1321

MURTOLUVUN OPPIMISEN JA OPETTAMISEN ETENEMINEN HEI, NYT LASKETAAN! -KIRJASARJASSA

Laura Ruotsalainen

Saila Siekkinen

Pro gradu -tutkielma

Kevät 2002

Opettajankoulutuslaitos

Jyväskylän yliopisto

Ruotsalainen, L. & Siekkinen, S. 2002. Murtoluvun oppimisen ja opettamisen eteneminen Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjassa. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma.

TIIVISTELMÄ

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, miten murtoluvun oppiminen ja opettaminen eteni Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjassa, ja tämä oli tutkimuksen pääongelma. Pääongelmaa tutkiessa kiinnitettiin huomiota murtoluvun käsitteenmuodostusprosessiin ja siihen, etenikö se Haapasalon esittämän mallin mukaan. Tämän lisäksi tutkittiin sitä, jäsennettiinkö oppiaines spiraaliperiaatteen mukaisesti. Tutkimuksessa pyrittiin saamaan tietoa myös siitä, liitettiinkö murtolukukäsite opetuksessa desimaalilukuun ja prosenttiin. Oppikirjat ovat tärkeä tutkimuskohde, koska oppikirjojen tarjonta on runsasta ja eri tasoista. Oppikirjat ovat tärkeä työväline opettajalle ja ne vaikuttavat oppilaiden oppimiseen. Suomi on ollut osana kansainvälistä PISA-tutkimusta, jossa tutkittiin muun muassa matemaattista osaamista, jossa Suomi oli huippuluokkaa. Suomalaisista matematiikan oppimisen tutkijoista muun muassa Haapasalo on tehnyt laajaa tutkimustyötä murtolukukäsitteen muodostumisesta ja oppimisesta. Päivi Perkkilä on tutkinut kahta matematiikan alkuopetuksen kirjasarjaa sisällön analyysin avulla.

Tutkimusmenetelmänä käytettiin sisällön analyysia. Tutkimus oli laadullinen, mutta siinä käytettiin myös määrällisiä menetelmiä. Tutkimusaineistona oli Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjan oppilaan- ja opettajankirjat luokille 1–6. Tutkimusta varten laadittiin luokitusrunko, jonka avulla aineisto tutkittiin. Aineiston analysoinnissa käytettiin apuna pylväsdiagrammeja. Tulokset osoittivat, että murtoluvun oppiminen ja opettaminen etenivät pääosin Haapasalon käsitteenmuodostusprosessia noudattaen. Samoin kuin Haapasalon tutkimustulokset osoittivat, mekaaniset tehtävät hallitsivat edelleen oppikirjaa suuressa määrin. Murtoluvun oppiminen eteni laajentuen ja syventyen ylemmille luokka-asteille mentäessä, joten oppiminen noudatti spiraaliperiaatetta. Oppikirjasarjassa ei oltu muodostettu laajaa opintokokonaisuutta, jossa murtoluvun oppiminen olisi yhdistetty desimaaliluvun ja prosentin oppimiseen. Murtoluvun ja desimaaliluvun välinen yhteys oli otettu yhdessä kirjassa hyvin huomioon mutta muuten käsitteiden välinen yhteys jäi melko pinnalliseksi.

Tulosten perusteella voidaan sanoa Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjan olevan hyvin rakennettu, jos sitä tarkastellaan käsitteenmuodostusprosessin tai spiraaliperiaatteen kannalta. Tuloksista kuitenkin ilmeni, että mekaaniset laskut hallitsevat edelleen oppikirjoja. Huolestuttavaa oli lapsen matemaattista ajattelua kehittävien ongelmanratkaisutehtävien vähyys. Tulosten perusteella voidaan todeta, että tämä oppikirjasarja tulee opetussuunnitelmaa ja uusimpia tutkimustuloksia jäljessä.

Avainsanat: murtoluku, käsitteenmuodostusprosessi, oppikirja, spiraaliperiaate, sisällön analyysi

ABSTRACT

The purpose of the research was to explain how the learning and teaching of fraction proceeded in a series of books called Hei, nyt lasketaan!. This was the mainproblem of the research. While investigating the mainproblem, attention was paid to the concept making process of fraction. It was also observed whether the consept making proceeded according to the model presented by Haapasalo. In addition to that, it was researched if the learningissues were outlined according to spiral principal. An other purpose in the research was to get information if the fraction concept was connected to desimal concept and per cent in teaching. Textbooks are an important subject of research, because the supply of textbooks is rich and the quality varies. Textbooks are an important tool to teachers and they have an influence on pupils` learning. Finland has been a part of an international PISA-research in which mathematical skills were researched, among other things. In this research Finland was ranked top grade. Among other Finnish researcers of mathematical learning, Haapasalo has done wide research on how fraction concept is formed and learned. Päivi Perkkilä has researched two bookseries of mathematics made for grades 1–2 at comprehensive school. She used content analysis as a research method.

Content analysis was used as a research method in this study. The research was qualitative, but some quantitative methods were also used. The researchmaterial included pupils` textbooks as well as teacher books for grades 1–6. A classification was done for the research, which helped to explore the material. While analyzing the material pillar diagrams were used. The results showed that the learning and teaching of fraction proceedeed mainly according to concept making process of Haapasalo. According to the research results of Haapasalo, the mechanical exercises furthermore ruled textbooks greatly. The learning of fraction became wider and deeper in upper grades so the learning followed spiral principal. This series of books did not form a wide learning unities in which the learning of fraction would have been connected to the learning of decimal and per cent. Only in one book fraction and decimal were connected, otherwise the connection of these concepts was quite superficial.

On the basis of the results of this research one can say that Hei, nyt lasketaan! - bookseries is well done but only when the results are observed following consept making process and spiral principal. However, the results showed that mechanical exercises still rule textbooks very much. The worrying thing was that in textbooks there were only few problemsolving exercises, which develop children´s mathematical thinking most. On grounds of the research results one can state that bookserie comes behind the curriculum and the latest studies.

Keywords: fraction, concept making process, textbook, spiral principal, content analysis

SISÄLTÖ

1 MURTOLUVUT OPPIKIRJOISSA

Laaja, kansainvälinen, PISA-tutkimus (2000) on osoittanut, että Suomi pärjää kansainvälisesti myös matematiikan alueella, sijoittuen neljän parhaan joukkoon. Tästä saamme varmasti kiittää osaavia ja ammattitaitoisia opettajia ja laadukasta opettajankoulutustamme, mutta emme saa unohtaa oppikirjojen suurta merkitystä opettajan työvälineenä. Tästä johtuen ei saisi olla yhdentekevää, millaisen oppikirjan kanssa opettaja työskentelee. Oppikirjojen tarjonta on nykyään runsasta ja monipuolista, joten opettajilla tulisi olla tietoa, millaisen oppikirjan avulla saataisiin aikaan mahdollisimman hyviä oppimistuloksia. Tästä johtuen halusimme tutkia yhden oppikirjasarjan opettajan näkökulmasta ja tuottaa kuvailevaa tietoa Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjan mukaisesta murtolukukäsitteen oppimisen ja opettamisen etenemisestä. Oppikirja on tutkimuskohteena haastava, koska opettajilla on oma subjektiivinen näkemyksensä hyvästä oppimateriaalista ja oppikirjojen tulkintaan vaikuttaa vallalla oleva oppimisnäkemys. Ei voida koskaan saada "ainoaa, oikeaa vastausta", millainen on täydellinen oppikirja. Tutkimusta luettaessa on otettava huomioon, että tulkinnat ovat vain kahden tutkijan näkemys kirjasarjasta.

Haapasalon laaja MODEM-tutkimusprojekti 1990-luvulla antoi huolestuttavia tuloksia, joiden mukaan oppikirjat käsittelivät murtolukuja pinnallisesti, mekaanisesti ja yksipuolisesti. Tulokseksi saatiin, että koeryhmä, joka opiskeli ilman oppikirjaa, suoriutui huomattavasti paremmin murtolukuun liittyvissä tehtävissä. Tutkimustuloksista johtuen halusimme tulevina luokanopettajina tutkia, minkälaisia oppikirjat tällä hetkellä ovat.

Oppikirjasarjat ovat nykyään laajoja ja monipuolisia oppimateriaalipaketteja. Me tutkimme Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjasta murtolukujakson sisältävät oppilaan- ja opettajankirjat. Suurin kiinnostuksen kohteemme oli murtoluvun oppimisen ja opettamisen eteneminen kirjasarjassa ja se, noudattaako kirjasarja Haapasalon käsitteenmuodostusprosessia. Tutkimme myös sitä, noudattaako murtoluvun opettaminen spiraaliperiaatetta. Murtolukujen lisäksi olimme kiinnostuneita desimaali- ja prosenttijaksoista, niiltä osin kuin ne liittyivät murtoluvun oppimiseen ja opettamiseen. Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteissakin mainitaan, että matematiikassa tulisi saada aikaan laajoja opintokokonaisuuksia ja tämän perusteella tutkimme sitä, liittyivätkö edellä mainitut käsitteet opetuksessa toisiinsa.

Tutkimusmenetelmänä käytimme sisällön analyysia. Pääosin tutkimus oli laadullinen, mutta käytimme myös määrällisiä tekniikoita. Yhdistämällä nämä kaksi tutkimusmenetelmää sisällön analyysissa saimme mielestämme monipuolisempaa ja syvällisempää tietoa kirjasarjasta. Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjaan kuuluu runsaasti oheismateriaalia (lisätehtävävihkot, laulukasetti ja -cd, tietokonelevyke), mutta meidän tutkimuksemme kohdistui vain oppilaan- ja opettajankirjojen perussivuihin.

2 MURTOLUKUKÄSITE

2.1 Mikä on murtolukukäsite?

Murtoluku on *rationaaliluku* tai lauseke, joka on muotoa a/b. Tässä lausekkeessa a on osoittaja ja b nimittäjä ja viivaa kutsutaan jakoviivaksi. Murtoluvuissa käytetään sekä vinoa että suoraa jakoviivaa. Osoittaja kertoo tai osoittaa montako murto-osaa luvussa on ja nimittäjä antaa murtoluvulle sen nimen. Kun 3/4 kirjoitetaan muotoon 3(1/4), se on samassa muodossa kuin puhuttaessa: "kolme neljäsosaa". Siinä on siis kolme kappaletta neljäsosia. Sekamurtoluvuissa on huomattava, että esimerkiksi 5/2= 2 1/2 = 2+1/2, kun taas algebrassa 2x tarkoittaa 2 x. (Thompson 1994, 269.)

Rationaalilukuja ovat murto- ja desimaaliluvut, joilla voidaan ilmaista kokonaisuuden osia. Rationaalilukuihin kuuluvat myös kokonaisluvut. Jokainen rationaaliluku voidaan aina esittää murtolukumuodossa kahden kokonaisluvun osamääränä, jossa nimittäjä ei voi kuitenkaan olla nolla. (Rationaalilukujen joukko **Q** = {m/n! m, n kokonaislukuja, n = o}) (Wuolijoki & Norlamo 1999, 25.) Dickson, Brown & Gibson (1984) esittävät kirjassaan Kierenin määritelmän, jonka mukaan rationaaliluvut ovat numeroita, jotka voidaan ilmaista kahden kokonaisluvun suhteena (Dickson ym. 1984, 276). Rationaaliluvut voidaan esittää aina myös desimaalilukuna, koska murto- ja desimaaliluvut ovat samojen lukujen eri esitysmuotoja. Kun rationaaliluku esitetään desimaalina, desimaaliluvut voivat olla joko päättyviä (esimerkiksi 1/4 = 0,25) tai päättymättömiä jaksollisia desimaalilukuja (esimerkiksi 2/3= 0,666....). (Wuolijoki & Norlamo 1999, 25–26.) Rationaalilukuihin liittyy käsite ekvivalenssiluokka[1], joka tarkoittaa sitä, että muun muassa seuraavat luvut 1/2, 0,5, 50 %, 2/4 ovat saman ekvivalenssiluokan edustajia ja ovat tässä mielessä identtisiä (Leino 1977, 76–77).

1) Ekvivalenssi = samanarvoisuus, yhdenvertaisuus, yhtäpitävyys, vastaavuus (Turtia 2000, 233)

2.1.1 Miten murtoluku eroaa aikaisemmin opitusta kokonaislukukäsitteestä?

Oppilaiden on aika vaikea ymmärtää murtolukukäsitettä, koska siihen liittyy monta näkökohtaa. Murtolukujen oppimisessa on vaarana, että laskutoimitukset opitaan ulkoisten toimenpiteiden avulla, ymmärtämättä itse laskutoimitusta. (Koponen 1995, 120.) Kun oppilas on vasta oppinut kokonaisluvun, hänen on vaikea ymmärtää sen esiintymistä monessa eri merkityksessä, esimerkiksi moneenko yhtä suureen osaan yksi kokonainen on jaettu (Haapasalo 1994, 212). Vaikeutena murtoluvun (kuten myös desimaali- ja prosenttiluvun) oppimisessa on juuri se, että esimerkiksi 3/4 voidaan esittää konkreettisesti monella eri tavalla, jotka kaikki kuitenkin liittyvät oppilaan jokapäiväiseen elämään. Tältä osin murtoluvut eroavat kokonaisluvuista, koska kokonaislukuja käytetään laskettaessa erillisiä objekteja tai järjestyslukuja käytettäessä. (Dickson ym. 1984, 274.)

Kokonaislukuja ovat negatiiviset luvut, nolla sekä positiiviset luvut (kokonaislukujen joukko $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$) Kokonaisluvut ovat osa rationaalilukujen joukkoa. Ne voidaan esittää myös murtolukumuodossa, esimerkiksi kokonaisluku $5 = 5/1$. (Wuolijoki & Norlamo 1999, 25.) Kokonaislukujen päämerkitykset ovat kardinaalinen (kuinka monta?) ja ordinaarinen (kuinka mones?). Tarkasteltaessa kokonaislukua joukko-opillisesta näkökulmasta, painottuu luvun kardinaalinen puoli. (Leino 1977, 74.)

Koska murtolukuihin liittyy kiinteästi jakaminen, joka jo itsessään on vaikea operaatiokäsite, murtolukujen oppiminen vaatii lapselta perusteellisen käsitteenmuodostuksen. (Haapasalo 1994, 212.) Ikäheimo kertoo esimerkin seitsemäsluokkalaisesta pojasta, joka sai murtoluvusta 4/4 vastaukseksi 0. Kun opettaja kysyi perusteluja, oppilas vastasi: ”Sama kai se on missä se miinusmerkki on”. (Ikäheimo 1995, 106.)

2.1.2 Murtoluvun opettamisen periaatteita

Murtolukujen opettamisessa, kuten muussakin uuden asian opettamisessa, opetuksen tulisi tavoittaa oppilaan maailma. Esimerkiksi murtolukuja opiskeltaessa muoviset murtokakut eivät sellaisenaan riitä kaikille. Vasta kun niistä puhutaan esimerkiksi niiden värin perusteella ”mustikkakakuista ja mansikkakakuista”, oppilaiden pelko vaikeita murtolukuja kohtaan väistyy. Vasta silloin, kun oppilas on oivaltanut asian itse, hän pystyy myös vastaanottamaan opettajan esittämää käsitteeseen liittyvää uutta asiaa. Ellei omakohtaista oivallusta synny, oppilas ei pysty vastaanottamaan opetusta. (Ikäheimo 1995, 44.)

Koposen (1995) mukaan murtolukujen opettamisessa on viisi eri näkökulmaa. Ensimmäinen on osakokonainen näkökulma, joka tarkoittaa murtoluvun havainnollistamista geometrisilla malleilla, esimerkiksi suorakulmio- tai ympyrämallilla sekä konkreeteilla esineillä, esimerkiksi suklaalevyllä tai multilink-palikoilla. Osakokonaisen näkökulman tarkoituksena on, että jokin kokonainen ymmärretään lukuna yksi, josta se jaetaan yhtä suuriin osiin, esimerkiksi pinta-alan tai tilavuuden suhteen. Tällä näkökulmalla on yhteys prosenttikäsitteeseen. (Koponen 1995, 120–123.)

Toinen on suhdenäkökulma, joka puolestaan liittyy verrannollisuus- ja todennäköisyyskäsitteisiin. Se soveltuu hyvin varsinaisten murtolukujen opettamiseen. Suhdenäkökulmaa pystyy havainnollistamaan hyvin joukkomallilla, joka tarkoittaa sitä, että esimerkiksi suuren ympyrän sisään on piirretty viisi pienempää ympyrää, joista esimerkiksi kaksi on väritetty. Tällöin kyseessä on kaksi viidesosaa eli kaksi viidestä. (Koponen 1995, 121.)

Kolmas eli osamääränäkökulma viittaa murtoluvun jakolaskuun, jonka tuloksena on desimaaliluku. Osamääränäkökulma liittyy myös yhtälön ratkaisuun, esimerkiksi $5x = 2$, mistä $x = 2/5$, jolloin x samaistuu osamäärään 0.4. (Koponen 1995, 122.)

Neljäs näkökulma eli mittanäkökulma liittyy nimensä mukaisesti mittaamiseen, jolloin tuloksena saadaan desimaaliluku. Mittaamisessa voidaan käyttää apuna lukusuoraa, josta on muunnoksena myös janamalli. (Koponen 1995, 122.) Esimerkiksi jana on jaettu neljään yhtä suureen osaan ja yksi osa on väritetty. Lapsen tehtävänä on miettiä, mikä osa janan pituudesta on väritetty. (Leino 1977, 87.) Lukusuoramallin avulla on helppo vertailla murtolukujen suuruutta. Mitä kauempana luku on oikealla lukusuoralla tai janassa, sitä suurempi se on. (Koponen 1995, 122.) Sekä jana- että lukusuoramallin yhteydessä on korostettava nimenomaan välien, ei niiden päätepisteiden lukumäärän laskemista (Leino 1977, 86).

Viimeinen näkökulma eli operaattorinäkökulma tarkoittaa mittakaavamuunnoksia. Esimerkiksi 1/50 mittakaavassa tarkoittaa sitä, että alkuperäinen koko pienennetään viidenteenkymmenenteen osaan. (Koponen 1995, 123.)

Tzur (1999) esittää artikkelissaan Pitkethlyn ja Huntingin määrittelemät kolme perustoimintoa, jotka auttavat lasta murtolukukäsitteen muodostamisessa. Ensimmäinen perustoiminto on kokonaisen jakaminen osiin. Tämän jälkeen nämä osat jaetaan vielä rekursiivisiin (toistuviin) osiin. Kolmantena perustoimintona jaetuista osista muodostetaan uudelleen yksi kokonainen. (Tzur 1999, 392.) Esimerkiksi aluksi jaetaan yksi kokonainen kahteen osaan. Tämän jälkeen puolikkaat jaetaan vielä puoliksi, jolloin saadaan neljä kappaletta 1/4: a. Lopuksi neljäsosat kootaan yhdeksi kokonaiseksi.

2.2. Käsitteenmuodostuksen periaatteita murtoluvun oppimisessa

Opetuksessa tulisi korostaa käsitteenmuodostuksen asemaa ja erityisesti peruskoulun alimmilla luokilla konkreettisten apuvälineiden käyttöä. (Ikäheimo 1995, 18) Lapsella jo kouluun tullessaan on mahdollisesti joitakin fyysisiä tai kielellisiä kokemuksia matematiikan käsitteistä tai sisällöistä. Lapset varmasti tuntevat kouluun tullessaan murtoluvun 1/2 (puoli) fyysisenä kokemuksena, koska ovat jakaneet erilaisia asioita puoliksi. He eivät kuitenkaan tiedosta puolikasta murtoluvuksi. Koulun tarkoituksena onkin opettaa lapsille näiden fyysisten ja kielellisten kokemusten esittävät symbolit sekä saada lapset ymmärtämään symbolijärjestelmää. (Lindgren 1990, 106.)

Koska murtoluku on keskeinen käsite matematiikassa ja esiintyy melkein kaikilla vuosiluokilla peruskoulussa (linkittyen myös desimaalilukuun ja prosenttiin), on hyvä selventää keskeisiä käsitteenmuodostuksen periaatteita. Jotta käsitettä oppisi käyttämään tehokkaasti, pitäisi ymmärtää myös sen muodostumisprosessi, jolloin tietoa voi soveltaa taas uuden käsitteen omaksumiseen (Karjalainen 1987, 14).

Viimeaikaiset tutkimukset ovat osoittaneet, että oppilailla on vaikeuksia käyttää matemaattista osaamistaan. Ongelmat johtuvat pitkälti siitä, että oppilailla on puutteita käsitteellisissä valmiuksissa. Käsitteet ovat keskeinen osa matematiikassa. (Kupari 1988, 69.) Joyce & Weil ovat esittäneet yhden opetuksen mallin, jolla voidaan opettaa käsitteen omaksuminen. Tämän työtavan ideana on käsitteen opettaminen siten, että oppilasryhmä opettajan opastamana ja opettajan valitsemien esimerkkien avulla rakentaa käsitteen pala palalta. Työtavassa on tärkeää oppilaiden oma aktiivisuus: he etsivät aineistoista käsitteen tuntomerkkejä, tutkivat ja arvioivat käsitteen käyttöä, keskustelevat ja määrittelevät käsitteen, mutta opettaja antaa nimen ja täsmentää. (Karjalainen 1987, 14–15.) Wiebe korostaa, että useimmat lapset eivät osaa ajatella puhtaasti abstraktein termein ja tämän vuoksi kaikille symboleille täytyy antaa myös fyysinen vastaavuus. (ks. Lindgren 1990, 106–107) Murtolukukäsitteessä tämä tarkoittaa sitä, että oppilaille tulisi antaa mahdollisimman paljon erilaisia esineitä, joita he voivat jakaa useaan eri osaan (esimerkiksi kakku, suklaalevy, langanpätkä).

Koulumatematiikka koostuu tiedoista, taidoista, käsitteistä, strategioista ja asenteista. Tieto tarkoittaa tässä tapauksessa sitä, että oppilas tietää jonkun yksittäisen asian, esimerkiksi miten murtoluku merkitään, mutta hän ei osaa liittää sitä laajempaan kontekstiin eikä välttämättä osaa käyttää murtolukukäsitettä eri asiayhteyksissä. Taito tarkoittaa sitä, että oppilas osaa perustella tekemistään. Oppilas osaa esimerkiksi muodostaa tietyn murtoluvun havaintomateriaalin avulla. (Kupari 1988, 69–70.)

Käsitteellä nähdään olevan kaksi eri merkitystä. Sillä tarkoitetaan yksilön henkistä rakennetta sekä yleisesti tunnettua yhden tai useamman sanan merkitystä, joka määrittelee tietyn käsitteen. (Kupari 1988, 70.) Bellin ym. mukaan (ks. Kupari 1988, 71) strategiat auttavat ihmistä valitsemaan tietoja ja taitoja, joita on tarkoituksenmukaista käyttää tietyssä tilanteessa. Strategiat auttavat havainnoimaan oikein, ryhmittelemään tietoja ja tarvittaessa palauttamaan tietoa mieleen. Asenteilla tarkoitetaan affektiivista suhtautumista ainetta kohtaan, esimerkiksi pitääkö matematiikasta ja pitääkö sitä tärkeänä. (Kupari 1988, 71.)

Yrjönsuuren mukaan käsite ja käsitys eroavat toisistaan. Käsitteellä tarkoitetaan esimerkiksi esineiden, olioiden, asioiden tai tapahtumien luokkaa, jolla on nimi. Tällä tarkoitetaan sitä, miten yksilö ymmärtää tietyn käsitteen tietyssä yhteisössä ja missä määrin se vastaa yksilön omaa käsitystä. Juuri omien käsityksiensä kautta yksilö oppii tietyn käsitteen. (Yrjönsuuri 1998,129–131.)

Matematiikassa käsitteellä tarkoitetaan symbolikielistä lausetta, joka sisältää käsitteen ominaisuuksia sekä ohjeita, miten symbolin avulla lasketaan. Esimerkiksi murtoluvuissa osoittajan ja nimittäjän väliviiva on ohje osoittajan jakamisesta nimittäjällä. Matematiikassa kieli ja symbolit perustuvat yleiseen sopimukseen käsitteen käytöstä. Kaikilla tulisikin olla sama käsitys tietystä käsitteestä. Tätä auttavat erilaiset havainnot, monipuoliset harjoitukset ja opiskelun ohjaaminen. Matemaattiset käsitteet ovat abstrakteja ja sen vuoksi varsinkin lapsille vaikeita. (Räsänen ym. 1998, 129–131.) Matematiikan käsitteenmuodostukseen tulisi varata runsaasti aikaa ja varsinkaan alussa ei saisi olla kiire. Jos käsite opitaan väärin tai puutteellisesti, virheen poisoppiminen vie paljon aikaa. Tämän takia käsitteet on opeteltava alusta lähtien oikein. (Ikäheimo 1995, 38.)

2.2.1 Käsitteenmuodostusprosessi

Käsitteenmuodostus ymmärretään prosessina. Lapsi muodostaa käsitteestä yksiselitteisiä ja käyttökelpoisia ominaisuuksia, jotka ovat tarkoituksenmukaisia erilaisten tehtävien ja ongelmien ratkaisuissa. Käsitteillä on verbaalinen, symbolinen ja kuvallinen esitysmuoto ja käsitteenmuodostusprosessissa pitäisi kiinnittää huomiota näiden esitysmuotojen väliseen tasapainoon. Käsitteiden tulisi myös liittyä käytännön tilanteisiin. (Haapasalo 1994, 201.) Käsitteeksi voidaan ymmärtää se, että lapsella on todellisuudessa tai mielikuvituksessaan esiintyville luokille jokin älyllinen kuva, joka on lapsen matemaattisen ajattelun edellytys. Käsitteen merkitys lapselle riippuu siitä, millaisia uskomuksia, kokemuksia, tunteita, määritteitä jne. hän siihen liittää. (Haapasalo 1992, 5.)

