1356

PERUSKOULUN 6. LUOKKALAISTEN ONGELMANRATKAISUTAIDOT JA ONGELMANRATKAISUPROSESSISSA ILMENEVÄT RATKAISUA HAITTAAVAT TEKIJÄT

Aleksi Rantala

Kasvatustieteen pro gradu- tutkielma
Kesä 2002
Opettajankoulutuslaitos
Jyväskylän yliopisto
Ohjaajat:
Maija Ahtee
Pasi Venäläinen

TIIVISTELMÄ

Peruskoulun 6. luokkalaisten ongelmanratkaisutaidot ja ongelmanratkaisuprosessissa ilmenevät ratkaisua haittaavat tekijät.

Tutkimuksessa tarkastellaan peruskoulun 6. luokkalaisten oppilaiden ongelmanratkaisuprosessia. Tutkimuksessa kartoitetaan sitä, kuinka oppilaat osaavat ratkaista ongelmia, minkälaisia ratkaisua haittaavia tekijöitä heillä ilmenee ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheissa ja, miten oppilaiden tehtäviä koskevat emootiot vaikuttavat ratkaisussa onnistumiseen. Tutkimusjoukkona on 113 peruskoulun kuudesluokkalaista Jyväskylän seudulta.

Tutkimusaineisto kerättiin matemaattisia ongelmatehtäviä sisältävän koulusaavutustestin avulla useasta oppilasryhmästä. Aineistoa analysoitiin sekä kvantitatiivisesti että kvalitatiivisesti. Kvalitatiivista analyysia käytettiin oppilaiden ratkaisuja laadullisesti arvioitaessa ja ratkaisua haittaavia tekijöitä kartoitettaessa. Näin tieto muunnettiin numeeriseen muotoon ja sitä analysoitiin tilastollisesti.

Oppilaat osasivat ratkaista ongelmakeskeisiä matemaattisia tehtäviä keskimäärin tyydyttävästi. Ratkaisua haittaavina tekijöinä aineistosta ilmenivät yleisyysjärjestyksessä tehtävän rakenteen ymmärtämisen vaikeudet tai käsitteellinen puutteellisuus, oppilaan käyttämät pinnalliset strategiat, uskomukset tai väärät käsitykset, huolimattomuus, laskuvirhe tai kopiointivirhe, tekstiin liittyvät tekijät sekä ajanpuute. Lisäksi oppilaiden tehtäviä koskevat emootiot olivat voimakkaasti yhteydessä ratkaisuissa onnistumiseen. Näin ollen näyttäisi siltä, että oppilaiden arkielämään liittyvien ongelmakeskeisten tehtävien ratkaisutaidot eivät ole keskimäärin kovin korkeatasoisia, haittaavat tekijät riippuvat hyvin pitkälle tehtävätyypistä ja opetustyylistä ja tehtävien aihepiirit ja kiinnostavuus vaikuttavat voimakkaasti siihen, miten niitä osataan ratkaista.

Avainsanat: ongelma, ongelmanratkaisuprosessi, konstruktivismi

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

Tutkimuksen aiheen ja näkökulman valintaan ovat pitkälti vaikuttaneet omat kokemukset koulukasvatuksesta. Kouluaikanani matematiikan opetus oli hyvin perinteistä oppikirjan mukaisesti etenevää peruslaskutoimitusten mekaanista harjoittelua. Sanallisia tehtäviäkin oli, mutta usein ne olivat mekaanisia tehtäviä verbaalisessa muodossa, joten ongelmakeskeisyys oli vähäistä. Itse olin innostunut koulumatematiikasta ja omaksuin helposti opetettuja asioita, mutta oli myös paljon niitä, joille matematiikka arkielämästä irrallisena oppiaineena jäi hataralle pohjalle eikä herättänyt henkilökohtaista kiinnostusta. Kun aloin opiskella yliopistossa matematiikan perusteita ja didaktiikkaa, kaikki aiempi opetus kyseenalaistettiin hyvinkin rajusti. Lisäksi olen kuullut sanottavan, että se, miten ihmiselle on opetettu, siten hän myös itse opettaa huolimatta koulutuksesta. Tämän vuoksi halusin päästä syvemmälle matematiikan opetuksen näkökulmiin ja päästä opettamisen paradigmasta toiseen. Koin pro gradu-tutkielman yhdeksi mahdollisuudeksi oppia matematiikan ongelmakeskeisyyteen liittyvää tietämystä syvällisellä tavalla ja saada ymmärrystä oppilaiden osaamisesta ongelmanratkaisuun liittyen.

Viime vuosikymmenen aikana monet tutkijat osoittivat huolestuneisuutensa siitä, että matematiikan opetus näyttää yhä edelleen nojaavan perinteisen opetuksen kaavaan ja vanhentuneisiin oppikirjoihin sekä mekaaniseen toistamiseen (esim. Vaahtokari & Vähäpassi 1998). Tällöin oppilaiden mekaaniset laskutaidot saattavat kehittyä melko hyvälle tasolle, mutta käsitteellinen ymmärtäminen ja soveltamisen taidot jäävät puutteellisiksi. Kuitenkin kansainväliset tutkimukset Timss ja Pisa vuosituhannen vaihteessa osoittivat, että oppilaiden osaaminen matematiikassa on kansainvälisesti miltei hieman keskitasoa korkeampaa. Lisätutkimuksia siis tarvittaisiin, jotta saataisiin tarkemmin selville, millä osaamisen alueilla suurimmat ongelmat ovat, kun joillakin alueilla suomalaisten peruskoululaisten osaamista on luonnehdittu jopa korkeatasoiseksi. Ei ole syytä sokeasti vedota myönteisesti yllättävään tulokseen kansainvälisellä tasolla ja tuudittautua tilanteeseen, vaan porautua tarkemmin alueisiin, joita voidaan kehittää.

Tämän tutkimuksen tavoitteena on saada ymmärrystä yhdestä keskeisestä matematiikan opetuksen osa-alueesta. Tutkimustehtävänä on peruskoulun kuudesluokkalaisten oppilaiden ongelmanratkaisuprosessin kartoittaminen. Tutkimusongelmiin perehtymällä pyritään saamaan käsitys siitä, miten oppilaat osaavat ratkaista ongelmia, minkälaisia ratkaisuja haittaavia tekijöitä heillä ilmenee eri ongelmanratkaisuprosessin vaiheissa ja millä tavoin oppilaiden emootiot tehtävistä vaikuttavat ratkaisuissa onnistumiseen. Edellä mainittujen asioiden selvittämiseksi käytettiin aineistonhankinnassa koulusaavutustestiä, joka teetettiin useassa oppilasryhmässä, sekä siihen liittyviä erityisiä ohjeita. Oppilaiden ratkaisuja käsiteltiin tämän jälkeen sekä kvantitatiivisesti että kvalitatiivisesti.

2 MATEMATIIKAN OPETUKSEN TAVOITTEET JA NIIDEN TOTEUTUMINEN

Matematiikan opetuksen tavoitteet valtakunnallisella tasolla on määritelty peruskoulun opetussuunnitelmien perusteissa (1994). Tämän tutkimuksen kannalta on tärkeää kartoittaa tarkemmin tavoitteita, joita valtakunnallisesti on peruskoulun kasvatustyölle asetettu. Lisäksi tarvitaan aiempaa tietämystä siitä, kuinka asetetut tavoitteet toteutuvat käytännön koulutyössä: opettajien toteuttamassa opetuksessa, oppikirjojen ja oppimateriaalien käytössä sekä oppilaiden oppimistuloksissa.

2.1 Moderni oppimiskäsitys ja valtakunnallinen opetussuunnitelma

Valtakunnallisen opetussuunnitelman perusajatus on lähtökohdiltaan selkeästi konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukainen. Toiminnallisuus ja käytännönläheisyys sekä oppilaan tilanteen ja henkilökohtaisen kiinnostuksen huomioiminen olisi oltava työtapojen ja materiaalien valinnassa korostetussa asemassa. Matematiikan kohdalla tavoitteena on asenteen muokkaaminen myönteiseen suuntaan siten, että tuodaan esiin matematiikan hauskuus, hyödyllisyys ja esteettisyys ongelmanratkaisun keinoin. Tätä kautta päästään myös eteenpäin oppilaiden matemaattisen ajattelun kehityksessä. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 17–18.) Matemaattinen ajattelu tässä ei tarkoita suinkaan ajattelua matematiikasta, vaan se muodostuu tietyistä matemaattisiksi tunnistettavista operaatioista ja prosesseista sekä niihin liittyvästä dynamiikasta. Ahtee ja Pehkonen (2000, 18-19) luettelevat ajattelun strategioihin kuuluviksi esimerkiksi luokittelun, järjestämisen, deduktiivisen ja induktiivisen päättelyn sekä ongelmanratkaisutaidot. Ongelmanratkaisun kannalta keskeisiin matemaattisiin ajattelun prosesseihin kuuluvat muun muassa erikoistapaukseen siirtyminen, otaksumien esittäminen, yleistäminen ja vakuuttaminen. (Ahtee & Pehkonen 2000, 18–19.)

Vaulamo ja Pehkonen (1999, 25) esittävät, että ongelmanratkaisun tulisi olla valtakunnallisen opetussuunnitelman mukaan matematiikan opetuksen peruselementti ja siinä tulisi korostaa laajaa ja rikasta lähestymistapaa. Oppilaiden tulisi jakaa ideansa ja lähestymistapansa muiden kanssa sekä tottua esittämään ongelmia useilla eri tavoilla, etsiä erilaisia ratkaisumalleja niihin sekä muotoilla itse ongelmia todellisista arkipäivän tilanteista. Lisäksi heidän tulisi oppia arvostamaan ratkaisuprosessia yhtä paljon kuin lopputulosta. Näyttäisi siltä, että opetussuunnitelmatasolla vallitsevana viitekehyksenä on moderni oppimiskäsitys ja keskeisenä elementtinä oppilaan arkielämästä ja henkilökohtaisesta kiinnostuksesta nouseva ongelmakeskeisyys, mutta kuinkahan on oppikirjojen, käytännön opetuksen ja oppimistulosten laita.

2.1.1 Konstruktivistinen oppimiskäsitys ja ongelmanratkaisu opetuksen tavoitteissa

Peruskoulun matematiikan keskeisenä tavoitteena on antaa lapsille mahdollisuus hankkia sellaiset matemaattiset tiedot ja taidot, jotka luovat pohjaa jatko-opinnoille ja antavat valmiuksia selviytyä jokapäiväisissä toiminnoissa ja työelämässä. Opetuksen tavoitteena on ennen kaikkea kehittää oppilaan kykyä luokitella, jäsentää ja mallintaa ympäröivässä maailmassa eteen tulevia tilanteita aiemmin oppimillaan käsitteillä. Lisäksi on tavoitteena harjaannuttaa oppilaita johdonmukaiseen ja täsmälliseen ajatteluun sekä asioiden esittämiseen yhtälailla suullisesti kuin kirjallisestikin. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 74.)

Matematiikan opetuksessa lähtökohtana on se, että oppilas on aktiivinen tiedon hankkija, käsittelijä, tallentaja ja soveltaja, jolle oppiminen on opittavien asioiden liittämistä hänen aiempiin tietoihinsa sekä hänen aikaisempien ajatus- ja toimintamalliensa rekonstruoimista ja täydentämistä. Oppimistilanteet tulisi rakentaa keskustelunomaisiksi, kokeileviksi sekä ongelmakeskeisiksi siten, että lähtökohtana on oppilaille tutut konkreettiset arkielämän tilanteet. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 76.) On tärkeää, että opetuksessa etsitään ja kehitetään menetelmiä, joiden avulla voidaan huomioida oppilaiden kokemukset, tarpeet ja auttaa heitä löytämään sekä matematiikan luonne apuvälineenä arkielämässä että aineena, joka tarjoaa aktiviteetteja esimerkiksi leikkiin ja taiteeseen (Häggblom 1993, 91).

Opetuksessa tulisi painottaa lukukäsitteen ymmärtämistä, peruslaskutoimitusten merkitysten ymmärtämistä, ongelmaratkaisutaitojen kehittämistä, matematiikan puhumista sekä erilaisten strategioiden ja arviointikeinojen merkitystä. Sen sijaan mekaanisten, samantyyppisten tehtävien suorittamista, yhteen strategiaan ja vastaukseen perustuvia tehtäviä ja kaikilla luokka-asteilla samassa muodossa tapahtuvaa kertaamista vuosi vuodelta tulisi vähentää. (Halinen, Hänninen, Joki, Leino, Näätänen, Pehkonen, Pehkonen, Sahlberg, Sainio, Seppälä & Strang 1991, 25.) Vaikkakin valtakunnallisen opetussuunnitelman suuntaviivat ja tavoitteet antavat melko väljät raamit toteuttaa matemaattista kasvatustyötä, siinä halutaan selvästi sanoutua irti perinteiselle opetukselle tyypillisestä oppikirjaan nojaavasta mekaanisten tehtävien suorituskeskeisestä laskuharjoittelusta.

Alusta alkaen matematiikassa tähdätään käsitteiden ymmärtämiseen, mikä tapahtuu konkreetin toiminnan kautta ja pitkään askartelua ja leikinomaisuutta korostaen. Lukujen numeeriset- eli symbolimerkinnät sekä niiden väliset peruslaskutoimitukset otetaan vähitellen käyttöön vasta käytännön ongelmatilanteiden tarkastelun, oppilaiden verbaalisten tulkintojen ja mittaamisen kautta. Keskeisinä elementteinä opiskelutilanteissa ovat kysymysten asettaminen, ongelman hahmottaminen, tehtävän rajaaminen, oikeiden ratkaisustrategioiden löytäminen ja läpivieminen sekä tulosten arviointi ja muotoilu. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 76.)

Peruskoulun luokilla 1-6 opiskelussa on keskeistä, että oppilas tottuu ympärillä olevan maailman havainnointiin ja sen tulkitsemiseen matematiikan keinoin sekä ongelmatilanteiden tunnistamiseen ja niissä toimimiseen. On tärkeää, että oppilas ymmärtää luonnollisen luvun sekä murto- ja desimaaliluvun käsitteet ja oppii peruslaskutaidot ja näiden käyttämisen arkielämän ongelmien ratkaisemisessa sekä tottuu arvioimaan suuruusluokkia ja tulosten oikeellisuutta. Tavoitteena on myös oppia arvioimaan ja mittaamaan pituutta, massaa, pinta-alaa, tilavuutta, kulmaa ja aikaa sekä suureiden tavallisimmat mittayksiköt ja niiden muunnokset. Lisäksi tavallisimpien geometristen kappaleiden ja kuvioiden tunnistamisen ja piirtämisen oppiminen on opiskelussa keskeistä. Oppilaan tulee myös saada perehtyä asioiden ja esineiden lajitteluun, luokitteluun ja säännönmukaisuuksien löytämiseen ympärillä olevasta maailmasta ja näiden kuvaamiseen sekä tottua laatimaan, lukemaan ja tulkitsemaan yksinkertaisia taulukoita ja diagrammeja. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 78.)

Vaikka valtakunnallista opetussuunnitelmaa on uudistettu vastaamaan nykyistä oppimiskäsitystä, ei muutos käytännön opetuksessa ole itsestään selvä asia. Opetus nojaa edelleen tukevasti opettajien opetukseen ja tehtävien laskemiseen itsekseen kirjasta. Opetuksen uudistamisessa on lähdettävä liikkeelle vallitsevasta opetuskäytännöstä ja etsittävä kehittämiselle ja uudistumiselle sellaisia strategioita, joita opettajat olisivat tukemassa. Eri maiden opetussuunnitelmaprosessit osoittavat, että muutoksen aikaansaaminen on hidasta. (Kupari 1993, 48–49.) Muutoksen aikaansaamiseksi tarvitaan sekä hallinnollis-organisatorisia että pedagogisia keinoja. Matematiikan opetuksen keskeisimpinä kehittämishaasteina on syytä mainita opetustradition uudelleenarviointi, opettajan roolin muuttuminen, mittavat haasteet opettajien perus- ja täydennyskoulutukselle, oppilaskeskeisemmät lähestymistavat ja työskentelymuodot, oppimateriaalin uudistuminen sekä opetussuunnitelmien uudistaminen. (Kupari 1993, 125–128.)

Jo hyvin varhaisessa vaiheessa lapset käyttävät matematiikkaa monin eri tavoin ratkaistessaan arkipäivän ongelmatilanteita. He ratkaisevat niitä oman luonnollisen matemaattisen tietonsa ja taitonsa varassa. Ratkaiseva vaihe lapsen matemaattisen kehityksen kannalta on lapsen siirtyminen luonnollisen matematiikan maailmastaan formaalia symbolikieltä käyttävään koulumatematiikkaan. Tämän vuoksi olisikin hyvin tärkeää, että oppilaan aiempi matemaattinen tietämys saataisiin aktivoitua otettaessa käyttöön matematiikan symbolikieltä kouluopetuksessa. (Sorvari 1999, 145.) Tämä mahdollistuu vain siten, että lähestytään matematiikkaa oppilaan arkielämän näkökulmasta.

