemukset matematiikan yleisen rakenteen oppimisen perustana saattaisivat muuttaa sisältöpainotteisen opetussuunnitelman toteutuksen aiempaa oppijalähtöisemmäksi.

Koetun matematiikan opetussuunnitelman tavoittamiseksi käytettiin tutkimusaineistona lasten tuottamia piirroksia matematiikan oppitunneista. Tämä tutkimus tarjoaa yhden mallin analysoida piirroksia jäsentyneesti laadullisesti. Tutkimus tarjoaa mahdollisuuden tunnistaa tunteita, asenteita ja uskomuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta sekä matemaattisia minäkäsityksiä. On mahdollista lähestyä piirroksia myös tilastollisesti, mikä mahdollistaa laajojen tutkimusaineistojen hallinnan. Suomessa onkin käytetty vähän oppilaiden piirroksia opetustilanteista palautteen antajina. Näin tätä tutkimusta voidaan hyödyntää sekä opettajien perus- ja täydennyskoulutuksessa että tulevien tutkimusten teoreettisissa ja menetelmällisissä ratkaisuissa.

Jatkossa olisi mielenkiintoista seurata oppilaiden kokemaa opetussuunnitelmaa esiopetuksesta lukioon, samoin sitä, millaisia mahdollisia muutoksia tapahtuu tunteissa, asenteissa, uskomuksissa ja käsityksissä itsestä matematiikan oppijana. Koska koettu opetussuunnitelma on yhteydessä tarkoitettuun matematiikan opetussuunnitelmaan ja opetukseen, se tarjoaa mahdollisuuden kehittää niitä tavoitteellisesti oppilaspalautteen pohjalta. Multimetodiset tutkimukset Gulekin (1999) tutkimuksen tavoin tarjoaisivat triangulaatiolle vankan perustan menetelmällisillä ratkaisuillaan, jolloin matematiikan oppimista ja opetusta lähestytään videoiden, haastatellen, vapaamuotoisesti kirjoittaen, piirtäen ja kyselyiden avulla. Niin ikään kansainväliset tutkimukset koetusta opetussuunnitelmasta mahdollistaisivat oppimispolkujen kehityksen vertailun. Kansainvälinen vertailu edellyttää matematiikan opetussuunnitelman ja opetuksen perusteellista tuntemusta, jotta koettua matematiikan opetussuunnitelmaa voidaan syvällisesti ymmärtää.

Koettu matematiikan opetussuunnitelma on yhteydessä opettajien ja vanhempien käsityksiin matematiikasta ja yhteiskunnalliseen matemaattiseen kulttuuriin laajemminkin, mitä pohdinnassa on pyritty osoittamaan. Koettu opetussuunnitelma on herättänyt sisäisen motivaation tutkia erityisopettajien, luokanopettajien, matematiikan aineenopettajien, opettajankouluttajien ja professoreiden näkemyksiä laadukkaasta matematiikan opetuksesta. Matematiikan professoreiden näkemysten selvittäminen piirroksilla koeluontoisesti on jo käynnistynyt. Suomalaisen perusopetuksen alakoululaisten tuhat piirrosta matematiikan oppitunneista ja koululaisvitsit matematiikasta vuosilta 1998–2007 odottavat tutkijaansa.

8.3 Lopuksi

Hyvä lukijani, aloitimme eläytymällä matematiikkaan pienen ongelman avulla.

Olet Unkarissa idyllisessä Szentendren käsityöläiskaupungissa, josta lähdet patikoimaan kohti Budapestia ystäväsi luokse kello 17. Kävelyvauhtisi on keskimäärin 4 kilometriä tunnissa. Ystäväsi lähtee Budapestista sinua vastaan puolta tuntia myöhemmin, mutta hän kävelee 6 kilometrin keskituntinopeudella. Szentendren ja Budapestin välimatka on 20 kilometriä. Kun kohtaatte, kumpi teistä on lähempänä Budapestia?

Mahdollisesti ratkaisit ongelman suorittamalla laskutoimituksia ajasta ja matkasta, kuten koulumatematiikassa usein on tapana. Voi vain arvailla, ihastuitko vai vihastuitko laskutoimituksiin. Todennäköisesti koit ahaaelämyksen oivaltaessasi, että kohdatessasi ystäväsi, olette yhtä kaukana – tai yhtä lähellä – niin Budapestista kuin Szentendrestä. Yhdeksän vuotiaan Amandan sanoin: Matematiikka on helpompaa ja hauskempaa kuin luulin. Kiitokset matkaseurasta!

SUMMARY

"Easier and more fun than I thought". Mathematics experienced by fourth-graders in Finnish and Hungarian comprehensive schools.

Introduction

The starting point for the study was the Hungarian Mathematics project begun in 2000 by the Teacher Researcher Network. The aim of this international educational project for teachers has been to develop the mathematics curriculum, to create learning materials and to try them out in practice. The aim of developing the mathematics curriculum has been to offer elementary school pupils positive experiences of mathematics, mathematics learning as well as of its teaching.

The aim of the study is to describe and compare the experienced mathematics curriculum of Finnish and Hungarian 4th grade comprehensive school pupils. It comprises emotions, attitudes and beliefs, and also self-concept. It involves an affective area of learning mathematics. Goldin (1998, 155; 2002, 60–62) and Gómez-Chacón (2000) regard the affective area as the most fundamental for understanding the mathematical activity and ability structure of pupils and adults. The experienced mathematics curriculum is multidimensional and it includes emotions, attitudes toward and beliefs about the learning and teaching of mathematics as well as the pupil's self-concept as a mathematics learner. The experienced mathematics curriculum is considered in relation to the 2004 Finnish mathematics curriculum and 2003 Hungarian mathematics curriculum, to mathematics textbooks and manipulatives as the possible curriculum and to teaching method as the implemented curriculum.

The research sought answers to the following research questions: 1) What kind of beliefs do Finnish and Hungarian 4th graders have about mathematics, learning it and its teaching? 2) What kind of attitudes do the pupils have towards mathematics? 3) How do they see themselves as mathematics learners? 4) What similarities and differences can be found in the experienced mathematics curriculum of Finnish and Hungarian 4th graders?

Methods

The 9–10 year-old-pupils (n = 64) of the study were from three teaching groups. The first group consisted of 20 Finnish pupils and, the second group of 23 Hungarian pupils. Both groups were taught by the Hungarian Varga–Neményi teaching method. The third group consisted of 21 Finnish pupils, who were taught using the Finnish approach.

The methodological solution was to a follow pedagogic hermeneutic-phenomenological approach. To obtain a thorough grasp of the international experienced mathematics curriculum required many years of orientation both as a researcher and as a teacher of mathematics and, mathematics learning, as well as of teaching mathematics in Finland and in Hungary. The qualitative study material consisted of pupils' relatively free and unsupervised writings and drawings, which were collected during everyday school teaching.

In order to discover the experienced mathematics curriculum from the drawings making up the qualitative study a three-stage method was developed: 1) documenting characteristics 2) attaching concepts to the found characteristics and 3) holistic evaluation of the drawings. The writings were analyzed by theme.

Results and discussion

Based on the pupils' descriptions three types were identified in the experienced mathematics curriculum according to mathematical contents and the style of the narrative in the teaching groups: The argumentative problem solver in the Finnish Varga–Neményi group, the contrasting equation solver in the Hungarian Varga–Neményi group and the stating calculator in the Finnish group.

According to this three-way classification related to the experienced mathematics curriculum it emerged that in the Finnish Varga–Neményi group argumentative explaining was emphasized, along with problem solving and independent student-centered work, both in pairs and individually. The pupils in this group consider mathematics learning as understanding, discovering, inventing and getting insights. Problem solving and argumentation are the most typical characteristics of the group.

In the Hungarian Varga–Neményi-teaching group mathematics teaching is teacher-directed questioning and individual working. The pupils consider mathematics learning as understanding, figuring out, inventing and getting insights. Equation solving and contrasting is typical of the Hungarian group.

In the Finnish teaching group the emphasis typically lies on teacher-directed questioning and individual working. The pupils consider learning mathematics as understanding and figuring out. As far as the mathematics curriculum was concerned, the emphasis was on stating the results of basic calculating processes.

Regardless of the teaching method, the majority of both Finnish and Hungarian comprehensive school 4th graders have either a straight-forward or an ambivalently positive attitude towards mathematics. They like mathematics for a number of reasons: It is an entertaining adventure to be on scent of new ideas, and it is developing, important and necessary. It challenges to think, ponder, wonder and learn new things. Mathematics covers diversity of topics, it has a cumulative structure and varied exercises. Manipulatives are used to study mathematics. It provides animated and cooperative activity. The teacher makes mathematics interesting and fun. Most Finnish and Hungarian pupils consider mathematics to be an easy and important school subject. The 4th graders deduce their perceptions of whether mathematics is easy or difficult from their past learning experiences, exercises and tests. The pupils consider mathematics to be important when it is applicable to their own life, to other subjects, to a future profession or to working life.

Most Finnish and Hungarian pupils have a positive or a reservedly positive self-concept in mathematics. The mathematical self-concept of 4th graders is based on learning experiences, their success in exercises and assignments, success in exams, and also on feedback provided by the teacher, their received grade, success in mathematical competitions and inter-pupil comparisons.

The experienced curriculum revealed some prevalent beliefs about mathematics, about learning mathematics as well as about its teaching. It also revealed some of the factors that shape the attitudes and the self-concept of young pupils. The experienced mathematics curriculum provides teachers with important feedback for developing the teaching of mathematics and the mathematics curriculum.

LÄHTEET

Abu-Hilal, M. M. 2000. A structural model of attitudes toward school subjects, academic aspirations and achievement. Educational Psychology 20, 75–84.

Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2005. Kuuntelemistasot opettajan ja oppilaan vuorovaikutuksessa matematiikan tunnilla. Teoksessa L. Jalonen, T. Keranto & K. Kaila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25.-26.11.2004. Matemaattisten aineiden opettajan taitotieto – haaste vai mahdollisuus? Oulun yliopisto. Kasvatustieteiden ja opettajankoulutusyksikkö, 33–37.

Ahtee, M., Pehkonen, E., Krzywacki, H., Lavonen, J. & Jauhiainen, J. 2005. Kommunikointi luokassa – opetuksen ydin? Teoksessa A. Virta, K. Merenluoto & P. Pöyhönen. Ainedidaktiikan ja oppimistutkimuksen haasteet opettajankoulutukselle. Ainedidaktinen symposium 11.2.2005. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B 75, 94–100.

Alerby, E. 2000. A way of visualising children's and young people's thoughts about the environment: a study of drawings. Environmental Education Research 6 (3), 205–222.

Alerby, E. 2003. 'During the break we have fun': a study concerning pupils' experience of school. Educational Research 45 (1), 17–28.