Käsitteenmuodostusprosessin mallissa (Haapasalo 1992) on viisi vaihetta: käsitteeseen orientoituminen, käsitteen määritteleminen, käsitteen tunnistaminen, käsitteen tuottaminen ja käsitteen lujittaminen. Käsitteenmuodostuksen kaksi ensimmäistä vaihetta yhdessä muodostavat muovaamisvaiheen, joka on konstruktivismissa luovia työmuotoja suosiva ja vaativa vaihe. Muovaamisvaihe on tiedonhankintaa ja sitä kutsutaan myös produktiiviseksi vaiheeksi. (Haapasalo 1992, 6–8, 13.) Kun opettaja tiedostaa käsitteenmuodostusprosessin eri vaiheet, hän voi suunnitella, toteuttaa ja kontrolloida oppimisprosessia paremmin. Tämä ei kuitenkaan merkitse sitä, että opettaja varsinaisesti ohjaisi oppilaan käsitteenmuodostusta, vaan kysymys on Haapasalon (1994) mukaan siitä, että

> Opettaja kykenee osavaiheiden avulla rajaamaan tarkoituksenmukaisesti tilanteita, eräänlaista 'oppimisavaruutta', jossa oppilas kulloinkin konstruoi tietämystään. (Haapasalo 1994, 202.)

Joillakin oppilailla käsitteenmuodostusprosessi on niin nopea ja sen eri osavaiheet ovat niin päällekkäisiä, ettei ole tarkoituksenmukaista erotella vaiheita keskenään. Hitaimpien oppilaiden ollessa kyseessä opettajan tulee tiedostaa eri osavaiheet ja rajata tehtävät koskemaan sitä vaihetta, jossa oppilas vielä tarvitsee harjoitusta. (Haapasalo 1994, 202.) Käsitteenmuodostusprosessi liittyy konstruktivismin alalajeista systemaattiseen konstruktivismiin, joka tarkoittaa sitä, että käsitteiden asettamisessa loogisella tavalla oikeassa järjestyksessä otetaan huomioon matematiikan tietorakenteet sekä oppilaan kehitystaso (Perkkilä 1997, 11).

Orientoitumisvaiheessa lapselle annetaan ongelma, jota hän pystyy tulkitsemaan aikaisemman kokemuksensa ja tietämyksensä avulla. Tässä vaiheessa on tärkeää oppilaiden motivointi. Esimerkiksi opettaja pyytää oppilaita jakamaan luokan kahtia niin, että he konkreettisesti muodostavat kaksi eri ryhmää. Luokan puolikkaat voidaan vielä jakaa kahteen pienempään ryhmään, jolloin saadaan erisuuruisia murtolukuja. Oppilaiden kanssa keskustellaan, moneenko yhtä suureen osaan luokka on jaettu eri tilanteissa. Ongelmatilanteen edessä oppilas turvautuu aikaisempiin vastaavanlaisiin tilanteisiin, joista hänellä on hyvin lapsenomaiset mielikuvat ja käsitykset. Opettajan tehtävänä onkin suunnitella sellaisia oppimisympäristöjä ja -tilanteita, joissa oppilas voi kehittää näiden pohjalta itselleen monipuolisia ajattelu- ja toimintamalleja. Ongelmassa tulee kuitenkin olla jokin ristiriita, jotta oppilas ongelmaa ratkaistessaan kiinnittäisi huomiota käsitteen tunnusomaisiin piirteisiin. (Haapasalo 1994, 203.) Haapasalo (1992) pitää tärkeänä, että oppilaat saadaan verbalisoimaan opeteltavaa asiaa (tässä tapauksessa murtolukua). Tällöin oppilaat oppivat kiinnittämään murtolukuun sen oleellisia tunnusmerkkejä. (Haapasalo 1992, 6, 9.)

Käsitteen *määrittelyvaihe* tarkoittaa sitä, että käsitteeseen kiinnitetään ja kootaan sen olennaiset tunnusmerkit, joita on harjoitettu jo puheen avulla orientoitumisvaiheessa. Jos orientoitumisvaihe onnistuu hyvin, oppilas pystyy muodostamaan käsitteen olennaiset tunnusmerkit omilla skeemoillaan. Määritelmä tarkoittaa ainoastaan sopimusta käsitteen tunnusmerkkien esittämisestä tietyllä tavalla, joten sen kysyminen oppilaalta on asiatonta. Opettaja ei esimerkiksi saa kysyä oppilaalta mikä on murtoluku. Tällaiset kysymykset testaavat ainoastaan muistia, eivätkä asian ymmärtämistä. (Haapasalo 1994, 204.)

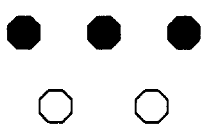
Koska tässä vaiheessa käytetään luovia ja monipuolisia työtapoja, jotkut oppilaat saattavat omaksua käsitteen melko hyvin ja osaavat esimerkiksi tuottaa sen eri esitysmuodoissa (kuvallisesti, murtolukuna eli symbolisesti ja sanallisesti). (Haapasalo 1994, 204.) Orientoitumisvaiheen kuvalliset ja verbaaliset ilmaisut liitetään määrittelyvaiheessa uuteen symboliseen merkkiin ja oppilaiden kanssa voidaan määritellä murtoluku. Määritelmää ei voida kuitenkaan tehdä pelkästään lukuna, vaan mukana on edelleen oltava eri esitysmuodot. (Haapasalo 1992, 12.)

Tehtävien pitää olla mahdollisimman yksinkertaisia, jotta oppilaan tarvitsee tuottaa tietoa mahdollisimman vähän. Olennaista on eri esitysmuotojen ominaisuuksien harjoittelu ja tiedon muuntaminen esitysmuodosta toiseen. Esimerkiksi harjoitellaan murtolukusymbolin merkitsemistä, sen piirtämistä eri muodoissa sekä sanallista ilmaisua. Tässä vaiheessa käsitteeseen liittyvät muut käsitteet pitää tuoda esille. Murtolukua opeteltaessa tämä tarkoittaa desimaaliluvun ja prosentin käsittelemistä yhdessä murtoluvun kanssa. (Haapasalo 1994, 204.)

Määrittelyvaiheen esimerkkinä voisi olla, että mietitään luokan jakoa pienempiin ryhmiin ja samalla tuodaan esille murtoluvun sanallinen, kuvallinen ja symbolinen esitystapa. Tässä vaiheessa on tärkeää, että opettajalla on paljon erilaisia konkreetteja havaintomateriaaleja, joita jaetaan erilaisiin yhtä suuriin osiin ja tuotetaan niiden eri esitystavat.

Käsitteen *tunnistamisvaiheeseen* liittyvien tehtävien tulisi olla soveltuvia ainoastaan tunnistamiseen, ne eivät saa edellyttää tiedon monimutkaisempaa käsittelyä ja niiden on oltava kyllin helppoja sekä monipuolisia, jotta oppilas voisi käyttää kaikkia esitysmuotoja semanttisissa esityksissään. Esimerkiksi murtolukua käsiteltäessä oppilaalle annetaan tehtäviä, joissa murtolukua kuvataan eri tavoilla. Oppilaan tehtävänä on osata liittää samaa tarkoittavat murtoluvut yhteen. (Haapasalo 1994, 205.) (ks. kuvio 1)

Kysymys: Mitä murtolukua kuva esittää?



2/3

3/2

3/5

KUVIO 1 Esimerkki käsitteen **tunnistamisvaiheen** tehtävästä

Tunnistamisvaiheen tehtävät aloitetaan helpoista tehtävistä edeten vähitellen vaikeampiin tehtäviin. Haapasalon (1992) mukaan tunnistamisvaihe hyödyttää oppilasta eniten vasta silloin, kun hän voi opetella opittavaa asiaa toiminnan ja verbalisoinnin kautta. Tämä vaihe suosii pari- ja pienryhmätyöskentelyä. (Haapasalo 1992, 13.)

Tuottamisvaiheessa oppilaan on itse tuotettava käsitteen jokin esitysmuoto lähtien jostakin esitysmuodosta. Esimerkiksi jos opettaja antaa murtoluvun 3/5 sanallisesti, oppilaan täytyy osata kirjoittaa se symbolisessa muodossa tai piirtää se kuvallisesti. Tuottamistehtävät eivät saa vaatia oppilaalta monimutkaista tiedon käsittelyä. (Haapasalo 1994, 206.) Esimerkiksi tehtävä "esitä toisenlaisena murtolukuna 2/8" kuuluu vasta seuraavaan, lujittamisvaiheeseen, koska siinä tarvitaan laventamista ja supistamista. Haapasalon mukaan tuottamisvaiheessa on hyvä käyttää erilaisia työmuotoja. Paperitehtävien lisäksi erilaiset toimipisteet, pysäkit jne. ovat kehittäviä työmuotoja. Myös havainnollistamisvälineiden valmistaminen kuuluu tuottamisvaiheeseen. (Haapasalo 1992, 14.)

Viimeinen vaihe on käsitteen *lujittamisvaihe*, jossa oppilas syventää konseptuaalista(2 tietoaan ja rakentaa siihen liittyvää proseduraalista(3 tietoaan. Murtoluvun tapauksessa siihen kuuluu useita eri osa-alueita. Haapasalo (1994, 206) katsoo siihen kuuluvaksi seuraavat osa-alueet:

1) Murtolukuilmaukset ovat myös *lukuja*, joita voidaan verrata ja joilla voidaan laskea
2) Murtolukujen laventaminen ja supistaminen sekä yhteys jakolaskuun
3) Murtolukujen suuruusvertailu
4) Osan tai prosentin ottaminen murtoluvusta
5) Samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku
6) Erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku
7) Murtoluvun ja kokonaisluvun kertominen keskenään
8) Murtoluvun kertominen murtoluvulla
9) Murtoluvun jakaminen kokonaisluvulla
10) Kokonaisluvun jakaminen murtoluvulla
11) Murtoluvun jakaminen murtoluvulla
12) Prosenttikäsitteeseen liittyvät skeemat
13) Sekamurtoluvut ja niiden laskutoimitukset.

Lujittamisvaiheessa murtolukuja sovelletaan rutiinitehtävissä ja erilaisissa ongelmatilanteissa. (Haapasalo 1994, 206.) Lujittamisvaiheessa oppilaille voidaan antaa tehtäviä, joissa oppilaiden on muodostettava tietystä murtoluvusta, esimerkiksi 2/4, erisuuruinen murtoluku, jolloin oppilaat tarvitsevat siihen laventamista tai supistamista. Tässäkään vaiheessa ei ole kuitenkaan vielä tärkeää, että oppilaat ymmärtävät laventamisen ja supistamisen käsitteet (Haapasalo 1992, 16). Tehtävänä voi olla myös murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi tai prosentiksi.

2) Konseptuaalinen = käsitteellinen (Turtia 2001, 501)
3) Proseduuri = menettely, menettelytapa (Turtia 2001, 789)

2.2.2 Brunerin teoria lapsen käsitteenmuodostusprosessista

Oppimisessa voidaan erottaa Brunerin (ks. Koponen 1995, 175–179) mukaan kolme eri tasoa, jotka ovat toiminnallinen, ikoninen ja symbolinen. Näistä tasoista symbolinen on kaikkein vaikein, ja siksi opetuksen pitäisikin lähteä liikkeelle toiminnallisesta tasosta ja edetä ikonisen tason kautta symboliseen, jolloin oppilas ymmärtää jonkin käsitteen merkin eli symbolin. Toiminnallinen taso liittää uuden, opittavan asian, tuttuun tapahtumaan. Esimerkiksi murtolukukäsitettä opeteltaessa oppilaat saavat jonkin konkreettisen esineen, esimerkiksi suklaalevyn, jonka he voivat jakaa moneen yhtä suureen osaan. Aluksi oppilaat näkevät, että suklaalevy on *yksi* kokonainen, jonka he voivat jakaa esimerkiksi neljän oppilaan kesken, jolloin jokainen saa suklaalevystä yhden neljäsosan. Kun asiat opitaan toiminnallisesti, ne pysyvät muistissa vuosikausia, vaikka niitä ei käyttäisikään. (Haapasalo 1995, 176.)

Ikoninen esitystapa tarkoittaa opittavan käsitteen havainnollistamista piirroksen avulla, esimerkiksi ympyrä- ja ruutumallin avulla. Toiminnallisen esitystavan jälkeen, kun oppilaat ovat jakaneet suklaalevyn neljään osaan, sama voidaan piirtää taululle tai vihkoihin ruutumallin avulla. Viimeinen, symbolinen taso, on abstraktein ja sen takia vaikein. Siinä käytetään sanaa tai merkkiä, joka edustaa jotakin asiaa, mutta ei muistuta sitä. Murtoluvussa tämä symboli on murtoluku kokonaisuudessaan, esimerkiksi 1/4, joka ei liity tässä tapauksessa enää suklaalevyyn, vaan on täysin abstrakti symboli samalle asialle. (Haapasalo 1995, 177.)

2.2.3 Lukukäsitteen kehittyminen

Lukukäsitteen kehittymisen taustalla ovat yleiset teoriat ja käsitykset käsitteenmuodostusprosessista. Lukukäsitteen kehittyminen riippuu oleellisesti laskemistoiminnon kehittymisestä. Lapsi pyrkii löytämään merkityksen lukusanoille. Se, että lapsi luettelee lukuja ja soveltaa niitä arkielämän tilanteisiin, on lapsen oman aktiivisuuden sekä ulkoapäin suuntautuvan sosiaalisen haasteen yhteisvaikutusta. Kerannon (1981) mukaan lukusanojen käyttö on tärkeää itse lukukäsitteen kehittymiselle. Jos asiaa tarkastellaan laajemmasta näkökulmasta, on kysymys kielen ja ajattelun välisten suhteiden kehittymisestä ja kehittämisestä. Näin ollen lukukäsitteen kehittymiseen liittyvät sekä Piaget´n että Vygotskyn teoriat. Piaget pyrkii löytämään lukukäsitteen perustalla olevia kognitiivisia rakennelmia erillään lukusanojen käytöstä, Vygotsky puolestaan ajattelee kielen ja näin ollen lukusanojen muodostavan tärkeän osan ajattelun kehittymistä ja kehittämistä. (Keranto 1981, 1.)

Lapset oppivat lukumäärän käsitteen ja lukumäärän laskemisen piirtelemällä joukkoja ja vertailemalla joukkojen alkioiden lukumääriä toisiinsa. Meillä lapset kouluun tullessaan ymmärtävät jo lukumääräkäsitteen ja osaavat laskea usein jo melko pitkälle. Sen jälkeen kun lapsi on hahmottanut lukumääräkäsitteen, hänelle on luonnollista laskea kahden joukon alkioiden lukumäärät erikseen vertaillakseen niitä. (Leino 1977, 73–74.) Lapsi oppii luettelemaan lukuja ilman opettamista, mutta murtolukujen oppimisessa useimmat lapset tarvitsevat opastusta ja opetusta (Tzur 1999, 390).

Keranto (1981) määrittelee käsitteen *luku* seuraavasti:

> " Luku voi olla hyvinkin konkreettinen käsite, mikäli identifioimme sen yhdellä silmäyksellä havaittaviin lukuisuuksiin. "

Lapsi saa historiallis-yhteiskunnallisena perintönä lukusanat, jotka ovat läpikäyneet pitkän kulttuurikehityksen. Voi kuitenkin olla, että lapsi kasvaa sellaisessa sosiaalisessa ympäristössä, jossa ei esiinny lukusanoja. Lapsi saattaa kuitenkin ilman lukusanojakin kyetä abstrahoimaan[(4] esimerkiksi luokan neljä. Tällainen luvunmuodostus on hyvin alkeellista ja se kattaa alueen 1–6. Lukukäsitteeseen liittyy kiinteästi niiden symbolinen esitystapa. (Keranto 1981, 7, 56.)

4) abstrahoida = yleistää, erottaa olennainen muusta yhteydestä, muodostaa yleiskäsite (Turtia 2001, 18)

3 KEHITYSTEORIOIDEN TARKASTELUA

3.1 Piaget'n teoria lapsen kognitiivisesta kehityksestä

Piaget´n teoriassa lapsen ajattelun kehittymisestä on sensomotorinen, esioperationaalinen, konkreettien operaatioiden ja formaalien operaatioiden vaihe. Kehitysvaiheille on ominaista, että ne ilmaantuvat aina samassa järjestyksessä, vaikka se ikä, jossa ne ilmaantuvat, saattaa vaihdella eri yksilöillä älykkyydestä tai sosiaalisesta ympäristöstä riippuen. (Crain 1992, 100–133.)

Piaget näkee tärkeänä sosiaalisen vuorovaikutuksen merkityksen kasvatukselle. Kun lapset toimivat vertaistensa kanssa, he oppivat ottamaan huomioon muiden näkökantoja. Tämä vaikuttaa heidän loogisen ajattelunsa kehittymiseen, pikkuhiljaa he alkavat ottamaan huomioon kaksi näkökulmaa samanaikaisesti. (Crain 1992, 114–118.)

Piaget pyrkii selittämään yksilön ajatteluprosessien laadullista kehitystä ja kokemusten rakentumista henkisten toimintojen rakentumisen avulla. Piaget´n mukaan inhimillinen tieto perustuu aktiivisiin kokeiluihin ja toimintoihin. Vaikka Piaget oli etupäässä tietoteoreetikko ja kehityspsykologi, hänen kokeensa ja esimerkkinsä koskivat useimmiten matemaattisen ajattelun kehittymistä. Piaget´n mukaan lapsen ajattelu rakentuu noudattaen matematiikan ja logiikan johdonmukaisuutta. Piagetia on arvosteltu etenkin matematiikan oppimisen kannalta siksi, että jokainen ihminen käy Piaget´n mukaan nämä vaiheet läpi ilman, että aktiivisesti harjoittelisi vaiheeseen kuuluvia toimintoja. (Haapasalo 1994, 79.)

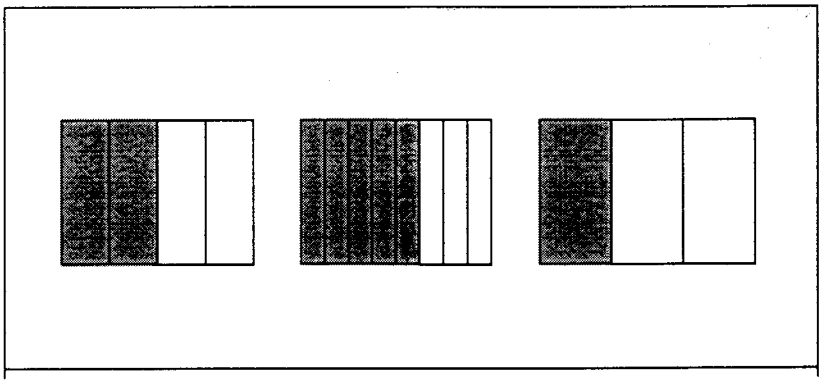
Vaikka Piaget´n teoriassa on neljä eri vaihetta, käsittelemme vain kolmea viimeistä vaihetta ja asioita, jotka liittyvät matematiikkaan näissä vaiheissa. Koska 1.–6.-luokkalaiset lapset ovat jo ohittaneet sensomotorisen vaiheen, emme käsittele sitä. Pyrimme yhdistämään Piaget´n ajatukset murtolukukäsitteeseen.

Esioperationaalinen vaihe (2–7v.) jaetaan kahteen osaan, jotka ovat esikäsitteellinen (2–4v.) ja intuitiivinen vaihe (4–7v.). Esioperationaalisessa vaiheessa lapset opettelevat ajattelemaan, käyttämään symboleja ja sisäisiä kuvia. Heidän ajattelunsa on vielä epäsystemaattista ja epäloogista. Vasta seitsemän ikävuoden tienoilla lapsen ajattelu siirtyy "henkiselle tasolle". (Crain 1992, 108–109.)

Lindgren (1990) jakaa Piaget'n teoriassa 4–7-vuotiaiden lasten kehityksen kolmeen eri tasoon, jotka ovat globaalinen taso (4–5v.), intuitiivinen taso (5–6v.) sekä operationaalinen taso (6–7v.). Kun lapsi on globaalisella tasolla, hänen vastauksensa lukumäärän säilyvyystehtäviin/ongelmiin perustuu välittömiin havaintoihin. Jos lapsi on intuitiivisella tasolla, hänellä ilmenee ristiriitaa siinä, mitä hän näkee ja toisaalta hänen oman yksi-yksi-vastaavuutensa välillä. Operationaalisella tasolla lapsella on käsitys yksi-yksi-vastaavuudesta. Hän kykenee käänteiseen eli reversiibeliin ajatteluun. Hän ei ole enää riippuvainen välittömästä havainnosta, vaan pystyy käsittelemään konkreettiseen tilanteeseen liittyvää operaatiota puhtaasti ajattelemalla. Toisin sanoen tällä tasolla oleva lapsi on säilyttänyt lukumäärän säilyvyyden eli konservaation. (Lindgren 1990, 60–61.) Murtoluvuissa tämä vaihe voi tarkoittaa sitä, että oppilailla on fyysisiä kokemuksia murtoluvuista sekä heille syntyy jokin mielikuva, jos heille sanoo yksinkertaisen murtoluvun, esimerkiksi 1/2. (ks. 2.2.1)

Konkreettien operaatioiden vaiheessa (7–11v) lapset kehittävät kykyään ajatella systemaattisesti, mutta vain silloin, kun he voivat käyttää apunaan konkreettisia kohteita tai toimintoja (Crain 1992, 102). Koulunkäynnin alkuvaiheessa lapset osaavat vaivatta järjestää esineitä pituusjärjestykseen sekä luokitella niitä erilaisten havaintoperusteiden kuten muodon, värin ja koon mukaan luokkiin (Niemelä & Ruuth 1989, 44). Piaget´n ehkä kuuluisin koe on ns. "vesilasitesti". (ks. Crain 1992, 111) Konkreettien operaatioiden vaiheessa olevan lapsen ajattelu on jo kehittynyt sille tasolle, että hän pystyy ratkaisemaan tämän veden määrä-ongelman. Piaget löysi lasten vastauksista kolme eri perusteluryhmää. Lapsi pystyy näkemään identtisten elementtien yhteenlaskettavuuden, hän pystyy ajattelemaan käänteisesti sekä hän pystyy kompensaatio perusteluihin. Piaget on tehnyt monia muitakin säilyvyystestejä, joissa testataan lapsen kykyä hahmottaa eri suureiden säilyvyyttä tilanteessa, jossa niitä tarkoituksella muutellaan. Suureina on käytetty mm. numeroita, painoa, pituutta, tilaa ja ääniä. Näissä kaikissa on olennaista se, että niissä tarkastellaan yhtäläisyyden, käänteisyyden sekä korvaavuuden hallitsemista ja ymmärtämistä. (Crain 1992, 110–113.)

Konkreettien operaatioiden vaiheeseen kuuluu vertailu, esimerkiksi murtolukujen suuruusvertailu, mutta konkreettien havaintovälineiden avulla. Oppilaille esimerkiksi annetaan viisi samankokoista paperia. Jokainen paperi esittää eri murtolukua, joilla on eri kantaluvut. Esimerkiksi murtoluvun 1/4 ollessa kyseessä paperi on jaettu neljään yhtä suureen osaan, joista yksi lokero on väritetty. Oppilaat voivat vertailla eri suuruisia murtolukuja siten, että he vertailevat väritettyjen osien suuruutta. He voivat esimerkiksi laittaa paperit allekkain ja järjestää ne siten suuruusjärjestykseen. (ks. kuviota 2)



KUVIO 2 Järjestä seuraavat murtoluvut suuruusjärjestykseen.

Formaalisten operaatioiden vaiheessa (11v. –> aikuisuuteen asti) nuoret kehittävät kykyään ajatella systemaattisesti, puhtaasti abstraktisella ja hypoteettisella tasolla. Tässä vaiheessa ajattelu saavuttaa tasapainon korkeimman asteen. Työskenneltäessä jonkin tehtävän tai ongelman parissa tässä vaiheessa olevat ihmiset työskentelevät systemaattisesti ja miettivät kaikkia vaihtoehtoja (Crain 1992, 119–121.) Piaget pitää kehityksen tärkeimpänä saavutuksena siirtymistä hypoteettis-deduktiiviseen ajatteluun, jolle on ominaista ongelmien asettaminen ja johtopäätösten teko. Piaget´n mukaan lapsi kykenee käsitteelliseen ajatteluun vasta formaalien operaatioiden vaiheessa. Tässä vaiheessa sekä ajattelu että kielellinen päättely monipuolistuu ja syvenee. Saavutettuaan tämän tason ihminen pystyy pitämään mielessään useita tilanteeseen liittyviä tekijöitä ja tarkastelemaan asioita myös muiden näkökulmasta. (Niemelä & Ruuth 1989, 45.) Tässä vaiheessa oppilaiden tulisi osata ratkaista murtolukutehtäviä pelkkien symbolien avulla. Tässä vaiheessa oppilaille voidaan antaa lasku ja siihen neljä vastausvaihtoehtoa. Oppilaiden tehtävänä on löytää vastauksista oikea vaihtoehto ja todistaa se oikeaksi.

3.2 Dienes Piaget´n teorian soveltajana

Unkarilainen Zoltan Dienes on soveltanut Piaget`n teoriaa matematiikkaan. Dienes sovelsi menetelmäänsä koululuokkiin ja oppilasryhmiin, mutta keskittyi Piaget'sta poiketen ainoastaan matematiikan oppimiseen. 1950-luvun lopulla hän tutki käsitteenmuodostusprosessin psykodynamiikkaa sekä niitä tapoja, joilla kyky muodostaa abstrakteja käsitteitä kytkeytyy muihin persoonallisuuspiirteisiin. Kun Piaget kehitti teoriaansa kehitysvaiheista, hän käsitteli lapsen kehitystä muultakin kuin matemaattiselta näkökannalta. Dienes puolestaan keskittyi vain käsitteenmuodostumisen kannalta olennaisiin seikkoihin pohjanaan Piaget'n vaiheteoria. Dienesin mukaan käsite muodostuu lopullisesti kolmannella kaudella. (ks. 3.1 Lindgren) Tässä vaiheessa nähdään kaikkien osien muodostama kokonaisuus ja ymmärretään, miten kokonaisuus rakentuu osistaan. Tässä Dienes viittaa hahmopsykologian termiin *sulkeutuma*. Käsitteestä on tullut osa ihmisen persoonallisuutta. Kun käsitteestä on tullut osa ihmisen persoonallisuutta, alkaa sen lujittuminen. Käsitettä ajatellaan tai sitä sovelletaan eri tilanteisiin. (Lindgren 1990, 64–65.)