Osoituksena siitä, että yhteyttä oppilaan luonnollisen matematiikan ja koulumatematiikan välille ei synny, voidaan nähdä tutkimusten tulokset siitä, minkälaisia oppilaiden uskomukset matematiikasta ja sen oppimisesta ovat. (Ahtee & Pehkonen 2000, 41.) Uskomuksia voidaan pitää tässä melko vakaina johonkin asiaan tai asiantilaan liittyvinä käsityksinä, joille ei voida löytää pitävää perustelua objektiivisessa tarkastelussa (Pehkonen 1993, 36). Ensinnäkin oppilaat pitävät matematiikkaa yleisesti omana itseriittoisena aineenaan, jolla ei ole lainkaan yhteyksiä todellisuuteen. Toiseksi oppilaat pitävät matemaattisia ongelmatehtäviä hyvin suppeina. Ne on joko ratkaistavissa alle kymmenessä minuutissa tai muuten niitä on mahdotonta ratkaista. Kolmanneksi oppilaiden mielestä matematiikan luominen kuuluu vain neroille, joiden aikaansaannoksia tavallinen yksilö voi vain yrittää muistaa ja käyttää. Tällaiset uskomukset johtuvat siitä, että oppilas omaksuu käsityksensä koulumatematiikasta usein niin yksipuolisen matematiikan opetuksen kautta, jossa ei korosteta oppilaan arkielämän huomioimista eikä ongelmanratkaisua ja oppimisprosessin sijaan paneudutaan oppilaiden laskusuorituksiin. (Ahtee & Pehkonen 2000, 41.)

Pelkkä mekaanisten tehtävien suorittaminen yksin tai pienryhmässä ei kehitä optimaalisesti matematiikan taitoja. Usein oppilaat ymmärtävät matematiikan olevan loputtomien tehtäväsarjojen mekaanista ratkomista ja mahdollisesti pelkän valmiin mallin jäljittelyä. Keskinäisen kommunikoinnin ja puheen osuus joudutaan matematiikan opetuksessa sivuuttamaan ajanpuutteen vuoksi. Siten oppilaille muodostuva kuva matematiikasta on kielteinen, käsitys itsestä oppijana on heikko tai heistä tulee omiin mahdollisuuksiinsa nähden alisuoriutujia. (Halinen ym. 1991, 14–15.)

Viime aikoina sekä kouluissa että oppimisen tutkijoiden piirissä on kasvavassa määrin kiinnitetty huomiota siihen, että perinteisesti toteutetulla matematiikan opetuksella, jossa keskitytään varsinkin alkuvuosina aritmeettisten perusoperaatioiden opetteluun, ei kuitenkaan saavuteta annettuja tavoitteita. Oppilaat oppivat suuren joukon merkitsemistapoja, laskuoperaatioita ja algoritmeja sekä näiden muistituiksi kehiteltyjä sääntöjä, mutta niiden perimmäinen tarkoitus ja ymmärtäminen jää puutteelliseksi. He eivät opi ajattelemaan matemaattisia ongelmia ja niiden ratkaisuvaihtoehtoja joustavasti ja strategisesti. Oppilaat eivät myöskään opi soveltamaan matemaattista tietouttaan erilaisissa elämäntilanteissa, vaan päinvastoin, monien oppilaiden toimintaa luonnehtii matematiikkaa koskevat väärät uskomukset ja pinnalliset strategiat. (Kinnunen & Vauras 1998, 273.)

Matematiikan eri osa-alueilla on tärkeitä peruskäsitteitä, jotka oppilaiden tulisi ymmärtää. Hyvän käsitteellisen osaamisen lisäksi oppilaiden tulisi kehittää matemaattisia taitoja yksinkertaisesta aritmetiikasta monimutkaisiin algebrallisiin tehtäviin. (Berry & Sahlberg 1995, 47.) Helsingissä, Kauhajoella ja Mäntässä tehdyn kartoituksen mukaan peruskoulun luokkatasoilla 1– 6 oppilaiden mekaaninen laskutaito on melko hyvä, mutta keskeisten käsitteiden hallinnassa ja soveltamisessa on huomattavia puutteita. Laskutaidot eivät kuitenkaan ole pysyviä, koska mekaaninen laskutaito perustuu peruskoulussa heikolle käsitteenhallinnalle. Siksi vaikeudet kasautuvat peruskoulun luokkatasoilla 7– 9 ja oppilailla on suuria vaikeuksia keskeisen oppiaineksen hallinnassa. (Ikäheimo 1995, 16.)

Perinteinen opetus keskittyy liiaksi matemaattisia ongelmiakin ratkaistaessa teknisten menettelytapojen ja laskuoperaatioiden harjoitteluun. Sen sijaan käsitteellisen tai strategisen tason pohdintoihin ei käytetä riittävästi aikaa. Lapset eivät opi suhteuttamaan laskuteknisiä ratkaisujaan käsillä olevaan ongelmaan, käytettyjen lukujen ja menettelytapojen matemaattiseen sisältöön ja strategisiin vaihtoehtoihin, vaan tukeutuvat pinnallisiin operaatioihin, omiin sääntöihin ja vääriin käsityksiin, joita laskutehtävien operaatioiden ja tekniikkojen maailma heille tarjoaa. (Kinnunen & Vauras 1998, 273.) Tutkimusten mukaan juuri ajattelustrategiat näyttävät olevan matematiikassa keskeisiä erottavia tekijöitä hyvin ja huonosti menestyvien oppilaiden välillä. Tämän tyyppisiä tuloksia on saatu matematiikan osaamisesta Suomessa aina 90-luvun alkupuoliskolta 90-luvun loppupuoliskolle (Pehkonen 2000, 376). Lisäksi oppilaita erottaa toisistaan tietämys erilaisista ongelmista, erilaiset yleiset ongelmanratkaisustrategiat sekä perusoperaatioihin liittyvien algoritmien kehittyneisyys, oikeellisuus ja automaattisuus (Mayer 1985, 148).

Jyväskylän yliopiston koulutuksen tutkimuslaitos on ollut mukana kolmannessa kansainvälisessä matematiikka ja luonnontiedetutkimuksessa nimeltä TIMSS 1999. Sen mukaan suomalaisten oppilaiden tulokset olivat kuitenkin luonnontieteissä selvästi kansainvälistä keskitasoa korkeammat ja matematiikassa oli vain kuusi maata, jotka olivat Suomea tilastollisesti merkitsevästi parempia. Kokonaisuutena suomalaisten 7. luokkalaisten matematiikan suoritukset olivat tutkimuksen OECD-maiden keskitasoa. Suomessa OECD-maiden keskitasosta poikkeavia parhaiten osattuja vahvoja sisältöalueita olivat luvut ja laskutoimitukset sekä tilastot ja todennäköisyys, kun taas heikommin osattuja olivat geometria ja algebra. (Kupari, Reinikainen, Nevanpää & Törnroos 2001, 3–4.)

Lisäksi PISA 2000-tutkimusten ensituloksien mukaan suomalaiset peruskoulun oppilaat menestyvät matematiikassa kansainvälisesti huomattavasti aikaisempaa paremmin ja heidän osaamisensa on korkeatasoista juuri matemaattisen tiedon soveltamisessa yhteyksissä, jotka vaativat asioiden ymmärtämistä, pohtimista ja perustelemista. Sisällöllisesti 15-vuotiaiden suomalaisnuorten osaaminen oli tasaista ja korkean keskiarvon lisäksi tulosten keskihajonta oli erittäin pieni. Lisäksi heikkojen oppilaiden osuudet olivat merkittävästi OECD-maiden keskitasoa pienemmät ja hyvin menestyneiden osuudet vastaavasti hieman suuremmat. (Välijärvi, Linnakylä, Kupari, Reinikainen, Malin & Puhakka 2001, 7, 16.)

2.1.2 Konstruktivistinen oppimiskäsitys ja matematiikan opetus

Voidaan sanoa, että konstruktivismi on tullut matematiikan opetuksen tutkimuksen ja käytännön teoreettiseksi perustaksi vasta 1980-luvulla, vaikka jo paljon aiemmin Piaget'lla oli teorioissaan konstruktivismin olennaiset tekijät (Leino 1993, 11). Oppilaan aikaisemman tiedon ja ennakkokäsitysten merkitys uuden oppimisessa on tutkimusten myötä korostunut ja johtanut Piaget'n teorioiden vahvistumiseen. Yksilökeskeisen konstruktivismin ohella huomio on kuitenkin kiinnittynyt myös yhteisen kielen ja kulttuurin merkitykseen eli sosio-kulttuurisen ympäristön osuuteen oppimisessa. Muodostuneet uudet konstruktivismin muodot, sosioperspektiiviset konstruktionismit, ovat osaltaan myös vaikuttamassa matematiikan opetukseen ja oppimiseen. (Leino 1998, 39.)

Piaget'n teoriat ihmisen ajattelun ja asioiden ymmärtämisen asteittaisesta kehittymisestä ovat olleet opettajankoulutuksessa jo ainakin kolmen vuosikymmenen ajan ja siten jokaisen matematiikan opettajan tuntemia. Myös se tapa, jolla lapsi ja nuori konstruoi itselleen merkityksellistä tietoa toimimalla esine- ja sosiaalimaailmassa, on opettajalle tuttu Piaget'n konstruktivismista. Tämä on hyvin merkityksellistä, sillä jokainen oppilas joutuu konstruoimaan matematiikan opetuksessa esille tulevia käsitteitä, operaatioita, rakenteita ja ideoita voidakseen käyttää niitä matemaattisissa ongelmatilanteissa. Opettaja ei voi oppia oppilaan sijasta eikä myöskään siirtää tietojaan oppilaalle. Konstruktivismia voidaan siten pitää opettajalle yleisenä lähestymistapana tai viitekehyksenä oppimisen ymmärtämisessä, minkä mukaan hyväksytään oppijan osuus tiedon muodostumisessa tärkeäksi. (Leino 1998, 39.)

Viimeisen parinkymmenen vuoden aikana on oppijan aikaisempia tietovarastoja ja opittuja lähestymistapoja alettu korostaa uuden tilanteen havaitsemisessa ja tiedon oppimisessa. Kun oppijalla ja hänen aiemmin oppimallaan on olennainen osuus uuden oppimisessa, on aiemmin opitun esille saaminen ja opetuksen mukauttaminen siihen olennainen osa opettajan työtä. Opetus ei ole vain yleisesti hyväksyttyjen määritelmien ja operaatioiden esittämistä laajenevana käsitejärjestelmänä, vaan myös oppilaiden omiin käsityksiin, tulkintoihin, tarkoituksiin ja merkityksiin vaikuttamista. (Leino 1998, 40.) Konstruktivistisen oppimisnäkemyksen mukaan oppilaat muodostavat omat käsityksensä asioista omista lähtökohdistaan omien tietojensa ja taitojensa, kokemustensa ja ajattelunsa avulla (Ahtee 1998, 138).

Oppimisen kannalta ovat erittäin tärkeitä oppimista ja tietoa koskevat tiedot. Oppijan itsensä hallitsema tieto siitä, kuinka hän voi liittää uutta tietoa jo aiemmin tietämäänsä on merkittävällä tavalla yhteydessä oppimisen tehokkuuteen. Yksilön tietoa omista strategioistaan ja menettelytavoistaan voidaan kutsua metakognitioksi. On siis kyseessä oppimista ohjaava, arvioiva ja korjaava toiminta. (Kuusinen 1995, 54.) Ruokamon (2000, 54) mukaan metakognitiivinen tieto voidaan määritellä tiedoksi itsestä oppijana ja taidoksi kontrolloida omia oppimistoimintojaan, mikä ilmenee esimerkiksi kykynä pohtia relevantteja ongelmanratkaisustrategioita tietyssä tilanteessa sekä arvioida niiden pätevyyttä.

Otettaessa konstruktivismi matematiikan opetuksen lähtökohdaksi pääongelmaksi muodostuu oppilaiden esiymmärrysten ja merkitysten esille saaminen kulloinkin kohteena olevasta aihepiiristä Opetuksessa konstruktivismi suuntaa tarkastelun oppilaiden elämismaailmaan, eikä kyse ole vain matematiikan ja ympäristön välisestä suhteesta.

Tärkeintä onkin ottaa selvää, minkälaisia uskomuksia ja esikäsityksiä oppilailla jo on, miten ne on ymmärrettävissä, mitkä tulisi saada muutetuksi ja minkälaisin keinoin. (Leino 1993, 16.) Tämä on merkityksellistä siksi, että oppilaat tuovat opetustilanteeseen omiin kokemuksiinsa perustuvat käsityksensä, jotka usein ovat kapea-alaisia ja vieläpä ristiriidassa nykyisin hyväksytyn tiedon kanssa. (Ahtee 1998, 138.)

Konstruktivistinen opettaja ei ole tiedonjakaja, vaan ennemminkin oppilaan tukija ja opintojen ohjaaja. Opettajan tärkeimpiä tehtäviä ovat oppimistilanteiden, -materiaalien ja -välineiden valinta, pyrkimys paljastaa oppilaiden virheellisiä ajattelumalleja ja strategioita ja ohjata havaitsemaan ja korjaamaan niitä sekä sopivien ongelmien ja kysymyksien herättäminen siten, että myös mahdollisimman moni oppilas saa esittää omia ratkaisumallejaan ja -menetelmiään. (Strang 1993, 137.) Sen lisäksi, että opettajan tulee ohjata oppilaan omaan kokemukseen pohjautuvien käsitysten kehittämistä ja muuttamista tieteellisen tiedon kanssa yhtäpitäviksi, on ratkaisevan tärkeää, että oppilas ottaa aktiivisen roolin omasta oppimisestaan (Ahtee 1998, 138).

Konstruktivistisesta oppimiskäsityksestä huolimatta matematiikan opetus näyttää yhä edelleen nojaavan perinteisen opetuksen kaavaan ja vanhentuneisiin oppikirjoihin. Tutkimusten mukaan kirjat ja alun pitäen opetusta helpottamaan syntyneet aineistot ovat alkaneet ohjata oppitunnin kulkua, läksyjen tekoa ja oppilaiden ajankäyttöä. Toiminnan kohteena ovat siis oppikirjat. Koska oppimateriaali on näin keskeisessä asemassa, siitä tulee itse asiassa opetussuunnitelma. Näin ollen oppikirjasta on tullut yksi tärkeimmistä matematiikan oppimis- ja opiskeluympäristön määrittäjistä. (Vaahtokari & Vähäpassi 1998, 214.)

Matematiikan opetuksessa uuden tiedon omaksuminen rakentuu aiemman käsitteellisen ja matemaattisen tiedon varaan. Oppikirjojen rakenne ja sisältö noudattavat tätä spiraaliperiaatetta, mutta eivät vieläkään tarjoa riittävästi haasteita monipuolisen matemaattisen ymmärryksen kehitykselle. Mekaanisten operaatioiden hallinta on kyllä tärkeä osataito uuden oppisisällön hallinnan kannalta, mutta niitä kehittävien tehtävien määrä oppikirjojen sisällöstä on yhä edelleen huomattavan suuri. Nykyisen peruskoulun 1– 6 -luokan matematiikan opetuksen käytänteissä painottuvat aivan liian paljon mekaanisten laskusuoritusten hallinta. Liian vähälle huomiolle jäävät puolestaan varsinaisen matemaattisen ymmärryksen kehittämiseen tähtäävät harjoitukset. (Sorvari 1999, 167–168.)

2.2 Ongelmanratkaisuprosessi

Opetussuunnitelmien perusteissa ja modernissa oppimiskäsityksessä korostetaan voimakkaasti ongelmanratkaisua ja sen osuutta erityisesti matematiikan opetuksessa. Ongelmanratkaisuun liittyvä teoreettinen tietämys on erittäin laaja-alaista. Tämän tutkimuksen kannalta on erittäin keskeistä tarkastella ongelmanratkaisuprosessia hieman tarkemmin. Tämän vuoksi on syytä määritellä käsite ongelma, selvittää ongelmanratkaisuprosessia ja ongelmanratkaisustrategioita.

2.2.1 Mikä on ongelma?

Haapasalo (1985) on tiivistänyt ongelmakäsitteen määrittelyn seuraavasti:

> “ Jotta tietty tilanne olisi määrätyllä hetkellä, tietylle henkilölle ongelma, sen on aiheutettava tässä yksilössä, juuri sillä hetkellä, tietoista, päämäärähakuista (ajattelu)toimintaa, joka tähtää tavoiteltavaan tulokseen ilman välittömästi havaittavia keinoja.“ (Haapasalo 1985, 32).