Allen, M. C. 1980. A study to determine the congruence of the planned and experienced curriculum in a K-12 school district in the state of Nebraska. The University of Nebraska, NE. Julkaisematon väitöskirja.

Allport, G. W. 1961. Pattern and growth in personality. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Amato, S. A. 2004. Improving student teachers' attitudes to mathematics. Teoksessa M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (toim.) Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education 2 Bergen, Norway 14–18 July, 25–32.

Andersen, S. M., Reznik, I. & Chen, S. 1997. The self in relation to others: Motivational and cognitive underpinnings. Teoksessa J. Snodgrass & R. Thompson (toim.) The self across psychology. Annals of the New York Academy of Sciences 818, 233–275.

Anderson, J. & Boylan, M. 2002. The national numeracy strategy: Teacher questions and pupil anxiety. Teoksessa S. Goodchild (toim.) Proceedings of the British society for research into learning mathematics 22 (1&2). University of Durham and Bristol, 49–54.

Andrews, P. & Hatch, G. 2000. A comparison of Hungarian and English teachers' conceptions of mathematics and its teaching. Educational Studies in Mathematics 43, 31–64.

Andrews, P. & Hatch, G. 2001. Hungary and its characteristic pedagogical flow. Teoksessa J. Winter (toim.) Proceedings of the British society for research into learning mathematics 21 (2). University of Keele, 26–40.

Aronsson, K. & Andersson, S. 1996. Social scaling in children's drawings of classroom life: A cultural comparative analysis of social scaling in Africa and Sweden. British Journal of Developmental Psychology 14, 301–314.

Askell-Williams, H. & Lawson, M. J. 2006. "Well the first thing I done was to ask my mum to go the internet" A classroom based investigation into year 8 students' knowledge about learning. Paper presented at the Annual Conference of Australian Association for Research in Education, Adelaide, Nov 27th-30th.

Asplund Carlsson, M., Pramling Samuelsson, I. & Soponyai, A. 2001. The dog's tale: Chines, Hungarian and Swedish children's narrative conventions. International Journal of Early Years Education 9 (3), 181–191.

Aunola, K. & Nurmi, J-E. 2004. Eskareista epuiksi -tutkimus: Motivaation ja koulutustaitojen kehitys esiopetuksesta kouluun. NMI-Bulletin oppimis-vaikeuksien erityislehti 14 (3), 7–12.

Banaji, M. & Prentice, D. 1994. The self in social contexts. Annual Review of Psychology 45, 297–332.

Barraza, L. 1999. Children's drawings about the environment. Environmental Research 5 (1), 49–66.

Barrow, J. D. 1992. Lukujen taivas. Laskeminen, ajattelu ja olemassaolo. Suom. R. Vilkko 1999. Helsinki: Art House.

Báthory, Z. & Leimu, K. 1994. Finnish and Hungarian education compared: Selected issues of mutual interest. University of Jyväskylä. Institute for Educational Research. Report Series B. Theory into Practice 87.

Bleeker, M. M. & Jacobs, J. E. 2004. Achievement in math and science: Do mothers' beliefs matter 12 years later? Journal of Educational Psychology 96 (1), 97–109.

Block, J. H. & Hazelip, K. 1995. Teachers' beliefs and belief systems. Teoksessa L. W. Anderson (toim.) International encyclopedia of teaching and teacher education. London: Pergamon Press, 25–28.

Boaler, J. 1997a. Experiencing school mathematics. Teaching styles, sex and setting. Buckingham, UK: Open University Press.

Boaler, J. 1997b. Reclaiming school mathematics: girls fight back. Gender and Education 9, 285–305.

Boaler, J. 1998. Open and closed mathematics: student experiences and understandings. Journal for Research in Mathematics Education 29, 41–62.

Bock, D. 1994. Co-operative learning in the secondary school mathematics classroom. Teoksessa D. Buerk (toim.) Empowering students by promoting active learning in mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 13–18.

Bornholt, L. J. & Ingram, A. 2001. Personal and social identity in children's self-concepts about drawing. Educational Psychology 21 (2), 151–166.

Boylan, M. & Lawton, P. 2000. "I'd be more likely to speak in class if...": How some year eight student's experience teacher questioning and discussion strategies. Teoksessa T. Rowland (toim.) Proceedings of the British society for research into learning mathematics 20 (3). University of Roehampton, 7–12.

Brown, P. J., Kreisman, M. B. & Noble, A. J. 1999. What students have to say about mathematics: Education reform & students reality. Paper presented at the Annual Meeting of American Educational Research Association Montreal, Quebec, Canada, April 19-23, 2–35.

Buerk, D. 1994. Introduction: Students' conceptions of mathematics and the challenge of the standards. Teoksessa D. Buerk (toim.) Empowering students by promoting active learning in mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1–5.

Bulmer, M. & Rolka, K. 2005. The "A4-project" – statistical world views expressed through pictures. Teoksessa H. L. Chick & J. L. Vincent (toim.) Proceedings of 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education 2. Melbourne: PME, 193– 200.

Burnett, P. C. 1999. Children's self-talk and academic self-concepts. The impact of teachers' statement. Educational Psychology in Practice 15 (3), 195–200.

Cantwell, R. H. & Andrews, B. 2002. Cognitive and psychological factors underlying secondary school students' feelings towards group work. Educational Psychology 22 (1), 75–91.

Cardelle-Elawar, M. 1992. Effects of teaching metacognitive skills to students with low mathematics ability. Teaching and Teacher education 8 (2), 109–121.

Carr, K. C. 2003. What mathematics is important to learn? School students' views. Research Education 70, 1–8.

Carré, C. & Ernest, P. 1993. Performance in subject-matter knowledge in mathematics. Teoksessa N. Bennett & C. Carré (toim.) Learning to teach. London: Routledge, 36–50.

Chambers, D. W. 1983. Stereotypic images of the scientist: The draw-a-scientist test. Science Education 67 (2), 255–265.

Christle, C. A. & Schuster, J. W. 2003. The effects of using response cards on student participation, academic achievement, and on-task behavior during whole-class, math instruction. Journal of Behavioral Education 12 (3), 147–165.

C. Neményi, E. 2002. Reláciok, függvények, sorozatok, a törtszám, a negatív szám (Relaatiot, funktiot, jonot, murtoluvut, negatiiviset luvut). Matematika tantárgypedagógiai füzetek. Budapest: Elte tanító- és óvóképzö föiskolai kar.

C. Neményi, E. 2003a. A számolás tanítása (Laskutaidon opettaminen). Matematika tantárgypedagógiai füzetek. Budapest: Elte tanító- és óvóképzö föiskolai kar.

C. Neményi, E. 2003b. A természetes szám fogalmának kialakítása (Luonnollisen luvun käsitteen muodostaminen). Matematika tantárgypedagógiai füzetek. Budapest: Elte tanító- és óvóképzö föiskolai kar.

C. Neményi, E. 2003c. Geometria tananyag és a geometria tanulása az alsó tagozaton (Geometrian oppimäärä ja geometrian oppiminen ala-asteella). Matematika tantárgypedagógiai füzetek. Budapest: Elte tanító- és óvóképzö föiskolai kar.

C. Neményi, E. 2005. 4. luokan matematiikan rakenne. A 4. osztályos tananyag épülése. Suom. A. Hajdu. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Matematika Magyar módra Finnországban és Magyarországon. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 32–65.

Cobb, P. 1986. Contexts, goals, beliefs and learning mathematics. For the Learning of Mathematics 6 (2), 2–9.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. 2000. Research methods in education. 5. painos. London: Routledge Falmer.

Cox, C. 1999. Drawing conclusions: a study in drafting with cartoons. Changing English 6 (2), 219–235.

Csapó, B. 2000. Students' attitudes towards school subjects. Magyar Pedagógia 100 (3), 343–366.

Csikszentmihalyi, M. 1997. Finding flow. The psychology of engagement with everyday life. New York: Basic Books.

Damasio, A. 1999. Tapahtumisen tunne. Miten tietoisuus syntyy. Suom. K. Pietiläinen. Helsinki: Terra Cognita.

Davis, J. E. & Barnard, J. T. 2000. What seems to be happening in mathematics lessons? Findings from one school system and five student teachers. The Mathematics Educator 10 (1), 11–18.

Davis, J. & Brember, I. 1994. Attitudes to school and the curriculum in year 2 and year 4: Changes over two years. Educational Review 46 (3), 247–258.

DeBellis, V. A. 1996. Interaction between affect and cognition during mathematical problem solving: A two year case study of four elementary school children. Rutgers University doctoral dissertation. Ann Arbor, MI: University Microfilms 96-30716.

DeBellis, V. A. 1998. Mathematical intimacy: Local affect in powerful problem solvers. Teoksessa S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood & L. Stiff (toim.) Proceedings of the annual meeting of the North American chapter of the international group for psychology of mathematics education 2. Raleigh, NC: North Carolina State University, 435–440.

DeBellis, V. A. & Goldin, G. A. 1993. Analysis of interaction between affect and cognition in elementary school children during problem solving. Teoksessa J. R. Becker & B. Pense (toim.) Proceedings of the 15th annual meeting of PME-NA. Pacific Grove, CA: San Jose State University Centrum for Mathematics and Computer Science Education 2, 56–62.

Demo, D. 1992. The self-concept over time: Research issues and directions. Annual Review of Sociology 18, 303–326.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (toim.) 2000. Handbook of qualitative research. 2. uudistettu painos. London: Sage.

Díaz-Obando, E., Plasencia-Cruz, I. & Solano-Alvarado, A. 2003. The impact of beliefs in student's learning: an investigation with students of different contexts. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 34 (2), 161–173.

Dienes, Z. (toim.) 1966. Mathematics in primary education. Hamburg: Unesco Institute For Education.

Dienes, Z. P. 1973. The six stages in the process of learning mathematics. England, Bergs: NFER.

Di Martino, P. & Zan, R. 2001a. Attitude toward mathematics: some theoretical issues. Teoksessa M. van den Heuvel-Panhuizen (toim.) Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education 3. Freudenthal Institute, University of Utrecht. Netherlands, 351–358.

Di Martino, P. & Zan, R. 2001b. The problematic relationship between beliefs and attitudes. Teoksessa R. Soro (toim.) Current state of research on mathematical beliefs X. Proceedings of the MAVI-10 European workshop June 2-5. University of Turku. Department of Teacher Education,17–24.

Di Martino, P. & Zan, R. 2002. An attempt to describe a 'negative' attitude toward mathematics. Teoksessa P. Di Martino (toim.) Current state of research on mathematical beliefs XI. Proceedings of the MAVI-XI European workshop. Pisa, April 2-8. University of Pisa. Department of Mathematics, 22–29.