Dienes on kehitellyt matemaattisten rakenteiden opiskeluun sopivia opiskelumuotoja ja erilaisia malleja. Matematiikan opiskelussa keskeisenä asiana on matemaattisten rakenteiden omaksuminen. Näillä rakenteilla tarkoitetaan kaavoja, lauseita yms., joita esiintyy matemaattisissa teksteissä ja jotka sisältävät keskeisiä periaatteita. Aikaisemmin katsottiin, että matemaattiset rakenteet ovat vaikeita ja abstrakteja lasten opiskeltaviksi ja tämän takia matematiikan opiskelu painottui ennen 1960-lukua pelkästään laskemiseen. Matematiikan opetuksen uudistuksen yhteydessä 1960-luvulla ymmärrettiin, että useat rakenteet voidaan esittää konkreettisessa muodossa ja niitä voidaan opiskella leikinomaisesti. (Malinen 1972, 24.)

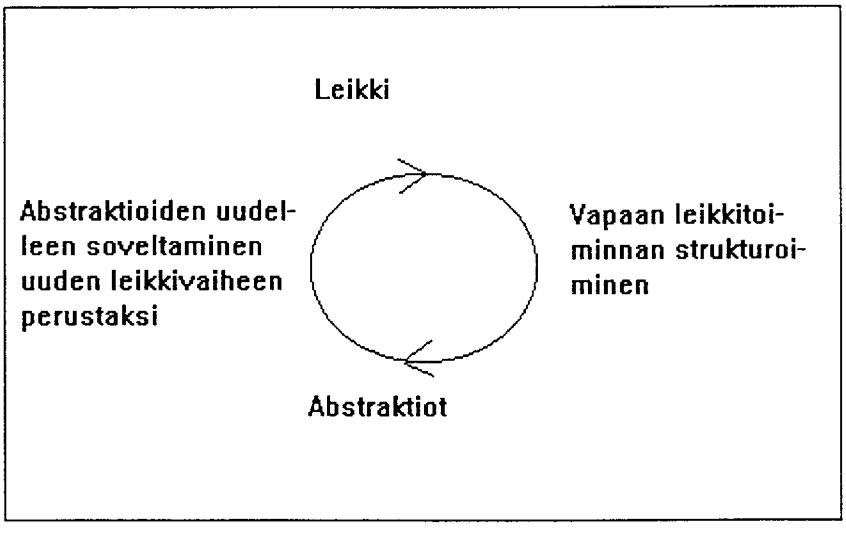
Matemaattisten rakenteiden omaksumisen Dienes on jaotellut viiteen eri vaiheeseen. Ensin lapsi leikkii esineillä, ryhmittelee ja vertailee niitä jne. Seuraavassa vaiheessa lapsi huomaa, että kahdella objektilla on jotain yhteistä. Kolmannessa vaiheessa oppilas ymmärtää tilanteeseen kuuluvia yhteyksiä. Vasta näiden vaiheiden jälkeen päästään varsinaiseen matematiikan opiskeluun, mutta edellä mainittuja vaiheita ei voi sivuuttaa. Neljännessä vaiheessa konkreettiset rakenteet siirretään matemaattisiin yhteyksiin jolloin päästään jo pikku hiljaa tutustumaan matematiikan kieleen. Viimeisessä vaiheessa rakenteita abstrahoidaan niin, että ne voidaan muotoilla matemaattiseen asuun, ja kehitetään matemaattista käsitekieltä. Dienes on luokitellut matemaattisen ajattelun kahteen eri vaiheeseen. Neljässä ensimmäisessä edellä mainitussa vaiheessa lapsi on konstruktiivisen ajattelun kaudella, jolloin hän pystyy tarkastelemaan rakenteita konkreettisissa yhteyksissä. Lapsi pääsee analyyttiseen vaiheeseen abstrahoitumisvaiheen jälkeen, jolloin voidaan toimia puhtaasti abstraktisella pohjalla. (Malinen 1972, 24–25.) Nämä kaksi vaihetta Dienes katsoo kuuluvaksi Piaget'n konkreettien- ja formaalien operaatioiden kehitysvaiheisiin. (Lindgren 1990, 68–69.)

Myöhemmin Dienes keskittyi tutkimaan lapsen leikin ja matemaattisen ajattelun välistä yhteyttä. Tekemiensä tutkimusten perusteella Dienes muodosti neljä eri periaatetta lapsen matemaattisen kokemuksen monipuolisuuden välttämättömyydestä. (Lindgren 1990, 65–67.) Toisin sanoen hän selvitti miten opettaja voi nopeuttaa matemaattisten rakenteiden oppimista (Malinen 1972, 25).

3.2.1 Dynaamisuuden periaate

Kaikki matematiikka on Dienesin mukaan lähtöisin kokemuksista. Käsitteiden muodostamiseksi on saatava aikaan tietty psykodynaaminen prosessi, joka rakentuu sarjasta peräkkäisiä kokemuksia ja jotka yhdessä muodostavat sopivan kokonaisuuden eli syklin. (Malinen 1972, 25–26.)

Dynaamisuuden periaatteen mukaan uuden käsitteen ymmärtäminen on syklinen prosessi. Ensimmäisessä vaiheessa lapsi leikkii ilman rajoittavia ohjeita ja sääntöjä. Toisessa vaiheessa lapselle annetaan kokemuksia, eli lapsi tutustuu siihen, miten materiaali havainnollistaa opittavaa käsitettä. Kolmannessa vaiheessa käsitteen käyttöä harjoitellaan leikin avulla. Tässä vaiheessa lapsi saa soveltaa oppimaansa erilaisiin elämän tilanteisiin. Dienesin mukaan "oppimisen syklin" täytyy toteutua kokonaan, ennen kuin lapsi osaa käyttää uutta käsitettä arkielämässään. (Lindgren 1990, 67.) (ks. kuvio 3)



Kuvio 3 Dienesin oppimisen sykli

Dienesin oppimisen sykliä voidaan soveltaa murtolukujen oppimiseen ja opettamiseen siten, että oppilaille annetaan esimerkiksi Montessori-leikkivälineistöä yms. johon he saavat vapaasti tutustua ilman opastusta. Pikkuhiljaa opettaja tulee mukaan keskustelemaan oppilaiden kanssa ja käyttää käsitettä murtoluku kuitenkaan sitä varsinaisesti opettamatta. Näin oppilaita orientoidaan murtolukuihin ja he saavat mielikuvan käsitteestä.

Myöhemmin Dienes on laajentanut dynaamisuuden periaatettaan. Tutkiessaan aihetta hän päätyi oletukseen tietyistä säännönmukaisuuksista, jotka näyttävät olevan voimassa, ja tietyistä edellytyksistä, joiden täytyy toteutua ennen kuin halutun tason oppiminen voi onnistuneesti toteutua. Hän jakoi matematiikan oppimisen kuuteen eri vaiheeseen: 1)vuorovaikutus ympäristön kanssa, 2) sääntöjen muodostaminen ja manipulaatio, 3) isomorfismi [(5] - identtisten rakenteiden omaavien pelien tai toimintojen vertailu, 4) isomorfisten rakenteiden esittäminen, 5) symbolisaatio ja 6) formalisaatio - yleisen teorian luominen. Dienes puhuu näistä vaiheista oppimissyklinä. Nämä kuusi vaihetta kuvaavat luonnollisten kokemusten järjestystä, joka johtaa tietyn matemaattisen käsitteen abstraktioon. (Lindgren 1990, 70–72.)

3.2.2 Konstruktiivisuuden periaate

Käsitteen rakentamisessa lapsi lähtee liikkeelle omista kokemuksista ja rakentaa käsitettä kokonaisvaltaisesti ja intuitiivisesti. Dienes määrittelee tämän matematiikan oppimisen kannalta kulmakiveksi. (Lindgren 1990, 68.) Lapset pystyvät ajattelemaan konstruktiivisesti paljon aikaisemmin kuin analyyttisesti. Tämän takia ensimmäiset oppimistilanteet olisi hyvä tehdä sellaisiksi, että ne johdattavat konstruktiiviseen ajatteluun. (Malinen 1972, 26.) Lapsen ajattelun tason opettaja voi saada selville esimerkiksi antamalla oppilaille paperin, joka heidän tulee jakaa kuuteen yhtä suureen osaan. Ratkaisuja on varmasti useita ja on hyvä keskustella, miten kukin tehtävän ratkaisi.

5) Isomorfinen = samanmuotoinen, samarakenteinen (Turtia 2001, 423)

3.2.3 Matemaattisen varioinnin periaate

Niitä käsitteitä, jotka ovat epäolennaisia peruskäsitteen oppimisen kannalta, on syytä varioida eli vaihdella (Lindgren 1990, 69). Tällöin pääsee esille se, mikä on todella invarianttia eli oleellista/pysyvää käsitteen oppimisen kannalta (Malinen 1972, 26). Murtolukukäsitteen opettamisessa matemaattisen varioinnin periaate tarkoittaa sitä, että oppilaille on opetettava monipuolisesti erisuuruisia murtolukuja. Opettajan on annettava esimerkeissä useita erisuuruisia ja kantaluvultaan erilaisia murtolukuja, esimerkiksi 7/8, 2/5, 8/6 jne. (Lindgren 1990, 69.)

3.2.4 Havainnon varioinnin periaate

Lapsen tulee saada käyttää eri aistejaan ja hänen tulee saada paljon erilaisia kokemuksia käsitteestä (Lindgren 1990, 69). Abstrahoinnin kannalta on olennaista, että havainnollistamiseen käytetään erilaisia tilanteita (Malinen 1972, 26). Olennaiset piirteet pysyvät samoina, mutta mallin ulkoinen muoto vaihtelee. Dienes kritisoi aikanaan sitä, että opettajat erilaisia havaintomateriaaleja käyttäessään eivät osanneet kytkeä opetustaan tarpeeksi hyvin matemaattisiin käsitteisiin. Tämä johti siihen, että kun lapsilta puuttui havaintomateriaali, he eivät osanneet toimia pelkän käsitteen avulla eivätkä hahmottaneet tehtävän olennaisia osatekijöitä. Dienes painottaakin sitä, että opetustilanteessa ei saisi syntyä vääriä assosiaatioita. (Lindgren 1990, 69–70.)

3.3 Vygotskyn yhteiskunnallis-historiallinen teoria kognitiivisesta oppimisesta

Vygotsky käsittelee teoriassaan muun muassa henkisiä työvälineitä sekä lähikehityksen vyöhykettä. Hän oli sitä mieltä, että vain ihmisellä on kehittynyt kyky hallita sekä käyttäytymistään että ympäristöään näillä henkisillä työvälineillä. Hän nimesi monia henkisiä välineitä, kuten kieli, puhe, kirjoittaminen, numerosysteemi jne. (Crain 1992, 193–221.) Henkiset työvälineet mahdollistavat korkeamman henkisen toiminnan, kuten esimerkiksi abstraktin ja loogisen ajattelun sekä vapaaehtoisen huomion kiinnittämisen asioihin. Eri kulttuurit painottavat eri työvälineitä. (Miller 1997, 387, 390.)

Oppimisprosessissa Vygotsky korostaa sosiaalisuuden, kulttuurisuuden ja historiallisuuden merkitystä. Esimerkiksi matematiikka on kulttuurisidonnaista. Lapset hallitsevat puhumisen taidon yleensä omaehtoisesti ja spontaanisti, ilman mitään suoraa ohjausta. Muiden merkkisysteemien hankkiminen, esimerkiksi matematiikka ja kirjoittamaan oppiminen, vaativat kuitenkin yleensä enemmän muodollista ohjaamista. Vygotsky kiinnitti huomiota koulun merkitykseen näiden merkkisysteemien ja henkisten työvälineiden oppimisessa. Hänen mielestään lapsi tarvitsee spontaanin kehityksen lisäksi koulun opetusta. Oppimateriaalin tulee mennä kehitystä edellä työntäen sitä eteenpäin, auttaen lasta hallitsemaan materiaalia, jota he eivät välittömästi voi itse käsittää. Heidän alku-ymmärryksensä voi olla pinnallista, jolloin ohjaus on arvokasta työntäen lasten ajattelua eteenpäin. Ei ole oleellista tietää, mitä lapsi osaa tehdä yksin, vaan mitä lapsi osaa tehdä aikuisen avustuksella. (Crain 1992, 193–221.)

Henkisten työkalujen avulla ihminen voi ohjata ja säädellä toimintojaan. Lapsi oppii henkiset työvälineet vuorovaikutuksessa muiden kanssa. Vygotsky painotti tärkeimpänä henkisenä työvälineenä puhetta ja sen merkitystä. Hän erotti puheen kehityksessä kolme eri vaihetta, jotka ovat ulkoinen puhe, egosentrinen puhe ja lopuksi sisäinen puhe. (Crain 1992, 197–209.)

Käsitteet voidaan erotella spontaaneihin ja tieteellisiin käsitteisiin Vygotskyn mukaan. Koska uusien käsitteiden oppiminen on usein vaikeaa, opettajan tulisi löytää linkki lapsilla jo oleviin spontaaniin kokemuksiin ja antaa sitä kautta lisää ohjausta, joka yllyttää lapsia ajattelemaan näkemyksiään eteenpäin. Vygotsky näki erityisen tärkeänä abstraktit käsitteet, joita koulussa opitaan. Hän kutsui niitä tieteellisiksi käsitteiksi ja ne sisälsivät matematiikan sekä luonnontieteen ja sosiaaliset tieteet. Hän asetti nämä käsitteet vastakkain spontaanien käsitteiden kanssa, joita lapset oppivat yleensä koulun ulkopuolella. Vygotskyn mukaan ohjaus tieteellisissä käsitteissä on todella hyödyllistä, sillä se tarjoaa lapselle laajemman näkökulman, jossa tarkastella spontaaneja käsitteitä. (Crain 1992, 211–213.)

Lähikehityksen vyöhyke tarkoittaa Vygotskyn mukaan sitä, että lapsi on juuri oppimaisillaan jonkin taidon. Opettajan tehtävä on liikuttaa lapsen ajattelua eteenpäin ja tehdäkseen tämän heidän täytyy suoranaisesti opettaa lapsille uusia käsitteitä, eikä vain odottaa, että lapset tekisivät itse omat löydöksensä. Opettajien tulee tietää, millaiseen opetukseen lapsi on kypsä. Toisin sanoen hänen olisi tunnistettava lapsen lähikehityksen vyöhyke. (Crain 1992, 214–215.) Opettaja voi käyttää oppilaan ajattelun kehittämisessä apuna eriyttämistä, koska lapset ovat kehityksessään ja oppimisessaan eri vaiheessa. Oppilaiden opetuksellisten erityistarpeiden huomioonottaminen johtaa opetuksen eriyttämiseen. Eriyttäminen voi tarkoittaa tavoitteiden, sisältöjen, kouluorganisaation, opetusmenetelmien ja oppilasarvioinnin eriyttämistä. (Peruskoulun erityisopetuksen opetussuunnitelmien perusteita EHA, EKU, EMU 1988, 13.) Opettajan lisäksi myös lasta kyvykkäämmät toverit voivat auttaa lasta siirtymään korkeammalle tasolle. Toisen avustaminen tarkoittaa sitä, että lapselta kysytään johdattelevia kysymyksiä, hänelle annetaan vihjeitä, selitetään, mallitetaan, rohkaistaan jne. (Miller 1997, 379.)

3.4 Galperinin teoria henkisten toimintojen kehittymisestä sekä materiaalin tarpeellisuudesta

Kognitiivisten käsitteiden muotoutuminen erilaisten toimintavaiheiden kautta on ollut Galperinin (ks. Koponen 1995, 179–181) tutkimuskohteena. Haapasalon (1994) mukaan ulkoiset toiminnot sisäistyvät pikkuhiljaa henkisiksi toiminnoiksi. Galperin korostaa ulkoisen toiminnan ja henkisten toimintojen yhteyttä. Kun ulkoista toimintaa käyttää paljon uuden asian oppimisessa, se siirtyy pikkuhiljaa henkiseksi toiminnoksi viisivaiheisen prosessin kautta. (Haapasalo 1994, 89.) Kun opetellaan uutta asiaa, on tärkeää, että toiminta alkaa konkreettisista lähtökohdista (Lindgren 1990, 54).

Toiminto voi vaihdella neljällä eri suunnalla, joita Galperin kutsuu parametreiksi. Ensimmäisenä on yleistämisen aste, jolloin toiminta joko on, tai ei ole yleistynyt. Esimerkiksi lapsi osaa laskea 2/5 + 1/5, mutta ei osaa yleistää laskutoimitustaan koskemaan myös laskua 1 2/5 + 1/5. Lyhentämisen asteella tarkoitetaan sitä, kuinka pitkästi tai lyhyesti lapsi suorittaa tehtävän. Hallinnan asteella tarkoitetaan sitä, kuinka hyvin asia on automatisoitunut, eikä lapsen tarvitse yksinkertaisia laskuja laskiessaan enää *laskea* niitä, vaan vastaus tulee automaattisesti. Viimeisessä, sisäistämisen asteessa, voidaan erottaa seuraavat viisi vaihetta. (Koponen 1995, 179–180.)

Teorian mukaan toiminnan tasot kuvaavat niitä olennaisia muunnoksia, joiden kautta ulkoinen toiminto muuntuu sisäiseksi tiedoksi tai ymmärtämiseksi. Ratkaisevan tärkeä merkitys uuden toiminnan omaksumisessa on orientoivalla vaiheella. (Lindgren 1990, 55.) Orientaatiovaiheessa mietitään toiminnan tarkoitusta, itse toimintaa sekä sen yleisimpiä solmukohtia ja ehtoja (Koponen 1995, 180). Materiaalistetussa vaiheessa tapahtuu itse toiminta, eli siinä oppilas käyttää toiminnan tekemiseen joko konkreettisia esineitä tai niiden kuvia. Hänellä on mahdollisuus muodostaa erilaisia ryhmiä ja luokitella näitä esineitä. (Koponen 1995, 180 & Haapasalo 1994, 89.) Puhutussa vaiheessa toimintaa kuvataan sanallisesti, joko puhuen tai kirjoittaen (Haapasalo 1994, 89). Tässä vaiheessa lapsi haluaa toimintoa suorittaessaan usein puhua ääneen. Kielellinen käsittely korvaa konkreetit objektit. Pääasia tässä vaiheessa on se, että lapsi alkaa käyttää esineiden sijasta niiden käsitteitä. (Koponen 1995, 180.) Puheen tärkeä merkitys on siinä, että se mahdollistaa abstraktion ja abstraktio taas mahdollistaa käsitteen muodostamisen. Toisaalta abstraktio myös mahdollistaa automatisaation ja sitä kautta toiminnon lyhentymisen. (Lindgren 1990, 56–57.)

Sisäisen puheen vaiheessa puhe hiljenee kuiskaukseksi ja omaksi sisäiseksi puheeksi. Tässä vaiheessa toiminta ei ole vielä täysin sisäistynyttä, koska lapsi käyttää edelleen puhetta käsitellessään asiaa. (Koponen 1995, 180.) Haapasalon (1994, 89) mukaan tässä vaiheessa toiminta irrottautuu konkreettisesta ja siirtyy korkeammalle henkiselle tasolle. Mitä enemmän opittavaa asiaa "pänttää" ilman konkreettisia esineitä, sitä varmemmaksi ja automaattisemmaksi laskutoimitus tulee. Viimeisessä, sisäistetyssä vaiheessa toiminto on jo täysin automatisoitunut, eikä kaipaa enää tuekseen konkreettia esinettä. (Haapasalo 1994, 89.) Toiminto lyhenee ja tiivistyy. Ajatus on puhetta nopeampi. (Koponen 1995, 180.)

Galperinin mukaan kaikki viisi vaihetta ovat tärkeitä uutta henkistä toimintoa opeteltaessa. Hänen tutkimuksiensa mukaan minkä tahansa vaiheen poisjättäminen viivästytti käsitteen sisäistämistä. Vaikeuksia ilmeni etenkin niillä oppilailla, joilta oli jätetty pois materiaalinen vaihe. Galperinin mukaan konkreettisella oppimismateriaalilla on tärkeä merkitys kaiken uuden oppimissa. (Lindgren 1990, 57.)

4 KONSTRUKTIVISMI MATEMATIIKAN OPPIMISESSA JA OPETTAMISESSA

4.1 Konstruktivismin pääperiaatteita

Konstruktivismi on Jarkko Leinon (1998) mukaan pitkään ollut opettajalla viitekehyksenä oppilaan oppimisen ymmärtämiseksi ja opetuksen ymmärrettäväksi tekemiseksi. Viime aikaisten tutkimustulosten perusteella Piaget´n teorian asema on korostunut, koska yhä enemmän kiinnitetään huomiota oppilaan aikaisempiin tietoihin ja ennakkokäsityksiin. Sosio-kulttuurisen ympäristön osuus oppimisessa on tullut yksilökeskeisen konstruktivismin ohelle. Tämä tarkoittaa sitä, että on kiinnitetty huomiota yksilön lisäksi myös yhteisen kielen ja kulttuurin merkitykseen. Nämä uudet konstruktivismin muodot, sosioperspektiiviset konstruktionismit, vaikuttavat osaltaan myös matematiikan oppimiseen ja opettamiseen. (Leino 1998, 39 & Leino 1990, 41–46.)

Konstruktivismin yhtenä yleispiirteenä voidaan sanoa, että konstruktivismi kiistää objektiivisen tiedon olemassaolon (Haapasalo 1994, 96). Se ei hyväksy sitä, että maailmasta saadaan objektiivista tietoa suoraan yksilön havaintojen ja kokemusten kautta. Uutta tietoa opitaan aina aikaisemman tiedon pohjalta. (Tynjälä 1999, 37, 72.) Konstruktivismi suhtautuu myös kielteisesti behaviorismin tapaan selittää tiedon siirtäminen. (Haapasalo 1994, 96.) Koponen (1995, 16) esittää teoksessaan modernin oppimisteorian, jonka mukaan tietoja ja ajattelutapoja ei voida suoraan siirtää esimerkiksi opettajalta oppilaalle, vaan oppilaan on itse oman henkisen toimintansa kautta konstruoitava ajatusrakenteensa. Opettaja ei voi oppia oppilaan puolesta, eikä voi siirtää tietoja oppilaalle (Leino 1998, 39).

Parin viimeisen vuosikymmenen aikaisissa tutkimustuloksissa on ilmennyt, että oppijan aikaisemmat tiedot ja opitut lähestymistavat vaikuttavat uuden tilanteen havaitsemiseen ja tiedon oppimiseen. Tulokset ovat antaneet konstruktivismille enemmän painoa ja johtaneet myös erilaisiin suuntauksiin konstruktivismin sisällä. (Leino 1998, 40.) Konstruktivistisen näkemyksen mukaan tiedon muodostumisessa on tärkeää oppilaan oma aktiivisuus ja aikaisemmat kokemukset (Leino 1994, 13). Konstruktivismissa on tärkeää kiinnittää huomiota oppilaan tietorakenteiden ja mentaalisten mallien muutokseen. Pedagogiikan tehtävänä on kehittää keinoja käsitteellisen muutoksen edistämiseksi. Tällaiset keinot ovat kohdistuneet muun muassa oppimateriaaleihin. (Tynjälä 1999, 60.)

Leslie Steffe (ks. Lindgren 1990, 45) kuvaa opettajalla olevan kolme erilaista roolia konstruktivistisessa matematiikan opettamisessa. Ensinnäkin opettajan tulee järjestää sellaisia opetustilanteita, jotka edistävät matemaattisten ideoiden rakentumista oppilaiden ajattelussa. Toiseksi opettajan tulisi kannustaa oppilaita reflektoivaan ajatteluun. Oppilaiden tulisi muokata omia skeemojaan yleisimmiksi ja tehokkaammiksi. (Lindgren 1990, 45.) Algoritminen(6 ja reflektoiva ajattelu yhdessä saavat aikaan laajoja ja syvällisiä tuloksia (Yrjönsuuri 2000, 275). Kolmanneksi opettajan tulisi painottaa oppilaiden omia matemaattisia kokemuksia. Matematiikan opetus pitäisi aina liittää lapsen arkielämään. (Lindgren 1990, 45.) Konstruktivistisessa opetuksessa hyvinä opetusmetodeina ovat muun muassa projektityöskentely ja ongelmanratkaisutehtävät, koska ne antavat opettajalle paremmat mahdollisuudet tarkkailla, miten hänen oppilaansa ajattelevat ja työskentelevät. Opettajan tehtävänä on luoda tietoa eikä siirtää sitä. (Leino 1994, 13.) Murtolukujen opettamisessa esimerkit tulisi ottaa lapselle tutuista ja lähellä olevista asioista, esimerkiksi luokan jakaminen eri kokoisiin osiin.

4.2 Spiraaliperiaate

Spiraaliperiaate tarkoittaa tietyn oppiaineksen käsittelemistä eri laajuudessa eri luokka-asteilla. Tietyn matemaattisen käsitteen oppimisessa, tässä tapauksessa murtoluku, prosessi voidaan jakaa useampaan eri jaksoon. Näitä jaksoja käsitellään eri ikäkausina niin, että asiat vaikeutuvat ja syventyvät mitä ylemmälle luokkatasolle mennään. Opetuksessa on tärkeä käyttää oikeita käsitteitä, niin että ne muodostavat järkevän kokonaisuuden (murtoluku, desimaaliluku ja prosentti) ja niiden pohjalta voidaan yleistää asioita. (Koponen 1995, 45.)