Määrätty hetki ja tietty henkilö ovat olennaisia, sillä ne osoittavat ongelman olevan suhteellinen käsite. Mikä on jollekulle ongelma, voi olla toiselle samalla hetkellä pelkkä rutiinitehtävä. Rutiinitehtäväksi kutsutaan sellaista tehtävää, jonka ratkaisemiseksi oppilaalla on tiedossaan valmis ratkaisumenetelmä. Edelleen sama henkilö saattaa kokea tietyn tehtävän eri tilanteissa ja eri aikoina täysin erilaisena. Ongelman luonne on siis usein sidottu voimakkaasti moniin osatekijöihin, kuten aikaan, paikkaan tai olosuhteisiin. (Haapasalo 1997, 17.) On siis täysin mahdollista, että tietylle yksilölle tämän hetken ongelma on myöhemmin rutiinitehtävä. Tehtävä on ongelma vain, jos sen ratkaisija saavuttaa pisteen, josta hän ei enää osaa jatkaa eteenpäin. Vaikka hänellä onkin ratkaisuun tarvittava tieto, niin ratkaisumenetelmää hänellä ei ole valmiina käytössään. Tällöin yksilö joutuu järjestämään tai rakentamaan aiemmin oppimaansa tietoa uudella tavalla suorittaessaan annettua tehtävää. (Vaulamo & Pehkonen, 1999, 13–14.)

Ongelma ei ole tehtävä sinänsä, vaan ennemminkin tehtävän ja tietyn yksilön välillä oleva erityinen suhde, joka tekee tehtävästä ongelman tuolle yksilölle. Siksi ongelmaa voidaan pitää suhteellisessa mielessä vaikeana tehtävänä yksilölle, joka yrittää selvittää sitä. Lisäksi vaikeuden tulee olla älyllistä ajattelua vaativaa eikä mekaaniseen laskemiseen perustuvaa vaikeutta. Tämän vuoksi tehtävä, jonka ratkaisijalla on jo valmiiksi käytössään ratkaisuun tarvittavat taidot, ei ole ongelma vaan harjoitus. (Schoenfeld

1985, 74.) Tehtävä on siis ongelma yksilölle, jos tehtävä vaatii ratkaisua tietyissä erityisissä olosuhteissa ja jos yksilö ymmärtää tehtävän, mutta ei löydä välittömästi strategiaa ratkaistakseen sen ja jos yksilö on motivoitunut etsimään ratkaisua (Schoen & Oehmke 1980, 216).

Kantowski (1980) puolestaan määrittelee ongelman seuraavasti: ongelma on tilanne, jossa yksilö on pakotettu yhdistämään aiemmin tietämäänsä uudella tavalla ratkaistakseen annetun tehtävän. Jos yksilö tietää välittömästi, miten toimia ratkaistakseen tehtävän, kyseessä on rutiinitehtävä. (Kantowski 1980, 195). Sekä Haapasalo että Kantowski määrittelevät ongelmakäsitteen jokseenkin samalla tavalla. Niiden mukaan keskeistä on, ettei yksilöllä ole ongelmatilanteessa käytössään valmiita keinoja, vaan aiempaa tietämystä on yhdisteltävä uudella tavalla. Nämä määritelmät eivät ole millään lailla ristiriidassa, vaan täydentävät toisiaan.

Tässä tutkimuksessa keskitytään sanallisiin ongelmakeskeisiin tehtäviin, jotka ovat sanallisessa muodossa esitettyjä matemaattisia ongelmia. Ne ovat yksi ongelmanratkaisun alue. (Ruokamo 2000, 44.) Edellä mainittujen ongelman määritelmien nojalla tässä tutkimuksessa käytetyissä testeissä on tarkemmin ilmaistuna ongelmakeskeisiä matemaattisia tehtäviä, sillä osa niistä saattaa mahdollisesti olla jollekin oppilaalle rutiinitehtäviä.

2.2.2 Ongelmanratkaisuprosessin eteneminen

Ongelmanratkaisu on käsitteenä hyvin laaja ja suhteellinen. Ongelmanratkaisu voi tarkoittaa eri asioita eri henkilöille samaan aikaan ja eri asioita samalle henkilöille eri aikoina. (Branca 1980, 3.) Ongelmanratkaisu voidaan nähdä prosessina, jossa aikaisemmin hankittua tietoa käytetään uudessa ja tuntemattomassa tilanteessa. Lisäksi ongelmanratkaisu kuvataan tapahtumana, jossa ongelmalla ajatellaan olevan annettuna lähtötilanne ja vastaavasti päämäärä, jota kohden voidaan edetä. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 18.) Ongelmanratkaisu on äärimmäisen monimutkaista toimintaa. Se sisältää tietojen mieleen palauttamisen lisäksi erilaisten taitojen ja proseduurien käyttöä, kykyä arvioida omaa ajatteluaan ja edistymistään ongelmaa ratkaistaessa ja monia muita kykyjä. Lisäksi menestyminen ongelmanratkaisussa riippuu hyvinkin pitkälti motivaatiosta ja itsetunnosta. Tietojen yhdistämisen lisäksi tarvitaan aikaisempaa kokemusta, intuitiota ja erilaisia näkökantoja sekä kykyjä. (Charles 1990, 7.)

Ongelmanratkaisun toteutuksessa voidaan selkeästi erottaa toisistaan joitakin vaiheita. Ensimmäisenä vaiheena on poikkeuksetta ongelmaan tutustuminen, jolloin sitä tarkastellaan mahdollisimman monipuolisesti. Sitten seuraa ongelmanratkaisemisen suunnittelu ja toteutus, mikä on yleensä työteliäin vaihe. Käytännössä nämä kaksi vaihetta punoutuvat toisiinsa. Lopuksi on, mikäli ratkaisuun ollaan päästy, valmiin ratkaisun tarkastelu, jossa myös tarkistetaan oman ratkaisuajattelun pätevyys. (Pehkonen, Pekama & Seppälä 1991, 25–26.)

Keskeisenä vaiheena ongelman ratkaisemisessa on ratkaisun suunnittelu, jolloin tulevat kyseeseen erilaiset heuristiset strategiat. (Pehkonen ym. 1991, 25–26). Heuristisilla strategioilla tarkoitetaan tässä yleisiä, itsenäisiä, aiheesta tai teemasta riippumattomia ratkaisuehdotuksia tai –strategioita, jotka auttavat ongelmanratkaisijaa lähestymään ja ymmärtämään ongelmaa ja tehokkaasti ohjaamaan resurssejaan ratkaistakseen sen (Schoenfeld 1980, 9). Useimmiten ratkaisu ei synny helposti, vaan Polyan malliin perustuvan Masonin mallin mukainen kierre, jossa idean ja yrityksen kautta edetään jumiin ja joudutaan palaamaan aloitustilanteeseen, on luonnollinen vaihe ongelmanratkaisua (Pehkonen ym. 1991, 25–26).

Sopivien kysymysten asettaminen voi auttaa ongelmanratkaisun suunnittelussa: Onko ongelmassa jotakin tuttua? Olenko aiemmin ratkaissut jonkin samantyyppisen ongelman? Onko jossain toisessa ongelmassa ollut samantyyppinen tuntematon? Voisiko sitä menetelmää käyttää tässä? Entäpä voisiko ongelman sanoa toisin? Kuinka ongelman eri osat ovat suhteessa toisiinsa? Kuinka kysytty suure on suhteessa tunnettuihin seikkoihin? Voidaanko ongelmaa ensin yksinkertaistaa, jonka jälkeen näin saatu tulos yleistetään ratkaisuksi? Entä onko ongelma mahdollista ratkaista vaiheittain tai vain osaksi? Miten käy, jos tehtävän ehtoja muunnellaan tai joitakin niistä otetaan pois? Onko kaikki annetut otettu huomioon? Tarvittiinko edes niitä kaikkia? (Pehkonen ym. 1991, 26.)

Suunnitteluvaihe ja toteutus nivoutuvat tiiviisti toisiinsa. Kun suunnittelussa näyttää hahmottuvan mahdollisuus ratkaisuun, niin tämä pyritään toteuttamaan mahdollisimman huolellisesti, sillä virheitä on vaikea havaita jälkeenpäin. On syytä pitää mielessään kysymykset askeleiden oikeellisuudesta ja sen perusteluista. Usein ratkaisuyritys voi johtaa umpikujaan, minkä vuoksi tarvitaankin ongelmanratkaisusitkeyttä. Näistä umpikujaan johtaneista yrityksistä kannattaa tehdä muistiinpanoja, sillä juuri siellä saattaa olla tärkeä idea, kun niitä myöhemmin tarkastellaan laajemman tietämyksen kautta. (Pehkonen ym. 1991, 27.)

Tarkasteluvaihe jää usein liian vähälle huomiolle. Itse asiassa kyseessä on vaihe, jossa voidaan oppia jotakin olennaista suoritetusta ongelmanratkaisusta. Ratkaisija voisi asettaa itselleen esimerkiksi seuraavanlaisia kysymyksiä: Kuinka vastasin alkuperäisen tehtävän kysymykseen? Onko vastaus järkevä? Voisiko tuloksen oikeellisuuden tarkistaa mahdollisesti esimerkeillä tai erikoistapauksilla? Samoin tässä yhteydessä on tärkeää tehdä myös kysymys: Olisiko ongelman voinut ratkaista toisin? Usein voi löytyä lyhyempi tai jopa esteettisesti kauniimpi ratkaisu. Ei pidä myöskään unohtaa mahdollisuutta yleistää löydettyä ratkaisua: Kuinka yleispätevä saatu ratkaisu on? Voiko ratkaisustrategiaa soveltaa muihin ongelmiin? (Pehkonen ym. 1991, 27.)

Ongelmanratkaisutilanteessa ei riitä pelkkä tiedollinen valmius, vaan tarvitaan myös heuristisia strategioita. Ne voidaan ymmärtää eräänlaisina apuvälineinä ongelman ratkaisun keksimisessä ja ideoimisessa. Tarvittavien strategioiden oppiminen voi tapahtua vain käytännön harjoittelun kautta, sillä ongelmanratkaisua voidaan pitää käytännöllisenä taitona. Esimerkkeinä heuristisista strategioista ovat piirrosten tekeminen, erikoistapausten käsittely ja yleisen sovittaminen erikoistapaukseen. (Pehkonen ym. 1991, 14.)

Kokenut ongelmanratkaisija käyttää suurinta osaa näistä strategioista jatkuvasti, mutta ei välttämättä tiedosta sitä. Heurististen strategioiden opettamisen merkitys löytyykin juuri tiedostamattoman toiminnan tuomisessa tietoisuuteen. Strategioiden käyttämisen oppimisessa on oleellista sen ohjailumekanismin kehittyminen, minkä varassa ratkaisija tekee valinnan eri strategioiden välillä. Määrättyjen strategioiden opettamista ongelmanratkaisun harjoittelun alkuvaiheessa tulisi kuitenkin välttää, sillä ongelmanratkaisussa tarvitaan luovuutta. (Pehkonen ym. 1991, 14–15.)

2.2.3 Polyan ongelmanratkaisuprosessi

George Polya'a voidaan pitää 1900-luvun tunnetuimpana ongelmanratkaisuun liittyvän tiedon uranuurtajana ja ongelmakeskeisyyden puolestapuhujana. Polyan (1973) mukaan ongelmanratkaisuprosessissa on neljä päävaihetta, jotka ovat 1) ongelman ymmärtäminen, 2) ratkaisusuunnitelman löytäminen, 3) ratkaisusuunnitelman toteutus sekä 4) taaksepäin tarkastelu. Ensimmäisessä vaiheessa oppilaan on tärkeää ymmärtää, mitä ongelma tarkoittaa. Ymmärtämisen lisäksi oppilaan tulisi myös tulla motivoituneeksi ratkaisemaan ongelma. Oppilaan ymmärryksen ja mielenkiinnon saamiseksi tarvitaan hyvin valittu ongelma, joka ei saa olla liian vaikea tai helppo, sen on oltava luonnollinen ja kiinnostava sekä hyvin esitetty. (Polya 1973, 6.)

Ratkaisusuunnitelmaa laadittaessa oppilaan tulee löytää tehtävästä sen olennaisimmat osat, annetut ehdot, tuntematon eli se, mitä ei ole annettu, tunnettu eli annettu tieto sekä päämäärä, johon tulisi lopulta päästä. Tämän jälkeen yritetään keksiä tie, strategia tai suunnitelma, joka mahdollisesti johtaisi ongelman ratkaisun löytämiseen. Vaikka usein tarvitaankin pitkäjänteistä konvergenttia ajattelua, ratkaisuehdotus saattaa syntyä yhtäkkisesti, ideanomaisesti. Usein hyvät ideat perustuvat aiemmille kokemuksille ja aikaisemmin tarvitulle tiedolle. Keinoja ratkaisusuunnitelman löytämiseksi ovat esimerkiksi ongelman tarkempi analysointi ja pilkkominen, aiempien tutumpien tai helpompien vastaavanlaisten ongelmatilanteiden löytäminen ja menetelmän lainaaminen tai soveltaminen sekä annettujen ehtojen muuttaminen joko pelkistämällä tai rikastamalla. (Polya 1973, 8–10.)

Ratkaisusuunnitelman toteutuksella tarkoitetaan sitä, että aiemmin tarvitun tiedon, älykkäiden keinojen, keskittymisen ja sattuman avulla löydetty idea tai suunnitelma toteutetaan huolellisesti askel askeleelta. Kun ratkaisua toteutetaan, jokainen askel on tarkistettava intuitiivisesti tai jos tarkoituksenmukaista ja mahdollisuuksien rajoissa, todistettava muodollisesti oikeaksi. Sen jälkeen ratkaisu on syytä muotoilla mahdollisimman ymmärrettävään ja selkeään muotoon, jotta se voidaan esittää myös muille. (Polya 1973, 12–14.)

Ratkaisun löytymisen ja sen ylöskirjaamisen jälkeen taaksepäin tarkastelu on hyvin tärkeä ja opettavainen vaihe ongelmanratkaisua, jota ei pidä sivuuttaa siirtymällä tekemään jotain muuta tehtävää. Kun valmista ratkaisua ja ratkaisuun johtanutta polkua mietitään ja tarkastellaan jälkeenpäin, tieto lujittuu ja yhdistyy kokonaisuudeksi ja ongelmanratkaisutaidot kehittyvät. On syytä tutkia, voidaanko valmis ratkaisu ja ratkaisuvaiheiden perustelut tarkistaa, voiko ratkaisun johtaa jotenkin muuten ja voidaanko perustella lyhyemmin ja tarkoituksenmukaisemmin. Lisäksi on tärkeää tutkia, onko ratkaisu sopusoinnussa ongelmanasettelun kanssa, etsiä mahdollisia vaihtoehtoisia reittejä ja ratkaisumenetelmiä, painaa mieleen ratkaisuun johtaneet menetelmät ja miettiä, minkä muun tyyppisiin ongelmiin menetelmät soveltuisivat. (Polya 1973, 14–16.)

2.2.4 Matematiikan ongelmanratkaisustrategioista

Ongelmanratkaisustrategioilla tarkoitetaan yleensä niitä henkisiä operaatioita, joilla ohjaillaan ja kontrolloidaan kognitiivisia prosesseja ongelmanratkaisun aikana. Tällaisina operaatioina voidaan pitää esimerkiksi havaintojen tekemistä, tietojen ryhmittelyä ja mieleenpalauttamista, suunnitelmallista tilanne- ja tehtäväanalyysiä, valintojen tekoa ja ajatteluun tai tiedon tuottamiseen liittyvää osaprosessien järjestelyä. Näiden säätely kuuluu erottamattomana strategioihin. Tämä edellyttää ongelmanratkaisijalta tietoista, kriittistä oman ajattelun arvioimista ja kontrollia, joita nimitetään yleisesti metakognitioiksi. (Haapasalo 1997, 25–26.)

Schoenfeld (1980, 9–10) nostaa esiin kolme tärkeintä ongelmanratkaisustrategiaa tehtävän analysoinnin, kokeilun ja tuloksen tarkastelun ja antaa niistä seuraavat kuvaukset:

Analyysi ja ongelman ymmärtäminen

1. Piirrä kuvio, jos mahdollista.
2. Tutki erikoistapauksia:
   - a) valitse erityisarvoja kokeillaksesi esimerkinomaisesti ongelmaa ja saadaksesi siihen tuntumaa,
   - b) tutki ääritapauksia löytääksesi mahdollisuuksien vaikutusalueen,
   - c) aseta mitä tahansa peräkkäisiä kokonaislukuja, kuten 1,2,3, ..., ja etsi induktiivista muotoa
3. Yritä yksinkertaistaa ongelmaa:
   - a) symmetriaa hyväksikäyttämällä,
   - b) todisteluilla menettämättä yleisyyttä.