Do, S. L. & Schallert, D. L. 2004. Emotions and classroom talk: Toward a model of the role of affect in students' experiences of classroom discussions. Journal of Educational Psychology 96 (4), 619–634.

Dopkins Stright, A. & Supplee L. H. 2002. Children's self-regulatory behaviors during teacher-directed, seat-work, and small-group instructional contexts. The Journal of Educational Research 95 (4), 235–244.

Dowling, P. 1998. A sociological analysis of school mathematics texts. Educational Studies in Mathematics 31, 389–415.

Eccles, J., Wigfield, A., Harold, R. D. & Blumenfeld, P. 1993. Age and gender differences in children's self- and task perceptions during elementary school. Child Development 64, 830–847.

Edwards, J-A. 2004. Friendship groups and socially constructed mathematical knowledge. Teoksessa A. Noyes (toim.) Proceedings of British Society for Research into Learning Mathematics 24 (3). University of Sussex, 7–13.

Emmer, E. T. & Gerwels, M. C. 2002. Cooperative learning in elementary classrooms: Teaching practices and lesson characteristics. The Elementary School Journal 103 (1), 75–91.

Erikson, E. H. 1962. Lapsuus ja yhteiskunta. Jyväskylä: Gummerus.

Eskola, J. 2001. Laadullisen tutkimuksen juhannustaiat. Laadullisen aineiston analyysi vaihe vaiheelta. Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin II. Jyväskylä: PS-kustannus, 133–157.

Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. 7. painos. Tampere: Vastapaino.

Farkota, R. M. 2003. The effects of a 15-minute direct instruction intervention in the regular mathematics class on students' mathematical self-efficacy and achievement. Australia Monash University. Julkaisematon väitöskirja.

Fleming, M., Merrell, C. & Tymms, P. 2004. The impact of drama on pupils' language, mathematics and attitude in primary schools. Research in Drama Education 9 (2), 177–197.

Frank, M. L. 1988. Problem solving and mathematical beliefs. Arithmetic Teacher 35 (5), 32–34.

Franke, M. L. & Carey, D. A. 1997. Young children's perceptions of mathematics in problem solving environments. Journal for Research in Mathematics Education 28 (1), 8–25.

Furinghetti, F. 1996. A theoretical framework for teachers' conceptions. Teoksessa M. S. Hannula (toim.) Current state of research on mathematical beliefs III: Proceedings of MAVI-3 workshop 1996. University of Helsinki. Department of Teacher Education, 19–25.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. 2000. A comparative study on students' beliefs concerning their autonomy in doing mathematics. NOMAD 8 (4), 7–26.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. 2002. Rethinking characterisations of beliefs. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (toim.) Beliefs: A hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer, 39–58.

Gasson, S. 2004. Rigor in grounded theory research: An interpretative perspective on generating theory from qualitative field studies. Teoksessa M. E. Whitman & A. B. Woszczynski (toim.) The handbook of information systems research. Hershey, PA: Idea group, 79–102.

Garofalo, J. 1989. Beliefs and their influence on mathematical performance. Mathematics Teacher 82 (7), 502–505.

Gellert, U. 2001. Research on attitudes in mathematics education: a discursive perspective. Teoksessa M. van den Heuvel-Panhuizen (toim.) Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education 3. Freudenthal Institute, University of Utrecht. Netherlands, 33–40.

Gillies-Rezo, S. & Bosacki, S. 2003. Invisible bruises: kindergartners' perceptions of bullying. International Journal of Children's Spirituality 8 (2), 163–177.

Goldin, G. A. 1998. Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. Journal of Mathematical Behavior 17 (2), 137–165.

Goldin, G. A. 2002. Affect, meta-affect, and mathematical beliefs structures. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (toim.) Beliefs: A hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer, 59–72.

Goleman, D. 1999. Tunneäly. Lahjakkuuden koko kuva. Suom. J. Kankaanpää. Helsinki: Otava.

Gómez-Chacón, I. M. 2000. Affective pathways and representations in mathematical problem solving. Mathematical Thinking and Learning 2 (3), 209–219.

Goodnow, J. & Burns, A. 1985. Home and school: a child's-eye view. Macquarie University. Sydney London Boston: Allen & Unwin.

Grice, J. W., Burkley III, E., Burkley, M., Wright, S. & Slaby, J. 2004. A sentence complementation task for eliciting personal constructs in specific domains. Personal construct theory & practice. An Internet Journal devoted to the Psychology of Personal Constructs 1.

Gulek, C. 1999. Using multiple means of inquiry to gain insight into classrooms: A multi-trait multi-method approach. Chestnut Hill, MA. Boston College. Julkaisematon väitöskirja.

Gyöngyösi, E. 2002. Mathematics competitions and their role in education. Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, sectio Mathematicae 29, 115–124.

Haggarty, L. & Pepin, B. 2002. An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? British Educational Journal 28, 567–590.

Halmos, M. & Varga, T. 1978. Change in mathematics education since the late 1950´s – ideas and realisation Hungary. Educational Studies in Mathematics 9, 225–244.

Halverscheid, S. & Rolka, K. 2006. Mathematical beliefs encoded in pictures and words. Teoksessa J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (toim.) Proceedings of 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education 3. Prague: PME, 233–240.

Haney, W., Russell, M. & Bebell, D. 2004. Drawing on education: using drawings to document schooling and support change. Harvard Educational Review 74 (3), 241–271.

Hannula, M. 1996. Tyttöjen ja poikien itseluottamus matematiikassa peruskoulun päättyessä. Teoksessa S. Tella (toim.) Nautinnon lähteillä. Aineen opettaminen ja luovuus. Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 2.2.1996. Helsingin yliopisto. Opettajakoulutuslaitos. Tutkimuksia 163, 319–326.

Hannula, M. S.1999. Cognitive emotions in learning and doing mathematics. Teoksessa Philippou (toim.) MAVI-8 Proceedings eight European workshop. Research on mathematical beliefs. March 11.-15.1999 Nicosia, Cyprus. University of Cyprus, 57–66.

Hannula, M. S. 2000. Mathematics, emotions, and math attitude – two case studies. Teoksessa K. Hag, I. Holden & P. van Marion (toim.) Handling bak ordenen; Artikler on jenter og matematik. Norway: Tronheim: Norges teknisk-naturvitenskapliga universitetet, 75–92.

Hannula, M. S. 2001a. Student's needs and goals and their beliefs. Teoksessa R. Soro (toim.) Current state of research on mathematical beliefs X; Proceedings of the MAVI-10 European workshop June 2-5, 2001. Turun yliopisto. Opettajankoulutuslaitos, 25–32.

Hannula, M. S. 2001b. The metalevel of cognition-emotion interaction. Teoksessa M. Ahtee, O. Björkqvist, E. Pehkonen & V. Vatanen (toim.) Research on mathematics and science education. From beliefs to cognition, from problem solving to understanding. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos, 55–65.

Hannula, M. S. 2002a. Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values. Educational Studies in Mathematics 49 (1), 25–46.

Hannula, M. S. 2002b. Goal regulation: needs, beliefs and emotions. Teoksessa A. D. Cockburn & E. Nardi (toim.) Proceedings of the 26th conference of the international group for the psychology of mathematics education. Vol. 3. Norwich. UK: University of East Anglia. 73–80.

Hannula, M. S. 2002c. Motivaation itsesäätelystä: tarve, usko ja tunne. Teoksessa V. Meisalo (toim.) Aineenopettajankoulutuksen vaihtoehdot ja tutkimus 2002. Ainedidaktiikan symposiumi 1.2.2002. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 241, 63–76.

Hannula, M. S. 2003. Fictionalising experiences – experiencing through fiction. For the Learning on Mathematics 23 (3), 33–39.

Hannula, M. S. 2004. Affect in mathematical thinking and learning. Turun yliopisto. Annales Universitatis Turkuensis B 273.

Hannula, M. S. 2007. Finnish research on affect in mathematics: Blended theories, mixed methods and some findings. ZDM The International Journal on Mathematics Education 39 (3), 197–203.

Hannula, M. S., Kaasila, R., Laine, A. & Pehkonen, E. 2005. Luokanopettajien matematiikkakuvan rakenteesta. Teoksessa L. Jalonen, T. Keranto & K. Kaila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25.-26.11.2004. Matemaattisten aineiden opettajan taitotieto – haaste vai mahdollisuus? Oulun yliopisto. Kasvatustieteiden ja opettajankoulutusyksikkö, 55–69.

Hannula, M. S., Maijala, H. & Pehkonen, E. 2004. Itseluottamuksen ja ymmärtämisen kehittyminen matematiikassa: pitkittäistutkimus luokille 5-8. Teoksessa S. Ahonen & A. Siikaniva (toim.) Eurooppalainen ulottuvuus. Ainedidaktinen symposiumi Helsingissä 6.2.2004. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 252, 197–206.

Harries, I. & Sutherland, R. 1998. A comparison of primary mathematics textbooks from five countries with particular focus on the treatment of number. Qualifications and Curriculum Authority Final Report. University of Bristol.

Hart, L. E. 1989. Describing the affective domain: saying what we mean. Teoksessa D. B. McLeod & V. M. Adams (toim.) Affect and mathematical problem solving. A new perspective. New York: Sprigler Verlag, 37–45.

Harter, S. 1985. Competence as dimension of self-evaluation: Toward a comprehensive model of self-worth. Teoksessa R. L. Leahy (toim.) The development of the self. New York: Academic Press, 55–121.

Harter, S. 1990. Processes underlying adolescent self-concept formation. Teoksessa R. Montemayor, G. R. Adams & T. P. Gulliton (toim.) From childhood to adolescence: A transition period. Newbury Park, CA: Sage, 205–239.

Hattie, J. A. 1992. Self-concept. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hay, I., Ashman, A. & van Kraayenoord, C. 1998. The educational characteristics of students with high and low self-concept. Psychology in the Schools 35, 391–400.

Hay, I. 2005. Facilitating children's self-concept: A rationale and evaluative study. Australian Journal of Guidance and Counselling 15 (1), 60–67.

Heikkinen, H. L. T. 2001. Narratiivinen tutkimus – todellisuus kertomuksena. Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin II. Jyväskylä: PS-kustannus, 116–132.

Hendley, D., Stables, S. & Stables, A. 1996. Pupils' subject preferences at key stage 3 in South Wales. Educational Studies 22 (2), 177–186.

Henrion, C. 1997. Women in mathematics: the addition of difference. Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press.

Hercz, M. 2003. A nevelési vizsgálat szerepe az iskolaértékelésben (12-13 éves gyermekek gondolkodása iskolájukról). Magyar Pedagógia 103 (1), 57–80.

Hersh, R. & John-Steiner, V. 1993. A visit to Hungarian mathematics. The Mathematical Intelligencer 15 (2), 13–26.

Hiebert, J. & Stigler, J. W. 2000. A proposal for improving classroom teaching: Lessons from the TIMSS Video Study. The Elementary School Journal 101 (1), 3–20.