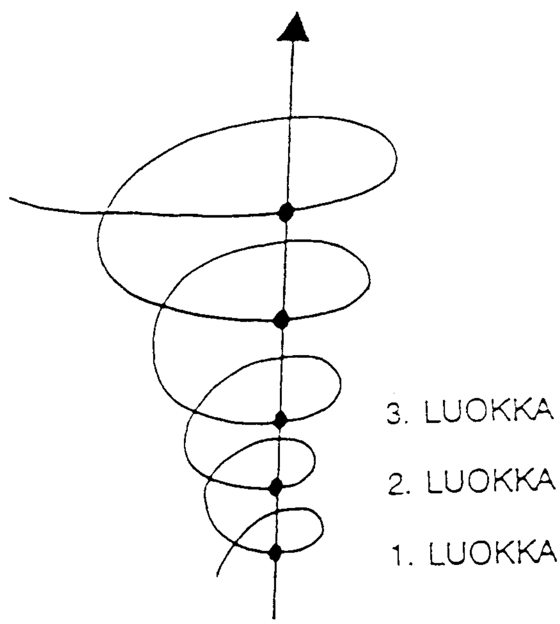
Haapasalon käsitteenmuodostusprosessin lujittamisvaiheessa (ks. 2.2.1) oppilaat kääntävät murtolukuja desimaaliluvuiksi ja päinvastoin. Oppilaat laskevat myös osuuksia (prosenttilaskut) murtolukujen ja desimaalilukujen avulla. (Haapasalo 1993, 19.)

6) Algoritmi = laskumenetelmä, joka perustuu tietyn laskutoimituksen peräkkäisiin toistoihin (Turtia 2001, 41) Esimerkiksi jakolasku jakokulmassa.

Murtoluvun ja desimaaliluvun yhteyttä on perinteisesti opetettu niin, että on kehotettu suorittamaan murtolukua vastaava jakolasku jakokulmassa. Tällöin monen oppilaan mieleen on jäänyt vain vaikeaksi koettu toimenpide, eivätkä he ole ymmärtäneet, miksi jakolasku pitää suorittaa. Murto- ja desimaalilukujen välinen yhteys tulee ymmärrettäväksi, jos lähdetään liikkeelle oppilaiden arkikokemuksista. (Ikäheimo 1995, 112.)

Näin murtoluvut linkittyvät myös desimaalilukuihin ja prosenttiin, joka on spiraaliperiaatteessa ja konstruktivismissa tärkeää. Murtoluku, desimaaliluku ja prosentti ovat periaatteessa saman asian eri esitysmuodot (Esimerkiksi 1/2, 0.5, 50 %). Laskimen ja tekstinkäsittelyohjelmien käytön myötä murtoluvun sijasta on usein siirrytty käyttämään desimaalilukua (Soinne 1993, 42). Näyttääkin siltä, että murtolukujen käyttö tulee häviämään tietokoneiden ja laskinten yhä yleistyessä (Dickson ym. 1984, 284). Kuitenkin murtoluku on joskus helpompi hahmottaa kuin desimaaliluku. On esimerkiksi helpompi käsittää mitä on "puolet" kuin 0,5. Joskus on myös kätevämpi käyttää murtolukua, esimerkiksi kun 1 jaetaan 3:lla, vastaus on murtolukuna 1/3 ja desimaalilukuna päättymätön 0,333.... Desimaaliluvuissa on ongelmana myös pyöristäminen, joka saattaa vääristää vastauksia laskuja pidemmälle jatkettaessa. (Vorderman 1997, 35.)

Oppilaan itsenäistymistä oppimisprosessin edetessä voidaan kuvata niin sanotun Lompscherin spiraalin avulla. (ks. kuvio 4)



KUVIO 4 Lompscherin spiraali (Koponen 1995, 46)

Alussa lapsi tarvitsee tarkkoja ohjeita ja ohjaamista, mutta vähitellen opettajan ohjausta vähennetään, kunnes oppilas hallitsee opeteltavan asian itsenäisesti. Kun jälleen siirrytään korkeammalle vaatimustasolle, opettajan täytyy antaa enemmän ohjausta ja taas pikkuhiljaa siirtyä taka-alalle oppilaan edistyessä. (Koponen 1995, 45.) Spiraaliperiaatteessa tarkoituksena on, että ensin uuden asian käsittely on konkreettista ja melko intuitiivista ja myöhemmin systemaattista, käsitteisiin tukeutuvaa ja abstrahointiin pyrkivää. Nämä vaiheet liittyvät matemaattisten rakenteiden oppimiseen ja ne rakentuvat toistensa perään, samoin kuin rakenteiden oppimisen vaiheet, tukien toisiaan. (ks. 3.2 Dienes) (Malinen 1972, 32.) Murtolukujen opettamisessa tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että oppilaat jakavat havaintomateriaalia yhtä suuriin osiin. Vasta myöhemmin opetellaan murtoluvun symbolinen merkitsemistapa sekä harjoitellaan laskemaan murtolukujen avulla. Spiraaliperiaate ei tarkoita sitä, että samaa opeteltavaa asiaa käsiteltäisiin joka vuosi samalla tavalla ja - tasolla, vaan asian tulee vaikeutua ja syventyä asteittain. (Koponen 1995, 45.) Jossakin kohdassa saattaa olla vaihe, jolloin ei mennä eteenpäin laskutoimituksissa. Silloin on tarkoituksena syventää opittavaa asiaa ja käsitteiden hallintaa. (Malinen 1972, 33.)

Malinen (1972) mainitsee kirjassaan, joka on ilmestynyt jo 1970-luvun alussa, että opetussuunnitelmassa toteutetaan spiraaliperiaatetta siten, että alimmilla luokilla opetus järjestetään leikkien, havaintojen ja konkreettisten prosessien avulla eteneväksi. Uusi opittava asia ja käsite esitetään ensin aina konkreettisissa yhteyksissä. Vasta ylemmille luokille siirryttäessä päästään abstraktimpaan opetukseen ja päästään vähitellen soveltamaan uutta käsitettä. (Malinen 1972, 32.) Kaikki matematiikan oppikirjat noudattavat jossakin määrin spiraaliperiaatetta, sillä samaa asiaa ei voida käsitellä alusta loppuun useinkaan ilman, että välillä joudutaan poikkeamaan aiheesta joidenkin aputulosten saamiseksi. Pyrkimyksenä olisi löytää opetuksen jatkuvuuden ja käsitteenmuodostuksen kannalta optimaalinen pituus spiraalijaksoille ja paras mahdollinen järjestys esitettäville käsitteille. (Koponen 1973, 36.)

Koponen (1973) esittää esimerkin miten opetussuunnitelma voidaan rakentaa spiraaliperiaatteen pohjalle. Kun ollaan päätetty, mitä matematiikan eri osa-alueista halutaan opettaa, voidaan opetussuunnitelma tehdä spiraaliperiaatetta noudattaen. (ks. liite 1) (Koponen 1973, 35–36.) Haapasalo (1993b) on tehnyt murtolukujen opettamisesta oman jaottelunsa, jossa hän käy vuosiluokittain läpi asiasisällöt, jotka tulisi kulloinkin opettaa. (ks. liite 2) Me kokosimme Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjan murtolukujaksot vuosiluokittain (ks. liite 3) ja kirjasarjan sisältöjä voi verrata Haapalukujaksot vuosiluokittain (ks. liite 3) ja kirjasarjan sisältöjä voi verrata Haapasalon esittämän jaotteluun.

Koulussa pyritään toteuttamaan integroimista sekä horisontaalisesti että vertikaalisesti. Horisontaalinen integrointi tarkoittaa matematiikan opiskelussa sitä, että matematiikan kokemukset liitetään muualla tapahtuvaan opiskeluun. (Malinen 1972, 7, 32.) Murtolukuja voidaan opiskella myös muilla kuin matematiikan tunneilla. Esimerkiksi liikuntatunnilla voidaan jakaa luokka neljään osaan tai kun tehdään erilaisia sekoituksia, esimerkiksi kuvaamataidossa tai leipomisessa. Malinen (1972) määrittelee vertikaalisen integroinnin niin, että uudet kokemukset pohjautuvat aina aikaisempiin kokemuksiin. Spiraaliperiaatteen käyttö antaa hyvän pohjan juuri vertikaaliselle integroinnille. Tällöin pyritään saamaan aikaan laajoja oppimiskokonaisuuksia, joihin on liittyneenä eri kouluvuosina opiskeltava oppiaines. Tämä auttaa myös niitä oppilaita, joiden hahmotuskyky on heikko, koska konkreettiset mallit auttavat kokonaisuuksien muodostamisessa. (Malinen 1972, 7, 33.)

5 MITÄ OPETUSSUUNNITELMA SANOO MURTOLUKUJEN OPETTAMISESTA?

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet vuodelta 1994 on väljä, eikä anna tarkkoja ohjeita eri sisältöjen opettamiseen. Opetussuunnitelma määrittelee murtolukujen oppimisen tavoitteet ala-asteella seuraavasti:

> "Oppilas ymmärtää luonnollisen luvun, sekä murto- ja desimaaliluvun **käsitteet** ja oppii **peruslaskutaidot** päässä, paperilla ja laskimilla ja näiden käyttämisen arkielämän ongelmien ratkaisemisessa sekä tottuu arvioimaan suuruusluokkia ja tulosten oikeellisuutta,"

Opetussuunnitelma mainitsi myös sen, että matematiikassa olisi hyvä saada aikaan laajempia opintokokonaisuuksia yksittäisistä sisällöistä ja keskeisistä käsitteistä. Tällöin vältytään asioiden uudelleen opetukselta ja opetuksen kiire vähenee. Opetussuunnitelma antaa tästä esimerkkinä murtolukukäsitteen, jonka yhteydessä on luontevaa opiskella myös prosenttikäsite. Desimaaliluku kytkettynä mittaamiseen, yksikönmuunnokset ja prosenttikäsitteen syventäminen muodostavat yhden keskeisen oppimiskokonaisuuden. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 75–77.) Vuoden 1994 opetussuunnitelmassa korostetaan ala-asteella murtolukukäsitteen ymmärtämistä. Siinä on tärkeämpää käsitteen ymmärtäminen ja sen soveltaminen arkielämän ongelmiin kuin mekaanisten tehtävien harjoitteleminen. (Ikäheimo 1995, 107.)

Halusimme ottaa myös vanhemman opetussuunnitelman (1985) tarkastelukohteeksi, koska siinä on määritelty oppiaines vuosiluokittain tarkasti. Vuoden 1985 opetussuunnitelman mukaan murtolukuja ei tulisi ottaa ollenkaan ensimmäisellä ja toisella vuosiluokalla, ainakaan siten, että käytetään käsitettä murtoluku. Murtolukuun voidaan kuitenkin orientoitua erilaisten soveltamis- ja ongelmanratkaisutehtävien avulla. Pops 1985 mukaan murtoluvun käsite tuli opettaa kolmannella vuosiluokalla, jolloin tuli myös kymmenesosien merkitseminen desimaalilukuna. Samalla tuli pohjustaa samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskuja ja opettaa yksidesimaalisten desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskua. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985, 152.)

Neljännellä vuosiluokalla oli tärkeää varmentaa murto- ja desimaaliluvun käsitteiden omaksuminen. Tällöin tuli myös opettaa murto- ja desimaalilukujen suuruusvertailua ja oppia kymmenes- ja sadasosien merkitseminen desimaalilukuna ja päinvastoin. Tällöin opeteltiin myös yhteen- ja vähennyslasku samannimisillä murto- ja desimaaliluvuilla. Viidennellä vuosiluokalla uutena asiana tuli kertominen luonnollisella luvulla ja pohjustaminen murtoluvun jakamiseen luonnollisella luvulla. Desimaaliluvuissa opittavana asiana oli katkaiseminen ja pyöristäminen sekä desimaaliluvun kertominen ja jakaminen luonnollisilla luvuilla (erityisesti luvuilla 10, 100, 1000). Kuudennella vuosiluokalla tuli varmentaa murtolukujen muunnosten suuruusvertailun yhteen- ja vähennyslaskun osaaminen ja desimaalilukujen pyöristäminen sekä yhteen- ja vähennyslasku. Opetettavana asiana oli sekä murto- että desimaalilukujen kerto- ja jakolasku. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985, 153–155.)

Tutustuimme myös vuoden 1970 opetussuunnitelmaan, koska vanhat opetussuunnitelmat ovat aina uusien pohjana. Tässä opetussuunnitelmassa käydään myös hyvin tarkasti jokaisen oppiaineen sisällöt vuosiluokittain läpi. Tässä opetussuunnitelmassa murtolukujen käsittely aloitetaan kolmannella luokalla rationaalilukujen murto- ja desimaalilukumerkinnöillä. Varsinaiset murtolukujen laskutoimitukset aloitetaan viidennellä luokalla. (Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö II 1970, 141.)

6 TUTKIMUKSEN TAUSTA JA TOTEUTTAMINEN

6.1 Tutkimuksen tausta

Tutkimuksen tarkoituksena oli tutkia ja analysoida Hei, nyt lasketaan! -matematiikan kirjasarja (1–6.-luokka) ja tutkia, opetetaanko murtoluku kirjoissa spiraaliperiaatteen mukaan. Spiraaliperiaate sopii hyvin opetuksen jäsentelyyn, koska siinä samaa asiaa laajennetaan siirryttäessä luokka-asteelta toiselle linkittäen se aina aikaisemmin opittuun. Alun perin tarkoituksenamme oli vertailla ja tutkia yhtä suomalaista ja yhtä unkarilaista matematiikan kirjasarjaa. Tämä tutkimushanke kaatui siihen, että unkarilaisia oppikirjoja ei ole saatavilla Suomessa, lukuun ottamatta alkuopetuksen kirjoja. Emme katsoneet tarpeellisena tutkia alkuopetuksen oppikirjoja, koska alkuopetuksessa ei vielä käsitellä murtolukua. Halusimme tutkia murtolukua, koska siihen liittyy niin paljon muitakin osa-alueita, kuin pelkkä murtoluku (desimaaliluku, prosentti, jakolasku). Emme käyttäneet kirjasarjan valinnassa muita kriteereitä, kuin että se olisi melko uusi ja näin ollen ajan tasalla. Päädyimme Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjaan, koska se on meille molemmille tuntematon.

Tutkimme oppikirjoja, koska ne ovat vieläkin niin keskeisellä sijalla kouluopetuksessa. Oppikirjat määräävät hyvin pitkälti sen, mitä asioita opitaan ja miten opettaja opettaa oppilaita. Atjosen (1993) tutkimuksessa saatiin tulokseksi, että oppikirjat ohjaavat opetusta ja sen sisältöjä opetussuunnitelmaa enemmän (Mikkilä-Erdman, Olkinuora & Mattila 1999, 437). Jager (1983) on tullut johtopäätökseen, että yli 90 % kaikista "science" opettajista käyttää tekstikirjaa 95 % ajasta. (ks. Selander 1991, 39) On huomattu, että teollistuneissa, rikkaissa, maissa oppikirjojen ja muun opetusmateriaalin liiallinen määrä voi johtaa opetuksen mekanisoitumiseen. Kehitysmaissa taas oppimateriaalin puute voi heikentää opetusta huomattavasti. (Mikkilä-Erdman ym.1999, 437.) Tästä voidaan päätellä, että oppikirjat ovat tärkeitä, mutta niiden rakenteeseen, laatuun ja sisältöihin tulisi mielestämme kiinnittää enemmän huomiota. Oppikirjoja on usein kritisoitu siitä, että ne sisältävät pirstaleista tietoa, asiat eivät linkity toisiinsa eivätkä muodosta kokonaisuutta.

6.1.1 Aikaisempia tutkimuksia

OECD-maissa on tehty PISA-tutkimus (Programme for International Student Assessement), koskien äidinkieltä, matematiikkaa sekä luonnontieteitä. PISA-tutkimus on OECD-maiden laajin ja monipuolisin koulutuksen vertailututkimus. Tutkimukseen osallistui 28 OECD-maata sekä neljä sen ulkopuolista maata. Suomessa otokseen valittiin 156 koulua ja yhteensä 5317 oppilasta. Kohderyhmänä oli 15-vuotiaat nuoret, jotka Suomessa olivat pääosin peruskoulun 9-luokkalaisia. Tutkimuksen pääalue oli lukutaito, joka suomalaisnuorilla olikin kirkkaasti OECD-maiden paras. Myös matematiikan sekä luonnontieteiden taidot ovat kansainvälistä huippua. Matematiikassa suomalaiset nuoret sijoittuivat neljännelle sijalle ja luonnontieteissä kolmannelle sijalle. Matematiikassa suomalaisnuorten osaaminen oli sisällöllisesti tasaista. Huolestuttavaa kuitenkin on, että yleistämistä ja perustelemista vaativissa tehtävissä vastaamatta jättäneiden osuudet olivat suuria (21–55 %). Matematiikassa ja luonnontieteissä tutkimus kohdistui vain valikoituun osaan näiden alueiden keskeisistä sisällöistä. Matematiikassa oppilaat vastasivat 31:een kysymykseen. Kysymykset olivat jaoteltu kolmeen eri osioon: matematiikan sisällöt, matematiikan prosessit ja tilanteet, joissa matematiikkaa käytetään. Matematiikan sisällöistä mitattiin pääasiassa algebran ja geometrian osaamista. Tehty tutkimus oli PISA-tutkimuksen ensimmäinen osa, jossa pääpaino oli äidinkielen taidoissa. (Välijärvi, Linnakylä, Kupari, Reinikainen, Malin & Puhakka 2001, 5–50.)

Vuonna 2003 toteutettavassa tutkimuksen toisessa osassa pääalueena on matematiikan osaaminen. PISA-tutkimuksessa matemaattinen osaaminen määritellään siten, että nuoret osaavat hyödyntää matemaattisia tietojaan ja taitojaan suhteessa tulevaisuuden haasteisiin. Matemaattiseen osaamiseen kuuluvat: ajatusten erittely, perustelu ja viestiminen sekä matemaattisten ongelmien asettaminen, muotoileminen ja ratkominen eri aihealueilla ja erilaisissa arkielämän tilanteissa. PISAssa halutaan korostaa asioiden ymmärtämistä, pohtimista ja perustelemista. Edellä mainittujen asioiden hallitseminen vaatii matematiikan perustietoja ja –taitoja eli käsitteiden sekä peruslaskutaitojen hallintaa. PISA määrittelee matemaattiseen osaamiseen kuuluvaksi myös matematiikkaan liittyvän viestinnän, asennoitumisen, merkityksellisyyden, arvioinnin ja matematiikan arvostuksen. (Välijärvi ym. 2001, 8.)

Perkkilä (1998) käsittelee Luokanopettaja-lehteen kirjoittamassaan artikkelissaan Matematiikan opetus – mihin suuntaan olet menossa? matematiikan opetuksen kehitysnäkymiä kansallisten arviointitutkimusten näkökulmasta. Artikkelissa tulee esille, että soveltamistaidoissa ja yksinkertaisissa ongelmanratkaisutaidoissa oppilaiden suoritukset ovat parantuneet jonkin verran. Tutkimukset ovat osoittaneet, että peruskoulun ala-asteen loppupuolella matematiikan mieluisuus vähenee oppilaiden mielestä. (Perkkilä 1998, 6.) Perkkilä (1998) on tutkinut kahden alkuopetuksen matematiikan oppikirjasarjan. Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, millainen tehtävärakenne tutkituissa alkuopetuksen matematiikan oppikirjoissa (Laskutaito & Mieti ja laske) oli ja noudattiko oppikirjojen esittämä käsitteiden rakentumistapa konstruktivistista oppimisnäkemystä. Perkkilä käytti tutkimuksessaan sisällön analyysia. Tuloksiksi hän sai, että suurin osa tutkittujen kirjasarjojen tehtävistä oli rutiinitehtäviä. Oppikirjojen tehtävärakenne näytti suosivan perinteistä matematiikan opetusta, jossa hiljaisen laskemisen osuus on suuri. Käsitteenmuodostusrakenteet olivat parhaimmillaan heikosti konstruktivistisia. (Perkkilä 1998, 2.)

Haapasalo on tehnyt laajan MODEM-tutkimusprojektin 1990-luvulla (Matematiikan Opetuksen Didaktis-Empiirisiä Malleja), jonka tavoitteena oli erilaisten didaktisten mallien toimivuuden tutkiminen matemaattisten käsitteiden oppimisprosesseissa. MODEM-projektin toinen vaihe käsitteli murtolukukäsitteen konstruktivistista oppimista. Haapasalo tutki, miten 4. -luokkalaiset oppivat murtolukukäsitteen niin sanotun "systemaattisen konstruktivismin" mukaisissa oppimisympäristöissä. Haapasalo käytti tutkimuksessaan koe- ja kontrolliryhmää. Koeryhmä hallitsi lopputestissä murtolukukäsitteen huomattavasti paremmin kuin tavanomaista opetusta saanut kontrolliryhmä. Oppikirjojen todettiin käsittelevän murtolukuja pinnallisesti, mekaanisesti ja yksipuolisesti. Koeryhmä, joka opiskeli ilman oppikirjoja, suoriutui käsitteenhallintaa mittaavissa tehtävissä jopa kuudesluokkalaisia paremmin. (Haapasalo 1992.) Tuloksista voidaan päätellä, että konstruktivismiin pohjautuva opetus auttaa saavuttamaan parempia oppimistuloksia.

Jyväskylän yliopistossa on tehty murtolukuihin liittyviä pro gradu -tutkimuksia hyvin vähän. Mursula & Rönnholm ovat tehneet vuonna 1991 pro gradu -tutkielman aiheenaan Murtolukukäsitteen muodostuminen ja hallitseminen sekä matemaattinen ongelmanratkaisu neljäsluokkalaisilla. Tämä tutkimus oli osa Haapasalon MODEM-projektia. Otoksena he käyttivät kolmea Jyväskylän kaupungin ala-astetta, joissa oli oppilaita yhteensä 149. Tutkimusmenetelminään he käyttivät observointia ja matematiikan koetta. Kokeen täysi pistemäärä oli 132 ja keskiarvo kokeessa oli 65,10. Haapasalon käsitteenmuodostusprosessin eri vaiheiden tehtävistä tunnistamistehtävät olivat helpoimpia ja soveltamistehtävät vaikeimpia oppilaille. (Mursula & Rönnholm 1991.)

Pajunen, Pussinen & Reunanen (1986) ovat tutkineet murtolukujen tukiopetusohjelmaa, joka oli tarkoitettu peruskoulun viidennelle luokalle. He halusivat selvittää tutkimuksellaan, kuinka paljon tukiopetuksella voidaan vaikuttaa oppimistuloksiin. Tätä tarkoitusta varten he laativat oman tukiopetusohjelman, joka sisälsi viisi tukiopetustuntia. Tutkimukseen osallistui 11 luokkaa Itä-, Länsi- ja Keski-Suomesta. Jokaiselta luokalta tukiopetusohjelmaan osallistui viisi oppilasta. Lisäksi opettaja valitsi jokaiselta luokalta viisi oppilasta kontrolliryhmään, jossa ei annettu tukiopetusta. Tutkimustuloksissaan he saivat selville, että tukiopetuksen avulla päästään parempiin oppimistuloksiin. (Pajunen, Pussinen & Reunanen 1986.)

Pakarinen ja Rinkinen tutkivat vuonna 1992 ongelmakeskeisyyttä murtolukujen oppimisessa. Tutkimuksen tarkoituksena oli kartoittaa peruskoulun ala-asteen päättävien oppilaiden kykyä hallita murtolukua ongelmakeskeisen oppimisen näkökulmasta. Myös tämä tutkimus oli osa MODEM-projektia. Otoksena he käyttivät 208 kuudesluokkalaista. Tulokseksi he saivat, että oppilaat hallitsivat mekaaniset laskutoimitukset parhaiten. Toiseksi parhaiten oppilaat hallitsivat tunnistamistason tehtävät ja kolmanneksi parhaiten tuottamistason tehtävät. Heikoimmat tuloksen oppilaat saivat soveltamistason tehtävistä. (Pakarinen & Rinkinen 1992.) Nämä tutkimustulokset herättivät mielenkiintomme tutkia, hallitsevatko mekaaniset tehtävät edelleen oppikirjoja.

Artikkelien runsaudesta päätellen lasten matemaattista osaamista on tutkittu paljon. Mielestämme ei ole tarpeellista selvittää tässä useampia tutkimuksia, vaan poimimme aiheemme kannalta muutaman olennaisen tutkimuksen.

6.2 Tutkimusongelmat

Lähtiessämme tekemään tutkimusta halusimme tutkia nimenomaan matematiikan oppimista ja opettamista, joten tutkimuksemme pääongelmaksi tuli, miten murtolukukäsitteen oppiminen ja opettaminen etenee Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjassa. Kirjallisuudesta nousi esiin muutama keskeinen asia, joista muodostui alaongelmamme. Tarkoituksenamme oli tutkia sekä oppilaiden että opettajien kirjat niiltä osin kuin ne liittyivät murtolukukäsitteen oppimiseen ja opettamiseen. Katsoimme jokaisesta kirjasta myös desimaali- ja prosenttijaksot, tutkimatta niitä tarkemmin kuin, että liittyvätkö ne murtolukukäsitteen opettamiseen.

Alaongelmana meillä oli, liitetäänkö murtolukukäsite Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjassa desimaalilukuun ja prosenttiin ja jos liitetään, niin miten. Toisena alaongelmana oli se, eteneekö murtolukukäsitteen opettaminen spiraaliperiaatteen mukaisesti. Spiraaliperiaatteessa pitäisi muistaa, että asiat vaikeutuvat siirryttäessä luokka-asteelta toiselle. Koska murtoluku, desimaaliluku ja prosentti ovat saman asian eri esitysmuotoja, ne tulisi opettaa samassa yhteydessä. Koulutuksen aikana ja sijaisina ollessamme olemme tutustuneet useisiin matematiikan kirjasarjoihin ja kokemuksemme ovat, ettei niitä liitetä toisiinsa juuri ollenkaan opetuksessa. Myös omat kouluaikaiset kokemuksemme matematiikan oppikirjoista tukevat väitettä.