Kokeilu:

1. Tarkastele oleellisesti vastaavanlaisia ongelmia:
   - a) korvaa olosuhteita vastaavilla,
   - b) yhdistele ongelmien osia uudelleen eri tavoilla,
   - c) tutustu apuelementteihin,
   - d) muotoile ongelma uudelleen;
     - i) muuttamalla perspektiivejä tai merkintöjä,
     - ii) tarkastelemalla puolto- ja vastaväitteitä,
     - iii) olettamalla, että sinulla on ratkaisu ja määrittelemällä sen ominaisuudet.
2. Tarkastele hieman poikkeavia ongelmia:

a) valitse osatavoitteita, jotka täyttävät ehdot osittain,

b) luovu ehdosta ja yritä määrätä se uudelleen,

c) hajota ongelman sisältö ja työstä elementti kerrallaan.

3. Tarkastele laajasti muunneltuja ongelmia:

a) konstruoi analoginen ongelma, jossa on vähemmän muuttujia,

b) pidä kaikki muut paitsi tutkittava muuttuja vakiona selvittääksesi muuttujan vaikutuksen,

c) yritä tutkia mitä tahansa tähän liittyvää ongelmaa, jolla on samanlainen;

i) muoto,

ii) alkutilanne ja

iii) johtopäätökset.

Tuloksen tarkastelu

1. Läpäiseekö ratkaisusi spesifit testit?

a) Käytetäänkö siinä kaikkia annettuja tietoja?

b) Onko se yhdenmukainen järkevien arvioiden ja tai ennustusten kanssa?

c) Toteuttaako se symmetrian, dimensioanalyysin tai skaalautumisen ehtoja?

2. Läpäiseekö se yleiset testit?

a) Voidaanko tulos saada toisin?

b) Voidaanko siihen sisällyttää erikoistapaukset?

c) Voidaanko se palauttaa tunnettuihin tuloksiin?

d) Voidaanko sitä käyttää toteuttamaan jotain mitä tiedät?

2.3 Matemaattiset tehtävät

Tässä tutkimuksessa on aineistonhankintaan kehitetty mittari, jossa erilaiset matemaattiset tehtävät mittaavat erilaisia taitoja. Tämän vuoksi on syytä tarkemmin eritellä erilaisia tehtävätyyppejä matematiikassa, niiden ratkaisuun vaikuttavia tekijöitä ja ongelmien luokittelua.

2.3.1 Tehtävätyypit matematiikassa

Haapasalo (1997, 44) jakaa matemaattiset tehtävät kahteen pääluokkaan. Ensimmäisen luokan muodostavat konstruoidut tehtävät ja toisen luokan sovellustehtävät. Konstruoituihin tehtäviin kuuluvat didaktisin perustein orientoimis-, syventämis- ja soveltamisharjoitukset, joita ei varsinaisesti voida kutsua sovellustehtäviksi. Sovellustehtävät taas ovat tehtäviä, jotka eivät ole matemaattisia ongelmia, vaan käytännössä esiintyviä ongelmia, joiden ratkaisemiseksi sovelletaan matemaattisia menetelmiä.

Konstruoituihin tehtäviin kuuluvaksi luetaan sekä asiasisältöä painottavat tehtävät että formaaliset tehtävät, joista jälkimmäinen tehtävätyyppi tarkoittaa matemaattisin symbolein kirjoitettuja tehtäviä. Lisäksi edellisen kaltaisia tehtäviä voidaan luokitella myös sovellustehtäviksi. Asiasisältöä painottavat tehtävät puolestaan voidaan jakaa kahteen luokkaan: 1) matemaattisiin asiatehtäviin, jotka ovat symboliseen muotoon kirjoitettuja asiatehtäviä sekä 2) asiatehtäviin, jotka voivat olla verbaalisessa, kuvallisessa tai muussa muodossa. (Haapasalo 1997, 44.)

2.3.2 Sanallisten ongelmatehtävien ratkaisuun vaikuttavia tekijöitä

Kinnusen ja Vauraan (1998) mukaan matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa erotetaan neljä matemaattista erityisosaamista edustavaa toiminnan tasoa. Ylimpänä niistä on se käsitteellinen taso, jolla matemaattiset käsitteet, säännöt ja menettelytapojen taustalla olevat periaatteet ymmärretään ja jolla ongelmalle ja sen ratkaisuvaihtoehdoille annetaan matemaattinen sisältö. Toisena on strateginen taso, jolla ongelmalle erityiset ratkaisustrategiat valitaan ja käytännössä toteutetaan. Kolmantena on tekninen taso, jolla valittujen strategioiden vaatimat toimintasekvenssit toteutetaan. Tälle tasolle kuuluvat erilaiset ratkaisua kohti vievät säännöt, sovitut merkitsemistavat ja laskemisen apuvälineiksi kehitetyt laskutekniikat eli algoritmit. Hierarkiassa alimpana eli operaatioiden tasolla ovat ne mentaaliset operaatiot ja vähitellen automaattisiksi muuntuneet laskutoimitukset, joita ratkaisun löytäminen vaatii. (Kinnunen & Vauras 1998, 270.)

Ongelmanratkaisun edellyttämiä taitoja tutkittaessa on löydetty ongelmanratkaisun tiellä olevia vaikeuksia, joiden korjaamiseen on kiinnitettävä erityistä huomiota ongelmanratkaisun harjoittelussa ja opetuksessa. Pehkosen ym. (1991) mukaan ne voidaan luokitella kolmeen tasoon.

Taso 1. Ongelmaan tutustuminen:		
	Motivointi	
Taso 2. Perustaidot:		
Matemaattiset taidot		*Lukemistaidot*
Taso 3. Yleiset Kognitiiviset taidot:		
Visualisointi	*Joustava ajattelu*	*Analogioiden muodostaminen*

Motivaatio on yksi monista tekijöistä, jotka vaikuttavat ongelmanratkaisussa menestymiseen ja itseluottamukseen. Oppilas, joka ei halua ratkaista ongelmaa oikeasti, ei myöskään ratkaise sitä. Tämän vuoksi on tärkeää, että ongelmat ovat sellaisia, joista oppilaat ovat kiinnostuneita. Motivaatioon vaikuttaa osaltaan myös tehtävän vaikeus. Jos tehtävä on liian vaikea tai liian helppo, oppilas ei motivoidu parhaalla mahdollisella tavalla. (LeBlanc, Proudfit & Putt 1980, 106.) Ensimmäisen tason vaikeuksia voidaankin vähentää esittämällä oppilaille mielenkiintoisia ongelmatehtäviä kiehtovasti tai antamalla oppilaiden itse keksiä ongelmia. Suurin osa peruskoulun oppilaista hallitsee toisen tason taidoista matemaattiset taidot, mutta on myös oppilaita, joille alkeellisetkin laskutoimitukset tuottavat vaikeuksia. Koska useimmat ongelmat ovat sanallisia tehtäviä, niin myös puutteet luetun ymmärtämisessä voivat muodostaa ongelmanratkaisun esteen joillekin oppilaille. Kolmannella tasolla ovat yleiset kognitiiviset taidot, kuten esimerkiksi joustavan ajattelun ja visualisoinnin taidot, jotka ovat hyvin olennaisessa asemassa ongelmanratkaisussa. Näihin taas liittyy ajatusten synnyttäminen, tarkkojen mielikuvien ja analogioiden muodostaminen ja kyky nähdä esitettyjen tosiasioiden taakse. Monet ongelmanratkaisussa kohdattavista vaikeuksista ovat kolmannella tasolla ja näin ollen oppilaita pitäisi rohkaista enemmän piirtämään mallikuvioita ja käyttämään rohkeammin mielikuvitusta. (Pehkonen ym. 1991, 17.)

Voidaan pitää selvänä sitä, että lukujen käsittelyssä vaikeuksia omaavilla lapsilla on niitä myös sanallisten ongelmien vaatimissa aritmeettisissa operaatioissa. Sanallisiin tehtäviin liittyvät vaikeudet ovat kuitenkin peruskoulun luokka-asteilla 1-6 yleisempi ongelma, kuin lukujen monipuoliselle ymmärtämiselle perustuvien aritmeettisten taitojen kehittämättömyys ja niitä on sellaisillakin oppilailla, joilla ei ole vaikeuksia aritmeettisissa operaatioissa. Sanallisiin tehtäviin liittyviin vaikeuksiin ovat yhteydessä ongelman matemaattis-looginen rakenne, tekstin ymmärtäminen, opitut pinnalliset strategiat tai oppilaiden väärät uskomukset ja käsitykset. (Kinnunen & Vauras 1998, 276.)

Tehtävän matemaattis-loogiseen tai semanttiseen rakenteeseen liittyvät syyt johtuvat ongelman asettamiseen ja ratkaisemiseen tarvittavien käsitteiden puutteista tai tehtävän loogis-matemaattisen rakenteen monimutkaisuudesta. (Kinnunen & Vauras 1998, 276.) Hyvä ongelmanratkaisija kykenee yhdistämään tehtävässä kuvatut tekijöiden väliset semanttiset suhteet toisiinsa, rakentamaan niiden avulla sopivan tilannemallin eli representaation ja lopuksi valitsemaan tehtävän ratkaisuun sopivat matemaattisen operaation. Kokematon ongelmanratkaisija puolestaan on usein suurissa vaikeuksissa rakentaessaan käyttökelpoista tilannemallia tehtävistä. Hän ei yksinkertaisesti havaitse tekijöiden välisiä semanttisia suhteita tehtävänannosta. (Sorvari 1999, 153.)

Tekstin ymmärtämisen ongelmista on kyse, jos taas vaikeudet pohjautuvat heikkoon lukutaitoon tai hankaluuksiin tehtävän kielelliseen muotoon tai sisältöön liittyen. (Kinnunen & Vauras 1998, 277.) Ongelman ymmärtämisellä tarkoitetaan representaation rakentamista tehtävän asettelun sanoista ja lauseista. Ongelman ratkaisussa puolestaan valitaan sopivat matemaattiset operaatiot vastaamaan sisäistä mallia. Tämän synteesin seurauksena pyritään tehtävän ratkaisuun. Sanallisia tehtäviä ratkaistessa on mekaanisen lukutaidon hallinta lähtökohtana, joskaan tämä ei välttämättömänä edellytyksenä ole vielä riittävä taito onnistuneessa ongelmanratkaisuprosessissa. On nimittäin niin, että mekaanisen tai teknisen lukutaidon lisäksi tarvitaan ehdottomasti ymmärtävän lukemisen taitoa, jonka avulla on mahdollista ymmärtää tekstin sanoma. Ymmärtävä lukeminen ja sanallisten tehtävien ratkaisu on nähtävä toisiinsa kiinteästi liittyviksi osaprosesseiksi, joiden kautta lähestytään tehtävän ratkaisua. (Sorvari 1999, 151.)

Kuitenkin hyvin usein sanallisten tehtävien ratkaisemisen vaikeudet johtuvat pinnallisista strategioista, joita oppilaat ovat omaksuneet koulumatematiikasta saamiensa kokemusten perusteella. On tyypillistä, että he kiirehtivät suoraan toteuttamaan laskutoimituksia, jotka he esimerkiksi hallitsevat parhaiten, ennen kuin ovat ymmärtäneet annettua ongelmaa tai lukeneet sitä huolellisesti. (Kinnunen & Vauras 1998, 277.) Edelleen tyypillisiä pinnallisia strategioita ovat tiettyjen vihjesanojen hyväksikäyttäminen tehtävien ratkaisussa, huolimattoman tehtäväanalyysin seurauksena valittu väärä matemaattinen operaatio ja tehtävässä kuvatusta tilanteesta vääränlaisen tai puutteellisen representaation rakentaminen. Kokemattomille ongelmanratkaisijoille on lisäksi hyvin tyypillistä, että he eivät kykene lainkaan kertomaan, miten he pääsivät tehtävän ratkaisuun tai miksi he valitsivat kyseisen operaation. (Sorvari 1999, 148–149.)

Kokematon ongelmanratkaisija ei välttämättä pohdi lainkaan sitä, minkälaisessa kontekstissa tehtävässä annetut luvut esiintyvät, eikä tule välttämättä pohtineeksi sitä, mitkä ovat tehtävässä esiintyvien tekijöiden väliset semanttiset suhteet. Hän saattaa myös valita tehtävän asettelussa luvut suoraan siinä järjestyksessä kuin ne tehtävää lukiessa tulevat vastaan ja suorittaa niillä satunnaisesti valitun laskutoimituksen. (Sorvari 1999, 149.) Uskomuksista ja vääristä käsityksistä johtuvista vaikeuksista puhuttaessa taas on kyse siitä, että koulukokemusten pohjalta omaksutut yleistetyt "koulun sanallisten tehtävien pelisäännöt" ohjaavat oppilasta mekaanisiin ratkaisumalleihin ja strategiseen joustamattomuuteen. (Kinnunen & Vauras 1998, 276–277.)

Syitä oppilaiden tämän tyyppisille vaikeuksille voidaan hakea perinteisestä ja vielä nykyisestäkin matematiikan opetuksesta sekä oppikirjojen rakenteesta. Opetuksessa on traditionaalisesti edetty uuden asian oppisisältöihin muutamalla opettajan näyttämällä esimerkillä. Tämän jälkeen on jatkettu suorittamalla runsaasti mekaanisia harjoituksia oppikirjasta usein itsenäisesti työskennellen. Opetetun aineksen sisäistämistä ja ymmärtämistä on pyritty vahvistamaan soveltavilla tehtävillä, jotka ovat usein olleet mekaanisia tehtäviä sanallisessa muodossa. Nämä tehtävät ovat edelleen vahvistaneet oppilaiden käyttämiä pinnallisia strategioita. (Sorvari 1999, 149.)

2.3.3 Ongelmien luokittelu

Dörner jakaa ongelmat interpolaatio-, synteesi- ja dialektisiin ongelmiin. Tämän luokituksen ratkaisevana jaotteluperusteena ovat lähtö- ja lopputilanteen ominaisuudet sekä ratkaisuun pääsemiseen tarvittavat operaatiot. Haapasalo käsittelee lisäksi synteesin rinnalla analyysia, joten synteesiongelmaa voidaan laajemmin kutsua analyysi-synteesiongelmaksi. (Haapasalo 1997, 37.)

Interpolaatio-ongelmissa sekä lähtö- että lopputilanne tunnetaan. Ongelmana on löytää polku, jota pitkin päästään tiettyjä heuristisia strategioita käyttämällä lähtötilanteesta lopputilanteeseen. Interpolaatio-ongelmien, kuten muidenkin ongelmien laatiminen, on jo sinänsä eräänlainen ongelmanratkaisuprosessi, joka kehittää ongelmanratkaisutaitoa. Tätä tulisikin hyödyntää yleisesti oppitunneilla. Hyvin usein matematiikan oppituntien tehtävät ovat interpolaatiotehtäviä. (Haapasalo 1997, 38.)

Jotta voisimme ymmärtää, mistä on kyse analyysi- ja synteesiongelmissa, on syytä selvittää analyysi- ja synteesikäsitteen merkitykset. Analyysin olennainen tehtävä on taaksepäin työskentely, analysointi, joten sen käyttö on tarkoituksenmukaista ongelmissa, joissa lopputilanne on annettu. Tällöin ongelmanratkaisijan tehtävänä on analyysin avulla pyrkiä löytämään alkutilanne ja syyt, joiden seurauksena on päädytty tunnettuun lopputilanteeseen. Synteesi sitä vastoin on eräänlaista lopputilanteen konstruoimista, jossa annettuja alkuehtoja hyväksikäyttäen pyritään sopivin strategioin saavuttamaan ongelman kannalta ideaalinen ratkaisu eli synteesissä ongelmanratkaisija etenee juuri päinvastaiseen suuntaan, kuin analyysissä. (Haapasalo 1997, 39.)

Dialektisissa ongelmissa puolestaan puuttuu annettu lopputilanne. Tällöin ratkaisijan tehtävänä on pyrkiä luomaan mahdollisimman ristiriidaton ratkaisu, jota hän voi ratkaisuprosessin varrella korjailla tai muotoilla uudestaan. Tällaisessa ongelmanratkaisuprosessissa korostuu ratkaisun subjektiivisuus sekä avoimuus, sillä tehtävät on muotoiltu siten, että ratkaisu on riippuvainen ratkaisijasta. Tehtävässä voidaan kysyä esimerkiksi "Mitä mieltä olet...?" tai "miten arvelet...?" eli tehtävät on muotoiltu ratkaisijalle emotionaalisesti miellyttäviksi. Yhtenä hyvänä esimerkkinä dialektisesta ongelmasta voidaan mainita ainekirjoitus, jossa korostuu kirjoittajan subjektiivisuus. (Haapasalo 1997, 41.)