Hihnala, K. 2005. Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 278.

Hoffmann, N. 2001. Examining the experienced curriculum: stories of interns learning to teach in a partner school setting. Miami University Oxford, Ohio. Julkaisematon väitöskirja.

Hoskonen, K. 1996. Mathematical beliefs of eight-grades: What is mathematics? Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Current State of Research of Mathematical Beliefs III. Proceedings of the MAVI-3 workshop August 23-26, 1996. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 170, 48–52.

Howson, G. 1995. Mathematics textbooks: A comparative study of grade 8 texts. TIMSS monograph No. 3. Vancouver: Pacific Educational Press.

Huber, R. A. & Burton, G. M. 1995. What do students think scientists look like? School Science & Mathematics 95 (7), 371–376.

Huhtala, M. 2002. Opettajien käsityksiä matematiikan oppimistuloksiin yhteydessä olevista tekijöistä ammatillisissa oppilaitoksissa. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Rauman opettajankoulutuslaitos ja Helsinki: Opetushallitus.

Hytti, P. 2007. Mielikuvituksella mielekkyyttä matematiikkaan. Tarinankerronta matematiikan opetusmetodina perusopetuksessa. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.

Häggblom, L. 2006. Use of manipulatives in instruction and learning. Teoksessa E. Pehkonen, G. Brandell & C. Winsløw (toim.) Nordic presentations.

Proceedings of the section Nordic presentations at ICME-10, July 12, 2004 in Copenhagen Denmark. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimusraportti 265, 43–49.

Ilmavirta, R. 1995. Toimintamateriaalien käyttö ja monipuoliset työtavat parantavat oppimista. Teoksessa R. Seppälä (toim.) Toimi, laske ja ajattele Ala-asteen matematiikka. Helsinki: Opetushallitus, 61–69.

Ikäheimo, H. 1995. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H., Aalto, A. & Puumalainen, K. 1998. Opi matematiikkaa leikkien esi- ja alkuopetuksessa. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H. & Näätänen, M. 1995. Lukukäsitteen ja laskutoimitusten opetuksen eteneminen. Teoksessa R. Seppälä (toim.) Toimi, laske ja ajattele Ala-asteen matematiikka. Helsinki: Opetushallitus, 74–87.

Ikäheimo, H. & Risku, A-M. 2004. Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 222–240.

Jacobs, J. E., Lanza, S., Osgood, D. W., Eccles, J. S. & Wigfield, A. 2002. Changes in children's self-competence and values: Gender and domain differences across grades one twelve. Child Development 73 (2), 509–527.

Johnson, R. & Waterfield, J. 2004. Making words count: the value of qualitative research. Physiotherapy Research International 9 (3), 121–131.

Jolley, R. P., Fenn, K. & Jones, L. 2004. The development of children's expressive drawing. British Journal of Developmental Psychology 22, 545–567.

Joutsenlahti, J. 2005b. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis 1061.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2007. Minkälaiseen matemaattiseen osaamiseen peruskoulussa käytetty oppimateriaali ohjaa? Teoksessa K. Merenluoto, A. Virta & P. Carpelan (toim.) Opettajankoulutuksen muuttuvat rakenteet. Ainedidaktiikan symposium 9.2.2007. Turun opettajankoulutuslaitos. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B 77, 184–191.

Joyce, B. & Weil, M. 1986. Models of teaching. 3. painos. New Jersey: Prentice-Hall.

Joyce, B., Weil, M. & Showers, B. 1992. Models of teaching. 4. painos. Needham Heights: Allyn & Bacon.

Joyce, B., Calhoun, E. & Hopkins, D. 2002. Models of learning – tools for teaching. 2. painos. Buckingham, Philadelphia: Open University Press.

Juter, K. 2005. Students' attitudes to mathematics and performance on limits of functions. Mathematics Education Research Journal 17 (2), 91-110.

Kaasila, R. 2000. "Eläydyin oppilaan asemaan". Luokanopettajiksi opiskelevien kouluaikaisten muistikuvien merkitys matematiikkaa koskevien käsitysten ja opetuskäytäntöjen muotoutumisessa. Lapin yliopisto. Acta Universitatis Lapponiensis 32.

Kangasniemi, E. 1989. Opetussuunnitelma ja matematiikan koulusaavutukset. Toisen kansainvälisen (IEA) matematiikkatutkimuksen kansallisia tuloksia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Julkaisusarja A 28.

Kangasniemi, E. 2000. Opettajan uskomukset ja opetusmenetelmät sekä oppilaiden oppimistulokset matematiikassa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimusselosteita 11.

Kankaanranta, M. & Linnakylä, P. 1993. Kolmasluokkalaisen koulupäivä. Oppilaan kokema opetussuunnitelma. Teoksessa V. Brunell & P. Kupari (toim.) Peruskoulu oppimisympäristönä. Peruskoulun arviointi 90 – tutkimuksen tuloksia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 7–37.

Kansanen, P. 2004. Opetuksen käsitemaailma. Jyväskylä: PS-kustannus.

Kari, J. (toim.) 1994. Didaktiikka ja opetussuunnittelu. Helsinki: WSOY.

Kartovaara, E. (toim.) 2007. Perusopetuksen vuoden 2004 opetussuunnitelmauudistus. Kehittämisverkostoon ja kokeiluun osallistuneiden kuntien ja koulujen näkemyksiä ja ratkaisuja. Helsinki: Opetushallitus.

Kasanen, K., Räty, H. & Snellman, L. 2003. Learning the class test. European Journal of Psychology of Education 18 (1), 43–58.

Kelly, L. & Oldham, E. 1994. Images of mathematics among teachers: Perceptions, beliefs and attitudes of primary teachers and student-teachers in the Republic of Ireland. Paper represented in the ICME 7. Quebec.

King, A. 1991. Effects of training in strategic questioning on children's problem-solving performance. Journal of Educational Psychology 83, 307–317.

Kislenko, K., Breiteig, T., & Grevholm, B. 2005. Beliefs and attitudes in mathematics teaching and learning. Teoksessa I. M. Stedoy (toim.) Vurdering i matematikk – Hvorfor og hvordan? Fra småskole til voksenopplaering. Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU 15. og 16. November 2004. Trondheim: Nasjonal Senter for Matematikk i Opplaeringen, 129–138.

Kitchener, K. S. & King, P. 1995. Reflektiivisen pohdinnan malli: Tietämistä koskevien oletusten muuttaminen. Teoksessa J. Mezirow ym. (toim.) Uudistava oppiminen. Kriittinen reflektio aikuiskoulutuksessa. Helsingin yliopisto. Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus, 179–197.

Klein, S. 1987. The effects of modern mathematics. Budapest: Akadémiai Kiadó.

Klein, S. & Habermann, G. M. 1988. A look at the affective side of mathematics learning in Hungarian secondary schools. Teoksessa A. Borbás (toim.) Proceedings of the 12th PME international conference 1, 24–53.

Kloosterman, P., Raymond, A. M. & Emenaker, C. 1996. Students' beliefs about mathematics: A three-year study. The Elementary School Journal 97 (1), 39–56.

Kloosterman, P. 2002. Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: measurement and implications for motivation. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (toim.) Beliefs: A hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer, 39–58.

Koponen, R. 1994. Asenteet matematiikkaa kohtaan. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 56.

Koponen, R. 2001. Tuloksia peruskoulun 1.–7.-luokkalaisten matematiikan suorituksista ja niiden muutoksista. Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 38.

Korkeakoski, E. 2003. Kirja-arvostelu: Perusopetuksen opetuskokeilussa lukuvuonna 2003–2004 noudatettavat opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 3–9 ja perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 1–2. Helsinki: Opetushallitus. Didacta Varia 8 (2), 144–147.

Korpinen, E. 1990. Peruskoululaisen minäkäsitys. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Julkaisusarja A 34.

Korpinen, E. 1993. Uskooko oppilas oppivansa? Luki-oppilaan minäkokemukset ja minäkäsitys peruskoulun päätösvaiheessa. Teoksessa P. Linnakylä & H. Saari (toim.) Oppiiko oppilas peruskoulussa? Peruskoulun arviointi 90-tutkimuksen tuloksia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 5–26.

Korpinen, E. 1996. Millainen opettaja minusta tulee? Luokanopettajaksi opiskelevien minäkäsityksen kehittyminen koulutuksessa. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Opettajaksi oppimaan – kasvattajaksi kasvamaan. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 7, 141–154.

Korpinen, E. 1998. Student teachers' self, self-concept and self-esteem: Promoting the development of student teachers' self-image during teaching practice. Teoksessa R. Erkkilä, A. Willman & L. Syrjälä (toim.) Promoting teachers' personal and professional growth. Oulun yliopisto. Tutkimuksia E 32, 70–82.

Korpinen, E. 2000. Finnish and Estonian adolescents' self-concept and self-esteem at the end of comprehensive schooling. Scandinavian Journal of Educational Research 4 (1), 27–47.

Korpinen, E. 2005. Oppilaan minäkäsityksen ja itsetunnon kehittäminen pedagogiikan haasteena: Miten "unkarilainen matematiikka" – Varga-metodi – vastaa haasteeseen? Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Matematika magyar módra Finnországban és Magyarországon. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 152–172.

Korpinen, E., Jokiaho, E. & Tikkanen, P. 2003. Miten esi- ja alkuopetusikäiset lapset arvioivat itseään ja oppimistaan? Kasvatus 34 (1), 66–78.

Ku, H-Y. & Sullivan, H. J. 2001. Effects of personalized instruction on mathematics word problems in Taiwan. Teoksessa Annual proceedings of selected research and development and practice papers presented at the national convention of the association for educational communications and technology 24, Atlanta, GA, November 8-12, 85-94.

Kupari, P. 1993a. Millä tavoin matematiikan opiskelu ja opetus on muuttunut? Teoksessa V. Brunell & P. Kupari (toim.) Peruskoulu oppimisympäristönä.

Peruskoulun arviointi 90 -tutkimuksen tuloksia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 81–104.

Kupari, P. 1993b. Laskutaidotko kadonneet? Peruskoululaiset matematiikan kokijoina ja taitajina. Teoksessa P. Linnakylä & H. Saari (toim.) Oppiiko oppilas peruskoulussa? Peruskoulun arviointi 90 -tutkimuksen tuloksia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 81–104.

Kupari, P. 1999. Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitoksen tutkimuksia 7.

Kupari, P. & Reinikainen, P. & Nevanpää, T. & Törnroos, J. 2001. Miten matematiikkaa ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Kolmas kansainvälinen matematiikka- ja luonnontiedetutkimus TIMSS 1999 Suomessa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kupari, P., Välijärvi, J., Linnakylä, P., Reinikainen, P., Brunell, V., Leino, K., Sulkunen, S., Törnroos, J., Malin, A. & Puhakka, E. 2004. Nuoret osaajat. PISA 2003 -tutkimuksen ensituloksia. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kuusisto, J. 1989. Oppimateriaalit peruskoulun ala- ja yläasteella 1988. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Julkaisusarja A 26.