Aloitimme tutkimuksen empiirisen osion luokitusrungon laatimisella. (ks. liite 4) Osan luokitusrungon asioista tutkimme määrällisesti ja osan laadullisesti kuvailevien kysymyksien avulla. Teimme luokitusrungon sekä opettajan että oppilaiden kirjoihin. Osa luokitusrungon tutkittavista asioista löytyy tutkimuksemme teoriataustasta ja osan olemme itse miettineet. Sanalliset ja mekaaniset tehtävät olemme määritelleet niin, että mekaanisissa laskuissa harjoitellaan vain peruslaskutoimituksia uutta asiaa opittaessa. Jos oppilas voi välittömästi tunnistaa tehtävän suorittamiseen tarvittavat ratkaisumenetelmät, niin tehtävä on hänelle mekaaninen tehtävä (Pehkonen, Pekama & Seppälä 1991, 11). Sanalliset laskut puolestaan ovat sellaisia, että ne ovat esitetty sanallisessa muodossa kuitenkin niin, että ne antavat laskuun tarvittavat tiedot melko suoraan. Sanalliset tehtävätkin harjoittavat hyvin pitkälle peruslaskutoimituksia. Sanalliset tehtävät ovat usein hyvinkin vaikeita, mutta vaikeus ei tee vielä tehtävästä ongelmanratkaisutehtävää. Koposen (1995) mukaan ongelma on sellainen tehtävätilanne, jossa yksilö joutuu yhdistelemään hänelle tuttuja tietoja ja taitoja uudella tavalla. Ei riitä, että oppilas suoriutuu ulkomuistia tai tiettyä ratkaisutekniikkaa vaativista tehtävistä, vaan hänen tulisi selvittää myös korkeampia henkisiä toimintoja vaativia tehtäviä. (Koponen 1995, 159.) On kuitenkin huomattava, että se mikä toiselle on ongelmanratkaisutehtävä, saattaa toiselle olla pelkkä rutiinitehtävä (Pehkonen ym. 1991, 11). Me erottelimme ongelmanratkaisutehtävän ja sanallisen tehtävän niin, että ongelmanratkaisussa on yksi tai useampi tuntematon tekijä.

6.3 Tutkimusmenetelmä

Käytimme tutkimusmenetelmänämme sisällön analyysia (content analysis, innehållsanalys).

6.3.1 Sisällön analyysi

Tutkimuksemme tarkoituksena oli tutkia Hei, nyt lasketaan! -matematiikan oppikirjojen sisältöä laadullisesti, mutta käytimme tutkimuksessamme myös määrällisiä tekniikoita. Laadulliset tutkimustulokset voidaan esittää joko yksin tai yhdistää ne määrällisin keinoin saatuihin tuloksiin (Patton 1990, 10).

Tässä tutkimuksessa aineisto kerättiin oppikirjoista ja otantamenetelmänä käytimme harkinnanvaraista otantaa. Kirjasarjan valinnassa kriteereinä olivat, että kirjasarja on melko uusi ja molemmille tuntematon. Valitsimme tutkimuskohteeksi Hei, nyt lasketaan! -matematiikan oppikirjasarjan, jota tutkimalla uskoimme saavan mielekkäästi ja syvällisesti tietoa murtolukukäsitteen opettamisesta ja oppimisesta. Laadulliseen tutkimukseen kuuluu prosessiorientoituneisuus, joka tarkoittaa meidän kohdallamme sitä, että aineistoon liittyvät näkökulmat ja tulkinnat kehittyivät vähitellen tutkimusprosessin edetessä. Meillä tutkimusongelma oli alusta asti tiedossa, mutta tämä ei ole välttämätöntä laadullisessa tutkimuksessa. Laadullisessa tutkimuksessa on myös tarkoituksenmukaista korostaa tutkimusta koskevan rajaamisen välttämättömyyttä. (Aaltola & Valli 2001, 68–71.) Edelliseen vedoten meidänkin oli pakko rajata aihettamme, vaikka siihen olisi liittynyt paljon muitakin näkökulmia, kuten eriyttäminen, oppimisvaikeudet jne.

Sisällön analyysissa kerätään tietoja tutkittavasta sisällöstä (Pietilä 1973, 51). Sisällön analyysi on prosessi, jossa tunnistetaan, koodataan ja luokitellaan aineiston päälinjauksia (Patton 1990, 381). Pietilä (1973) näkee sisällön analyysin joukkona menettelytapoja, joiden avulla dokumenttien sisällöstä tehdään havaintoja ja kerätään tietoja tieteellisiä sääntöjä noudattaen. Hän määrittelee sisällön analyysin kommunikaation ilmisisällön objektiiviseen, systemaattiseen ja määrälliseen kuvailuun soveltuvaksi tekniikaksi. Ilmisisällöllä tarkoitetaan dokumentin sisältöä sellaisenaan. (Pietilä 1973, 51–53.) Esimerkiksi tutkittaessa jonkun henkilön päiväkirjoja, tutkimatta henkilöä itseään, puhutaan ilmisisällön tutkimisesta. Ilmisisällön lisäksi kirjallisuudesta löytyy piilevän sisällön analysoinnin käsite. Kvalitatiivisessa tutkimuksessa analysoidaankin usein piilevää sisältöä. Esimerkiksi haastattelun lisäksi tarkkaillaan ja analysoidaan ihmisen käyttäytymistä. (Field & Morse 1985, 119.) Sisällön analyysia käytetäänkin usein haastattelun tai havainnoinnin lisänä (Bogdan & Biklen 1998, 133). Meidän tehtävänämme oli tutkia ilmisisältöä eli oppikirjojen sisältöä sellaisenaan.

Sisällön analyysissa sisältöä voidaan kuvailla joko määrällisin tai laadullisin keinoin. Keinoina voivat olla esimerkiksi tilastollinen tai sanallinen kuvailu. Pääasia on, että sisältö saadaan tiivistettyä, jotta sen voi kuvailla lyhyesti ja yleistettävästi niin, että tulokset saadaan selkeiksi. (Pietilä 1973, 52–53, 61.) Kuvailutapaa mietittäessä on ensin pohdittava, onko aineisto tilastoitavissa. Jos on mahdollista löytää jokin kriteeri, jonka mukaan jotkin sisällön osat voidaan katsoa samanlaisiksi, on sisältö periaatteessa luokiteltavissa ja siten tilastollisesti kuvailtavissa. (Pietilä 1973, 32–33.) Meidän tutkimusaineistomme oli melko helppo luokitella teorian pohjalta ja kuvailla tilastollisesti. Pitää myös pohtia tarkkaan, onko sisällön luokittelu tarpeen tutkittavan ongelman kannalta (Pietilä 1973, 265). Me emme halunneet tutkia aineistoa pelkästään luokitusrungon avulla, vaan halusimme tutkimukseen syvyyttä kuvailevien kysymysten avulla. Aineiston koodauksessa kannattaa käyttää jo valmiiksi keksittyä ja käytettyä koodausmenetelmää. Tämä säästää aikaa ja mahdollistaa vertailun muihin samalla systeemillä tehtyihin tutkimuksiin. Jos sopivaa koodausmenetelmää ei löydy, on tutkijan luotava se itse. (Borg & Gall 1989, 525–526.) Me laadimme tutkimukseen tarvittavan luokitusrungon itse, kuitenkin teoriaan pohjautuen. Kirjallisuudesta löytyi myös valmiita luokitusrunkoja, mutta emme käyttäneet niitä, koska ne oli pääasiassa tarkoitettu muiden, kuin matematiikan oppikirjojen tutkimiseen. Luokitusrunko kuului olennaisena osana aineistomme tutkimiseen sisällön analyysin avulla.

Melin ja Lange (2000) esittävät kirjassaan kaksi erilaista tapaa tehdä sisällön analyysia. Ensimmäisessä tavassa tekstistä etsitään pääteemoja sekä pienempiä alateemoja. Tutkija voi myös yrittää keksiä jokaiselle kappaleelle oman pienemmän teeman. Toinen tapa on tutkia tekstin sanastoa. Tutkija voi erotella tekstistä tavallisimpia sanoja sekä lajitella sanoja eri luokkiin. (Melin & Lange 2001, 58–62.) Me tutkimme kirjasarjasta sekä teemoja että kirjan kieltä eli yhdistimme tutkimuksessa nämä kaksi tapaa tehdä sisällön analyysia.

Sisällön analyysin aineistona voidaan käyttää joko aiempia tutkimuksia tai muita dokumentteja. Aineistoksi käyvät tilastot, henkilökohtaiset dokumentit (esimerkiksi kirjeet, elämäkerrat, päiväkirjat), erilaiset organisaatioiden asiakirjat sekä joukkotiedotuksen että kulttuurin tuotteet (esimerkiksi radio- ja tv-ohjelmat, elokuvat ja lehdet). (Uusitalo 1988, 94.) Esimerkiksi ihmisen puhetta ja eleitä voidaan analysoida varsinaisesti ihmistä tutkimatta (Field & Morse 1985, 119). Kun aikaisemmin tehdyn tutkimuksen aineisto otetaan uudelleen tutkimuksen kohteeksi, puhutaan sekundaarianalyysista. Jos tutkimuskohteena ei ole aikaisempi tutkimus, on kyseessä primaarianalyysi. (Uusitalo 1988, 94.) Tässä tutkimuksessa käytimme primaarianalyysia, koska tutkimuskohteena oli oppikirjat.

Sisällön analyysissa on yleensä tavoitteena joko tuottaa kuvailevaa tietoa, tehdä tutkimuksesta luotettavampi tutkimalla se vielä sisällön analyysin avulla tai testata hypoteeseja (Borg & Gall 1989, 522). Meidän tarkoituksenamme oli tuottaa aineistosta kuvailevaa tietoa sekä tilastollisia menetelmiä että kuvailevia kysymyksiä käyttäen. Sisällön analyysi antaa lähtökohdat teoreettiseen pohdintaan, mutta itse pohdinta tapahtuu tutkijan järjellisen ajattelun avulla (Grönförs 1985, 161).

6.3.2 Oppimateriaalitutkimuksen lähtökohtia

Ekola (1978) määrittelee *oppimateriaalin* siten, että sillä tarkoitetaan johonkin aineeseen tai materiaan kytkettyä oppiainesta. Sen tulee välittyä oppilaille ja saada heissä aikaan sellaisia elämyksiä ja oppimiskokemuksia, joiden seurauksena syntyy tavoitteiden mukaisia, pysyviä tietojen ja taitojen muutoksia sekä tunnepitoisia vaikutuksia. (Ekola 1978, 4.) Oppimateriaali sisältää tekstikirjojen lisäksi työkirjoja, opettajan oppaita, muita painotuotteita sekä visuaalisia, auditiivisia ja audiovisuaalisia materiaaleja (Kari 1987, 8). Näiden lisäksi opetuksessa käytetään nykyään paljon multimediaa. Nykyään oppimateriaalia tarkastellaan opetusprosessiin vaikuttavana tekijänä, kun sitä aikaisemmin tarkasteltiin pelkkänä tiedonsiirron välineenä (Kari 1987, 7). Perkkilän (1997) mukaan nykyajan oppimateriaalit ovat konstruktiivisia. Ne sisältävät muun muassa ymmärtävää oppimista, suullista ja kirjallista esittämistä, laadullista eriyttämistä, kommunikaatiota, selkeitä oppimiskokonaisuuksia, oppimisen eheyttämistä ja matemaattista ajattelua. (Perkkilä 1997, 10.)

Oppikirjan Ekola määrittelee kirjanmuotoiseksi materiaaliksi, joka sisältää kuvallisia ja symbolisia ärsykkeitä, joilla on oppimateriaalin ainekselle määritelty tehtävä (Ekola 1978, 4). Lappalaisen (1992) mukaan oppikirjalla tarkoitetaan nykykielessä teosta, joka on laadittu opetustarkoitukseen. Pelkästään opetuskäyttöön tehdyillä kirjoilla on melko lyhyt historia. (Lappalainen 1992, 11.) Oppimateriaalin tuottamisessa ja valitsemisessa suurimmat kriteerit tulisi olla oppimis- ja opetustapahtumat. Näin ollen juuri oppimisprosessit ja oppilaiden kehitystaso ovat oppimateriaalin olennaisia determinantteja, sillä oppikirja laaditaan oppilasta varten. (Kari 1987, 10.)

6.3.3 Oppikirja tutkimuskohteena

Selander (1991) esittää kuusi perustelua oppikirjatutkimukselle. Oppikirjatutkimus on tärkeää, koska 1) oppikirja on perusoppimateriaalia, jonka avulla toteutetaan opetussuunnitelmaa, 2) oppikirja on joukkoviestin, jolla on suuri vaikutus lukuisiin oppilaisiin, 3) oppikirja on vain yksi tiedonlähde sukupolvelle muokaten heidän maailmankuvaansa, 4) oppikirjan rooli on muuttuva, koska yhteiskunnalliset muutokset asettavat jatkuvia muutospaineita myös oppikirjoille, 5) tieto muuttuu jatkuvasti, jolloin kirjojen luotettavuus ja kiinnostavuus vähenee ja 6) kirja on oma luokkansa rajoituksineensa ja mahdollisuuksineensa. (Selander 1991, 35–39.)

Matematiikan oppikirjat eroavat paljon muista, varsinkin reaaliaineen, oppikirjoista. Matematiikan oppikirjojen arviointiin liittyviä kirjoja löytyi vähän. Useimmiten kirjat käsittelivät reaaliaineiden tekstikirjojen analysointia. Oppimateriaalille asetetaan usein kaksi funktiota. Niiden pitäisi välittää oppilaille tietoa sekä helpottaa oppilaiden oppimista. (Ekola 1978, 4.) Oppikirjojen tekstin tulisi lähteiden mukaan täyttää tietyt kriteerit, jotta se olisi pedagogisesti mahdollisimman hyvää ja ymmärrettävää. Armbruster ja Anderson (1988) ovat määritelleet neljä kriteeriä oppikirjojen hyvälle tekstille, jotka ovat:

1. Muoto: Tekstin päämäärät ovat selkeät
2. Koherenssi: Tekstin eri osien välisten yhteyksien tulisi olla loogisia ja selviä
3. Yhtenäisyys: Teksti osoittaa yhden tavoitteen kerrallaan
4. Sopivuus: Teksti on sopivan tasoista lukijalle (Armbruster & Anderson 1988, 47–52.)

Schnotz (1984) esittelee artikkelissaan Comparative Instructional Text Organization Grimesin (1975, 78) kolme ulottuvuutta, jotka voidaan määritellä tekstiä analysoitaessa: sisältö, koheesio ja esillepano (staging). Sisältö vastaa kysymykseen: "Mitä teksti sanoo?". Sisältöä analysoitaessa kiinnitetään huomiota väittämiin ja niiden semanttisiin suhteisiin välittämättä väittämien järjestyksestä tekstissä. Koheesio viittaa siihen tapaan, jolla jokainen väite tekstissä on suhteessa aikaisempiin väitteisiin.

Tämä ulottuvuus vastaa kysymykseen: "Miten se, mitä nyt luen, liittyy siihen mitä olen lukenut aikaisemmin tekstistä?". Esillepano (staging) vastaa kysymykseen: "Mikä on tärkeintä tekstissä ja mikä vähemmän tärkeää?". (Schnotz 1984, 56–57.)

Myös Julkunen (1991) esittää artikkelissaan määritelmiä sille, mitä vaaditaan hyvältä oppikirjalta. Pääasia on, että oppikirjat koostuvat tekstistä. Oppikirjan materiaalin tulisi olla esitetty sillä tavalla, että se muodostaa sekä kielellisen että sisällöllisen kokonaisuuden. Hyvä teksti auttaa lukijaa ymmärtämään lukemaansa. (Julkunen1991, 30.)

Oppikirjojen heikkoutena voidaan pitää sitä, että ne on usein rakennettu määrämittaisia opetustuokioita varten, toisin sanoen opettaja käy yhden aukeaman/kappaleen yhdellä oppitunnilla (Virkkunen 1989, 129). Tästä huolimatta Perkkilä (1998) sanoo oppimateriaalien muodostavan täydellisen paketin, sisältäen esimerkiksi tehtävät, kokeet, äänitteet jne (Perkkilä 1998, 7). Tämän ei kuitenkaan tarvitsisi merkitä sitä, että opettajat tukeutuvat opetuksessaan pelkästään näihin opetuspaketteihin. Oppikirjakomitea piti jo vuonna 1945 oppikirjojen suurimpana heikkoutena niiden laajuutta sekä sitä, etteivät ne edistäneet oppilaiden omatoimisuutta (Kari 1987, 8). Matematiikan oppikirjojen heikkoutena voidaan pitää sitä, että niissä on paljon mekaanisia laskutehtäviä, joissa harjoitetaan annetun mallin mukaista rutiinia. Ongelmanratkaisu- ja soveltamistaidon kehittämistä ei tueta eikä anneta riittävästi mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittymiseen. Haapasalo luonnehtii matematiikan kirjoja kaupallisiksi, värikkäiksi, vähätekstisiksi ja helppolukuisiksi ja näiden ominaisuuksien avulla opettaja houkutellaan työllistämään oppilaat helposti. (Haapasalo 1994, 215–216.)

Oppikirjat tulevat tulevaisuudessakin olemaan tärkeitä peruslähteitä oppilaille ja opiskelijoille. Tämän vuoksi myös opettajat tarvitsevat ammatillista näkemystä kuinka arvioida koulun toiminnan lisäksi myös oppikirjoja. Näin he pystyvät valitsemaan paremmin sellaista materiaalia, joka sopii parhaiten omaan opetukseen. (Selander 1991, 40–41.) Opettajan omat arvostukset, opetusasenteet ja -tottumukset vaikuttavat siihen, mitä ominaisuuksia hän pitää tärkeinä hyvälle oppikirjalle. Opettajan oppimateriaalin käyttöön vaikuttaa se, onko hän oppilas- vai opettajakeskeinen tai mitä työtapoja hän suosii (esimerkiksi pari- tai ryhmätyöt). (Ekola 1978, 46.) Pehkonen (1990) sanoo, että opettajat tukeutuvat opetuksessaan liikaa oppikirjaan ja sen ratkaisuihin. He ajattelevat, että kirjan läpikäyminen juuri sen esittämällä tavalla on ainoa mahdollisuus edetä. Opettajat eivät enää näe omia mahdollisuuksiaan opetuksen suunnittelijoina ja oppimisen ohjaajina. (Pehkonen 1990, 16.)

Pedagoginen teksti (sisältäen sekä tekstin että kuvituksen), joka on tuotettu kasvatukselliseen, institutionaaliseen käyttöön, on laji sinällään isomman tietokirjallisuus- lajin sisällä. Pedagogisen tekstin arvioinnissa voidaan keskittyä ainakin neljään eri näkökulmaan:

1. Oppikirjan tuottamisen aikana vallitsevat olosuhteet
2. Miten tietoja ja arvoja välitetään pedagogiseen tekstiin?
3. Pedagogisen tekstin tekstuaaliset erityispiirteet
4. Opettajien ja oppilaiden tulkinnat oppikirjasta (Selander 1991, 41.)

Selander (1988) jakaa oppikirja-analyysin tärkeimmät vaiheet valinnan tarkennukseen, tyyliin sekä ilmiöiden selityksiin. Tarkennus tarkoittaa sitä, *mitä* tutkitaan. Tyyli, sitä *miten* tutkitaan ja selitykset sitä, *millaisia selityksiä* annetaan eri tapahtumille ja ilmiöille. Selanderin mielestä on hyödyllisempää analysoida tekstiä muutamien keskeisten teemojen kautta, kuin analysoida koko teksti. (Selander 1988, 101.) Tutkimuksemme tarkoituksena oli tutkia ainoastaan murtolukukäsitettä, ei kaikkia oppikirjan sisältöjä.

Tekstin lisäksi on oppikirjoista hyvä tutkia kuvitusta. Selander (1988) esittää kirjojen kuvituksen jakamista kolmeen eri luokkaan. Kirjassa voi olla tietoa antavia kuvia (valokuvat, piirrokset, diagrammit jne.), tekstiä kuvittavia kuvia, joissa konkretisoidaan tekstissä esiintyvää asiaa sekä viihdyttäviä kuvia, jotka eivät liity mitenkään opiskeltavaan asiaan/kirjan sisältöön. (Selander 1988, 102–119.)

6.4 Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimuksen luotettavuuden kannalta on tärkeää, että se on tehty siten, että se täyttää tieteellisen tutkimuksen kriteerit. Tutkimuksen luotettavuudessa kaksi keskeisintä käsitettä ovat pysyvyys (reliaabelius) ja pätevyys (validius). (Heikkilä 1999, 177.)

Oman tutkimuksemme luotettavuutta pyrimme lisäämään luokitusrungon esitestauksella, jonka teimme toisen oppikirjasarjan yhteen oppikirjaan. (ks. liite 5) Esitestauksessa huomasimme puutteita luokitusrungossa, joten esitestin jälkeen muotoilimme sen vielä kertaalleen. Tutkimuksen edetessä kuitenkin jouduimme vielä hieman korjaamaan luokitusrunkoa. Tutkimuksen luotettavuutta lisää myös se, että meitä on kaksi tutkijaa ja saimme vaihdettua mielipiteitä ja näkökulmia tutkimuksen edetessä. Tästä voidaan käyttää nimeä tutkijatriangulaatio, joka lisää tutkimuksen luotettavuutta. Tämän lisäksi käytimme tutkimusmenetelmätriangulaatiota, eli käytimme sekä määrällisiä että laadullisia tekniikoita tutkimuksen teossa. (Bogdan & Biklen 1998, 104.) Tutkimusprosessin aikana pidimme molemmat omaa tutkimuspäiväkirjaa, johon kirjasimme ylös tutkimuksen etenemistä, mielipiteitä, ideoita jne. Jaoimme tutkittavat oppikirjat molemmille tasan ja tutkimuksen jälkeen valitsimme toisen tutkimista kirjoista kaksi, joihin teimme pistokokeet. Tällä tarkoitamme sitä, että tarkistimme kaksi toisen tutkimaa kirjaa luokitusrungon avulla. Halusimme varmistua siitä, että olimme laatineet luokitusrungon siten, että tutkimustulokset olisivat samansuuntaisia tutkijasta riippumatta. Pistokokeiden jälkeen huomasimme, että olimme suunnitelleet luokitusrungon niin toimivaksi, että löysimme samat keskeiset asiat. Koska tutkimme useita eri asioita kirjoista, kävimme aineiston läpi kuusi kertaa. Näiden lisäksi palasimme aineistoon useaan otteeseen tutkimusraporttia kirjoittaessamme. Olemme tehneet tutkimuksen riippumattomina kustantajasta eli emme ole missään tutkimuksen vaiheessa ottaneet yhteyttä kirjasarjan kustantajaan. Teimme sisällön analyysin täysin ulkopuolisina tutkijoina, oman ammattikuntamme (luokanopettaja) edustajina. Jos joku muu kuin opettaja, olisi tehnyt tämän tutkimuksen, tulokset saattaisivat olla erilaisia. Tämä johtuu siitä, että meillä on jo hieman kokemusta opettamisesta ja tiedämme kuinka heterogeenisia ja vaativia luokat ovat. Meillä oli jo jonkunlainen kuva, minkälaista oppimateriaalia oppiminen vaatii tuekseen.

6.4.1 Pysyvyys

Tutkimuksen pysyvyys tarkoittaa sitä, että tutkimuksessa ei käsitellä satunnaisia ja epäolennaisia tekijöitä/asioita. Koska laadullisessa tutkimuksessa itse tutkimus on koko ajan arvioinnin alla, satunnaisuudet yleensä karsiutuvat pois omalla ajallaan tutkimusaineistosta. (Varto 1992, 103.) Meidänkin tutkimuksessa tämä ilmeni siten, että teoriaosuus on elänyt koko ajan, sitä on täydennetty ja karsittu ja näin ollen olemme yrittäneet jättää kaiken epäoleellisen pois. Vaikka aineistonhankinnassa sattuisikin tutkimuksen pysyvyyden kannalta tutkimusta heikentäviä virheitä, nämä yleensä paljastuessaan pakottavat tutkijan korjaamaan aineistonsa luotettavaksi uudella aineistonhankinnalla. (Varto 1992, 104.)

Pysyvyys tarkoittaa myös sitä, että tutkimus voidaan toistaa samanlaisin tuloksin (Heikkilä 1999, 29). Tämä voi olla tutkimuksemme yksi heikkous, koska kirjoissa esiintyi niin paljon erilaisia tehtäviä, jolloin meillä oli joskus hieman vaikeuksia erotella esimerkiksi sanallisia ja ongelmanratkaisutehtäviä. Pysyvyyttä saattaa heikentää se, että tutkimuksen tekeminen on melko subjektiivista ja näin ollen oppikirjoista ei voida saada ainoaa, oikeaa vastausta.

6.4.2 Pätevyys

Tutkimuksen pätevyydellä tarkoitetaan sitä kokonaisuutta, jossa tutkimuksen tulos vastaa hyvin tutkimukselle asetettuja päämääriä ja tutkimuskohdetta (Varto 1992, 103). Toisin sanoen pätevyys kertoo, missä määrin on onnistuttu mittaamaan sitä, mitä pitikin mitata (Heikkilä 1999, 28). Tutkimus ei ole pätevä, jos se vastaa kokonaan eri kysymykseen kuin mihin tutkimusongelmilla haetaan vastausta, ja jos se tämän lisäksi vastaa huonosti tutkimuskohdetta. Laadullisessa tutkimuksessa pätevyys on keskeinen piirre: yleistykset on tehtävä tutkimuksen rajatusta aihekokonaisuudesta, joihin ei saa vaikuttaa mitkään muut seikat aiheen ulkopuolelta. (Varto 1992, 103.) Pätevyydessä voidaan erottaa sekä sisäinen että ulkoinen pätevyys. Sisäinen pätevyys tarkoittaa sitä, että vastaavatko mittaukset tutkimuksen teoriaosassa esitettyjä käsitteitä. Ulkoisella pätevyydellä tarkoitetaan puolestaan sitä, että tulkitsevatko muut tutkijat tutkimustuloksia samalla tavalla. (Heikkilä 1999, 28.)

Mielestämme sisällön analyysi toimi hyvin tässä tutkimuksessa, koska sen avulla saimme vastaukset kaikkiin tutkimusongelmiin. Vahvuutena voidaan pitää sitä, että kaikki tutkittavat asiat löytyvät teoriaosuudesta, jolloin sisäinen pätevyys tutkimuksessamme on hyvä.