Tämän tutkimuksen kannalta on syytä ottaa esiin toinen hyvin informoiva ongelmien jako, jossa ongelmat jaetaan avoimiin ja suljettuihin. Avoimesta ongelmasta on kyse, kun sen lähtö- ja lopputilanne ei ole tarkasti määritelty. (Pehkonen 2000, 378.) Edelleen avoimen ongelman alku- ja lopputila voivat olla joko molemmat avoimia tai toinen niistä on avoin (Pehkonen 1997, 8). Sen lisäksi, että avoimet ongelmat ovat epämääräisesti rajattuja ja määriteltyjä, niissä saattaa olla mukana liikaa, liian vähän tai epäolennaista tietoa (Haapasalo 1997, 45.) Tällöin ratkaisijoille on jätetty vapautta tehtävän ratkaisemisessa, joka käytännössä tarkoittaa, että he saattavat päätyä erilaisiin, mutta aivan yhtä oikeisiin tuloksiin riippuen ratkaisuprosessin aikana tekemistään lisäoletuksista tai painotuksista. Siksi avoimilla tehtävillä on useita oikeita ratkaisuja. (Pehkonen 2000, 378.) Koska avoimet ongelmat kuuluvat nykyisin keskeisenä ja tärkeänä osana matematiikan opetuksen toteutukseen ja arkielämässä kohdattavat ongelmatilanteet ovat yleensä juuri tämäntyyppisiä (Ahtee & Pehkonen 2000, 60–61), käytän tutkimuksessani myös avoimia ongelmia.

Jos avoimelta ongelmalta puuttuvat alku- tai lopputila tai molemmat, ongelma on tyypiltään joko dialektinen tai analyysi-synteesi-tyyppinen. Tällaiset ongelmat kehittävät erityisesti yksilöiden luovaa eli divergenttiä ongelmanratkaisutaitoa, jota pidetään hyvin olennaisena taitona ongelmanratkaisusta puhuttaessa. Lisäksi ne tarjoavat mahdollisuuksia muunnella tehtävien vaikeustasoa oppilaskohtaisesti, jolloin jokainen voi valita itselleen sopivan vaikeustason, mikä edelleen toimii oppilaita motivoivana tekijänä. (Haapasalo 1994, 44-45.) Avoimia tehtäviä voidaan valmistaa oppikirjojen sanallisista rutiinitehtävistä jättämällä osa informaatiota pois, kuten esimerkiksi poistamalla osa alkutiedoista tai kysymys, jolloin tehtävä saa monimerkityksellisyyttä (Vaulamo & Pehkonen 1999, 15).

Suljetut ongelmat puolestaan sisältävät sekä alku- että lopputilan, joten ne voidaan luokitella interpolaatio-ongelmiksi. Suljettu tehtävä antaa avoimiin tehtäviin verrattuna vähemmän mahdollisuuksia vapaasti luovaan työskentelyyn, sillä se sitoo yksilön ratkaisussaan tiettyihin alku- ja loppuehtoihin. Näin ollen vaarana on se, että yksilö ajautuu käyttämään tiettyjä strategioita ja luova ongelmanratkaisukyky heikkenee. (Haapasalo 1997, 45.) Usein kouluissa käytetyt ongelmatehtävät ovat luonteeltaan suljettuja, mikä ei jätä paljon mahdollisuuksia luovalle ajattelulle (Pehkonen 1997, 8).

Matematiikan opetuksessa ongelmanratkaisu jaotellaan myös usein kolmeen eri ryhmään seuraavasti: perustehtävät, tutkimustehtävät ja mallintaminen. Perustehtävät ovat tuttuja matemaattisia ongelmia, jotka harjaannuttavat ja kehittävät matemaattisia taitoja yksinkertaisesta aritmetiikasta monimutkaisiin algebrallisiin laskuihin. Niitä ei aina tarvitse liittää käytännön tilanteisiin tai sovelluksiin. Matemaattiset tutkimustehtävät ovat puolestaan matematiikan alueelle sijoittuvia pulmatehtäviä, pieniä lukuteoreettisia tai algebrallisia ongelmia, jotka eivät myöskään välttämättä liity arkielämän tilanteisiin. Ne tarjoavat oivallisen mahdollisuuden löytää hauskojakin puolia matematiikasta sekä leikkiä luvuilla ja kuvioilla. Sitä vastoin mallintaminen on yksi ongelmanratkaisun keino, jossa kuvataan poikkeuksetta arkipäivän tilanteita ja pyritään ratkaisemaan tilanteisiin liittyviä ongelmia. Juuri käytännöllisyyden ja sovellusarvon vuoksi mallintamisen tulisi olla yksi tärkeä osa matematiikan oppimista koulussa. (Berry & Sahlberg 1995, 47–53.) Tämän vuoksi tutkimuksessa käyttämässäni testeissä ongelmatehtävät ovat lähes poikkeuksetta mallintamista. Mallintamisen avulla pyritään lapsen arkielämän kannalta mahdollisiin tilanteisiin, jolloin on mahdollista saada oppilas motivoitumaan ratkaisemaan erilaisiin tilanteisiin liittyviä ongelmia.

2.4 Käsitteen muodostusprosessi

Käsitteen muodostusprosessi nähdään matematiikan opetuksen ja oppimisen kannalta erittäin keskeisenä asiana. Siinä onnistumisen avulla pyritään irrottautumaan mekaanisesta ulkoa oppimiseen ja usein mallintamiseen perustuvasta ulkokohtaisesta oppimisesta. Tällaisessa ulkokohtaisessa oppimisessa käsitteellinen osaaminen ja asian ymmärtäminen jäävät puutteellisiksi. Jotta käsitteen muodostusprosessista voisi tulla onnistunut, oppilaan aiemmat käsitykset ja uskomukset tulee kartoittaa ja lähestyä opetettavaa asiaa oppilaan arkielämän ja omien kokemusten kautta. On myös tärkeää, että oppilaan tullessa kouluun hänen aiempi luonnollinen matemaattinen tietämyksensä saataisiin aktivoitua ja yhdistettyä koulumatematiikkaan. Käsitteellinen osaaminen perusasioissa on pohjana uusien ja haastavimpien asioiden oppimiselle. Tämän vuoksi käsitteen muodostusprosessia on syytä tarkastella hieman tarkemmin.

Todellisuutta koskevan käsitteenmuodostuksen lähtökohtana ovat aistihavainnot. Kun havainnoista puhutaan, on siinä mukana jo varsin paljon käsitteellistä ainesta. Opetuksen kannalta näiden spontaanien, havaintomaailman kokemuksiin välittömästi perustuvien käsitteiden suhde tieteellisiin tai abstrakteihin käsitteisiin on ratkaisevan tärkeä. (Voutilainen, Mehtäläinen & Niiniluoto, 33.) Koulumatematiikan eräänä olennaisena tietämyksen ja toiminnan muotona pidetään käsitteitä. Siksi käsitteiden oppiminen on hyvin tärkeä oppimisprosessin kannalta. Oppilaiden puutteet käyttää hyväksi matemaattisia tietojaan ja taitojaan perustuu suureksi osaksi käsitteellisten valmiuksien puutteesta. (Kupari 1988, 69–70.)

Käsitteenmuodostusprosessissa voidaan erottaa toisistaan viisi vaihetta: orientoitumisvaihe, määrittelyvaihe, tunnistamisvaihe, tuottamisvaihe ja lujittamisvaihe (Haapasalo 1993, 10). Joidenkin oppilaiden käsitteenmuodostusprosessi on kuitenkin niin nopea ja eri vaiheet niin limittäisiä, ettei niitä ole tarpeen käytännössä erotella. Sen sijaan hitaimmin etenevien oppilaiden tapauksessa oppimisavaruutta täytyy rajata joskus hyvinkin voimakkaasti. (Haapasalo 1997, 202.)

Orientoitumisvaiheessa oppilaalle on syytä aiheuttaa tahallisesti loogis-kognitiivinen ristiriita, jota ratkaistessaan hän joutuu osallistumaan aktiivisesti käsitteen relevanttien tunnusmerkkien havaitsemiseen (Haapasalo 1997, 203). Lapselle pyritään tarjoamaan runsaasti erilaisia käytännön ongelmatilanteita, joita hän kykenee selittämään aikaisemmilla hyvinkin naiveilla mielikuvillaan ja käsityksillään eli mentaalimalleillaan. Lähestymistavan tulee olla kontekstuaalista eli asiasisältöön tai -yhteyteen sidottua, mikä on konstruktivismissa tyypillistä. Se mahdollistaa oppilaan valmiiden skeemojen hyödyntämisen siinä luovassa prosessissa, joka tähtää uuden käsitteen tunnusmerkkien kiinnittämiseen. (Haapasalo 1993, 10.)

Relevanttien tunnusmerkkien kiinnittäminen ja kokoaminen muodostaa käsitteen määrittelyvaiheen, kun taas edellä mainittujen vaiheiden kokonaisuutta on syytä nimittää käsitteen konstruoimiseksi tai käsitteen muovaamiseksi (Haapasalo 1997, 204). Määritelmän ulkoa osaaminen on epärelevanttia tiedonhankinnan kannalta, eikä sitä oppilaalta pitäisi kysyä. Määrittelyvaiheessa onkin hyvin tärkeää käyttää ongelma- ja oppilaskeskeisiä työtapoja. Tällöin oppilaat voivat ideoida vapaasti omia ehdotuksiaan ja perustelujaan uudelle merkinnälle. Tässä prosessissa he joutuvat toistuvasti käymään läpi uuden käsitteen tunnusmerkit. Tällaisten prosessien arvokkaimpana tavoitteena voidaan pitää harjaantumista ajatusten esittämiseen, mallintamiseen ja määritelmien keksimiseen. Tämän jälkeen on luontevaa keskustella siitä, millainen merkintä olisi järkevin ja yleisesti hyväksytty. Uuteen käsitteeseen on syytä liittää symbolisen esitystavan lisäksi kuvallinen ja verbaalinen muoto. (Haapasalo 1992, 11–12.)

Tunnistamisvaiheen tarkoituksena on tarjota oppilaalle mahdollisuuksia muodostaa attribuutteja eli erilaisia esitysmuotoja uudesta käsitteestä ilman, että hänen tarvitsee tuottaa sitä missään esitysmuodossa. Koska esitysmuotoja on yleensä kolme, oppilaan on saatava harjoitella eri esitysmuotojen kombinaatioita. Tunnistaminen on syytä aloittaa helposta tehtävätyypistä edeten vähitellen vaikeaan. Tunnistamisprosessi hyödyttää oppilasta eniten vasta silloin, kun hänelle tarjotaan mahdollisuus toimintaan ja tilanteiden verbalisointiin. Tämä tapahtuu luontevasti pari- ja pienryhmätyöskentelynä. (Haapasalo 1992, 13.) Tehtävillä tulee olla ainoastaan tunnistamiseen tähtäävä funktio ja niiden tulee olla monipuolisia, jotta oppilas voi liittää semanttiseen esitykseensä niin verbaalisia, kuvallisia kuin symbolisiakin attribuutteja (Haapasalo 1997, 205).

Tuottamisvaihe eroaa tunnistamisvaiheesta oleellisesti, sillä siinä oppilaan tulee tuottaa käsitteen joku esitysmuoto lähtien jostakin esitysmuodosta, kuitenkaan vaatimatta oppilaalta monimutkaista tiedon prosessointia (Haapasalo 1997, 206). Tuottamisvaiheeseen pitäisi siirtyä edellä mainittujen vaiheiden eroavaisuuden vuoksi vasta, kun oppilas on saavuttanut tunnistamistason. Aluksi on syytä käyttää konkreetteja välineitä ja tehdä yksinkertaisia tehtäviä, joista myöhemmässä vaiheessa pyritään irrottautumaan. Kun tuottamistaso on saavutettu, voidaan jo puhua jonkinasteisesta uuden käsitteen omaksumisesta. (Haapasalo 1993, 17–18.) Lujittamisvaiheessa oppilas syventää yhä edelleen konseptuaalista tietoaan ja konstruoi siihen liittyvää proseduraalista tietoa. Lisäksi lujittamisvaiheeseen kuuluu olennaisena osana uuden käsitteen soveltaminen rutiinitehtävissä ja erilaisissa ongelmatilanteissa. (Haapasalo 1997, 206.) Konseptuaalisella tiedolla tarkoitetaan tässä käsitteellistä tietoa ja proseduraalisella tiedolla tarkoitetaan prosesseihin liittyvää tietämystä.

3 TUTKIMUSONGELMAT JA -MENETELMÄ

Tässä osassa kuvataan tarkasti selvitettävät tutkimusongelmat ja niiden ratkaisemiseksi käytetyt menetelmät. Menetelmistä tarkastellaan evaluaatiota, mittaamista, tutkimuksessa käytettyä mittaria, tehtävien määrälliseen arviointiin käytettyä pisteytystaulukkoa sekä tilastollisia analyysimenetelmiä.

3.1 Tutkimusongelmat

Tämän tutkimuksen tutkimustehtävänä on kartoittaa ja saada ymmärrystä oppilaiden ongelmanratkaisuprosessista. Ongelmanratkaisuprosessia tutkittaessa keskitytään oppilaiden ongelmanratkaisutaitoihin, heidän kohtaamiinsa ratkaisua haittaaviin tekijöihin ongelmaratkaisuprosessin eri vaiheissa ja heidän emotioidensa vaikutuksiin ongelmanratkaisussa onnistumiseen. Tutkimusasetelma ei mahdollista laajaa yleistämistä, mihin ei tässä tutkimuksessa pyritäkään, vaan tavoitteena on pikemminkin saada kuva matematiikan ongelmanratkaisun tilanteesta koulussa.

Miten peruskoulun 6. luokkalaiset ratkaisevat arkipäivään liittyviä matemaattisia ongelmatehtäviä?

Miten peruskoulun 6. luokkalaiset oppilaat osaavat ratkaista ongelmakeskeisiä matemaattisia tehtäviä?

Mitä ratkaisua haittaavia tekijöitä oppilailla ilmenee ongelmanratkaisuprosessissa?

Missä vaiheessa ongelmanratkaisuprosessia ratkaisua haittaavia tekijöitä ilmenee?

Miten oppilaiden tehtäviä koskevat emootiot ovat yhteydessä niissä onnistumiseen?

3.2 Tutkimusmenetelmä

Tässä tutkimuksessa oppilailta kerättyä aineistoa analysoidaan sekä määrällisesti että laadullisesti. Tutkimusmenetelmiä pyritään käyttämään tutkimuksen edetessä toisiaan täydentävällä tavalla. Aineiston keräämistä varten rakensin matemaattisen testin, jota käytin mittarina. Aineistosta nouseva informaatio on osittain määrällistä, jolloin se on muutettavissa numeeriseen muotoon ja analysoitavissa edelleen tilastollisin menetelmin, ja osittain laadullista, jolloin sitä on tulkittava laadullisin menetelmin.

Kaikki empiirinen tutkimus voidaan jakaa kolmeen suureen luokkaan: 1) deskriptiiviseen eli kuvailevaan, 2) kokeelliseen ja 3) relationaaliseen tutkimukseen. Tässä tutkimuksessa on kyse juuri viimeksi mainitusta relationaalisesta tutkimuksesta. Tällainen tutkimus etsii riippuvuuksia stokastisten mitattujen muuttujien välillä. Tutkimuksen keskeisenä kohteena on muuttujien välisten riippuvuuksien etsiminen pyrkien varmistumaan siitä, että niiden välistä yhteyttä ei voi luonnehtia sattuman aikaansaamaksi eikä harhaiseksi. (Nummenmaa, Konttinen, Kuusinen & Leskinen 1997, 16–17.)

Relationaalisen näkökulman puitteissa perusprinsiipit ovat riippumattomuus, assosiaatio ja kausaliteetti. Kaksi ilmiötä tai muuttujaa ovat toisistaan joko riippumattomia tai niiden välillä vallitsee yhteys. Assosiaation idea on symmetrinen, eikä siihen sinänsä liity mitään teoriaa vaikutuksesta. Jos kahden muuttujan välillä vallitsee assosiaatio, ne esiintyvät yhdessä ja ennustaminen suppeassa mielessä tarkoittaa silloin puhtaasti tilastollista, jolloin onnistutaan jollakin tarkkuudella. Havaitun assosiaation hyväksyminen tosiseikaksi edellyttää tuloksen sattumanvaraisuuden ja harhaisuuden poissulkemista. Kausaliteetissa taas on kyse syy- ja seuraussuhteesta eli siitä, että tilastollisesti ilmaistavissa olevan ja empiirisesti tulkitun yhteyden (assosiaation) lisäksi on olemassa tulkittu vaikutus siten, että tapahtuman X saamasta arvosta voidaan ennustaa sisällöllisin teoreettisin perustein, minkä arvon myöhemmin tapahtuva Y tulee saamaan. (Nummenmaa ym. 1997, 17.)