Labov, W. 1972. Language in the inner City. Studies in the black English Vernacular. Philadelphia: University of Pennsylvania Press.

Lahdes, E. 1980. Peruskoulun uusi opetusoppi. Helsinki: Otava.

Lampert, M. 1990. When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. American Educational Research Journal 27, 29–63.

Lampiselkä, J., Ahtee, M., Pehkonen, E., Meri, M. & Eloranta, V. 2007. Mathematics and science in Finnish comprehensive school. Teoksessa E. Pehkonen, M. Ahtee & J. Lavonen (toim.) How Finns learn mathematics and science. Rotterdam / Taipei: Sense Publishers.

Lankshear, C. & Knobel, M. 2004. A handbook for teacher research: from design to implementation. Berkshire, Englanti: Open University Press.

Latomaa, T. 2005. Ymmärtävä psykologia: Psykologia rekonstruktiivisena tieteenä. Teoksessa J. Perttula & T. Latomaa (toim.) Kokemuksen tutkimus. Merkitys – tulkinta –ymmärtäminen. Helsinki: Dialogia, 17–88.

Leedy, M. G., LaLonde, D. & Runk, K. 2003. Gender equity in mathematics: Beliefs of students, parents and teachers. School Science and Mathematics 103 (6), 285–292.

Lehtelä, P-L. 2001. Seitsemäsluokkalaisten metakognitiot aineen rakenteen oppimis- ja opiskeluprosessissa. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja 70.

Lehtovaara, M. 1994. Subjektiivinen maailmankuva kasvatustieteellisen tutkimuksen kohteena. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A 53.

Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmaratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmaratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi.

Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 298.

Lilja, K. 2002. Matematiikan oppimistuloksiin yhteydessä olevat tekijät peruskoulussa. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Rauman opettajankoulutuslaitos ja Helsinki: Opetushallitus.

Lincoln, Y. S. & Cuba, E. G. 1985. Naturalistic inquiry. Beverly Hills: Sage.

Lindenskov, L. 1993. Exploring the students' own mathematics curriculum. Teoksessa J. Malone & P. C. S. Taylor (toim.) Constructivist interpretations of teaching and learning mathematics. Proceedings of topic group 10 at the 7th international congress on mathematics education, ICME-7, Quebec Canada August 1992, 149–156.

Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalien käyttö matematiikan opiskelussa. Matikkatupakokeilu peruskoulun toisella luokalla. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis A 307.

Lindgren, S. 2004. Voidaanko matematiikka-asenteita muuttaa? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 381–396.

Linnanmäki, K. 1998. Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 283–300.

Linnanmäki, K. 2002. Matematikprestationer och självuppfattning. En uppföljnings-studie i relation till skolspråk och kön. Åbo Akademi.

Linnanmäki, K. 2004. Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 241–254.

Linnenbrink, E. & Pintrich, P. 2002. Achievement goal theory and affect: An asymmetrical bidirectional model. Educational Psychologist 37, 69–78.

Lyle, S. 2000. Narrative understanding: developing theoretical context for understanding how children make meaning in classroom settings. Journal of Curriculum Studies 32 (1), 45–63.

Ma, X. & Kishor, N. 1997. Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis. Journal for Research in Mathematics Education 28 (1), 26–47.

Magyar Közlöny 2003/43 (Unkarin virallinen lehti). Budapest: Magyar hivatalos közlönykiado.

Maijala, H. (tulossa). How does classroom teaching in mathematics look like in Finland? Submitted to Educational Studies in Mathematics.

Malaty, G. 2005–2006. Mitkä ovat Suomen PISA-menestyksen taustalla olevat syyt? Matematiikkalehti Solmu erikoisnumero 2.

Malinen, P. 2005. Tamás Vargan näkemyksiä matematiikan opetuksen kehittämiseksi. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Matematika Magyar módra Finnországban és Magyarországon. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 15–21.

Malmivuori, M-L. 1993. Oppilaiden matemaattisista uskomuksista. Teoksessa S. Tella (toim.) Mikä ihmeen humaani ihminen? Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 5.2.1993. Helsingin yliopisto. Opettajan-koulutuslaitos. Tutkimuksia 117, 160–169.

Malmivuori, M-L. 2001. The dynamics of affect, cognition, and social environment in the regulation process of personal learning processes: The case of mathematics. University of Helsinki. Department Education. Research report 172.

Martin, R. M. 2002. Math attitudes of gifted students: A focus on gifted girls in elementary grades. Virginia Polytechnic Institute and State University. Julkaisematon väitöskirja.

Matilainen, K. 1989. Kirjoitustaidon kehittyminen neljän ensimmäisen vuoden aikana. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja 9.

Maybin, J. 1996. Story voices: the use of reported speech in 10-12 year-olds spontaneous narratives. Current Issues in Language and Society 3 (1), 36–48.

McAdams, D. P. 1990. Unity and purpose in human lives: The emergence of identity as a life story. Teoksessa A. I. Rabin, R. A. Zucker, R. A. Emmons & S. Frank (toim.) Studying persons and lives. New York: Springer, 148–190.

McAdams, D. P. 1993. The stories we live by: Personal myths and the making of the self. New York: Morrow.

McCallum, B., Hargreaves, E. & Gipps, C. 2000. Learning: the pupil's voice. Cambridge Journal of Education 30 (2), 275-289.

McDonough, A. 2002. Naïve and yet knowing: Young learners portray beliefs about mathematics and learning. Victoria: Australian Catholic University. Julkaisematon väitöskirja.

McLeod, D. B. 1992. Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation. Teoksessa D. A. Grows (toim.) Handbook of research mathematics teaching and learning. London: Macmillan Publishing, 575–596.

Mead, G. 1962/1932. Mind, self & society. Chicago: The University of Chicago Press.

Meloth, M. S. & Deering, P. D. 1994. Task talk and task awareness under different co-operative learning conditions. American Educational Research Journal 31, 138–165.

Mereku, K. 2003. Methods in Ghanaian primary mathematics textbooks and teachers' classroom practice. Teoksessa J. Williams (toim.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 23 (2). University of Oxford, 61–66.

Moilanen, P. 1998. Opettajan toiminnan perusteiden tulkinta ja tulkinnan todellisuuden arviointi. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 144.

Montemayor, R. & Eisen, M. 1977. The development of self-conceptions from childhood to adolescence. Developmental Psychology 13, 314–319.

Morgan-Fleming, B. & Doyle, W. 1997. Children's interpretations of curriculum events. Teaching and Teacher Education 13 (5), 499–511.

Morrow, S. 2005. Quality and trustworthiness in qualitative research in counseling psychology. Journal of Counseling Psychology 52 (2), 250–260.

Moyer, P. S. 2001. Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. Educational Studies in Mathematics 47, 175–197.

Moyer, P. S. & Jones, M. J. 2004. Controlling choice: Teachers, students and manipulatives in mathematics classrooms. School Science and Mathematics 104 (1), 16–31.

Mtetwa, D. & Garofalo, J. 1989. Beliefs about mathematics: An overlooked aspect of student difficulties. Academic Therapy 24 (5), 611–618.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Conzalez, E. J. & Chrostowski, S. J. 2004. TIMSS 2003 International Mathematics Report. Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eight grades. Chestnut Hill. MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Munn, P. 1997. Children's beliefs about counting. Teoksessa I. Thompson (toim.) Teaching and learning early number. Buckingham–Philadelphia: Open University Press, 9–19.

Murphy, P. K., Delli, L. A. M. & Edwards, M. N. 2004. The good teacher and good teaching: Comparing beliefs of second-grade students, preservice teachers, and inservice teachers. The Journal of Experimental Education 72 (2), 69–92.

Mäensivu, K. 1999. Opettaja määrittelijänä – oppilas määriteltävänä. Sanallisen oppilaan arvioinnin sisällön analyysi. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 157.

Mäkelä, K. 1995. Kvalitatiivisen analyysin arviointiperusteet. Teoksessa K. Mäkelä (toim.) Kvalitatiivisen aineiston analyysi ja tulkinta. Helsinki: Gaudeamus, 42–61.

Nardi, E. & Steward, S. 2003. Is mathematics T.I.R.E.D? A profile of quiet disaffection in the secondary mathematics classroom. British Educational Research Journal 29 (3), 345–367.

Nemetz, T. 1992. Mathematics education in Hungary. Teoksessa R. Morris & M. S. Arora (toim.) Studies in mathematics education. Moving into the twenty-first century. Vendôme, Ranska: UNESCO.

Nemzeti Alaptanterv (Kansallinen perusopetus) 1995. Budapest: Korona Kiadó.

Nemzeti Alaptanterv (Kansallinen perusopetus) 2003. Budapest: Korona Kiadó.

Newstead, K. 1998. Aspects of children's mathematics anxiety. Educational Studies in Mathematics 36 (1), 53–71.

Nickson, M. 2002. Social and critical mathematics education: underlying considerations. Teoksessa L. Haggarty (toim.) Teaching and learning in the secondary school. London: Routledge-Falmer.

Nicolaidou, M. & Philippou, G. 2003. Attitudes towards mathematics, self-efficacy and achievement in problem-solving. European research in mathematics education III. Proceedings of the third conference of the

European society for research in mathematics education 28 february – 3 march 2003. Bellaria, Italia.

Niemi, E. K. 2001. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000. Matematiikan oppimistulokset, asenteet matematiikkaa kohtaan ja yhteydet taustamuuttujiin. Oppimistulosten arviointi 2. Helsinki: Opetushallitus.

Niemi, E. K. 2004. Perusopetuksen oppimistulosten kansallinen arviointi ja tulosten hyödyntäminen koulutuspoliittisessa kontekstissa. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000. Turun yliopisto. Annales Universitatis Turkuensis C 216.

Näätänen, M. 2000. Vaikutteita Unkarista matematiikan esi- ja alkuopetukseen. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Esiopetus. Nyt! Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 8, 114–119.

Näätänen, M. 2006. Introducing Hungarian mathematics teaching ideas in Finland. Teoksessa E. Pehkonen, G. Brandell & C. Winsløw (toim.) Nordic presentations. Proceedings of section Nordic presentations at ICME-10, july 12, 2004 in Copenhagen, Denmark. Helsingin yliopisto. Kasvatustieteen laitos 265, 91–96.

Oaks, A. 1994. Conflicting goals in the mathematics classroom. Teoksessa D. Buerk (toim.) Empowering students by promoting active learning in mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 37–44.

Oatley, K. & Jenkins, J. M. 1996. Understanding emotions. Cambridge: Blackwell Publishers.