7 TUTKIMUSTULOKSET

7.1 Oppilaan kirja

Tutkimme Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjan oppilaan kirjat luokilta 1–6. Ensimmäisen ja toisen luokan kirjat eivät käsitelleet murtolukuja ollenkaan.

Oppilaan kirjoista 3B, 4B, 5 ja 6 käsittelivät murtolukuja. (ks. liite 6) 4B -kirjassa murtoluvut käsiteltiin yhdessä desimaalilukujen kanssa ja muissa kirjoissa murtoluvut muodostivat oman jaksonsa ja desimaaliluvut ja prosentti omansa. Hei, nyt lasketaan!
-kirjasarjaan kuuluu oppilaan ja opettajan kirjojen lisäksi lisätehtävävihko jokaiselle vuosiluokalle, laulukasetti sekä –cd ja tietokonelevyke. Emme tutkineet näitä oppimateriaaleja, koska kyseessä on pro gradu- tutkielma ja tutkimus olisi paisunut liikaa, jos olisimme tutkineet kaiken kirjasarjaan liittyvän oppimateriaalin.

7.1.1 Murtolukukäsitteen oppimisen ja opettamisen eteneminen Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjassa

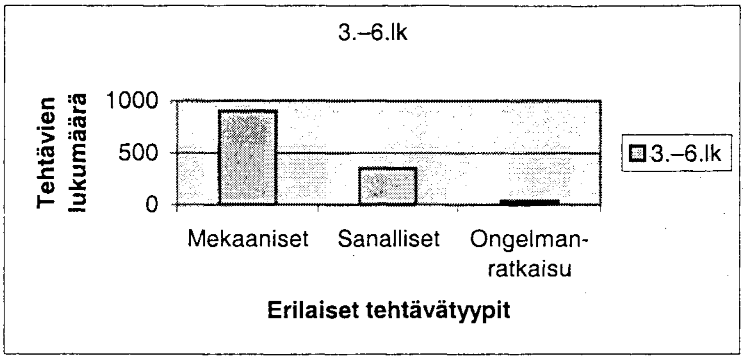
Murtoluvun opettaminen lähti liikkeelle kolmannella luokalla siitä, että oppilaat tutustuivat kuvaan, josta opettaja voi tehdä heille erilaisia tehtäviä ja kysymyksiä. Seuraavaksi oppilaat jakoivat erilaisia kuvia/kuvioita (lippuja, köysiä, ympyröitä, suorakulmioita jne.) yhtä suuriin osiin tietämättä kuitenkaan, että kyseessä oli murtolukujen oppiminen. Seuraava vaihe oppimisessa on se, että opeteltiin kolmas-, neljäs- ja viidesosat värittämällä ja jakamalla kuvioita. Vasta tämän jälkeen opittiin käsite murtoluku ja sen merkitseminen symbolisesti ja ilmaiseminen sanallisesti. Kolmannella luokalla opeteltiin näiden lisäksi ilmaisemaan yksi kokonainen eri murtolukuina, suuruusvertailu sekä opittiin laskemaan osa lukumäärästä. Edellä mainitut asiat kerrattiin neljännellä luokalla, kuitenkin hieman eri tavalla ja vähän vaikeammin kuin edellisenä vuonna. Näiden lisäksi opeteltiin myös paljon uusia sisältöjä, kuten käsitteet osoittaja ja nimittäjä, murtoluvun sekamerkintä, samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku. Koska neljännellä luokalla murtoluvut käsiteltiin yhdessä desimaalilukujen yhteydessä, siitä johtuen tässä jaksossa oppisisältöinä olivat myös murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys, sadasosat (paikkajärjestelmässä, pituusmitoissa ja rahoissa) sekä desimaaliluvun yhteen - ja vähennyslaskua päässä ja allekkain.

Viidennellä luokalla uusina asioina olivat laventaminen, supistaminen, erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku sekä murtolukujen kertominen luonnollisella luvulla. Kuudennella luokalla kerrattiin ja syvennettiin aikaisemmin opittua ja kuudennen luokan jälkeen oppilaat olivat oppineet myös murtomerkinnän muuntamisen, sekamerkintöjen yhteen- ja vähennyslaskun, murtoluvun jakamisen luonnollisella luvulla, murtolausekkeen supistamisen, murto-osan laskemisen luvusta (myös kertomalla), moninkertaisen sekä suhteen.

Kuten edellä voidaan todeta, murtoluvun oppiminen ja opettaminen eteni spiraaliperiaatteen mukaan niin, että murtolukua käsiteltiin eri laajuudessa eri luokka-asteilla. Jokainen murtolukujakso alkoi siitä, mihin oli edellisenä vuonna päästy, kuitenkin kertaamalla lyhyesti edellisen vuoden asiat. Spiraaliperiaatteen mukaan opittavan asian pitäisi vaikeutua ja syventyä ylemmille luokka-asteille mentäessä. Mielestämme kirjasarja oli ottanut tämän hyvin huomioon. Esimerkkinä tästä voisimme ottaa murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun, joka alkoi neljännellä luokalla samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskulla, vaikeutuen viidennellä luokalla koskemaan myös erinimisiä murtolukuja. Kuudennen luokan tavoitteena oli oppia sekamerkintöjen yhteen- ja vähennyslasku.

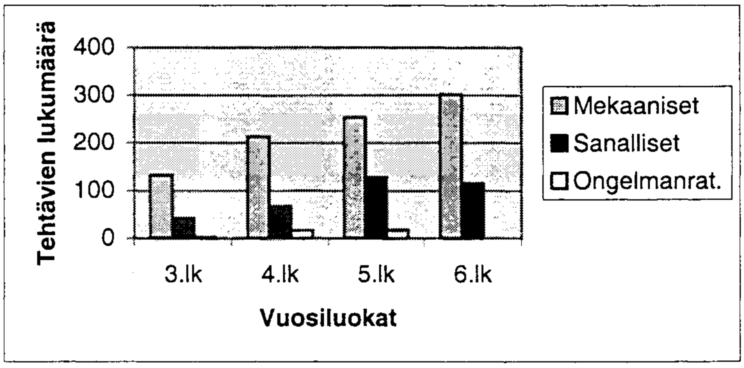
7.1.2 Tehtävät ja niiden soveltuvuus ikäryhmälle

Tutkimme oppikirjoista vain murtolukuja käsittelevät perussivut ja jätimme tutkimatta esimerkiksi valinnaisuussivut, lisätehtäväsivut ja muut ylimääräiset tehtävät. Tuloksiksi saimme ennakko-oletuksia vastaavia tuloksia, eli mekaaniset tehtävät hallitsevat vieläkin matematiikan oppikirjoja suuresti. Oppikirjoissa oli huomattavasti eniten mekaanisia tehtäviä (900), toiseksi eniten oli sanallisia tehtäviä (351) ja vähiten ongelmanratkaisutehtäviä (37). (ks. kuvio 5)



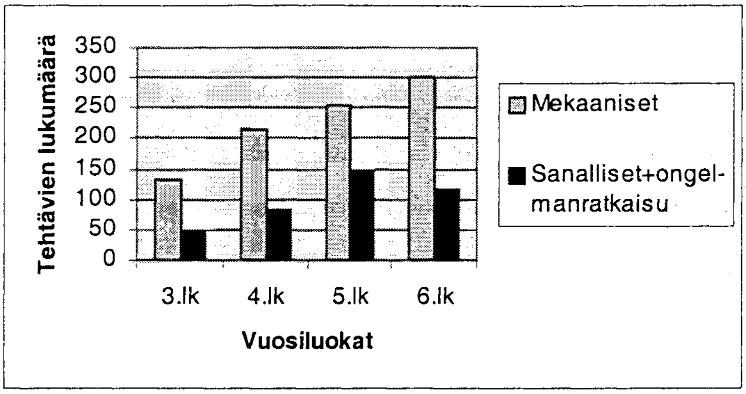
KUVIO 5 Erilaisten tehtävien suhde lukumääränä ala-asteen murtolukujaksoissa

Tehtävien määrä lisääntyi kolmannelta luokalta kuudenteen luokkaan joka vuosi. (ks. kuvio 6) Kolmannella luokalla tehtäviä oli yhteensä 177 (mekaaniset 132, sanalliset 42, ongelmanratkaisu 3), neljännellä luokalla tehtäviä oli yhteensä 297 (mekaaniset 213, sanalliset 67, ongelmanratkaisu 17) Viidennen luokan kirjassa tehtävien määrä oli lisääntynyt 397:een (mekaaniset 253, sanalliset 127, ongelmanratkaisu 17) ja kuudennella luokalla tehtäviä oli jo 417 (mekaaniset 302, sanalliset 115, ongelmanratkaisu 0).



KUVIO 6 Erilaisten tehtävien suhde lukumääränä vuosiluokittain

Yhdistimme seuraavassa diagrammissa (ks. kuvio 7) sanalliset- ja ongelmanratkaisutehtävät samaan pylvääseen. Näin tuloksia on helpompi vertailla niihin tutkimuksiin, joissa sanallisia- ja ongelmanratkaisutehtäviä ei ole eroteltu toisistaan.



KUVIO 7 Mekaanisten tehtävien suhde muihin tehtäviin (sanalliset ja ongelmanratkaisutehtävät) lukumääränä vuosiluokittain

Laskimme mekaanisten tehtävien suhteen muihin tehtäviin. Kolmannella luokalla mekaanisia tehtäviä oli 75 % kaikista tehtävistä, neljännellä luokalla 72 %, viidennellä luokalla 64 % ja kuudennella 72 %. Kaikilla luokilla mekaanisten tehtävien suhde oli huomattavan suuri ollen yli puolet kaikista tehtävistä, minkä voi havaita selvästi kuviosta 3, jossa korkeimmat pylväät havainnollistavat mekaanisten tehtävien lukumäärää. Huomattavaa on kuitenkin se, että viidennellä luokalla mekaanisten tehtävien suhde oli noin 10 % pienempi kuin muilla luokilla. Tämä ero johtuu sanallisten tehtävien lisääntymisestä. Ongelmanratkaisutehtäviäkin oli suhteellisen paljon (17), jos vaikka vertaa kuudennen luokan vastaavaan lukuun (0).

Tutkimme, miten tämä kirjasarja vastaa nykyistä valtakunnan opetussuunnitelmaa 1994. Mielestämme oppilaat oppivat murtoluvun käsitteen ja peruslaskutaidot päässä, paperilla ja laskimilla tämän kirjasarjan avulla. Joskin laskimen käyttöön ohjattiin vain muutamissa tehtävissä. Koska mekaanisia tehtäviä oli runsaasti, oppilaat saavat pajon harjoitusta peruslaskutaitojen oppimiseen. Opetussuunnitelma sanoo, että oppilaan tulisi osata käyttää uusia taitoja arkielämän ongelmien ratkaisemisessa. Mielestämme tämä tavoite ei toteudu kirjan tehtävien välityksellä, koska tehtävät eivät olleet tarpeeksi konkreettisia ollakseen hyödyksi arkielämän ongelmien ratkaisemisessa.

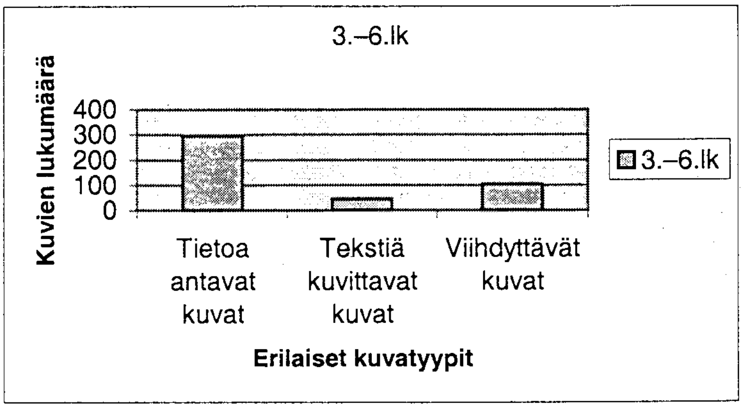
Opetussuunnitelmassa sanotaan myös, että murtolukukäsitteen yhteydessä olisi hyvä käsitellä myös prosentti. Tämä kirjasarja ei ottanut tätä asiaa huomioon muutamaa tehtävää lukuun ottamatta. Kirjasarjan neljännen luokan kirjassa käsiteltiin murtoluku ja desimaaliluku yhteisessä jaksossa, mutta prosentti oli jokaisessa kirjassa omana jaksonaan. Jokaisessa prosenttijaksossa tosin oli yksi aukeama, joka linkitti murtoluvun prosenttiin, mutta tämä ei mielestämme riitä. Poikkeuksena tästä oli neljännen luokan kirja, jossa murtoluvut yhdistettiin paremmin prosenttiin. Kuitenkin tässäkin kirjassa nämä jaksot olivat erillisiä ja niiden välissä oli geometriajakso. Murtolukulaskuja ei muissa kirjojen jaksoissa ollut, paitsi jakolaskun yhteydessä käytettiin murtomerkintää.

Tutkimme kirjojen kieltä, koska kirjojen tekstin on usein sanottu olevan joko liian helppoa tai vaikeaa kirjan kohderyhmälle. Yleisesti ottaen kirjan kieli oli ymmärrettävää ja sopivaa kyseiselle luokka-asteelle. Mielestämme kieli oli kaikilla luokka-asteilla melko samanlaista, eikä näyttänyt vaikeutuvan ylemmille luokka-asteille mentäessä. Kirjoissa ei esiintynyt vaikeita käsitteitä lukuun ottamatta uusia, opetettavia käsitteitä (esimerkiksi supistaminen ja laventaminen). Nämä käsitteet kuitenkin opetettiin hyvin sekä sanallisesti, kuvallisesti että symbolisesti, joiden tasapainoon pitäisikin Haapasalon (1994) mukaan kiinnittää huomiota. Ainoana poikkeuksena löysimme 4B- kirjan, jossa esiintyi muuallakin, kuin uusia käsitteitä oppiessa, vaikeita käsitteitä. Kirjassa käytettiin muun muassa käsitteitä kitka, kimmoisuus ja veden tiheys. Käsitteet kyllä määriteltiin kirjassa, mutta määritelmätkin olivat liian vaikeita neljäsluokkalaisen ymmärrettäviksi. Tietenkin uusia käsitteitä tulee opettaa lapsille, mutta mielestämme edelliset käsitteet sopisivat paremmin esimerkiksi yläasteen fysiikan tunneille.

Tutkimme kieliasun lisäksi kirjojen mahdollisia teemoja (tekstin koherenssi) ja liittyivätkö ne lapsen arkielämään mitenkään. Kirjoista löytyi hyvin eri teemoja, mutta ne olivat usein aika pinnallisia siten, että useilla aukeamilla vain muutama lasku liittyi kyseiseen teemaan. Voidaanko tällöin edes puhua teemasta?

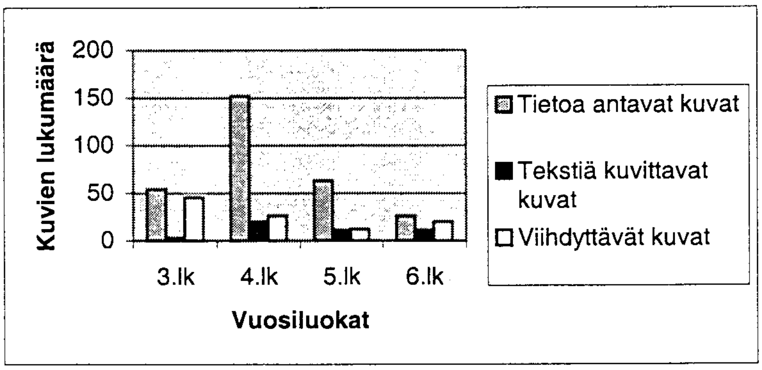
7.1.3 Kuvitus

Kirjoissa oli Selanderin (1988) luokituksen mukaisia tietoa antavia kuvia huomattavasti eniten. Toiseksi eniten kirjoissa oli viihdyttäviä kuvia, jotka eivät liittyneet opiskeltavaan asiaan tai kyseessä olevaan teemaan. Vähiten oli tekstiä kuvittavia kuvia. (ks. kuvio 8)



KUVIO 8 Erilaisten kuvien suhde lukumääränä vuosiluokittain

Me kiinnitimme huomiota siihen, että kuvitus väheni selkeästi kuudennelle luokalle tultaessa ja kuudennella luokalla kuvitus ei ollut enää niin konkreettista. Yhteensä kuudennella luokalla kuvia oli 57 (tietoa antavat 26, tekstiä kuvittavat 11, viihdyttävät 20), joka on vähän verrattuna esimerkiksi neljännen luokan kirjaan, jossa kuvia oli 198 (tietoa antavat 152, tekstiä kuvittavat 20, viihdyttävät 26). Neljännen ja viidennen luokan oppikirjoissa kuvitus painottui huomattavasti enemmän tietoa antaviin kuviin kuin kolmannella ja kuudennella luokalla. Viidennellä luokalla kuvia oli yhteensä 86 (tietoa antavat 63, tekstiä kuvittavat 11, viihdyttävät 12). Kolmannellakin luokalla tietoa antavien kuvien määrä oli suuri (tietoa antavat 54, tekstiä kuvittavat 3, viihdyttävät 45), mutta niiden suhde viihdyttäviin kuviin ei ollut niin suuri kuin neljännellä ja viidennellä luokalla. Kuudennellakin luokalla tietoa antavien kuvien ja viihdyttävien kuvien suhde oli melko samanlainen, mutta kuvamäärät olivat huomattavasti pienemmät. (ks. kuvio 9)



KUVIO 9 Erilaisten kuvien suhde lukumääränä

7.2 Opettajan kirja

Tutkimme perusteellisemmin ne opettajankirjat, joissa oli murtolukujakso (3B, 4B, 5B ja 6B). Näiden lisäksi tutkimme ne opettajankirjat, joissa oli desimaalilukujakso tai prosenttijakso.

7.2.1 Ohjeet opettajalle

Jokaisen kirjan alussa oli tarkat ohjeet kirjan käytöstä. Kaikissa opettajankirjoissa yhteistä oli se, että niissä esiteltiin oppikirjan jaksot ja niiden rakenne. Rakenne oli jaettu kolmeen osaan ja opettajalle annettiin ohjeita, miten näitä osia tulisi hyödyntää. Lisäksi opettajankirjat sisälsivät metatekstiä eli opettajalle annettiin ohjeita oppilaankirjan hyödyllisestä käytöstä sekä tehtäväkorteista, jotka olivat oppilaankirjan lopussa. Opettajalle annettiin ohjeita myös eriyttämiseen, jolla pyritään kehittämään matemaattista ajattelua. Kirjojen alussa puhuttiin matemaattisen ajattelun kehittämisestä, johon liittyy ongelmakeskeinen opetus sekä ongelmatehtävät. Opettajankirjoissa annettiin vinkkejä myös valinnaisuuteen sekä itsearviointitaitojen kehittämiseen. Näiden lisäksi muutamissa kirjoissa oli ohjeita laskimen käytöstä sekä teknologian hyväksikäytöstä matematiikan opetuksessa. Kolmannen luokan kirjassa opettajalle annettiin ohje, että jos luokan edistyminen on ollut hidasta, murtolukujaksoa voidaan käsitellä vain osittain ja antaa pois jätetyt osat nopeasti edistyvien eriyttäviksi tehtäviksi. Erityisesti jakson loppupuolella oli tehtäviä, jotka voidaan kirjantekijöiden mukaan jättää huoletta pois.

Jokaisen uuden jakson alussa oli tarkemmat ohjeet kyseisen jakson sisällöistä ja yleisistä tavoitteista jossa kerrotaan aukeamien tehtävistä ja jakson teemasta. Tämän jälkeen opettajankirjassa oli aukeamittain tavoitteet, opetustuokioehdotuksia sekä erilaisia tehtäviä.

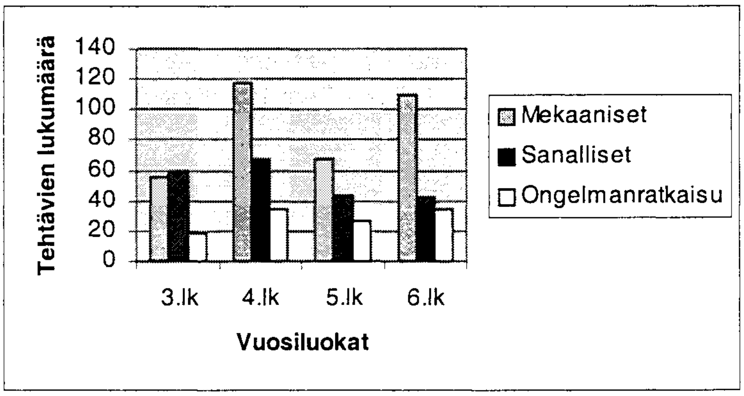
Tutkimme kirjoista myös sen, annettiinko niissä ohjeita opettajalle murtoluvun liittämisestä desimaalilukuun ja prosenttiin. Tutkimme tätä tarkoitusta varten kaikki opettajankirjat, lukuun ottamatta 1.–2.-luokkien kirjoja. Kolmannen luokan kirjoissa ei annettu minkäänlaisia ohjeita murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin linkittämiseen. Koska neljännellä luokalla desimaaliluvut ja murtoluvut käsiteltiin samassa jaksossa, ne yhdistettiin luontevasti. Kirjan mukaan desimaalilukuihin siirrytään murtolukujen kautta, ja näiden välinen yhteys on käsitteen oppimisen perusta. Opettajankirjoissa ohjeet murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin linkittämiseen annettiin aukeaman tavoitteissa, joissa eriteltiin käsitteiden yhdistämisen taso. Esimerkiksi 4B-opettajan oppaassa yhden aukeaman tavoitteena oli: "Opitaan merkitsemään kymmenesosat desimaalilukuna sekä opitaan murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys."

Viidennen luokan syksyn opettajankirjassa oli desimaalilukujakso, jossa ensimmäinen kappale oli nimeltään desimaali- ja murtoluvun yhteys. Siinä annettiin opettajalle ohjeita murtoluvun ja desimaaliluvun linkittämiseen siten, että tarkastellaan erilaisia pintamalleja ja kirjoitetaan niitä kuvaavat murtoluvut sekä muunnetaan murtoluvut desimaaliluvuiksi. Kevään opettajankirjassa oli murtolukujakso ja prosenttijakso erikseen. Prosenttijakson toisessa kappaleessa prosentti liitettiin murtolukuihin. Tässäkin kirjassa opettajalle oli annettu aukeamittain tavoitteet, joissa prosentti liitettiin murtolukuun ja desimaalilukuun. Käsitteiden yhdistämisestä oli kirjassa erilaisia opetustuokiovinkkejä, mutta ei varsinaisia tehtäviä.

Kuudennellakin luokalla syksyn opettajankirjassa oli desimaalilukujakso. Tässä jaksossa desimaalilukua ei yhdistetty prosenttiin ja murtolukuun. Ainoa asia, joka opettajalle annettiin näiden käsitteiden yhdistämisestä, oli päättymättömän desimaaliluvun kohdassa, jossa oppilaille annettiin jokin päättymätön desimaaliluku ja heidän tehtävänä oli etsiä laskimella mikä murtoluku oli muutettu desimaaliluvuksi jakamalla osoittaja nimittäjällä. Kuudennen luokan kevään opettajankirjassa annettiin enemmän ohjeita edellä mainittujen käsitteiden yhdistämisestä. Murtolukujakson ensimmäisen kappaleen tavoitteena oli kerrata murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin yhteys. Murtolukujaksossa suhteen arvon opettelussa suhde merkittiin murtolukuna, mutta suhteen arvo (laskun vastaus) oli desimaaliluku. Prosenttijakso, joka oli heti murtolukujakson jälkeen, alkoi kertaamalla prosentin käsitteen sekä sen yhteyden murtolukuun ja desimaalilukuun. Prosenttijakson yhdellä aukeamalla tavoitteena oli neljäs- ja viidesosien yhteys prosenttilukuihin sekä laskettiin murto-osien avulla prosenttiarvoja. Erään aukeaman tavoitteena oli: "Opitaan käyttämään supistamista tai laventamista prosenttilukujen laskemisen apuna." Tässä kappaleessa prosenttilukujen laskemisessa käytettiin murtomerkintää.

7.2.2 Ylimääräiset tehtävät

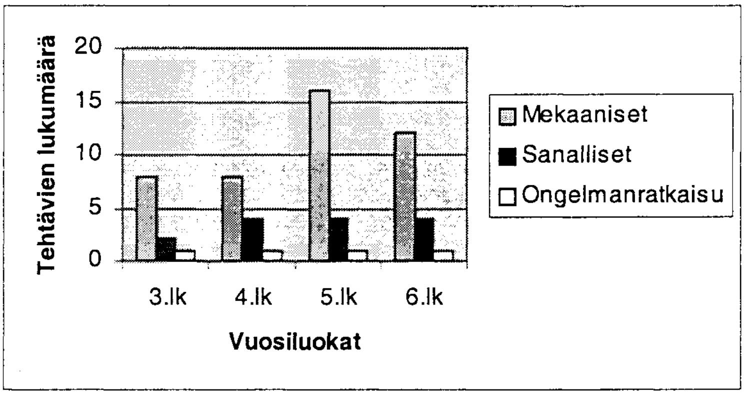
Opettajankirjojen ylimääräisten tehtävien määrässä oli suuria eroja. Kolmannen luokan opettajankirjassa oli 133 tehtävää (mekaaniset 55, sanalliset 59, ongelmanratkaisu 19) ja kuusi liitettä. Neljännellä luokalla tehtäviä oli 219 (mekaaniset 117, sanalliset 68, ongelmanratkaisu 34) ja lisänä kahdeksan liitettä. Viidennellä luokalla puolestaan tehtäviä oli 137 (mekaaniset 67, sanalliset 44, ongelmanratkaisu 26) sekä yksitoista liitettä. Kuudennella luokalla tehtävä oli 186 tehtävää (mekaaniset 110, sanalliset 42, ongelmanratkaisu 34) ja yksitoista liitettä. Laskimme kirjoista myös ne tehtävät, jotka kirja määritteli eriyttäviksi. Kolmannella ja neljännellä luokalla eriyttäviä tehtäviä oli kummassakin kirjassa kaksi kappaletta, kun taas viidennellä ja kuudennella luokalla eriyttäviä tehtäviä ei ollut mainittu ollenkaan. (ks. kuvio 10)



KUVIO 10 Opettajan kirjan erilaisten tehtävien suhde

Opettajankirjoissa oli erilaisia tehtäviä hyvin. Kolmannella luokalla oli jokaisella aukeamalla kertomus sekä siihen liittyviä tehtäviä. Jokaisella aukeamalla oli myös päässälaskuja sekä päättelytehtäviä. Näiden lisäksi kirjassa oli kuvantarkastelutehtäviä, erilaisia toiminnallisia tehtäviä (esimerkiksi piirtäminen), leikkejä, pelejä, eriyttämistehtäviä sekä liitetehtäviä. Tässä kirjassa opettajalle oli esitetty myös Brunerin oppimisen tasot ja niihin oli tehtäviä. (ks. 2.2.2) Neljännen luokan opettajankirjassa ei ollut kertomuksia, vaan tietoiskuja, joihin ei liittynyt tehtäviä. Neljännellä luokalla opettajankirjassa oli samanlaisia tehtäviä kuin kolmannella luokalla, lisänä kuitenkin numerokorteilla harjoittelua. Viidennellä luokalla ei ollut tarinoita eikä tietoiskuja. Edellä mainittujen tehtävien lisäksi oli palikoilla rakentelua, kilpailuja, taukojumppaa murtoluvuilla sekä sanallista murtoluvun ilmaisua. Kuudennella luokalla edellisten tehtävien lisäksi tuli paritehtävät sekä tietoiskut.