3.2.1 Evaluaatio

Evaluaation käsitteellä tarkoitetaan kasvatuksen elementtien, prosessien ja tulosten arvon määrittämistä. Käytännössä tällainen arvon määrittäminen tapahtuu siten, että evaluaation kohteita verrataan ennalta asetettuihin kriteereihin. Evaluaation kriteereinä ovat usein kasvatuksen tavoitteet, joskin myös muita kriteereitä käytetään evaluaation tarkoituksesta riippuen. Evaluaation synonyyminä voidaan käyttää arviointi-termiä, kunhan vain huomioidaan, että sitä käytetään usein myös suppeammassa merkityksessä. (Heinonen & Viljanen 1980, 11.) Tässä tutkimuksessa evaluaation kriteereinä ovat valtakunnalliset kasvatuksen tavoitteet, jotka on määritelty peruskoulun opetussuunnitelmien perusteissa.

Opetuksen evaluoinnissa voidaan erottaa eri tasoja sen mukaan, onko kyseessä oppimisen, opetuksen vai opetussuunnitelman evaluointi. Kaksi edellistä liittyvät tietyllä tavalla yksilötasolle. Ensinnäkin voidaan kerätä tietoja yksittäisen oppilaan suorituksista ja sitten käytetään palautetta hyväksi hänen oppimisensa ja opetuksensa edistämiseksi. Toisaalta voidaan kerätä tietoja opetusryhmän, luokan suorituksista ja toiminnoista. Tällöin voidaan yksityisen oppilaan opettamisen ja oppimisen lisäksi saada palautetta opettajan toiminnasta ja arvioida opettamista. Kun ollaan kiinnostuneita edellisiä laajemmasta ilmiöstä, koko koulujärjestelmään liittyvistä ilmiöistä, voidaan puhua opetussuunnitelman arvioimisesta. Viimeksi mainitusta saatua palautetta voidaan käyttää opetussuunnitelman kehittämiseksi ja laatimiseksi. (Kangasniemi 1989, 7-8.) Tässä tutkimuksessa pääpaino kohdistuu yksilötasolle. Tutkimuksen avulla kerätään tietoja oppilaiden suorituksista ja pyritään kartoittamaan sitä, kuinka he menestyvät arkielämään liittyvissä matemaattisissa ongelmanratkaisutehtävissä ja mitä vaikeuksia he kohtaavat ongelmanratkaisuprosessissa. Lisäksi oppilasryhmien suorituksista on mahdollista tehdä opetusta koskevia päätelmiä. Tällöin on myös mahdollista arvioida sitä, millaista on opetuksen taso ongelmanratkaisuun liittyen.

Evaluaatiolla on kaksi päätehtävää: kohteen kuvaaminen ja arvioiminen. Havainnoimalla tai mittaamalla, luokittelemalla ja analysoimalla voidaan kuvata ilmiön eri ominaisuuksia. Opetusta evaluoitaessa voidaan kuvata esimerkiksi oppilaiden koulusaavutuksia, itse opettamista ja opettamisen ja oppilaiden saavutusten välisiä yhteyksiä. Evaluaation tavoitteena on poikkeuksetta arviointi. Sitä vastoin evaluaation rooli vaihtelee suuresti. Se voi olla esimerkiksi opetussuunnitelman kehittämistä, oppimateriaalin kehittämiskokeilua tai opettajankoulutusta. Sillä on kuitenkin kaksi pääroolia: toiminnan kehittämisen tukeminen ja toiminnan vaikutusten arvioiminen toimeenpanemisen jälkeen. (Kangasniemi 1989, 3.)

Toiminnan kehittämisen rooliin liittyy formatiivinen evaluaatio ja vaikutusten arvioinnin rooliin summatiivinen evaluaatiotyyppi. Formatiivinen evaluaatio soveltuu kohteen kehittämiseen, ohjelman toimeenpanon arvioimiseen ja sen vaikutusten selvittämiseen. Formatiivinen evaluaatio on palautteen antamista itse toiminnan aikana; se on merkittävä osa kehittämistoimintaa, tuotekehittelyä, osa opetusprosessia välittömän palautteen saamiseksi. Formatiivisen evaluaation avulla voidaan tehdä muutoksia, jotka lisäävät todennäköisyyttä saavuttaa toiminnan tavoitteet. Sitä vastoin summatiivisen evaluaation perusteella voidaan selvittää, onko toiminnan tavoitteet saavutettu. Se on siis toiminnan arvioimista toimeenpanon jälkeen. Summatiivinen arviointi antaa tieto siitä, onko toimeenpantu toiminta, jota aikaisemmin on mahdollisesti kehitelty formatiivisen evaluaation avulla, riittävän hyvää. Jos summatiivinen evaluaatio on ikäinkuin ulkoista, niin formatiivinen on sisäistä arviointia. (Kangasniemi 1989, 3.) Tässä tutkimuksessa on näin ollen kyse summatiivisesta evaluaatiosta, jonka avulla selvitetään kuinka hyvin oppilaat saavuttavat matemaattisen ongelmanratkaisun osalta niitä tavoitteita, joita valtakunnallinen opetussuunnitelma määrittelee.

Keskeisenä osavaiheena evaluaatiossa on mittaaminen, jonka avulla pyritään tietyn kohteen määrän selvittämiseen. Kun mittaaminen pyritään suorittamaan luotettavasti, joudutaan kehittämään mittareita, jotka täyttävät tämän vaatimuksen. Evaluaatio-opin tehtävänä on suunnitella luotettavia mittausvälineitä pedagogisiin tarkoituksiin ja kehittää niiden tarkoituksenmukaisia käyttötapoja. (Heinonen & Viljanen 1980, 12–13.)

3.2.2 Mittaaminen

Testiteoria on saanut nimensä siitä, että sitä on kehitelty erityisesti sellaisten mittausvälineiden yhteydessä, joita on perinteisesti nimitetty testeiksi. Tällaisia ovat esimerkiksi lahjakkuus-, taipumus- ja saavutustestit, vaikkakin testiteoriaa voidaan soveltaa myös laajemmalla alueella. Testiteorioiden kehitystä on ohjannut ja laajentanut ajatuskulku siitä, että jos jokin ilmiö (asia, esine) yleensä on olemassa, sitä on olemassa tietyssä määrin ja jos sitä on olemassa tietyssä määrin, sitä voidaan mitata.(Konttinen 1980, 9.)

Mittaaminen merkitsee jonkin kohteen määrän selvittämistä. Mittaamisen avulla etsitään vastausta kysymykseen: kuinka paljon, missä määrin tai miten runsaasti jotakin on. (Heinonen 1961, 21.) Mitattaessa tarkastellaan tutkittavista kohteista, kuten esineistä, henkilöistä tai ryhmistä kerrallaan yhtä puolta, muuttujaa. Muuttujalla tarkoitetaan tällöin yleisesti joukkoa toisensa poissulkevia luokkia. Mittaamistapahtumassa kohteet sijoitetaan kyseisiin luokkiin. Luokille voidaan antaa numeronimiä tai muita nimiä, mittalukuja ja samoin koko luokkajoukolle eli muuttujalle voidaan antaa nimi. (Konttinen 1980, 10.)

Mittavälineiksi kutsutaan niitä menettelytapoja, joilla havainnoidaan mittauskohdetta ja kuvataan sitä. Mittaväline on menettelytapaohje, jolla varmistetaan, että eri mittaajat tarkastelevat samaa muuttujaa, tuottavat samat mittausolosuhteet, tarkastelevat samoja puolia mittauskohteista, käyttävät tiettyjä mittausoperaatioita ja koodaavat havaintonsa samalla tavalla sekä muuntavat tulokset mittaluvuiksi tarkoitetulla tavalla. Mittavälineeseen voi siten kuulua mittaajan ohjeita, suoritusohjeita koehenkilöille, erilaisia materiaaleja ja välineitä, koodaus- ja pisteytysohjeita, tulosten käsittelyohjeita sekä tulosten tulkintaohjeita. (Konttinen 1980, 12–13.) Tässä tutkimuksessa mittaväline muodostuu itse koulusaavutustestin (liite 1) lisäksi koehenkilöille tarkoitetuista suoritusohjeista (liite 2), yleisistä ongelmatehtävien pisteytysohjeista (3.2.4), tehtäväkohtaisista pisteytyskriteereistä (liite 3) ja kvantitatiivisen analyysin ohjeistuksesta (liite 4).

Mittavälineet voivat erota toisistaan monessa suhteessa, kuten esimerkiksi standardoinnin määrän, välineen käytön, valmiusasteen ja mitattavan seikan tai sisältöalueen mukaan. Tässä tutkimuksessa käytetään mittausvälineenä testiä, jollaisiksi nimitetään sellaisia mittavälineitä, joilla tutkitaan henkilöiden suorituksia tai sellaisia reaktioita, joihin koehenkilön ei oleteta osaavan tietoisesti vaikuttaa, ja ovat suhteellisen pitkälle standardoituja. (Konttinen 1980, 13–14.)

3.2.3 Tutkimuksessa käytetty mittari

Keräsin ja muokkasin eri lähteistä löytämiäni matemaattisia ongelmatehtäviä siten, että ne olisivat mahdollisimman hyvin soveltuvia mittaamaan oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja, heidän niissä kohtaamiaan vaikeuksia ja erottelemaan ongelmanratkaisuprosessin vaiheita. Mitattavan ilmiön mukaisesti voidaan tämän tutkimuksen mittavälinettä kutsua saavutustestiksi ja kun on kyse koulusaavutuksista, vielä tarkemmin koulusaavutustestiksi. Näin rakensin kolme koulusaavutustestiä (liite 1: sarjat A, B, C), jotka koostuvat neljästä arkipäivän ongelmatehtävästä ja mahdollisesta viidennestä tehtävästä. Tietyn oppilasryhmän eli luokan oppilaita yhdistää sama opettaja ja usein pitkälti samanlainen koulutausta, joten ryhmän oppilaat eivät ole toisistaan riippumattomia. Kolmella erilaisella testillä pyritäänkin siihen, että saadaan mahdollisimman paljon tietoa aina yhdestä oppilasryhmästä, paljon erilaisia ongelmatehtäviä ja siihen, että saadaan tietoa siitä, minkälaisia erilaisia vaikeuksia samantyyppiset tehtävät muunneltuina voivat aiheuttaa. Lisäksi oppilaille annettiin erityiset ohjeet (liite 2), joiden avulla heitä neuvottiin piirtämään, kirjoittamaan ja perustelemaan ongelmanratkaisuprosessiaan sen eri vaiheissa, jotta olisi mahdollista saada ymmärrystä mahdollisista vaikeuksista ja erottaa prosessin eri vaiheet.

Tutkimuksessa käytetyssä mittarissa kaikki tehtävät on jostakin lähteestä, vaikkakin lähes kaikkia olen jollain lailla muokannut tämän tutkimuksen kannalta soveltuviksi, joten tämän vuoksi seuraavassa kartoitan sitä, mistä tehtäviä ja niiden ideoita on lainattu. Tehtäviin A1, A4, A5, B4, B5, C1 ja C5 olen saanut idean tai jotkut tehtävät olen ottanut sellaisinaan kansainvälisestä Timss-tutkimuksesta. Nämä ovat julkisia tehtäviä ja löytyvät internetistä osoitteesta: www.jyu.fi/ktl/timss/pm65. Antero Vipusesta olen ottanut tehtävät A3 ja B3 kuitenkin siten, että edellistä muokkasin enemmän lapsen arkielämää koskettavaksi. Tehtävät B1 ja C3 olen löytänyt internetistä, joskin tehtävää B1 muokkasin hieman helpommaksi. Tehtävä B1 löytyi koulukanavalta osoitteesta: http://www.koulukanava.fi/matematiikka/murtoluvut/jako_sij/index.htm ja tehtävä C3 on puolestaan Pekka Norlamon liikkumismatematiikkaa osoitteessa: http://www.edu.fi/oppimateriaalit/arkimatematiikka/liikkum.html. Tehtävän A2 sain toiselta graduohjaajaltani Pasi Venäläiseltä, joten sitä voidaan pitää traditionaalisena. Tehtävä B2 puolestaan on muunnettu Haapasalon (1997) teoksessa esitetystä tunnelion-gelmasta tämän tutkimuksen kannalta tarkoituksenmukaisemmaksi. Lisäksi tehtävät C2 ja C4 ovat Laskutaito-kirjasarjan kuudennen luokan kirjasta.

Seuraavassa pyritään selvittämään tehtäväkohtaisesti koulusaavutustestin ongelmien luokittelua, niiden ratkaisumahdollisuuksia, oppilaiden niissä mahdollisesti kohtaamia vaikeuksia ja niitä taitoja, joita oppilas tarvitsee ratkaistakseen tehtävän. Kyse on siis siitä, mitä tämän tutkimuksen mittari mittaa. Yleisesti ottaen laatimieni testien ongelmatehtävien joukossa on tehtäviä, jotka voidaan luokitella joko avoimiksi tai suljetuiksi ongelmiksi, interpolaatio-ongelmiksi, analyysi-synteesi ongelmiksi tai dialektisiksi ongelmiksi (luku 2.3.3). Ongelmia ratkaistessa tulee ymmärtää ongelma, laatia ratkaisusuunnitelma ja toteuttaa ratkaisusuunnitelma. Ongelmatehtävät on annettu sanallisessa muodossa, mutta on myös muutamia tehtäviä, joissa kuva tai kuvaaja määrittää annettua ongelmaa. Koska on kyse arkipäivän matemaattisista ongelmatehtävistä, niitä voidaan kutsua soveltamistarkoituksiin konstruoiduiksi tehtäviksi. Jokainen ongelma on pyritty valitsemaan, laatimaan ja muokkaamaan niin, että oppilas tarvitsee sen ratkaistakseen luovuutta, päättelykykyä, huomiokykyä, käytännöllisyyttä sekä erilaisia laskutaitoja. Useissa ongelmissa on apua taidoista, jotka liittyvät visualisointiin ja geometriaan, mallintamiseen sekä erilaisten graafien tulkitsemiseen.

A1. Tehtävän kuvaaja muodostuu huppareiden ja farkkujen myyntimääristä eri kuukausina ja tehtävänanto on sanallisessa muodossa ja sen vuoksi tätä kutsutaankin myyntimääräongelmaksi A. Tämä ongelmatehtävä on suljettu ja se voidaan luokitella interpolaatio-ongelmaksi. Oppilas tarvitsee tehtävää ratkaistessaan kuvaajan tulkitsemiseen tarvittavia taitoja. Hänen tulee osata yhdistää sanallisessa muodossa annetut ohjeet niihin tietoihin, joita hän kuvaajasta löytää ja niiden avulla löytää polku ongelman ratkaisuun. Perusoperaatioista hän tarvitsee vain yhteen- ja vähennyslaskua. Ratkaistessaan tehtävää oppilaan on otettava selvää siitä, miten kuvaajasta saa sellaista informaatiota, mitä tehtävänannossa kysytään. Tehtävän a ja B kohdilla mitataan sitä, kuinka oppilas ymmärtää kuvaajaa ja osaa etsiä siitä tietoa, mutta c ja d kohdissa vaaditaan jo ratkaisusuunnitelman laatimista ja toteutusta. Vaikeutena oppilaalla saattaa olla kahden käyrän erottaminen toisistaan ja kahden peräkkäisen ajanjakson myyntimäärien suuruuksien hahmottaminen suhteessa toisiinsa. Tehtävä C1 on samankaltainen tehtävän A1 kanssa, joskin sanallisia ohjeita on muunneltu. Tämä antaa mahdollisuuden vertailla sitä, minkälaisia haittaavia tekijöitä erilainen tehtävänanto ja kuvaajan tulkitseminen aiheuttavat tehtävissä, joissa on kuitenkin samanlaiset kuvaajat.

A2. Tehtävässä asetetaan ongelma, jossa tavoitteena on selvittää, kuinka kaukana Noora ja Teemu asuvat toisistaan, kun molempien kotien etäisyydet kouluun on annettu. Tehtävää kutsutaan tässä Noora-Teemu-ongelmaksi. Tämä ongelma on toisaalta avoin ja toisaalta suljettu. On nimittäin olemassa ääretön määrä vastauksia, jotka eivät ole vääriä, mutta täydellinen vastaus on suljettu väli (2 km, 8 km). Tässä tehtävässä korostuvat visualisoinnin taidot ja kärsivällisyys, sillä yksi mahdollinen ratkaisu ei sisällä kaikkia mahdollisuuksia. Kuvan piirtäminen auttaa annetun tilanteen kokonaisuutena, mutta tämänkin jälkeen on vielä syytä pohtia, onko mahdollista löytää vielä muita mahdollisuuksia. Usein vaikeutena on se, että tartutaan ensimmäisenä mieleen tulevaan ratkaisuun, eikä sen jälkeen enää jatketa ongelmanratkaisua. Päättelykyvyn ja havainnollistamisen lisäksi tarvitaan myös yhteen- ja vähennyslaskua.