Olson, L. 1995. School pictures. Teacher Magazine 6 (9).

O'Mara, A. J., Craven, R. G. & Marsh, H. W. 2003. Evaluating self-concept interventions from a multidimensional perspective: A meta-analysis. Paper presented at NZARE AARE. New Zealand, Auckland.

Op 't Eynde, P., de Corte, E. & Verschaffel, L. 1999. Balancing between cognition and affect: Students' mathematics-related beliefs and their emotions during problem solving. Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.) Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics. Proceedings of the workshop in Oberwolfach. November 21-27. Duisburg: Gerhard Mercator Universität Duisburg, 97–105.

Op 't Eynde, P., de Corte, E. & Verschaffel, L. 2002. Framing students' mathematics-related beliefs. A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorisation. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (toim.) Beliefs: A hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer, 13–38.

Oravecz, M. & Kivovics, A. 2005. Matematiikan opetus Varga-menetelmällä Unkarissa. Suom. A-M. Viljanen-Pihkala. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Matematika Magyar módra Finnországban és Magyarországon. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 22–31.

Orosz, E. 2000. The interest and difficult of mathematical problems as pupils' belief in Hungary. Teoksessa S. Götz & G. Törner (toim.) Research on mathematical beliefs proceedings of MAVI-9 European workshop June 1-5, 2000, University of Vienna, Austria. Duisburg: Gerhard-Mercator-University, 74–78.

Pajares, F. & Schunk, D. H. 2001. Self-beliefs and school success: Self-efficacy, self-concept and school achievement. Teoksessa R. J. Riding & S. G. Rayner (toim.) Self-perception. Westport, CT: Ablex, 239–265.

Pajares, F. & Schunk, D. H. 2002. Self and self-belief in psychology and education: an historical perspective. Teoksessa J. Aronson (toim.) Improving academic achievement. New York: Academic Press, 3–21.

Patton, M. 1990. Qualitative evaluation and research methods. 2. painos. Newbury Park, CA: Sage.

Patton, M. Q. 2002. Qualitative research and evaluation methods. 3. painos. Thousand Oaks, CA: Sage.

Pearce, K. L., Lundgren, M. & Wince, A. 1999. The effects of curriculum practices on first graders' attitudes, activity preference and achievement in mathematics. Education 119 (1), 82–90.

Peel, E. A. 1971. Psychological and educational research bearing on mathematics teaching. Teoksessa W. Servais & T. Varga (toim.) Teaching school mathematics. Harmondworth: Penguin, 151–177.

Pehkonen, E. 1993. Oppilaiden matematiikkakäsitysten eroista neljässä eurooppalaisessa maassa. Teoksessa S. Tella (toim.) Mikä ihmeen humaani ihminen? Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 5.2.1993. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 117, 150–159.

Pehkonen, E. 1995. On pupil's reactions to the use of open-ended problems in mathematics. Nordic Studies in Mathematics Education 3 (4), 43–57.

Pehkonen, E. 1997. Peruskoulun matematiikan opetuksen arviointi 1995. Helsingin yliopisto. Kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 152.

Pehkonen, E. 1998. International comparison of pupils' mathematical views. Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.) The state-of-art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research report 195, 249–276.

Pehkonen, E. 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. Kasvatus 31 (4), 375–381.

Pehkonen, E. & Rossi, M. 2007. Some alternative teaching methods in mathematics. Teoksessa E. Pehkonen, M. Ahtee & J. Lavonen (toim.) How Finns learn mathematics and science. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Pehkonen, E. & Tompa, K. 1994. Pupils' conceptions about mathematics teaching in Finland and Hungary. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 25 (2), 229–238.

Pehkonen, E. & Törner, G. 1996. Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. International Reviews on Mathematical Education (ZDM) 28 (4), 101-108.

Pehkonen, L. & Krzywacki-Vainio, H. 2007. Mathematics teaching in primary schools. Teoksessa E. Pehkonen, M. Ahtee & J. Lavonen (toim.) How Finns learn mathematics and science. Rotterdam / Taipei: Sense Publishers, 155–164.

Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 195.

Perkkilä, P. & Lehtelä, P-L. 2007. Learning environments in mathematics and science. Teoksessa E. Pehkonen, M. Ahtee & J. Lavonen (toim.) How Finns learn mathematics and science. Rotterdam / Taipei: Sense Publishers, 69–85.

Perttula, J. 1995. Kokemus psykologisena tutkimuskohteena. Johdatus fenomenologiseen psykologiaan. Suomen Fenomenologinen Instituutti. Tampere: SUFI.

Perttula, J. 2005. Kokemus ja kokemuksen tutkimus: Fenomenologisen erityistieteen tieteenteoria. Teoksessa J. Perttula & T. Latomaa (toim.) Kokemuksen tutkimus. Merkitys – tulkinta –ymmärtäminen. Helsinki: Dialogia, 115-162.

Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö II. Oppiaineiden opetussuunnitelmat 1970. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus.

Pezdek, K., Berry, T. & Renno, P. A. 2002. Children's mathematics achievement: The role of parents' perceptions and their involvement in homework. Journal of Educational Psychology 94 (4), 771–777.

Piaget, J. & Inhelder, B. 1977/1966. Lapsen psykologia. Suom. M. Rutanen. Jyväskylä: Gummerus.

Picker, S. H. 2000. An investigation of lower secondary pupils' images of mathematics and mathematicians. University of Plymouth. Centre for Teaching Mathematics. School of Mathematics and Statistics. Julkaisematon väitöskirja.

Picker, S. H. & Berry, J. S. 2000. Investigating pupils' images of mathematicians. Educational Studies in Mathematics 43 (1), 65–94.

Picker, S. H. & Berry, J. S. 2001. Your students' images of mathematicians and mathematics. Mathematics Teaching in the Middle School 7 (4), 202–208.

Pietilä, A. 2002. Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva. Matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 238.

Pintrich, P. 1991. Editor's comment. Educational Psychologist 26, 199–205.

Pnevmatikos, D. 2002. Conceptual changes in religious concepts of elementary schoolchildren: The case of the house where God lives. Educational Psychology 22 (1), 93–112.

Polkinghorne, D. 1995. Narrative configuration in qualitative analysis. Teoksessa J. A. Hatch & R. Wisniewski (toim.) Life history and narrative. London: Falmer, 5–23.

Popper, K. R. & Ecceles, J. C. 1977. The self and its brain. Berlin: Springer international

Prosser, J. 1998. Image-based research. A sourcebook for qualitative researchers. London: Falmer

Punch, S. 2002. Research with children. The same or different from research with adults? Childhood 9 (3), 321–341.

Rauhala, L. 2005/1983. Ihmiskäsitys ihmistyössä. Helsinki: Yliopistopaino.

Rantala, T. 2005. Oppimisen iloa etsimässä – kokemuksen etnografiaa alkuopetuksessa. Lapin yliopisto. Acta Universitatis Lapponiensis 88.

Risku, A-M. 2002. Leikisti ja oikeesti – oikeata matematiikkaa lapsesta lähtien. Teoksessa O. Saloranta (toim.) Ensimmäiset kouluvuodet. Perusopetuksen vuosiluokkien 1–2 opetus. Helsinki: Opetushallitus, 115–141.

Rivera, M. O., Koorland, M. A. & Fyeyo, V. 2002. Pupil-made pictorial prompts and fading for teaching sight words to student with learning disabilities. Education and Treatment of Children 25 (2), 197–207.

Rock, D. & Shaw, J. M. 2000. Exploring children's thinking about mathematicians and their work. Teaching Children Mathematics 6 (9), 550–555.

Rodd, M. 1993. Students' views on nature of mathematics. Mathematics Teaching 143, 8–10.

Rolka, K. & Bulmer, M. 2005. Picturing student beliefs in statistics. ZDM Mathematics Education 37 (5), 412–417.

Rolka, K. & Halverscheid, S. 2006. Pictures as a means for investigating mathematical beliefs. Teoksessa S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (toim.). Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, 533–539.

Rotter, J. B. & Rafferty, J. E. 1950. Manual for the Rotter incomplete sentences blank: College form. New York: The Psychological Corporation.

Ruffell, M., Mason, J. & Allen, B. 1998. Studying attitude to mathematics. Educational Studies in Mathematics 35, 1–18.

Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. 2004. Esipuhe. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 7–10.

Räty-Záborszky, S. 2006. Suomalaisten ja unkarilaisten opettajien ja matematiikan oppikirjaan tekijöiden käsityksiä geometriasta ja geometrian opetuksesta ja oppimisesta vuosiluokilla 1-6. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja 112.

Saari, H. 2004. 'Asenteet' IEA-tutkimuksissa. Teoksessa K. Leimu (toim.) Kansainväliset IEA-tutkimukset Suomi-kuvaa luomassa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos, 155–174.

Sahlberg, P., Meisalo, V., Lavonen, J. & Kolari, M. 1994. Luova ongelmanratkaisu koulussa. FINISTE. Helsinki: Opetushallitus.

Salmon, K., Roncolato, W. & Gleitzman, M. 2003. Children's reports of emotionally events: adapting the interview to the child. Applied Cognitive Psychology 17, 65–79.

Sánchez, F. J. P. & Sánchez Roda, M. D. 2003. Relationship between self-concept and academic achievement in primary students. Electronic Journal of Research in Educational Psychology and Psychopedagogy 1 (1), 95–120.

Saukkonen, P. 2001. Maailman hahmottaminen teksteinä. Tekstirakenteen ja tekstilajien teoriaa ja analyysia. Helsinki: Yliopistopaino.

Sayõl, M. 1996. Preschool children's understanding and drawing of facial expressions of emotions. Turkish Journal of Psychology 11, 61–71.

Sayõl, M. 1998. The development of emotional facial drawings in children. Journal of Child and Adolescence Mental Health 4, 129–133.

Sayõl, M. 2001. Children's drawings of emotional faces. British Journal of Developmental Psychology 19, 493–505.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. I. & Wiley, D. E. 1997. Many visions, many aims. Vol. 1. A Cross-national Investigations of Curricular Investigations in School Mathematics. London: Kluwer.

Schoenfeld, A. H. 1983. Problem solving in the mathematics curriculum: a report, recommendations and an annotated bibliography. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. H. 1987. What's all the fuss about metacognition? Teoksessa A. H. Schoenfeld (toim.) Cognitive science and mathematics education. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 189–215.

Schommer-Aikins, M., Duell, O. K. & Hutter, R. 2005. Epistemological beliefs, mathematical problem-solving beliefs, and academic performance of middle school students. The Elementary School Journal 105 (3), 289–304.

Schunk, D. H. 2004. Learning theories an educational perspective. 4. painos. Columbus, OH: Pearson.

Schutz, P. & DeCuir, J. 2002. Inquiry on emotions in education. Educational Psychologist 37 (2), 125–134.