Tutkimme opettajakirjoista myös murtolukuihin liittyvät valmiit kokeet ja erityisesti kiinnitimme huomiota erilaista osaamista mittaavien tehtävien suhteisiin. Kolmannen luokan kokeessa yhdestätoista tehtävästä kahdeksan oli mekaanisia, kaksi sanallisia sekä yksi ongelmanratkaisutehtävä, jota ei kuitenkaan arvioitu numeerisesti. Näiden lisäksi kokeessa oli myös itsearviointiosio. Neljännen luokan kokeessa oli kahdeksan mekaanista tehtävää, neljä sanallista sekä yksi ongelmanratkaisutehtävä, jota ei myöskään arvioitu numeerisesti. Tässäkin kokeessa oli itsearviointiosio. Viidennellä luokalla kokeessa oli 21 tehtävää, joista mekaanisia oli kuusitoista, sanallisia neljä sekä jälleen yksi ongelmanratkaisutehtävä, jota ei arvioitu. Kuudennella luokalla mekaanisia tehtäviä oli kaksitoista, joista neljässä ensimmäisessä vastaus piti ilmoittaa sekä murtolukuna, desimaalilukuna että prosenttina. Sanallisia tehtäviä oli neljä sekä lopussa yksi ongelmatehtävä, jota ei arvioitu. Viidennellä ja kuudennella luokalla kokeessa ei ollut enää itsearviointia. (ks. kuvio 11)



KUVIO 11 Kokeiden erilaisten tehtävien suhde

8 POHDINTA

Vaikka Hei, nyt lasketaan! -kirjasarjassa ei käsitellä murtolukuja ensimmäisellä ja toisella luokalla ollenkaan, voi opettaja halutessaan orientoida oppilaita murtolukuihin erilaisten tehtävien yhteydessä. Esimerkiksi, jos tehtävässä käsketään värittämään kolme kissaa viidestä, niin opettaja voi tehtävän yhteydessä sanoa väritettyjen kissojen olevan kolme viidesosaa.

Matematiikan oppimisen kannalta keskeisiä käsitteitä (kuten murtoluvut, desimaaliluvut, prosenttikäsite jne.) kannattaa käsitellä ennakoivasti oppilaiden kanssa, ennen kuin niitä tarjotaan varsinaisen opetuksen yhteydessä. Ennakoivassa käsittelyssä käsitteeseen tutustutaan työskentelemällä konkreettisesti ja keskustelemalla, käsitteen symbolinen esitys unohdetaan kokonaan tai sen käsittely jää hyvin vähäiseksi. (Ikäheimo 1995, 46.) Tätä vaihetta voi verrata myös Dienesin "oppimisen sykliin" (ks. 3.2.1). Tällaista ennakointia kannattaa käyttää kaikessa opetuksessa jo alkuopetuksesta lähtien. Kun murtolukujen opettaminen alkaa tässä kirjasarjassa varsinaisesti kolmannen luokan keväällä, kannattaa niiden ennakoiva opettaminen aloittaa jo syksyllä. Tämä on mielestämme hyvin tärkeää, koska esimerkiksi murtoluku on melko vaikea käsite. Luulemme, että jos siihen on tutustunut jo ennen varsinaista opetusta, se ei aiheuta pelkoja ja se helpottaa uuden asian omaksumista.

Analysoimme ainoastaan *murtoluku*käsitteen oppimisen etenemistä Haapasalon (1994) käsitteenmuodostusprosessin mukaan. Murtolukuun liittyy monia muitakin käsitteitä, esimerkiksi supistaminen ja laventaminen, jotka ovat vaikeita käsitteitä ja myös niiden oppimisen tulisi erikseen käydä läpi viisi käsitteenmuodostusprosessin vaihetta. Emme analysoi oppimisen etenemistä vuosiluokittain, vaan pyrimme hahmottamaan kirjasarjan mukaisen murtoluvun oppimisen etenemisen kokonaisuutena, eli mistä lähdetään liikkeelle ja mihin päästään peruskoulun kuudennen luokan lopussa. Murtoluvun käsitteenmuodostusprosessi etenee kirjasarjassa pääpiirteittäin Haapasalon esittämän mallin mukaan. Kirjasarja ei kuitenkaan mielestämme huomioi tarpeeksi ongelmanratkaisua, jota Haapasalo korostaa käsitteenmuodostusprosessin jokaisessa vaiheessa. Kuten kuviosta 7 käy ilmi, ongelmanratkaisutehtäviä on jokaisella vuosiluokalla huomattavasti vähemmän kuin muita tehtäviä. Kuten teoriaosuudessa esitetään, murtoluvun oppimisen ja opettamisen tulisi lähteä liikkeelle käsitteeseen orientoitumisella. Toisaalta kirjasarja lähtee liikkeelle tästä, koska murtolukujen oppiminen lähtee liikkeelle yhtä suuriin osiin jakamisesta (toiminnallisuus) ja oppilaille ei tarvitse sanoa kyseessä olevan murtolukujen oppiminen. Kuitenkaan kyseessä ei ole oppilaalle konkreettinen ongelmatilanne, koska jakaminen tapahtuu kirjan kuvien avulla. Opettajankirjankaan ohjeet opettamisesta eivät ole tarpeeksi konkreettisia eivätkä herätä ristiriitoja tai halua ratkaista ongelmaa. Kirjassa olevat murtolukukuvat ja opettajan piirrokset taululla eivät ole tarpeeksi konkreettisia malleja (Ikäheimo 1995, 108). Opetuksessa tulee kuitenkin käyttää konkreetteja esineitä (esimerkiksi palikat, murtokakut), kuten Piaget pitää tärkeänä konkreettien operaatioiden vaiheessa.

Kuten edellä on mainittu, murtolukujen symbolinen esittäminen tuli vasta osiin jakamisen jälkeen, joka liittyy käsitteenmuodostusprosessin määrittelyvaiheeseen. Symbolisen merkinnän lisäksi kirja käytti hyvin sekä kuvallista että sanallista esitysmuotoa uusia asioita opittaessa. Eri esitysmuotojen käyttö jatkui kuudennelle luokalle asti. Usein harjoitellaan symbolista ja kuvallista esitystapaa, mutta sanallinen esitystapa saattaa helposti unohtua. Tämä kirjasarja kuitenkin otti tämänkin esitystavan huomioon. Kuten teoriaosuudessa esitämme, Galperinin mukaan sanallinen ilmaisutapa on tärkeä, jotta lapsi alkaisi käyttää kuvien tai konkreettien esineiden sijasta niiden käsitteitä. Tässä vaiheessa on tärkeää myös se, että tuodaan konkreettisesti esille, että yksi kokonainen voidaan ilmaista lukemattomilla eri tavoilla, esimerkiksi 4/4, 7/7 jne. Tämä liittyy Piaget´n säilyvyys-käsitteeseen, jonka lapset ymmärtävät konkreettien operaatioiden vaiheessa. Kirjasarjassa esiintyi sekä tunnistamis- että tuottamisvaiheeseen liittyviä tehtäviä hyvin, mutta niitä ei esitetty käsitteenmuodostusprosessin mukaisessa järjestyksessä. Esimerkiksi kolmannella luokalla oli tuottamisvaiheen tehtäviä ja vasta neljännellä luokalla oli tunnistamisvaiheen tehtäviä, joskin neljännellä luokalla oli myös tuottamisvaiheen tehtäviä. Mielestämme ei ole kovin tärkeää, että nämä vaiheet esiintyisivät tiukasti erillisinä, vaan tärkeämpää on harjoitella niitä paljon, vaikkakin limittäin, koska harjoittelemalla saadaan lisää varmuutta laskemiseen. Koska tunnistamis- ja tuottamisvaiheen tehtävät ovat samantapaisia, niiden samanaikainen harjoittelu tukee toinen toistaan.

Teoriassa esitettyjä lujittamisvaiheen tehtäviä oli 4.–6.-luokkien kirjoissa, vaikkakin näissä kirjoissa oli myös muiden vaiheiden tehtäviä. Lujittamisvaiheen tarkoituksena on käsitteen monipuolinen käyttö ja soveltaminen eri tilanteisiin. Mielestämme kirjojen lujittamisvaiheen tehtävät olivat osin liian mekaanisia, koska ne eivät antaneet valmiuksia uuden taidon soveltamiseen arkielämässä. Kirjoissa oli monipuolisia tehtäviä murtoluvuista, mutta niiden soveltaminen eri tilanteisiin jäi pinnalliseksi. Opettajankirjassa olisi voinut olla enemmän oppilaiden arkielämään liittyviä toiminnallisia tehtäviä, kuten leipominen, missä resepteissä käytetään paljon murtolukuja. Kuitenkin opettajankirjassa ansiokasta oli leikkien ja pelien monipuolinen tarjonta, joita Dienes pitää välttämättömänä teoriassaan.

Yllätyimme hieman siitä, kuinka hyvin kirjasarja oli ottanut spiraaliperiaatteen huomioon. On hyvä, että edellisen vuoden asiat kerrattiin niin, että samoja asioita ei käsitelty liikaa päällekkäin, vaan siirryttiin nopeasti uuteen asiaan. Kertaamalla vanhat opitut asiat oppilaiden on helpompi ottaa uutta tietoa vastaan, koska he tietävät mihin uusi tieto pohjautuu.

Diagrammeista huomaa selvästi sen, kuinka vallitsevia mekaaniset tehtävät edelleen ovat. Mielestämme tulokset ovat melko huolestuttavia, koska pelkällä mekaanisella laskutaidolla ei selviä useissa arkielämän ongelmatilanteissa. Vaikka mekaaniset tehtävät ovat tärkeitä uutta asiaa opittaessa, ne eivät kuitenkaan saisi hallita opetusta, koska ne eivät kehitä matemaattista ajattelua. Paljonhan puhutaan ongelmanratkaisutehtävien tärkeydestä ja matemaattisen ajattelun kehittämisestä, joita kirjat eivät usein näytä ottavan huomioon. Tämä johtuu siitä, että kirjat kehittyvät paljon uusia tutkimustuloksia ja opetussuunnitelmaa jäljessä. Yksi tekijä, joka liittyy matemaattisiin oppimisvaikeuksiin, on se, että opetus keskittyy usein puhtaasti ulkoisen laskusuorituksen ohjaamiseen ja harjaannuttamiseen, jolloin varsinaisen matemaattisen ajattelun rakentaminen oppilaan mielessä jää vaille opettajan johdonmukaista tukea. (Ikäheimo 1995, 28.) Jos mekaanisia tehtäviä harjoitellaan liikaa, saattaa Galperinin mukaan olla vaarana se, että lapsi ei osaa yleistää laskutoimitusta muihin samaa laskutoimitusta vaativiin tehtäviin.

Moni saattaa ihmetellä ongelmanratkaisutehtävien lukumäärän vähyyttä, mutta me teimme tiukan erottelun ongelmanratkaisu- ja sanallisten tehtävien välille. Seuraavassa esimerkki oppilaan kirjan tehtävästä, jonka tarkoituksena oletamme olevan ongelman-ratkaisutehtävän, koska opettajankirjassa samantyyliset tehtävät olivat määritelty ongelmanratkaisutehtäviksi.

> "Kalle osti kissalleen yhden ruokapurkin, joka painoi 1/2 kg ja kaksi 5/8 kg:n painoista purkkia. Ne riittivät viikoksi. Kuinka paljon kissa söi purkkiruokaa keskimäärin yhtenä päivänä?" (Lohi, Saravesi, Verkkonen & Virta 2001, 173.)

Me emme pidä tällaista tehtävää ongelmanratkaisutehtävänä, vaikka tämä tehtävä onkin suhteellisen vaikea ja sisältää monta eri vaihetta (laventaminen samannimisiksi, murtolukujen yhteenlasku, murtoluvun jakolasku). Useista työvaiheista huolimatta tässä sanallisessa tehtävässä annetaan kaikki tarvittavat tiedot tehtävän ratkaisemiseksi, joten tämäkin lasku harjoituttaa loppujen lopuksi vain mekaanista laskutaitoa lukemisen ymmärtämisen lisäksi. Seuraava esimerkki puolestaan on mielestämme puhtaasti ongelmanratkaisutehtävä, koska siinä ei anneta suoraan kuin yksi laskuun tarvittava luku.

> "Johanneksen värisekoituksesta yksi seitsemäsosa on kadmiumin keltaista. Kromin keltaista on kaksi kertaa niin paljon kuin preussin sinistä. Mikä osa sekoituksesta on kromin keltaista?" (Helin, Keisala, Saravesi, Satamo, Sohlman & Virta 1999, 55.)

Opetussuunnitelmassa oleva tavoite, että oppilas osaa käyttää opittavaa taitoa ratkaistessaan arkielämän ongelmia, ei toteudu mielestämme hyvin tässä kirjasarjassa. Vaikkakin tehtävät ovat joskus hyviä ja saattavat kiinnostaa oppilaita, niin voimme kuitenkin kysyä, onko siitä oppilaalle todellista hyötyä arkielämässä? Esimerkiksi, jos oppilasta pyydetään ilmoittamaan elokuvan pituus sekamerkintänä, niin miten tämä tehtävä auttaa arkielämän ongelmassa, vaikka elokuvat aiheena on varmasti mielenkiintoinen. Opettajankirjankin useat toiminnalliset tehtävät, jotka sinällään ovat hyviä ja tuovat vaihtelua, harjoittivat vain mekaanista laskemista eivätkä liittyneet mitenkään arkielämään. Ehdotuksenamme onkin, että kun kerran keksitään toiminnallisia tehtäviä, niin miksei niistä samalla voisi tehdä ongelmanratkaisutaitoa kehittäviä tehtäviä.

Kuten tuloksissa ilmeni, kirjojen kieli oli ymmärrettävää ja selkeää neljännen luokan kirjan muutamaa poikkeusta lukuun ottamatta. Mielestämme matematiikan kirjojen tehtävänannot eivät saa olla kielellisesti liian vaikeita, jotta laskun suorittaminen ei kärsi tällaisen sivuseikan takia. Tarkoitamme tällä sitä, että tehtävänannoissa ei saisi esiintyä liian vaikeita käsitteitä, mutta tehtävien kieliasu voidaan kuitenkin muotoilla lapsen matemaattista ajattelua kehittäväksi.

Teemojen ja tehtävien kiinnostavuus sekä liittyminen arkielämään on vaikea määritellä, koska näihin vaikuttavat useat eri asiat. Oppilaiden kiinnostuksen kohteet vaihtelevat ja niihin vaikuttavat esimerkiksi asuinpaikka (maaseutu, kaupunki). Esimerkiksi kaupungissa asuvalle kuudesluokkalaiselle oppilaalle kirjan teemat (muun muassa kahviloissa käyminen, ostoskeskukset, elokuvissa käyminen) ovat läheisiä ja liittyvät heidän arkielämäänsä enemmän kuin maaseudun oppilaan. Toisaalta kirjassa oli yksi eläinteema, joka saattaa koskettaa enemmän maalla asuvaa oppilasta. Vaikka teemat olivat suhteellisen sopivia kyseiselle luokka-asteelle, löysimme kuitenkin muutaman silmäänpistävän aiheen. Esimerkiksi 5.- luokkalaisen kirjassa oli yksi teema maton kutomisesta ja voidaankin kysyä, liittyykö aihe tämän ikäisen arkielämään?

Koska koulumatematiikka ei usein liity lapsen luonnolliseen matematiikkaan ja hänen arkielämäänsä, on se Ikäheimon (1995) mukaan usein yhtenä syynä matematiikan oppimisvaikeuksiin. Jo koulun alkuvaiheen matemaattisten ongelmien takana on usein se, että koulussa opetettu matematiikka ei yhdisty lapsen mielessä siihen matemaattis-loogiseen ajatteluun, jota hänelle on kehittynyt konkreettisissa toimintatilanteissa jo ennen koulun matematiikan opetuksen alkua. Näin lapsi pyrkii oppimaan koulun matematiikkaa erillisesti muistettuina tehtävien ja vastausten yhdistelminä (mekaaniset tehtävät) ilman, että hän oman ajattelunsa kautta voi varmistua tulosten oikeellisuudesta. Tällainen oppimisen muoto voi johtaa hetkelliseen selviämiseen koulun vaatimuksista, mutta aika pian tällainen oppiminen johtaa lapsen tietojen ylikuormittumiseen, eikä hän enää kykene selviytymään koulutehtävistäänkään. (Ikäheimo 1995, 27.)

Tekstin ja kielen lisäksi pidimme tärkeänä tutkia myös kirjojen kuvitusta. Oppilaat oppivat eri aistikanavia käyttäen ja visuaalisesti oppivat hyötyvät kuvista. Kuvilla ei ole pelkästään tietoa antava tarkoitus, vaan ne myös motivoivat ja elävöittävät kirjaa. Kuvien laittaminen uutta asiaa opittaessa symbolisen ja sanallisen esitysmuodon rinnalle on erittäin hyvä ajatus, koska se antaa konkreettisuutta ja havainnollistaa asiaa hyvin. Kolmannella luokalla huomattavaa oli se, että viihdyttävien ja tietoa antavien kuvien suhde oli melkein sama, kun taas muilla luokilla tietoa antavia kuvia oli huomattavasti eniten. Tämä johtuu ehkä siitä, että kolmasluokkalaiset saattavat vielä tarvita enemmän motivoivia kuvia. Kiinnitimme huomiota myös siihen, että kuudennella luokalla kuvia oli huomattavasti vähemmän kuin muilla luokilla. Tämän arvelemme johtuvan siitä, että suurin osa oppilaista on siirtymässä Piaget´n formaalien operaatioiden kaudelle, jolloin oppilaiden odotetaan selviytyvän tehtävistä ilman konkreetteja vihjeitä.

Opettajankirjoissa oli hyvät ohjeet kirjan käytöstä yleisesti sekä jaksoittain jokaisen jakson teemasta, tavoitteista ja sisällöstä. Erityisesti kiinnitimme huomiota siihen, että kirjat antoivat opettajalle tietoa matematiikan oppimiseen liittyvistä asioista, kuten matemaattisesta ajattelusta, ongelmanratkaisusta sekä eriyttämisestä. Näin opettaja saa halutessaan teoriataustaa opetuksensa pohjaksi. Kirjoissa oli myös useita lähdeviitteitä, joista opettaja voi hankkia lisätietoa. Opettajankirjojen sisältämä runsas metateksti oli kirjasarjan vahvuus. Jäimme kaipaamaan tietoa kirjasarjan taustalla olevasta matematiikan opettamiskäsityksestä. Tämä olisi hyvä mainita opettajalle, jotta opettaja voi esimerkiksi valita kirjasarjan, joka sopii hänen omaan näkemykseensä opettamisesta. Me löysimme tästä kirjasarjasta konstruktiivisia piirteitä, joihin liittyy se, että kirjasarjassa oli suullista ja kirjallista esittämistä, laadullista eriyttämistä, kommunikaatiota, selkeitä oppimiskokonaisuuksia. Kuten teoriaosuudesta käy ilmi, muun muassa nämä ominaisuudet Perkkilä (1997) nimeää nykyajan konstruktiivisille oppimateriaaleille keskeisiksi.

Mielestämme kirjasarja on panostanut hyvin eriyttämiseen, koska opettajalle oli annettu hyvät ohjeet, miten käyttää oppilaan kirjaa eriyttävästi. Toisaalta opettajankirjoissa ei ollut erikseen nimettyjä eriyttäviä tehtäviä kuin kolmannella ja neljännellä luokalla ja niissäkin molemmissa vain kaksi. Jokaisella oppilaankirjan aukeamalla oli muutama perustehtävä ja näiden lisäksi eriyttäviä tehtäviä, joista joko oppilas tai opettaja saa päättää laskettavat tehtävät oman tasonsa mukaan. Näiden lisäksi opettaja voi käyttää eriyttämiseen lisätehtäväkirjoja, liitteitä, tehtäväkortteja, opettajankirjassa olevia päättelytehtäviä sekä osaa päässälaskuista. Kuten teoriassa on osoitettu, on tärkeää, että opettaja tietää missä vaiheessa lapsen ajattelu on, jotta hän osaa antaa oikeantasoista materiaalia työntäen lapsen ajattelua eteenpäin. Opettajan työtä helpottaa se, että on paljon eritasoista materiaalia, josta voi valita. Näin opettajan ei tarvitse itse suunnitella ja tehdä materiaalia.

Mielestämme on ihmeellistä, että vain neljännellä luokalla desimaaliluku käsiteltiin samassa jaksossa kuin murtoluku, koska nämä käsitteet liittyvät läheisesti toisiinsa ja ne olisi luontevaa käsitellä yhdessä. Ihmettelemme myös sitä, miksi prosentti on eri jaksossa ja irrallaan murtoluvusta ja desimaaliluvusta. Miksi prosenttijakso ei ole heti desimaali- ja murtolukujakson jälkeen, vaan välissä on geometriajakso? Vuoden 1994 opetussuunnitelmankin mukaan prosentti olisi luontevaa käsitellä murtoluvun yhteydessä. Muut luokka-asteet eivät ole ottaneet näiden käsitteiden yhdistämistä huomioon tämänkään vertaa, vaan jokainen asia on omassa jaksossaan ja desimaaliluku vielä eri lukukautena. Olisikin mielenkiintoista saada tietää perustelut tällaiselle ratkaisulle. Itse käsittelisimme asiat samassa yhteydessä. Kirjasarja on kyllä pyrkinyt ottamaan huomioon näiden käsitteiden välisen yhteyden, mutta se jää usein aika pinnalliseksi käsittämään vain ensimmäisen kappaleen uudesta jaksosta.

Opettajankirjoissa oli monipuolisia tehtäviä. Kuten kuvioista 6 ja 10 käy ilmi, opettajankirjoissa on panostettu huomattavasti enemmän ongelmanratkaisutehtäviin kuin oppilaankirjoissa. Voisiko tämä johtua siitä, että kirjantekijät ovat ajatelleet tehtävät eriyttäviksi ja, että opettaja voi itse valita tehtävät, jotka sopivat omalle luokalle. Mielestämme on huonoa, että ongelmanratkaisutehtävät ovat painottuneet opettajankirjaan, koska tällöin jää opettajan valinnan varaan, käyttääkö hän niitä opetuksessaan ollenkaan. Vaarana on se, että oppilaat eivät saa harjoitella ongelmanratkaisutehtäviä, jotka ovat välttämättömiä matemaattisen ajattelun kehittymiselle. Kuten teoriaosuudessa olemme osoittaneet, ongelmanratkaisutehtävien käyttö opetuksessa on hyödyllistä myös opettajalle, koska niiden avulla hän saa tietoa oppilaidensa ajattelusta.

Kokeissa kiinnitimme huomion siihen, että tehtävät kirjan tehtävien tavoin, mittasivat mekaanisten tehtävien osaamista. (Vrt. kuviot 5 ja 11) Jokaisessa kokeessa oleva ongelmanratkaisutehtävä oli hyvä, mutta koska sitä ei arvioida kokeessa, osa oppilaista saattaa jättää sen tekemättä. Kokeet noudattavat edelleen samaa kaavaa, mitä itse muistamme omilta ala-asteajoilta, ainoana poikkeuksena päässälaskujen puuttuminen. Ensimmäinen sivu testasi pääosin mekaanista laskutaitoa ja toisella sivulla oli sanalliset tehtävät. Vaikka mekaaniset tehtävät ovat tärkeitä, eikö olisi aiheellista siirtyä mittaamaan lapsen ajattelua, joka ilmenee soveltamistehtävissä. Vai onko mittaaminen ylipäänsä kokein tarpeellista?

Tutkimus antoi meille tulevina luokanopettajina taitoa ja kokemusta analysoida ja arvioida oppimateriaalia kriittisesti. Uskomme, että tämän kokemuksen myötä osaamme paremmin myös vertailla eri oppikirjasarjoja ja valita niistä omaan opetukseen sopivimmat kirjat. Tämä on hyödyllistä, koska nykyään on tarjolla niin paljon erilaista ja eritasoista oppimateriaalia. Kun tietää käytössään olevan oppikirjasarjan vahvuudet ja heikkoudet, opettaja voi hankkia oheismateriaalia ja keksiä toiminnallisia opetustuokioita omiin tavoitteisiin pääsemiseksi sekä tukemaan oppikirjan heikkouksia. Koemme tutkimuksen tekemisen myös sen takia hyödylliseksi, koska voimme opettajina ollessamme käyttää tutkijan taitojamme sekä tutkivaa otetta opetuksessa ja näin parantaa ja kehittää omaa opetustamme. Tutkimus antoi meille myös hyödyllistä tietoa matematiikasta ja sen tehokkaasta oppimisesta ja opettamisesta. Matematiikan opettaminen on joutunut usein hyökkäyksen kohteeksi ja näin ollen opettajan tulisi tietää missä matematiikan opetuksessa ollaan menossa ja millä menetelmillä ja materiaaleilla päästään parhaisiin oppimistuloksiin.