A3. Tehtävässä pyritään ratkaisemaan, kuinka monessa päivässä etana kiipeää kerrostalon katolle. Siksi tehtävää voidaankin kutsua etanaongelmaksi. Ongelma on selvästi suljettu ja luokiteltavissa sen lisäksi vielä analyysi-synteesiongelmaksi, sillä tehtävä on mahdollista selvittää joko eteen- tai taaksepäin työskennellen. Keskeisinä taitoina kyseistä ongelmaa ratkaistaessa voidaan pitää sekä tietojen löytämistä tekstistä että visualisointia eli kuvan piirtämistä tilanteesta. On tärkeää myös, ettei tartu heti ensimmäisenä mieleen tulevaan ratkaisuun, vaan vie ratkaisun loppuun vaihe vaiheelta ja lopuksi vielä tarkistaa ratkaisun oikeellisuuden. Usein vaikeutena saattaa olla se, että poimitaan annetut tiedot ja lasketaan niiden avulla laskutoimituksia, jotka ovat oikean suuntaisia, mutta tämän tehtävän kannalta jää helposti huomioimatta se, että kun etana pääsee katolle, se ei enää luisu alaspäin. Perusoperaatioista tärkeimpänä on yhteen- tai vähennyslasku, mutta myös jako tai kertolaskua voidaan tarvita riippuen ratkaisutavasta.

A4. Tehtävän kuvassa on rakennus, puutarha, sitä ympäröivä käytävä ja jonkin verran annettuja pituusmittoja. Näiden avulla on tarkoituksena selvittää jotain uutta tietoa. Tätä kutsutaan puutarhaongelmaksi. Ongelma on melko avoin, sillä tehtävänanto sallii melko väljän lähestymistavan tehtävän ratkaisussa ja siten sitä voidaan kutsua myös dialektiseksi ongelmaksi. Oppilas tarvitsee ratkaisussaan tasogeometristen kuvioiden pinta-alan laskemisen taitojen lisäksi perusoperaatioista ainakin vähennys- ja kertolaskua. Kuvan hahmottamisen ja tehtävän ymmärtämisen lisäksi on tärkeää ottaa selvää siitä, mitä tietoja voidaan selvittää ja miten ne selvitetään. Vaikeutena saattavat olla harjaantumattomuus tasogeometrian tehtäviin ja lyhytjänteisyys ottaa selvää vain siitä, mikä ensimmäiseksi tulee mieleen.

A5. Tehtävässä on kaksi eri nuorisolehden mainokset, joiden avulla pyritään selvittämään lehtien hintojen suuruusjärjestys ja erotus. Tämän tehtävän nimenä käytetään tässä tutkimuksessa nuorisolehtiongelmaa. Ongelma on selvästi suljettu ja voidaan sen lisäksi luokitella analyysi-synteesiongelmaksi. Tehtävä on ohjattu sanallisesti ja sen ratkaisemiseksi on osattava tulkita ja etsiä tietoja sekä tekstistä että lehtimainoksen muodossa olevasta kuvaajasta. Oppilas tarvitsee tehtävän ratkaistakseen vähennyslaskun lisäksi kertolaskua sekä desimaalilukujen ymmärtämistä ja niillä laskemista. Oppilaan tulee ensin annettujen tietojen perusteella laskea molempien 24 kuukauden hinnat ja niiden perusteella edetä ratkaisuun. Vaikeutena saattaa olla alekkain kertominen desimaaliluvulla tai esimerkiksi se, ettei löydä annettuja tietoja mainostekstistä.

B1. Tässä tehtävässä on annettu kellotaulu ja sanallisessa muodossa esitetty tehtävänanto ja tämän vuoksi tehtävää voidaankin kutsua kello-ongelmaksi. Ongelma on luokiteltavissa suljetuksi analyysi-synteesiongelmaksi. Tehtävässä on sanallisen tehtävänannon ja kuvan perusteella etsittävä ratkaisupolku. Tarvittavia taitoja ovat päättelykyvyn ja luovuuden lisäksi yhteenlasku ja jakolasku. Ongelma saattaa kuitenkin ratketa myös kokeilun tai oivalluksen avulla. Vaikeutena voi olla oivalluksen puute tai se, ettei ymmärrä summan käsitettä.

B2. Tässä siltaongelmassa on tarkoituksena keksiä keino saada neljä nuorta ylittämään silta turvallisesti mahdollisimman nopeassa ajassa. Ongelma on suljettu, mutta asetettu avoimessa muodossa siten, että pienimmän mahdollisen ajan lisäksi huomioidaan myös muut hyvin perustellut ratkaisut. Kun perustellaan tehtävänannon mukaan, voidaan ongelma luokitella dialektiseksi. Ongelma on sanallisessa muodossa ja melko monisanainen, joten tietojen etsiminen tekstistä korostuu. Tehtävän ratkaisun kannalta olennaisena oivalluksena voidaan pitää sitä, että kahden hitaimman on ylitettävä silta yhdessä. Tämän oivalluksen jälkeen ratkaisu onkin jokseenkin helppo, jos on ymmärtänyt ongelman oikein. Vaikeutena saattaa olla lyhytjänteisyys ja se, ettei ymmärretä kahden kulkiessa käytetyn ajan olevan hitaamman käyttämä aika. Saattaa olla, että oppilas laskee yhteen molempien käyttämät ajat. Perusoperaatioista keskeinen tässä tehtävässä on yhteenlasku.

B3. Tässä ikäongelmassa on tarkoituksena saada selville Marian ja Annan iät annettujen tietojen perusteella. Tämä tehtävä on suljettu ongelma ja se voidaan luokitella myös analyysi-synteesi ongelmaksi. Tehtävässä tarvitaan lukutaidon lisäksi päättelykykyä ja huomiokykyä löytää tekstistä tehtävän ratkaisun kannalta tarpeelliset tiedot ja niiden väliset yhteydet. Tehtävän ratkaisun kannalta on keskeistä, että pitkäjänteisesti kokeillaan erilaisia ikävaihtoehtoja ja tarkistettaessa otetaan huomioon molemmat ehdot. Usein vaikeutena voi olla se, että tarkistus suoritetaan siten, että vain ehdon toinen puoli otetaan huomioon. Vaikeuksia saattaa myös aiheuttaa se, että kummankaan ikää ei ole annettu missään vaiheessa. Tarvittavia perusoperaatioita ovat yhteen- ja vähennys sekä kerto- ja jakolasku.

B4. Ongelman kuva ja annetut tiedot ovat identtisiä tehtävän A4 kanssa. Kuitenkin tehtävänannot ovat toisistaan eroavia, joten jotta voitaisiin erottaa tehtävät toisistaan kutsuttakoon tätä tehtävää käytäväongelmaksi. A4 oli avoimessa muodossa, kun taas tässä tapauksessa on kyse selvästi suljetusta ongelmasta ja näin onkin mahdollista selvittää, kumpi malli aiheuttaa enemmän vaikeuksia ja eroavatko vaikeudet toisistaan. Perusoperaatioista oppilas tarvitsee yhteen- ja vähennyslaskun lisäksi ainakin kertolaskua.

B5. Tehtävässä on pyrkimyksenä selvittää lehtien myyntimäärien avulla myyntipalkkio, joten tässä tehtävää kutsutaan myyntipalkkio-ongelma. Kyseessä on selvästi suljettu ongelma, joka voidaan luokitella sen lisäksi analyysi-synteesiongelmaksi.. Tehtävä ratkeaa joko ensin selvittämällä kuinka suuren osan lehdistä Marko myi ja sitten kertomalla se koko summalla tai ottamalla ensin selvää lehtikohtaisen palkkion ja kertomalla se Markon myymien lehtien määrällä. Ensimmäisessä voi olla vaikeaa jakaa koko lehtien määrällä eikä vain esimerkiksi Jonin myymien lehtien määrällä. Tärkeitä taitoja ongelman ratkaisemiseksi ovat tietojen etsiminen tekstistä, päättelykyky, kerto- ja jakolasku ja jälkimmäisessä tapauksessa murtolukujen muodostaminen, ymmärtäminen ja niillä laskeminen.

C1. Tehtävän kuvaaja on identtinen tehtävän A1 kanssa. Tehtävänantoa on kuitenkin hieman muokattu, jotta olisi mahdollista selvittää niitä vaikeuksia, joita tämänkaltaisissa ongelmissa saattaa oppilaalla olla. Tätä tehtävää kutsutaan myyntimäärä-ongelmaksi C. Tässä on mahdollista päätellä, onko mahdollisesti vaikeampaa tai helpompaa tulkita kuvaajaa tai laskea yhteen, kun molemmat myyntimääriä osoittavat käyrät ovat samalla kohdalla. Lisäksi tarkastelun kohteena on se, kumpi kahden kuukauden jakso on vaikeampaa löytää se, missä farkkuja myytiin eniten huppareihin verrattuna vai toisinpäin.

C2. Tätä tehtävää kutsutaan liikuntailtapäiväongelmaksi, sillä tehtävässä tulee selvittää annettujen tietojen avulla, kuinka monta oppilasta oli poissa kyseisenä päivänä. Ongelmatehtävässä on selvästi annettu alku ja lopputilanne, joten kyseessä on suljettu interpolaatio-ongelma. Oppilas tarvitsee päättely- ja huomiokyvyn lisäksi perusoperaatioista ainakin yhteen- tai vähennyslaskua ja kerto- tai jakolaskua. Lisäksi tehtävässä korostuu tietojen etsiminen tekstistä, sillä tehtävänanto on kokonaisuudessaan sanallisessa muodossa. Tehtävä ratkeaa joko kokeilemalla ja sen jälkeen tarkastamalla tai siten, että ensin käytetään jakolaskua läsnä olleiden määrän selvittämiseksi ja sen jälkeen vähennyslaskua poissaolleiden määrän selvittämiseksi.

C3. Tässä ongelmassa tulee selvittää ehtiikö hiiri koloonsa, kun kissa ajaa sitä takaa tiettyjen ehtojen mukaisesti. Tämän vuoksi on tarkoituksenmukaista kutsua tehtävää kissa-hiiriongelmaksi. Tehtävässä on kyse suljetusta ongelmasta, mutta nyt lopputilaa ei ole annettu. Tämä voidaankin luokitella analyysi-synteesiongelmaksi, sillä ei tiedetä, kuinka lopulta käy. Tehtävässä korostuu huomiokyky ja tietojen etsiminen tekstistä. Ratkaisevana löytönä ongelman ratkaisemisen kannalta voidaan pitää sitä, että kissan ja hiiren askeleet on muutettava ikään kuin samaan mittakaavaan, siis hiiren askeliksi. Sen jälkeen on syytä laskea kissan matka hiiren kololle hiiren askelissa. Ja näin lopulta selviää, että kissa on kololle tultaessa kaksi hiiren askelta jäljessä. Perusoperaatioista tarvitaan yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskua. Vaikeutena ratkaisua suunnitellessa voi olla tehtävän monisanaisuuden vuoksi se, että ei osata hahmottaa kokonaistilannetta, jolloin omat päätelmät ja valinnat tehdään ottamatta huomioon kaikkia ehtoja.

C4. Tehtävässä on annettu astioita ja niiden avulla pitäisi saada tietty määrä vettä tarkasti mitattua. Tehtävää kutsutaankin astiaongelmaksi. Nyt on kyseessä selvästikin suljettu ongelma, jossa on annettu sekä alku että lopputila, joten se voidaan luokitella interpolaatio-ongelmaksi, mutta ratkaisutavan perusteella myös analyysi-synteesiongelmaksi. Tätä ongelmaa ratkaistessaan oppilasta auttaa visualisoinnin ja mallintamisen taidot. Ratkaisun löytämiseksi on keskeistä, että osaa kuvata tilannetta piirroksella ja edetä kohti ratkaisua joko analyysin tai synteesin tai vuoronperään molempien avulla. Perusoperaatioista oppilas tarvitsee vain yhteen- ja vähennyslaskua. Ratkaisussa auttaa, kun kokeilee kuvassa ikään kuin kaataa vettä astiasta toiseen ja näin alkaa ratkaisukin lähestyä. Myös oivallus siitä, että tarvitaan 3 desilitraa 7 desilitran lisäksi, jotta saadaan tasan 1 litra. Tämän jälkeen aletaankin selvittää, miten saadaan mitattua täsmälleen 3 desilitraa. Vaikeutta saattaa aiheuttaa se, että ei ymmärrä täysin tehtävänantoa ja ratkaisee tehtävän ohjeiden vastaisesti tai se, ettei ole tottunut tällaisiin tehtäviin, joissa vaaditaan pitkäjänteisyyttä.

C5. Tehtävässä tulee selvittää tietyn kerhon sukupuolittaiset jäsenmäärät, joten kutsun tässä tutkimuksessa tehtävää kerho-ongelmaksi. Ongelma on suljettu analyysisynteesiongelma. Ongelma on mahdollista ratkaista kokeilemalla ja sen jälkeen tarkistamalla, mutta päättelykyky ja luovuus ovat avuksi tehtävän ratkaisussa. Tehtävä on myös mahdollista ratkaista jakamalla ensin jäsenmäärä kahteen osaan ja sitten lisätä toiseen 7 ja vähentää toisesta 7. Molemmissa tapauksissa on tärkeää tarkistaa sekä yhteismäärä että tyttöjen ja poikien määrien välinen suhde. Vaikeutena saattaa olla se, että jäsenmäärän puolikkaisiin lisätään tai vähennetään 14, jolloin erotukseksi tulee 28. On myös vaarana, että tarkistuksessa otetaan vain toinen puoli ehdosta. Oppilas tarvitsee välttämättä ainakin yhteenlasku- tai vähennyslaskutaitoja.

3.2.4 Ongelmatehtävien pisteytys

Oppilaiden ratkaisujen arvioinnit on saatava numeeriseen muotoon, jotta niitä voidaan tilastollisesti analysoida. Tässä käytän apuvälineenä Charlesin, Lesterin ja O'Dafferin (1990, 30) kehittämää ongelmien analyyttistä pisteyttämistä. Tämä pisteyttäminen on arviointimenetelmä, jossa pisteytetään jokainen ongelmanratkaisuprosessin vaihe. Ensimmäinen vaihe kehitettäessä analyyttistä asteikkoa on identifioida ongelmanratkaisuprosessin vaiheet, joita halutaan arvioida. Tämän jälkeen tulee määrittää pisteiden vaihteluväli jokaisessa ongelmaratkaisuprosessin vaiheessa. Charlesin ym. mukaan oppilaan ongelman ratkaisu voidaan jakaa kolmeen osaan. Siihen, miten oppilas on ymmärtänyt tehtävän, miten oppilas on suunnitellut ratkaisevansa tehtävän ja millaisen tuloksen oppilas on saanut. Jokaiselle näistä ongelmanratkaisuprosessin vaiheelle annetaan sen onnistumisen perusteella pisteitä joko 0, 1 tai 2. Tässä tutkimuksessa käytetään Charlesin ym. kehittämää analyyttistä pisteytystaulukkoa, jossa nämä kolme edellä mainittua vaihetta ovat selvästi näkyvissä.

Analyyttinen pisteytystaulukko (Charles ym. 1990, 30)

Tehtävän ymmärtäminen	**0:** Tehtävä käsitetty täysin väärin **1:** Osa tehtävästä ymmärretty tai tulkittu väärin **2:** Tehtävä ymmärretty täysin oikein
Ratkaisun suunnittelu	**0:** Ei yritystä tai tehtävään täysin soveltumaton ratkaisu **1:** Osittain oikea ratkaisu, joka pohjautuu oikein tulkittuun osaan tehtävästä **2:** Ratkaisu olisi johtanut oikeaan tulokseen, jos se olisi suoritettu oikein
Vastauksen saaminen	**0:** Ei vastausta tai väärä vastaus, joka perustuu väärään ratkaisuun **1:** Kopiointivirhe, laskuvirhe tai osatulos ongelmaan, johon löytyy enemmän, kuin yksi vastaus **2:** Oikea vastaus ja oikea merkintä

Charlesin ym. (1990) mukaan analyyttisen pisteytystaulukon käyttöön ongelmatehtävien pisteytyksessä liittyy sekä hyötyjä että haittoja. Hyötyinä on syytä mainita seuraavat: pisteytyksessä ei keskitytä vain vastaukseen, vaan koko ongelmanratkaisuprosessiin, arvioijan on mahdollista löytää sen avulla ongelmanratkaisijan vahvuuksia ja heikkouksia ja sen avulla saadaan erityistä tietoa siitä, kuinka tehokkaita erilaiset opetukselliset toteutukset ovat. Haittoina puolestaan ovat seuraavat: ensinnäkin joissain tapauksissa oppilaan ratkaisu voi sisältää niin vähän informaatiota omasta ajatteluprosessistaan, että arvioijan on lähes mahdotonta arvioida prosessia ja toiseksi oppilaiden pistemääriä on syytä vertailla toisiinsa erittäin varovasti, sillä kaksi oppilasta voi saada saman pistemäärän tietystä tehtävästä kuitenkin onnistuen ratkaisussaan toisistaan hyvinkin poikkeavalla tavalla (vrt. 2-1-1 vs. 2-2-0). (Charles ym. 1990, 33.) Tutkimuksessani olen pyrkinyt pienentämään edellisen haittapuolen mahdollisuutta antamalla oppilaille erityiset ohjeet (liite 2), jossa korostetaan prosessin kirjoittamista ja perustelemista, jotta prosessia olisi mahdollista arvioida tarkemmin. Jälkimmäistä haittapuolta ehkäistään tässä tutkimuksessa kvalitatiivisen analyysin avulla erilaisia haittaavia tekijöitä kartoittaessa, sillä kahdella saman pistemäärän saaneella saattaa ilmetä täysin erilaisia haittaavia tekijöitä. Tämän tutkimuksen kannalta on erityisen keskeistä, että käytetään analyyttista pisteytystaulukkoa, jotta saadaan diagnostista tietoa oppilaiden erityisistä vahvuuksista ja heikkouksista, tunnistetaan oppilailla ilmenneitä ratkaisua haittaavia tekijöitä ja saadaan tietoa siitä, missä vaiheessa ongelmanratkaisua vaikeuksia ilmenee. Näin ollen on mahdollista tutkia asetettua tutkimusongelmaa ja saada tietoa siihen liittyen.