Seppälä, R. 1995. Matematiikan opetuksen kehittämisestä. Teoksessa R. Seppälä (toim.) Toimi, laske ja ajattele Ala-asteen matematiikka. Helsinki: Opetushallitus, 7–12.

Servais, W. 1971. The use of teaching aids. Teoksessa W. Servais & T. Varga (toim.) Teaching school mathematics. Harmondsworth: Penguin, 94–123.

Shavelson, R. J. & Bolus, R. 1982. Self-concept: The interplay of theory and methods. Journal of Educational Psychology 74 (1), 3–17.

Shenton, A. K. 2004. Strategies for ensuring trustworthiness in qualitative research projects. Education for Information 22, 63–75.

Sierpinska, A. & Viwegier, M. 1989. How and when attitudes towards mathematics and infinity become constituted into obstacles in students? Teoksessa G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artique (toim.) Actes de la 13 conference internationale de psychology of mathematics education 3, 166–173.

Spangler, D. A. 1992. Assessing students' beliefs about mathematics. Arithmetic Teacher 40 (3), 148–152.

Swennen, A., Jörg, T. & Korthagen, F. 2004. Studying student teachers' concerns, combining image-based and more traditional research techniques. European Journal of Teacher Education 27 (3), 265–283.

Takács, V. 2001. The structure of pupil's attitudes towards school subjects. Magyár Pedagógia 101 (3), 301–318.

Taube, K., Tornéus, M. & Lundberg, I. 1984. Umesol. Självbild. Stockholm: Psykologiförlaget.

Tauriainen, L. 2000. Kohti yhteistä laatua. Henkilökunnan, vanhempien ja lasten laatukäsitykset päiväkodin integroidussa erityisryhmässä. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 165.

Tikkanen, P. 2005. Miten Tytti voikaan kokea matematiikan opetuksen! Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikka unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Matematika Magyar módra Finnországban és Magyarországon. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 98–117.

Tikkanen, P. 2006. "Hm-mm! Mikä lasku!" Suomalaisten alakoululaisten uskomuksia matematiikasta. Teoksessa E. Luukkonen (toim.) Cygnaeuksen jalanjäljissä. Norssi tutkii ja kehittää. Jyväskylän normaalikoulun alakoulu 140 vuotta. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylän normaalikoulun julkaisuja 10, 114–125.

Tikkanen, P. & Kosunen, A. 2000. Esi- ja alkuopetusikäisen lapsen itseohjautuvuus käsitöissä. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Esiopetus. Nyt! Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 8, 88–106.

Tobin, G. A. & Begley, C. M. 2004. Methodological rigour within a qualitative framework. Journal of Advanced Nursing 48 (4), 388–396.

Topping, K. J., Campbell, J., Douglas, W. & Smith, A. 2004. Cross-age peer tutoring in mathematics with seven- and 11-year-olds: influence on mathematical vocabulary, strategic dialogue and self-concept. Educational Research 45 (3), 287–308.

Topping, K. J., Kearney, M., McGee, E. & Pugh, J. 2004. Tutoring in mathematics: a generic method. Mentoring and Tutoring 12 (3), 353–370.

Trend, R., Everett, L. & Dove, J. 2000. Interpreting primary children's representations of mountains and mountainous landscapes and environments. Research in Science & Technological Education 18 (1), 86–112.

Tsao, Y-L. 2004. A comparison of American and Taiwanese students: Their math perception. Journal of Instructional Psychology 31 (3), 206–213.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2003. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.

Tymms, P. 2001. A test of big fish in a little pond hypothesis: An investigation into the feelings of seven-year-old-pupils in school. School Effectiveness and School Improvement 12 (2), 161–181.

Törnroos, J. 2004. Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset – seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13.

Uljens, M. 1993. The essence and existence of phenomenography. Nordisk Pedagogik 13 (3), 134–147.

Underhill, R. 1988. Focus on research into practice in diagnostic and prescriptive mathematics – mathematics learners' beliefs: a review . Focus on Learning Problems in Mathematics 10 (1), 55–69.

Uusikylä, K. & Atjonen, P. 2002. Didaktiikan perusteet. Helsinki: WSOY.

Uusikylä, K. & Kansanen, P. 1988. Opetussuunnitelman toteutuminen. Oppilaiden tyytyväisyys oppiaineisiin, opetusmuotoihin ja kouluelämään peruskoulun ala-asteella. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 66.

van Essen, G. & Hamaker, C. 2001. Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. Journal of Educational Research 83 (6), 301–312.

van Manen, M. 1997. Researching lived experience. Human science for an action sensitive pedagogy. 2. painos. Faculty of Education. The University of Western Ontario, Kanada.

van Manen, M. 2002. The tone of teaching. The language of pedagogy. Faculty of Education. The University of Western Ontario, Kanada.

Vanayan, M., White, N., Yuen, P. & Teper. M. 1997. Beliefs and attitudes towards mathematics among third- and fifth-grade students: A descriptive study. School Science and Mathematics 97 (7), 345–351.

Varga, T. 1968. Megtalálni a helyes kérdést. (Oikean kysymyksen löytäminen) Kapcsolat 3.

Varga, T. 1969a. Higher mathematics in lower grades. Teoksessa L. Feldman (toim.) Mathematical learning. New approaches to the teaching of young children. New York: Gordon & Breach, 79–85.

Varga, T. 1969b. Pilot work in Budapest. Teoksessa L. Feldman (toim.) Mathematical learning. New approaches to the teaching of young children. New York: Gordon & Breach, 73–77.

Varga, T. 1969c. The use of a composite method for the mathematical education of young children. Teoksessa L. Feldman (toim.) Mathematical learning. New approaches to the teaching of young children. New York: Gordon & Breach, 55–71.

Varga, T. 1970. Boxes, marbles and tables. Mathematics Teaching 50, 36–37.

Varga, T. 1971a. A "kivételesek" vannak többen. (Poikkeuksellisia on monia). Köznevelés 9, 163–169.

Varga, T. 1971b. General Introduction. Teoksessa W. Servais & T. Varga (toim.) Teaching school mathematics. Harmondworth: Penguin, 11–33.

Varga, T. 1972. Logic and probability in the lower grades. Educational Studies in Mathematics 4, 346–357.

Varga, T. 1973. A matematika tanítása (Matematiikan opettaminen). Budapest: Tankönyvkiadó.

Varga, T. 1976. On primary school teachers' mathematics. Educational Studies in Mathematics 7, 171–177.

Varga, T. 1988. Mathematics education in Hungary today. Educational Studies in Mathematics 19 (3), 291–298.

Vári, P., Tuska, Á. & Krolopp, J. 2002. Change of emphasis in the mathematics assessment in Hungary. Educational Research and Evaluation 8 (1), 109–127.

Varila, J. 1999. Tunteet ja aikuisdidaktiikka. Tunteiden aikuisdidaktisen merkityksen teoreettinen ja empiirinen jäljitys. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia 74.

Varila, J. 2004. Tunteet aikuiskasvatustieteen kohteeksi. Aikuiskasvatus 2, 92–101.

Varto, J. 1992. Laadullisen tutkimuksen metodologia. Helsinki: Kirjayhtymä.

Vaughan, W. 2002. Effects of cooperative learning on achievement and attitude among students of color. The Journal of Educational Research 95 (6), 359–364.

Wager, M. 1999. Tutkijuus ja tunteet. Teoksessa S. Näre (toim.) Tunteiden sosiologiaa 2. Historiaa ja säätelyä. Suomalaisen Kirjallisuuden Seura. Tietolipas 157, 325–342.

Warburton, T. 1998. Cartoons and teachers: Mediated visual images as data. Teoksessa J. Prosser (toim.) Image-based research. Sourcebook for qualitative researchers. London: Falmer, 252–262.

Weber, S. & Mitchell, C. 1996. Drawing ourselves into teaching: Studying the images that shape and distort teacher education. Teacher and Teacher Education 12 (3), 303–313.

Weiner, B. 1992. Motivation. Teoksessa M. C. Alkin (toim.) Encyclopedia of educational research 3. 6. painos. New York: Macmillan, 860–865.

Weinert, F. E. & Helmke, A. 1995. Learning from wise mother nature or big brother instructor: The wrong choice as seen from an educational perspective. Educational Psychologist 30, 135–142.

Westling Allodi, M. 2002. Children's experiences of school: narratives of swedish children with and without learning difficulties. Scandinavian Journal of Educational Research 46 (2), 181–205.

Wetton, N. M. & McWhirter, J. 1998. Images and curriculum development in health education. Teoksessa J. Prosser (toim.) Image-based research. A sourcebook for qualitative researchers. London: Falmer Press, 263–283.

Wilkins, J. M. & Ma, X. 2003. Modeling change in student attitude toward and beliefs about mathematics. The Journal of Educational Research 97 (1), 52-63.

Yrjönsuuri, R. 1994. Opiskelulla laatua matematiikan oppimiseen. Helsinki: Yliopistopaino.
Yuen, F. C. 2004. ”It was fun …I liked drawing my thoughts”: Using drawings as a part of the focus group process with children. Journal of Leisure Research 36 (4), 461–482.
Zan, R. & Poli, P. 1999. Winning beliefs in mathematical problem solving. Teoksessa I. Schwank (toim.) European research in mathematics education I.II. Proceedings of the first conference of the European society for research in mathematics education, Vol. II. Forschungsinstitut für Mathematiksdidaktik, Osnabrück, 97–104.