Yleisellä tasolla tutkimuksestamme saattaa olla hyötyä opettajille, jos he haluavat vertailla eri oppikirjasarjoja ja saada yksityiskohtaista tietoa Hei, nyt lasketaan! - kirjasarjasta. Tutkimuksesta voisi olla hyötyä myös kustantajalle, koska tulostemme pohjalta he voisivat kehittää kirjasarjaa paremmaksi. Tietenkin kyseessä on nyt vain kahden tutkijan osin subjektiivinen näkemys kirjasarjasta ja kirjantekijöillä on varmasti omat, hyvät, perustelut sille, minkälainen kirjasarja on. Tutkimuksemme saattaa antaa uusia ajatuksia ja mielenkiintoa käyttää sisällön analyysia tutkimusmenetelmänä, koska ainakaan Jyväskylän yliopiston Opettajankoulutuslaitokseen ei ole tehty yhtään pro gradu- tutkielmaa, jossa analysoidaan jokin oppikirjasarja kokonaan. Tutkimuksemme ei tuottanut uutta teoriaa, mutta se ei ollut alunperinkään tarkoituksenamme kun lähdimme tekemään tutkimusta. Tutkimusongelmien kautta pyrimme tuottamaan kuvailevaa tietoa aineistosta.

Tutkimustulokset noudattavat hyvin pitkälle aikaisemmin saatuja tuloksia oppikirjatutkimuksista. Tämäkin kirjasarja oli rakennettu siten, että se voi helposti johtaa opetuksessa siihen, että opettaja käy yhden aukeaman yhdellä tunnilla. Tätä pidetään oppikirjojen heikkoutena, kuten teoriaosuudessa käy ilmi. Teoria vahvistui myös siltä osin, mitä on pidetty matematiikan oppikirjojen heikkoutena. Tämäkin kirjasarja sisälsi huomattavan paljon mekaanisia laskutehtäviä, eikä ongelmaratkaisua ja soveltamistaitoa tuettu tarpeeksi. Yhdymme Haapasalon (1994) ajatukseen matematiikan kirjojen kaupallisuudesta. Tämäkin kirjasarja oli hyvin helppolukuinen, värikäs ja vähätekstinen. Nämä ominaisuudet sekä kirjasarjaan kuuluvat lisämateriaalit voivat johtaa meidänkin mielestä siihen, että opettaja vain laittaa oppilaat laskemaan tehtäviä omasta kirjasta. Tutkimme kirjasarjan melko kriittisesti, koska opetus painottuu mielestämme liikaa kirjojen käyttöön. Mielestämme olisi parempi jos opettaja ei käyttäisi matematiikan opetuksessa kirjoja lainkaan tai käyttäisi niitä ainoastaan oheismateriaalina. Tällainen opetus on kuitenkin vaikeampaa opettajalle. Oppikirjat helpottavat opettajan usein hyvinkin raskasta työtä, mutta ne eivät saisi kuitenkaan johtaa siihen, että kirjat olisivat ainoa opetusmenetelmä, koska pelkät kirjat eivät mahdollista parhainta oppimista. Jos vertailemme tutkittua kirjasarjaa muihin, meille tuttuihin, kirjasarjoihin, on se kuitenkin mielestämme melko hyvä.

Mieleemme heräsi tutkimusprosessin edetessä paljon uusia ideoita ja ajatuksia, miten laajentaa tutkimusta tai toisaalta, mitä tutkimuksessa olisi voinut tehdä toisin.

Tutkimuksen edetessä huomasimme muutamia asioita, joita olisimme voineet tehdä toisin. Luokitusrunkoa laatiessa olisimme voineet tehdä koeluokituksen useampaan kuin yhteen kirjaan, koska aineistoa tutkiessamme meidän piti tehdä vielä muutamia korjauksia luokitusrunkoon. Olisimme voineet myös määritellä vielä tarkemmin erilaisten tehtävätyyppien väliset erot, koska etenkin sanallisten- ja ongelmanratkaisutehtävien erottelussa oli joskus vaikeuksia. Tämä johtui ehkä siitä, että emme löytäneet kirjallisuudesta tarkkoja määritelmiä sanallisista- ja ongelmanratkaisutehtävistä.

Jos tutkimus olisi ollut laajempi, olisi ollut mielenkiintoista mennä kentälle tutkimaan, miten oppilaat ovat oppineet murtoluvut tämän kirjasarjan avulla. Toisaalta olisi mielenkiintoista vertailla kahta oppikirjasarjaa sisällön analyysin avulla tai vertailla oppilaiden oppimistulosten eroja sen mukaan, kumpaa kirjasarjaa opettaja käyttää opetuksessaan. Hei, nyt lasketaan! -kirjasarja sisältää oppikirjojen lisäksi paljon muuta oppimateriaalia, jonka me jätimme tutkimatta. Niiden tutkiminen voisikin olla kiinnostava jatkotutkimuksen kohde yllämainittujen ideoiden lisäksi.

LÄHTEET:

Aaltola, J. & Valli, R. (toim.) 2001. Ikkunoita tutkimusmetodeihin II. Näkökulmia aloittavalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin. Jyväskylä: PS-Kustannus.

Ahtee, M. & Pehkonen, E. (toim.) 1994. Constructivist Viewpoints for School Teaching and Learning in Mathematics and Science. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 131.

Ahtee, M. & Asunta, T. (toim.) 2000. Tietoa ja toimintaa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksia. Tutkiva opettaja 2/2000. Jyväskylän yliopisto.

Armbruster, B. B. & Anderson, T. H. 1988. On Selecting "Considerate" Content Area Textbooks. Remedial and Special Education. V9 n1, 47–52.

Bogdan, R. C. & Knopp Biklen, S. 1998. Qualitative Research for Education. An Introduction to Theory and Methods. 3.painos. London: Allyn and Bacon.

Borg, W. R. & Gall, M.D. 1989. Educational Research. An Introduction. Viides painos. New York: Longman.

Crain, W.C. 1992. Theories of Development. Concepts and Applications. Kolmas painos. New Jersey: Prentice-Hall.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. 1984. Children learning mathematics. A teacher´s Guide to Recent Research. Great Britain: Holt.

Ekola, J. 1978. Oppikirjan arviointikriteerien kehittely peruskoulun 1. – 4. luokkien opettajien arviointien pohjalta. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteen laitos. Julkaisuja 64.

Field, P.A. & Morse, J.M. 1985. Hoitotyön kvalitatiivinen tutkimus. Helsinki: Kirjayhtymä.

Grönfors, 1985. Kvalitatiiviset kenttätyömenetelmät. 2. painos. Porvoo: WSOY.

Haapasalo, L. 1992. Murtolukukäsitteen konstruktivistinen oppiminen. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Julkaisusarja A. Tutkimuksia 51.

Haapasalo, L. 1993a. Desimaalilukujen ja yksikönmuunnosten konstruktivistinen oppiminen. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Julkaisusarja A. Tutkimuksia 55.

Haapasalo, L. 1993 b. Matematiikan opetussuunnitelmien lähtökohtia ja kehittämisnäkymiä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 2.

Haapasalo, L. 1994. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Jyväskylä: Medusa.

Haapasalo, L. 1995. Konstruktivismi matemaattiseen käsitteenmuodostuksen ohjaamisessa ja analysoimisessa. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.

Haapasalo, L. 1998. Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Heikkilä, T. 1999. Tilastollinen tutkimus. 2. uudistettu painos. Helsinki: Edita.

Ikäheimo, H. 1995. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. Helsinki: Oy Opperi Ab.

Julkunen M.–L. 1991. Text types and teaching of concepts in finnish school books. Teoksessa Julkunen, M.-L., Selander, S. & Åhlberg, M. 1991. Research on Texts at School. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Tutkimuksia 37.

Julkunen, M.-L., Selander, S. & Åhlberg, M. 1991. Research on Texts at School. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Tutkimuksia 37.

Kari, J. 1987. Oppimateriaalitutkimuksen teoreettisia lähtökohtia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 4.

Karjalainen, M. 1987. Käsitteen omaksuminen. Dimensio 51 (8), 14–15.

Keranto, T. 1981. Lukukäsitteen kehittyminen ja kehittäminen: matemaattis-loogiset perusteet ja luvun kognitiivinen rakentuminen. Acta Universitatis Tamperensis Ser A vol 125. Tampereen yliopisto.

Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2000. Laskutaito 6. Helsinki: Weilin+Göös.

Koponen, R. 1973. Spiraaliperiaate peruskoulun ja lukion matematiikan opetuksessa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden laudaturtyö.

Koponen, R. 1995. Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille. Jyväskylä: Ateena.

Kupari, P. (toim.) 1988. Koulumatematiikka 1990-luvulle: lähtökohtia ja mahdollisuuksia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 27.

Kupari, P. 1988. Koulumatematiikan käsitteiden oppimisesta ja opettamisesta. Teoksessa P. Kupari (toim.) Koulumatematiikka 1990- luvulle: lähtökohtia ja mahdollisuuksia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 27.

Lappalainen, A. 1992. Oppikirjan historia. Kehitys sumerilaisista suomalaisiin. Porvoo: WSOY.

Leino, J. 1977. Matematiikan didaktiikka 1. Helsinki: Kirjayhtymä.

Leino, J. 1990. Knowledge and learning in mathematics. Teoksessa L. P. Steffe & T. Wood (toim.) Transforming children's mathematical education. Hillsdale, NJ: Lawrence Elrlbaum.

Leino, J. 1994. Theoretical considerations on constructivism. Teoksessa M. Ahtee & E. Pehkonen (toim.) Constructivist Viewpoints for School Teaching and Learning in Mathematics and Science. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 131.

Leino, J. 1998. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. Acta Universitatis Tamperensis. Ser A vol 307.

Malinen, P. 1972. Matematiikan opetusoppi. Helsinki: Otava.

Mandl, H, Stein, N. L. & Trabasso, T. (toim.) 1984. Learning and Comprehension of Text. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Melin, L. & Lange, S. 2000. Att analysera text. Stilanalys med exempel. Kolmas painos. Studentlitteratur.

Mikkilä-Erdmann, M., Olkinuora, E. & Mattila, E. 1999. Muuttuneet käsitykset oppimisesta ja opettamisesta – haaste oppikirjoille. Kasvatus 30 (5), 436–449.

Miller, P. H. 1997. Theories of Developmental Psychology. 3.painos. New York: W. H. Freeman and Company.

Mursula, J. & Rönnholm, H. 1991. Murtolukukäsitteen muodostuminen ja hallitseminen sekä matemaattinen ongelmanratkaisu peruskoulun neljäsluokkalaisilla. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma.

Niemelä, P. & Ruuth, J.- E. (toim.) 1989. Ihmisen elämänkaari. Helsinki: Otava.

Pajunen, V., Pussinen, M. & Reunanen, T. 1986. Murtolukujen tukiopetusohjelma peruskoulun 5. luokalle. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Kasvatus tieteen pro gradu –tutkielma.

Pakarinen, L. & Rinkinen, P. 1992. Ongelmakeskeisyys murtoluvun oppimisessa.

Kasvatustieteen pro gradu- tutkimus. Jyväskylän yliopisto.

Patton, M. 1990. Qualitative Evaluation and Research Methods. Toinen painos. London: Sage.

Pehkonen, E. & Zimmermann, B. 1988. Avoin probleemanratkaisu matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Kupari (toim.) Koulumatematiikka 1990- luvulle: lähtökohtia ja mahdollisuuksia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 27.

Pehkonen, E. 1990. Matematiikan opetus peruskoulussa on helppoa ja ongelmatonta – vai onko? Dimensio 54 (7), 16–17.

Pehkonen, E., Pekama, E. & Seppälä, R. 1991. Matemaattinen ongelmanratkaisu: tehtäviä peruskoulun ja lukion matematiikan opetukseen. Helsinki: MFKA Kustannus

Perkkilä, P. 1997. Konstruktivismi ja matematiikan opetus. Luokanopettaja 4/97. 10–12.

Perkkilä, P. 1998. Matematiikan opetus- mihin suuntaan olet menossa? Luokanopettaja 2/98. 6–7.

Peruskoulun erityisopetuksen opetussuunnitelmien perusteita. EHA, EKU, EMU. 1988. Helsinki: Valtion painatuskeskus

Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö II. Oppiaineiden opetussuunnitelmat. Komiteanmietintö 1970: A 5. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985. Helsinki: Kouluhallitus.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet. 1994. Helsinki: Opetushallitus.

Pietilä, V. 1973. Sisällön erittely. Helsinki: Gaudeamus.

Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) 1998. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Schnotz, W. 1984. Comparative Instructional Text Organisation. Teoksessa H. Mandl, N. L. Stein & T. Trabasso (toim.) Learning and Comprehension of Text. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 53–81.

Selander, S. 1988. Lärobokskunskap. Pedagogisk textanalys med exempel från läroboken i historia 1841–1985. Pedagogisk orientering. Studentlitteratur: Lund.

Selander, S. 1991. Pedagogic text analysis. Teoksessa M.- L. Julkunen, S. Selander & M. Åhlberg 1991. Research on Texts at School. 35–88

Soinne, P. 1993. Nykyajan prosenttilasku. Dimensio 57 (5) 42–43.

Thompson, J. (toim.) 1994. Matematiikan käsikirja. Helsinki: Tammi.

Turtia, K. 2001. Sivistyssanat. Helsinki: Otava.

Tynjälä, P. 1991. Kvalitatiivisten tutkimusmenetelmien luotettavuudesta. Kasvatus 22 (5–6), 387–398.

Tynjälä, P. 1999. Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Helsinki: Kirjayhtymä.

Tzur, R. 1999. An Intecrated Study of Children's Construction of Improper Fractions and the Teacher's Role in Promoting That Learning. Journal for Reserch in mathematics Education. 30 (4), 390–416.

Uusitalo, H. 1998. Tiede, tutkimus ja tutkielma. Johdatus tutkielman maailmaan. Porvoo: WSOY.

Varto, J. 1992. Laadullisen tutkimuksen metodologia. Hygieia. Terveyden- ja sairaanhoitajan kirjasto. Helsinki: Kirjayhtymä.

Virkkunen, J. 1989. Tietoja vai ajattelun ja toiminnan välineitä. Koulu ja tieto. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Vorderman, C. 1997. Kiehtova matematiikka. Porvoo: WSOY.

Välijärvi, J., Linnakylä, P., Kupari, P., Reinikainen, P., Malin, A. & Puhakka, E. 2001. Suomen tulevaisuuden osaajat. 15-vuotiaiden nuorten lukutaito sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen kansainvälisessä vertailussa. PISA 2000 – tutkimuksen ensituloksia. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Wuolijoki, H. & Norlamo, P. 1999. Tutkivaa matematiikkaa 2. Matemaattinen ongelmanratkaisu. Porvoo: WSOY.

Yrjönsuuri, R. 1998. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) 1998. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Yrjönsuuri, R. 2000. Opettajien arvioita matematiikan tehtävistä. Teoksessa M. Ahtee & T. Asunta (toim.) Tietoa ja toimintaa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksia. Tutkiva opettaja 2/2000. Jyväskylän yliopisto.

Tutkimuksessa käytetyt oppilaankirjat:

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 2000. Hei, nyt lasketaan! 1A. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1999. Hei, nyt lasketaan! 1B. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 2001. Hei, nyt lasketaan! 2A. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1999. Hei, nyt lasketaan! 2B. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1998. Hei, nyt lasketaan! 3A. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1999. Hei, nyt lasketaan! 3B. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1998. Hei, nyt lasketaan! 4A. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1999. Hei, nyt lasketaan! 4B. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1999. Hei, nyt lasketaan! 5. Helsinki: Otava.

Lohi, K.-L., Saravesi, P., Verkkonen, H. & Virta, V. 2001. Hei, nyt lasketaan! 6. Helsinki: Otava.

Tutkimuksessa käytetyt opettajankirjat:

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1998. Hei, nyt lasketaan! 1A. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1998. Hei, nyt lasketaan! 1B. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1998. Hei, nyt lasketaan! 2A. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1998. Hei, nyt lasketaan! 2B. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V.

1998. Hei, nyt lasketaan! 3A. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1999. Hei, nyt lasketaan! 3B. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1998. Hei, nyt lasketaan! 4A. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1998. Hei, nyt lasketaan! 4B. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1999. Hei, nyt lasketaan! 5A. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L. & Virta, V. 1999. Hei, nyt lasketaan! 5B. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Lohi, K.-L., Saravesi, P., Verkkonen, H. & Virta, V. 2001. Hei, nyt lasketaan! 6A. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Lohi, K.-L., Saravesi, P., Verkkonen, H. & Virta, V. 2001. Hei, nyt lasketaan! 6B. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Liite 1: Opetussuunnitelman rakentaminen spiraaliperiaatteen pohjalle

1. Peruskäsitteet, joiden tunteminen on välttämätöntä, järjestetään hierarkkisesti eteneväksi jonoksi.
2. Jokaiselle käsitteelle asetetaan tavoitteet ja esitetään ne käyttäytymistermein.
3. Oppilaan kehitystaso huomioon ottaen tavoitteista muodostetaan yhtenäisiä oppimiskokonaisuuksia.
4. Eri osa-alueet esitetään sellaisessa järjestyksessä, joka on matemaattisen struktuurin kannalta oikea, sovellutusten (esimerkiksi fysiikka) kannalta tarkoituksenmukainen, eikä sisällä vaikeiden kohtien kasaantumista mihinkään kurssin osaan.
5. Opitut asiat kootaan sopivin väliajoin ja tämän avulla pyritään vertikaaliseen integrointiin.
6. Esitetään perustavoitteiden lisäksi ne tavoitteet, joihin pyritään eriyttämisessä.
7. Esitetään opettajalle ohjeelliset tuntimäärät eri tavoitteisiin pääsemiseksi
8. Suunnitellaan summatiivinen arviointi käsitteiden hierarkkisen järjestyksen huomioonottavaksi. (Koponen 1973, 35–36.)

Liite 2: Haapasalon jaottelu murtolukujen opettamisesta

1. luokka:

- monipuolinen tutustuminen kokonaislukujen maailmaan pelien, leikkien, mallien,
  mittaamisen ja laskinten avulla
- mittaamisen käsitteen perusteiden oppiminen

2. luokka:

- kokonaislukualuetta laajennetaan
- jakolaskun käsitteen ymmärtäminen konkreettiin toimintaan perustuen

2. luokka

- jakolaskukäsitteen varmentaminen ja jakolaskutaidon harjoittelu

3. luokka

- jakolaskutaitojen varmentaminen
- murtolukukäsitteen muodostusprosessin perinpohjainen ja huolellinen ohjaaminen
- prosenttikäsitteeseen liittyvät perusskeemat murtoluvun avulla

4. luokka

- murtolukukäsitteen varmentaminen ja toimintakaavojen koonta
- desimaalilukukäsitteen muodostusprosessin ohjaaminen, kytkettynä mittaamiseen, mittaustulosten esittämiseen sekä laadun muunnoksiin
- prosenttikäsitteeseen liittyvät perusskeemat desimaaliluvun avulla

5. luokka

- prosenttikäsitteeseen liittyvien esitettävien skeemojen koonta ja varmistaminen

Haapasalo on poistanut omasta esityksestään kolmannelta luokalta murtoluvut ja desimaaliluvut, neljänneltä luokalta desimaaliluvut sekä kuudennelta luokalta monimutkaiset murto- ja desimaalilukujen laskutoimitukset. (Haapasalo 1993b, 17–23.)

Liite 3: Murtolukujen oppiminen vuosiluokittain Hei, nyt lasketaan! –kirjasarjassa

3. luokka

- yhtäsuuriin osiin jakaminen
- yksi kolmasosa ja kaksi kolmasosa
- neljäs- ja viidesosat
- murtoluvun merkitseminen ja lukeminen
- yksi kokonainen murtoluvun muodossa
- suuruusvertailu
- osan laskeminen

4. luokka

- osoittaja ja nimittäjä
- sekamerkintä
- samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku
- murto- ja desimaalilukujen välinen yhteys

5. luokka

- laventaminen
- supistaminen
- erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku
- murtolukujen kertominen luonnollisella luvulla

6. luokka

- murtomerkinnän muuntaminen
- sekamerkintöjen yhteen- ja vähennyslasku
- murtoluvun jakaminen luonnollisella luvulla
- murtolausekkeen supistaminen
- murto-osan laskeminen luvusta
- moninkertainen
- suhde

Liite 4: Tutkimuksen luokitusrunko

Luokitusrunko	1. luokka	2. luokka	3. luokka	4. luokka	5. luokka	6. luokka
OPPILAANKIRJA						
Erilaisten tehtävien suhde lukumääränä: 1. Mekaaniset 2. Sanalliset 3. Ongelman-ratkaisu (Koponen 1995, 159)	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.
Mekaanisten tehtävien suhde muihin lukumääränä: 1. Mekaaniset 2. Muut	1. 2.	1. 2.	1. 2.	1. 2.	1. 2.	1. 2.
Koherenssi: Kuinka monella aukeamalla on teema? (Armbruster & Anderson 1988, 47–52)						
Kuvitus: 1. Tietoa antavat kuvat 2. Tekstiä kuvittavat kuvat 3. Viihdyttävät kuvat (Selander 1988, 102–119)	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.
OPETTAJANKIRJA						
Ylimääräisten tehtävien määrä						
Erilaisten tehtävien suhde: 1. Mekaaniset 2. Sanalliset 3. Ongelman-ratkaisu (Koponen 1995, 159)	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.
Eriyttävien tehtävien lukumäärä						

Sisältöä kuvailevia kysymyksiä:

Oppilaankirja:

1. Miten murtoluvun oppiminen etenee? Mistä lähdetään liikkeelle? Mihin päästään peruskoulun kuudennen luokan lopussa? Mitä asioita murtolukukäsitteestä otetaan esille? Eteneekö oppiminen Haapasalon käsitteenmuodostusprosessin mukaan? (Haapasalo 1994, 203–206.)
2. Onko tehtävien kieli luokka-asteelle sopivaa?
3. Esiintyykö vaikeita käsitteitä?
4. Kuinka konkreettisia tehtävät ovat? Liittyvätkö ne oppilaan arkielämään?
5. Esiintyykö murtolukuja muualla kuin murtolukujaksossa?

Opettajankirja:

1. Millaisia tehtäviä opettajankirjassa on?
2. Kuinka selkeät ohjeet opettajalle on annettu kirjan/tehtävien käyttämisestä?
3. Annetaanko opettajankirjassa ohjeita murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin linkittämiseen? (Haapasalo 1992)
4. Minkälaista osaamista kokeet mittaavat?

Liite 5: Koeluokitus Laskutaito 6 -oppilaankirjasta

Luokitusrunko	1. luokka	2. luokka	3. luokka	4. luokka	5. luokka	6. luokka
OPPILAANKIRJA						
Erilaisten tehtävien suhde lukumääränä: 1. Mekaaniset 2. Sanalliset 3. Ongelmanratkaisu (Koponen 1995, 159)	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 267 2. 86 3. 48
Mekaanisten tehtävien suhde muihin lukumääränä: 1. Mekaaniset 2. Muut	1. 2.	1. 2.	1. 2.	1. 2.	1. 2.	1. 267 2. 134
Murtolukulaskujen sivumäärä						22
Koherenssi: Kuinka monella aukeamalla on teema? (Armbruster & Anderson 1988, 47–52)						7
Kuvitus: 1. Tietoa antavat kuvat 2. Tekstiä kuvittavat kuvat 3. Viihdyttävät kuvat (Selander 1988, 102–119)	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 41 2. 13 3. 0
OPETTAJANKIRJA						
Ylimääräisten tehtävien määrä						
Erilaisten tehtävien suhde: 1. Mekaaniset 2. Sanalliset 3. Ongelmanratkaisu (Koponen 1995, 159)	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.
Eriyttävien tehtävien lukumäärä						

4. Mielestämme kirjan tehtävät eivät liittynyt nimenomaan kuudesluokkalaisen elämään ja nimenomaan heidän arkeensa. Kirjan aukeamien aiheina olivat muun muassa linnut, myyjäiset, laiva ja pallomeri. Muutamasta konkreettisesta tehtävästä voisi olla hyötyä arkielämässä, esimerkiksi ruokaohjeet, jos niitä pitää suurentaa tai pienentää.
5. Murtolukuja esiintyi murtolukujakson lisäksi: jakolaskuissa, desimaaliluvuissa, suhteiden laskemisessa, mittakaavamuunnoksissa sekä prosentissa. (Koivisto, Salonen, Uus-Leponiemi & Ilmavirta 2000)

Sisältöä kuvailevia kysymyksiä:

Oppilaankirja:

1. Miten murtoluvun oppiminen etenee? Mistä lähdetään liikkeelle? Mihin päästään peruskoulun kuudennen luokan lopussa? Mitä asioita murtolukukäsitteestä otetaan esille? Eteneekö oppiminen Haapasalon käsitteenmuodostusprosessin mukaan? (Haapasalo 1994, 203–206.)
2. Onko tehtävien kieli luokka-asteelle sopivaa?
3. Esiintyykö vaikeita käsitteitä?
4. Kuinka konkreettisia tehtävät ovat? Liittyvätkö ne oppilaan arkielämään?
5. Esiintyykö murtolukuja muualla kuin murtolukujaksossa?

Opettajankirja:

1. Millaisia tehtäviä opettajankirjassa on?
2. Kuinka selkeät ohjeet opettajalle on annettu kirjan/tehtävien käyttämisestä?
3. Annetaanko opettajankirjassa ohjeita murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin linkittämiseen? (Haapasalo 1992)
4. Minkälaista osaamista kokeet mittaavat?