Sähköiset lähteet

Affect and mathematical thinking –työryhmä 2005 Euroopan neljännessä matematiikkakasvatuksen kongressissa (CERME 4). Tulostettu 15.06.2006. http://ermeweb.free.fr/CERME 4/
Di Martino, P. & Mellone, M. 2005. Trying to change attitude towards math: A one-year experimentation. Tulostettu 25.06.2006. cerme4.crm.es/Papers%20definitius/2/dimartinoMellone.doc
Dobos, S., Ocskó, E. & Vásárhelyi, É. 2001. National presentation Hungary. Reference levels in school mathematics education in Europe. European Mathematical Society (EMS). Tulostettu 18.09. 2002. http://www.emis.de/
Groenewald, T. 2004. A phenomenological research design illustrated. International Journal of Qualitative Methods 3 (1). Artikkeli 4. Tulostettu 15.06.2007. http://www.ualberta.ca/~iiqm/3_1/pdf/groenewald.pdf.
Heinolan opetusalan koulutuskeskuksen kotisivu www.opeko.fi
Huss, E. & Cwikel, J. 2005. Researching creations: Applying arts-based research to Bedouin women’s drawings. International Journal of Qualitative Methods 4 (4). Artikkeli 4. Tulostettu 14.06.2007. from http://www.ualberta.ca/~iiqm/backissues/4_4/pdf/huss.pdf
Joutsenlahti, J. 2005a. “Languaging” mathematics: What is it? Why do we need languaging? Maailman tarinankerrontapäivä Hämeenlinnassa 16.3.2007. Tulostettu 10.2.2008. http://www.joutsenlahti.net/English.html.
Lord, P. 2001. Pupils’ experiences and perspectives of the national curriculum: updating the research review (research report). Tulostettu 12.03.2004. http//www.qca.org.uk/ages3-14/5-14/4831.html
Lord, P. 2002. Pupils’ experiences and perspectives of the national curriculum: updating the research review. February 2002. Tulostettu 12.03.2004. http//www.qca.org.uk/ages3-14/5-14/4834.html
Lord, P. 2003. Pupils’ experiences and perspectives of the national curriculum: updating the research review. 2002-2003. Research report. Tulostettu 12.03.2004. http//www.qca.org.uk/ages3-14/5-14/4836.html
Matematiikkalehti Solmun kotisivu www.math.helsinki.fi/Solmu

Polo, M. & Zan, R. 2005. Teachers' use of construct 'attitude'. Preliminary research findings. Tulostettu 11.06.2006. http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/2/PoloZan.pdf
Price, C. 1997. The teaching of mathematics in Hungary. Maths student's work. Tulostettu 4.5.2001. http://www.ex.ac.uk/telematics/T3/maths/hungary.htm.
Szalontai, T. 2000. Some facts and tendencies in Hungarian mathematics teaching. Tulostettu 6.6.2001. http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/tshungmt.pdf
Tiedemann, J. & Billmann-Mahecha, E. 2004. Development of self-concept in elementary school classes: A test of theoretical models. Proceedings of the Third International Biennal SELF Research Conference. Tulostettu 12.06.2005. http://self.uws.edu.au
Tutkiva opettaja –kotisivu www.jyu.fi/okl/tuope

Oppikirjalähteet

Asikainen, K., Fälden, H., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. 2004. Tuhattaituri 4a Opettajan opas. Helsinki: Otava.
C. Neményi, E. & Kaldi, E. 1999a. Matematika tankönyv általános iskola 4. osztály (Matematiikan oppikirja alakoulun neljännelle luokalle). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
C. Neményi, E. & Kaldi, E. 1999b. Matematika munkafüzet általános iskola 4. osztály (Matematiikan harjoituskirja alakoulun neljännelle luokalle). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
C. Neményi, E. & Sz. Oravecz, M. 1992. Matematika munkafüzet általános iskola 1. osztály (Matematiikan harjoituskirja alakoulun ensimmäiselle luokalle). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
C. Neményi, E. & Sz. Oravecz, M. 1999. Matematika tankönyv általános iskola 2. osztály (Matematiikan oppikirja alakoulun toiselle luokalle). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
Lilli, M., Putkonen, H. & Sinnemäki, J. 2003. Matikkamatka Opettajan opas 4 syksy. Helsinki: Tammi.
Malaty, G. 1992. Geometrinen ajattelu I. Espoo: Weilin+Göös.
Malaty, G. 1993. Geometrinen ajattelu. Didaktiikka. Espoo: Weilin+Göös.
Malaty, G. 1994. Algebrallinen ajattelu I. Espoo: Weilin+Göös.
Malaty, G. 2003. Johdatus matematiikan rakenteeseen. Helsinki: Opetushallitus.
Matematikai versenytesztek (Matematiikkakilpailut). A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai (Ilona Zrínyin matematiikkakilpailun tehtävät ja ratkaisut). 1998. Szeged: Mosaik.
Matematikai versenytesztek (Matematiikkakilpailut). A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai (Ilona Zrínyin matematiikkakilpailun tehtävät ja ratkaisut). 2000. Szeged: Mosaik.

Matematikai versenytesztek (Matematiikkakilpailut). A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai (Ilona Zrínyin matematiikkakilpailun tehtävät ja ratkaisut). 2003. Szeged: Mosaik.

Matematikai versenytesztek (Matematiikkakilpailut). A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai (Ilona Zrínyin matematiikkakilpailun tehtävät ja ratkaisut). 2004. Szeged: Mosaik.

Matikainen, T. & Kyyrä, A-M. & Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2002a. Laskutaidon toimintapaketti. Opettajan opas. Helsinki: WSOY.

Matikainen, T. & Kyyrä, A-M. & Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2002b. Laskutaidon toimintapaketti. Helsinki: WSOY.

Pehkonen, E. 1989. Oppilasaktiviteetteja peruskoulun geometriaan. Käsikirja opettajille toiminnallisesta geometriasta. Helsinki: WSOY.

Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2004a. Laskutaidon toimintapaketti 2. Opettajan opas. Kehitetty unkarilaisen opetusmenetelmän pohjalta. Helsinki: WSOY.

Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2004b. Laskutaidon toimintapaketti 2. Kehitetty unkarilaisen opetusmenetelmän pohjalta. Helsinki: WSOY.

Salonen, M., Sintonen, A-M., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2005. Laskutaito 4 syysosa opettajan kirja. Helsinki: WSOY.

Vähäpassi, A., Hänninen, L. & Pietilä, A. 2000. Mieti ja laske 4 kevät. Opettajan kirja. Helsinki: Tammi.

Vähäpassi, A., Hänninen, L. & Pietilä, A. 2001. Mieti ja laske 4 syksy. Opettajan kirja. Helsinki: Tammi.

Muut lähteet

Hakola, M. 2002. Matematiikan taikapiiri. Julkaisussa WSOY Oppimateriaalit. Omaa luokkaansa. WSOY:n koulumaailman asiakaslehti 3, 3–6.

Kaasila, R. 2008. Puhelinhaastattelu Lapin yliopiston Rovaniemen opettajakoulutuslaitoksen luokanopettajaopiskelijoiden toiminnallisen matematiikan valinnaiskurssista. 5.2.2008.

Kinnunen, P. 2008. Arkimatematiikkaa osataan , teoriaa ei. Keskisuomalainen 5.1.

Liinamaa, A. 2003a. Matikkainho – onko sitä? Uusi metodi tuo matematiikan lähelle arkipäivää. Lapsen maailma 8, 12–14.

Liinamaa, A. 2003b. Matikkapää ei synny ilman työtä. Tamás Varga-metodi tekee matematiikan näkyväksi. Aamulehti 5.2.2003, 35 (122), B 23.

Schulz, C. M. 1988. Salli. Suom. S. Kaukoranta. Jyväskylä: Gummerus.

Tapola, S. (toim.) 1998. Tuoresalaatti sandaalissa. Parhaat koululaisvitsit. Jyväskylä: Gummerus.

Törnroos, J. 2005. Puhelinhaastattelu suomalaisten seitsemäsluokkalaisten asenteista. 3.6.2005.

LIITE 1 Kouluttautuminen, tutkimus- ja opintomatkat, muu aineisto

Kouluttautuminen unkarilaiseen Varga–Neményi -opetusmenetelmään 2000-2005

1. Matematiikkaa unkarilaisittain esi- ja alkuopetuksessa (1 luokka) 15.-24.08.2000
2. Matematiikkaa unkarilaisittain esi- ja alkuopetuksessa (1 luokka) 16.03.-17.04.2001
3. Matematiikkaa unkarilaisittain esi- ja alkuopetuksessa (2 luokka) 01.-10.08.2001
4. Matematiikkaa unkarilaisittain perusopetuksessa (3 luokka) 03.-07.06.2002
5. Matematiikkaa unkarilaisittain perusopetuksessa (4 luokka) 02.-06.06.2003
6. Matematiikkaa unkarilaisittain esi- ja alkuopetuksessa 11.-16.08.2003
7. Varga–Neményi -opetusmenetelmä-seminaari 07.06.2004-11.06.2004
8. Matematiikkaa unkarilaisittain 06.-11.06.2005. Yhteensä 23 opintoviikkoa

Unkarin tutkimus- ja opintomatkat 2001-2005

1) 04.03.-08.03.2001 Budapest: matkan tarkoitus tutustua tutkimuskontekstiin ja Varga–Neményi -opetusmenetelmän käyttöön perusopetuksessa ja lukiossa sekä luoda suhteita opettajiin ja oppilaisiin
2) 23.11.-30.11.2001 Budapest: matkan tarkoitus syventää tutkimuskontekstin tuntemusta ja tutustua matematiikan opetukseen tutkimuskoulua laajemmin esiopetuksesta lukioon, alustava neuvottelu tutkimusmahdollisuudesta
3) 07.04.-13.04.2002 Budapest ja lähiympäristö: matkan päätarkoitus haastatella opettajia ja oppilaita. Matematiikan opetuksen seurantaa perusopetuksessa ja lukiossa.
4) 01.-09.11.2002 Budapest: matkan päätarkoituksena esitestata perusopetuksen kolmas- ja neljäsluokkalaisten oppilaiden tekemien kirjoitelmien ja piirrosten käyttökelposuutta tutkimusaineistona.
5) 31.10.-15.11.2003 Budapest ja lähiympäristö: matkan päätarkoitus hankkia kirjoitelma- ja piirrosaineisto perusopetuksen neljännen luokan oppilailta, joiden opetuksessa on käytetty Varga–Neményi -opetusmenetelmää. Oppilaiden suulliset selostukset piirroksistaan. Tamas Varga Days on Mathematics Education 07.-08.11.2003
6) 09.-29.05.2004 Budapest – Matra-vuoristo: matkan päätarkoitus syventää matematiikan opetuksen tuntemusta myös Unkarin maaseudulla.
7) 05.-11.12.2004 Budapest: matkan päätarkoitus valmistella Finnagorassa, Suomen kulttuurin, tieteen ja talouden keskuksessa, järjestettävää Matematiikkaa unkarilaisittain –seminaaria
8) 11.-15.04.2005 Budapest: matkan päätarkoitus Matematiikkaa unkarilaisittain – seminaari Finnagorassa
9) 09.10.-16.10.2005 Budapest: matkan tarkoitus matematiikan opetuksen seuranta esiopetuksesta lukioon kunnallisessa koululaitoksessa ja opettajankoulutuksessa

Unkarilaisten oppilaiden matematiikkakokemusten tulkintaa tukeva muu aineisto

Vuosien 2000-2005 koulutustilaisuuksien videot n. 150 tuntia
Vuosien 2000-2005 koulutustilaisuuksien muistiinpanot
Vuosien 2000-2005 tutkimusmatkojen videot n. 20 tuntia
Vuosien 2000-2005 tutkimusmatkojen muistiinpanot
Vuosien 2000-2005 tutkimusmatkojen valokuvat n. 300 kpl

Suomalaisten oppilaiden matematiikkakokemusten tulkintaa tukeva muu aineisto

Lukuvuosien 2000-2004 opettajan pedagoginen päiväkirja
Oppilaiden matematiikan työtehtävät