Mittausten tasosta riippuu periaatteessa se, miten mittausvirhettä selvitetään, sekä se, miten tuloksia voidaan ylipäänsä analysoida tilastollisesti. Monissa tapauksissa kasvatus-, käyttäytymis- ja yhteiskuntatieteissä mittausten tason todistaminen tasoltaan muuksi kuin luokitteluasteikolliseksi, korkeintaan järjestysasteikolliseksi, on hyvin vaikeaa. Toisaalta useimmat kehittyneet testiteoreettiset mallit sekä monet tilastolliset analyysimenetelmät edellyttävät vähintään välimatka-asteikon tasoista mittaamista. Käytännön kriteereiksi on kuitenkin muodostunut tulosten ja johdonmukaisuus ja tulkittavuus. Mikäli mittauksissa on käytetty jotenkin määriteltävää yksikköä, mittauksia voidaan useimmiten mielekkäästi käsitellä välimatka-asteikon tasoisina. (Nummenmaa ym. 1997, 178.) Tässä tutkimuksessa testitehtävien ratkaisujen pistemäärät edustavat järjestysasteikkoa, mutta edellä mainituin perustein on mahdollista käyttää välimatka-asteikon tilastollisen kuvailun menetelmiä.

3.2.5 Laadulliset analyysimenetelmät

Tutkimuksen yhtenä ongelmana oli saada tietoa niistä ratkaisua haittaavista tekijöistä, joita oppilaat kohtaavat ongelmanratkaisuprosessissa. Koska ongelma vaatii syvällistä tietoa, oli välttämätöntä analysoida aineistoa laadullisin menetelmin. Tässä analyysivaiheessa etenin tehtävä kerrallaan siten, että tarkastelin vain puutteellisesti ratkaistuja tehtäviä eli jätin tarkastelun ulkopuolelle ne oppilaat, jotka olivat saaneet täydet kuusi pistettä ja siis osanneet tehtävän täysin oikein. Seuraavaksi luokittelin tehtävät siten, että samantyyppisen perusajattelutavan sisältävät ratkaisut muodostivat kukin oman ryhmänsä. Tämän jälkeen alkoi varsinainen pilkkominen, minkä aikana tarkastelin saman perusajattelutavan sisältäviä oppilaiden ratkaisuja. Erilaisten ajattelutapojen lisäksi etsin oppilaiden vaikeuksia, ratkaisuista esiin nousevia virheitä ja sitä, kuinka pitkälle oppilaat pääsivät tehtävässä. Vaikka kaksi oppilasta ovat saaneet saman pistemäärän tietystä tehtävästä eli osaaminen on numeerisesti yhtä hyvää, heidän osaamisensa saattaa siitä huolimatta olla laadullisesti erilaista ja perusajattelunsa tehtävässä toisistaan poikkeavaa. Esimerkiksi kahdella oppilaalla saattaa olla samanlainen perusajattelu tehtävässä , mutta he saavat tehtävästä erilaiset pistemäärät päästyään tehtävässä erilaisiin ratkaisuihin tekemällä erilaisia valintoja ja virheitä. Tehtäväkohtaisessa pisteytyksessä luokittelu on jokseenkin karkeaa ja hyvinkin erilaiset ratkaisut saavat sen mukaan tarkasteltuna saman pistemäärän. Nyt on tarkoituksena unohtaa pistemäärien muodostamat ryhmät ja edelleen pilkkoa samantyyppisen ajattelutavan sisältäviä ratkaisuja eri luokkiin ja tätä kautta saada ymmärrystä siihen, minkälaisia vaikeuksia oppilailla on ratkaistessaan ongelmia. Jos ratkaisuja haittaavia tekijöitä löytyy rajattu määrä, ne on edelleen muunnettavissa numeeriseen muotoon luokitteluasteikollisiksi muuttujiksi ja analysoitavissa tilastollisin menetelmin.

Luokittelun tein siten, että aloin muodostaa samankaltaisista ratkaisuista muodostuvia ryhmiä. Joissakin ratkaisuissa haittaavat tekijät johtuivat monesta eri syystä, jotka laadullisen analyysin avulla pyrin kartoittamaan. Lisäksi löydettyäni vaikeuksia pyrin löytämään laajemman kokonaisuuden, johon vaikeus voidaan luokitella, ettei luokkia olisi liikaa informatiivisen analyysin kannalta. Tässä vaiheessa käytin apuna teorian ja aineiston vuoropuhelua siten, että lähtökohtana oli aineisto, mutta taustalla viitekehyksenä teoria. Esimerkiksi useista tehtävän A1 ratkaisuista löytyi graafin tulkitsemisen vaikeuksia. Teorian mukaan (luku 2.3.2) graafin tulkitsemiseen liittyvät haittaavat tekijät voidaan pakottamatta sisällyttää matemaattis-loogisesta rakenteesta johtuviin tekijöihin, sillä tähän rakenteeseen liittyvät syyt johtuvat ongelman asettamiseen ja ratkaisemiseen tarvittavien käsitteiden puutteista tai matemaattis-loogisen rakenteen monimutkaisuudesta. Graafin tulkintaan liittyviä haittaavia tekijöitä voidaan luontevasti pitää käsitteiden puutteellisuuksina, sillä oppilas, jolla on vaikeuksia graafin tulkinnassa, ei ole omaksunut kyseessä olevan kuvaajan käsitettä riittävän hyvin ratkaistakseen tehtävän vaikeuksitta.

Seuraavaksi esitellään joidenkin tehtävien osalta laadullista analyysia oppilailla ilmenneiden ratkaisua haittaavien tekijöiden tunnistamiseksi. Koska useimpien tehtävien kohdalla analyysi on hyvin samankaltainen, seuraavassa esitellään sitä vain muutaman tehtävän osalta. Loppujen tehtävien ratkaisua haittaavien tekijöiden kartoitukset löytyvät liitteestä 4.

Noora-Teemu-ongelmassa eli tehtävässä A2 oli vain kaksi täysin oikeata ratkaisua, jotka siis ensin jätin tarkastelun ulkopuolelle aloittaessani luokittelemaan ratkaisuja. Tehtävä oli tyypiltään sellainen, että jokainen sai siitä jotain irti. Kuitenkin, jotta olisi ymmärtänyt tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen täydellisesti, olisi se vaatinut syvällistä pohdintaa ja kuvan piirtäminen olisi auttanut ratkaisun löytämistä. Tehtävän oikea vastaushan oli kaikki mahdollisuudet välillä 2-8 km. Suurin osa (30/38) vastauksista oli toinen seuraavista: joko 2 km tai 8 km. Ratkaisuista voi päätellä, että oppilaat eivät olleet ymmärtäneet tehtävän matemaattis-loogista rakennetta. Tämä johtui kuitenkin siitä, että koulumatematiikassa oppilaat ovat tottuneet yhteen oikeaan vastaukseen ja siihen, että poimimalla tehtävänannosta tiedot ja suorittamalla niillä joitakin laskutoimituksia päästään oikeaan vastaukseen. Voidaan siis sanoa, että tällaiset ratkaisut johtuvat uskomuksista ja vääristä käsityksistä, mitä oppilaat ovat koulumatematiikasta saaneet.

Pinnallisista strategioista, uskomuksista ja vääristä käsityksistä muodostuva ryhmä voidaan vielä pilkkoa kahteen eri ryhmään, joista toisessa (16/38) oppilaat ovat joko piirtämällä tai sanallisesti perustelleet ratkaisuaan tai etsineet oikeaa representaatiota ja toisessa (14/28) oppilaat ovat välittömästi poimineet luvut, suorittaneet laskutoimitukset ja päätyneet yhteen vastaukseen. Seuraava ryhmä (6/38) muodostuu ratkaisuista, jotka muistuttavat perusajattelultaan toisiaan, mutta ovat saaneet silti numeerisesti erilaisia arviointeja. Näissä ratkaisuissa oppilaat ovat ymmärtäneet, että tehtävään on enemmän kuin yksi vastaus ja päätyneet yhtä lukuun ottamatta ratkaisussaan siihen, että vastauksena ovat molemmat ääripäät 2 tai 8 km. Nämä oppilaat ovat ymmärtäneet tehtävän oikein ja päässeet pitkälle ratkaisussa, mutta eivät ole osanneet muodostaa täysin oikeanlaista representaatiota tehtävän matemaattis-loogisesta rakenteesta.

Ikäongelmassa eli tehtävässä B3 löytyi usea (11/37) täydellinen ratkaisu, joissa oikea vastaus perustui oikeaan ratkaisuun ja tehtävän molemmat ehdot täyttyivät. Neljältä (3/37) oppilaalta loppui aika kesken, joten he eivät ehtineet suunnitella edes ratkaisuaan. Yksi (1/37) oppilas oli ymmärtänyt tehtävän oikein, keksinyt oikeanlaisen ratkaisusuunnitelman, mutta tehnyt virheen yksinkertaisessa yhteenlaskussa. Sitten ratkaisujen joukosta löytyi ryhmä (5/37), joiden tehtävän matemaattis-looginen rakenne oli jäänyt hyvin epäselväksi. Oppilaiden vastaukset eivät täytä kumpaakaan ehtoa tai oppilas ei ole päässyt ratkaisuun ollenkaan. Lisäksi löytyi yksi (1/37) selkeästi pinnallisen strategian ratkaisu, jossa tehtävässä annettujen lukujen avulla oli toimitettu täysin epäloogisia laskutoimituksia sekä toinen (2/37) yksittäinen ratkaisu, jossa molemmat ehdot on ymmärretty, ratkaisusuunnitelma on onnistunut, mutta oikeaa vastausta ei ole kuitenkaan löytynyt. Loput ratkaisuista (14/37) muodostavat ryhmän, jossa ajattelutavat ovat hyvin samantyyppisiä. Jokaisessa näistä ratkaisuista on osattu huomioida ensimmäinen tehtävän ehdoista, mutta matemaattis-loogisen rakenteen ymmärtäminen on jäänyt puutteelliseksi siinä, että jälkimmäistä tehtävän ehdoista ei ole ymmärretty tai osattu käyttää tehtävän ratkaisussa.

Astiaongelmassa eli tehtävässä C4 vain yksi oppilas (1/38) sai täysin oikean ratkaisun, joten yhtä lukuun ottamatta kaikilla oli ainakin jokin ratkaisua haittaava tekijä ongelmanratkaisuprosessissa. Lisäksi aika loppui kovin monelta oppilaalta (6/38). Selvästi suurimman ryhmän (11/38) muodostivat oppilaat, jotka ratkaisivat tehtävän siten, että käyttivät vajaita mittamerkittömiä astioita, vaikka tehtävänannossa vaadittiin täsmälleen yhtä litraa vettä. Ratkaisu perustui siis epätarkkaan arvioon tai mittavälineisiin, joita ei ollut käytössä. Tämän ryhmän ratkaisua haittaava tekijä oli siis tehtävän matemaattis-looginen rakenne ja sen ymmärtämisen puutteellisuus. Seuraava ryhmä (8/38) muodostuu niistä ratkaisuista, joissa oli laskettu ensin annettujen tilavuuksien summa ja sitten päädytty sen perusteella johonkin ratkaisuun, kuten esimerkiksi siihen, että yhtä litraa ei voida mitata tai laskuvirheen johdosta summaksi saatiin tasan yksi litra. Tämän ryhmän ratkaisua leimaa selvästi pinnallisuus, sillä luvut oli poimittu ja niillä oli suoritettu laskutoimitus, mutta sen pidemmälle ei oikeastaan enää pyrittykään, vaan tyydyttiin ensimmäiseen mahdolliseen yritykseen. Lisäksi oppilaiden ratkaisuista löytyi ryhmä (6/38), joiden ratkaisu oli täysin onnistunut, mutta jatkokysymykseen vastaaminen tuotti vaikeuksia. Tämän ryhmän ongelmat johtuivat siis tehtävän jatkokysymyksen matemaattis-loogisesta haastavuudesta. Kahdelle (2/38) oppilaalle tekstin ymmärtäminen edellisistä poiketen aiheutti vaikeuksia ongelmaa ratkaistessa. Molemmat olivat tehtävänannon perusteella ymmärtäneet, että kolmas astioista on tilavuudeltaan täsmälleen yhden litran, vaikka tehtävässä ei annettu kolmannen astian tilavuutta lainkaan. Viimeisen ryhmän muodostavat ne ratkaisut (4/38), joissa ei oltu päästy mihinkään ratkaisuun tai keksitty ratkaisu, jossa ei oltu huomioitu tehtävän ehtoja mitenkään.

3.2.6 Tilastolliset analyysimenetelmät

Tässä tutkimuksessa käytetään numeerisessa muodossa olevan aineiston tarkastelussa erilaisia tilastollisia analyysimenetelmiä. Lähes kaikissa empiirisen kvantitatiivisen tutkimuksen asetelmissa tutkijaa yleisesti kiinnostava kysymys on, esiintyykö ryhmien välillä luokittelevasta muuttujasta aiheutuneita eroja. Tällöin on kyseessä vertaileminen. Esimerkiksi: onko jossain muuttujassa tilastollisesti merkitseviä eroja sukupuolen suhteen. Tällöin tarvitaan tunnuslukujen vertailemiseen käytettäviä analyysimenetelmiä, joista mainittakoon esimerkkeinä t-testi, varianssianalyysi sekä ristiintaulukointi ja khin-neliötesti. (Erätuuli ym. 1994, 73.)

Kun tilastollisia menetelmiä käytetään kuvaavassa mielessä, on tarkoituksena kuvata joukkoa, josta aineisto on kerätty. Kun tilastomenetelmien avulla halutaan arvioida yhteyksiä, määritetään, kuinka todennäköistä on, että kyseiset yhteydet voivat esiintyä sattumalta. Tätä kutsutaan tilastolliseksi merkitsevyydeksi. Tilastollisessa käsittelyssä pyritään minimoimaan virheelliset johtopäätökset, jolloin puhutaan merkitsevyystasosta, mikä perustuu erehtymisriskin laskemiseen. Ennalta on asetettu seuraavat merkitsevyystasot: 5% ($p<0,05$), jolloin tilastollinen merkitsevyys on melkein merkitsevä. Vastaavasti 1%:n riskitaso ($p<0.01$) on merkitsevä ja 0,1%:n riskitaso ($p<0,001$) tarkoittaa erittäin merkitsevää. (Erätuuli ym. 1994, 74.)

Ristiintaulukointi on tarkoitettu kategoristen muuttujien eli laatuero ja järjestysasteikollisten muuttujien analysointiin ja ristiinluokitteluun. Sukupuoli-, ikä-, kotitausta, erilaiset asenne- ja preferenssimuuttujat ovat tyypillisimpiä ristiintaulukoitavia muuttujia. Ristiintaulukointi, yhdistettynä esimerkiksi khin-neliötestiin, sopii monen tutkimusongelman käsittelyyn. Kuitenkin tulkittaessa ristiintaulukoiden näyttämiä suhteita tai khin-neliötestin tuloksia tulee muistaa, ettei esimerkiksi kahden muuttujan välillä havaittavia riippuvuussuhteita tule tulkita kausaalisiksi eli syy- ja seuraussuhdepäätelmiä tulee varoa, ellei ole muuta evidenssiä tulkinnoilleen. (Tähtinen & Kaljonen 1998, 66.) Ristiintaulukointi voidaan toteuttaa teknisesti suhteellisen vähällä työllä, mutta se kuvaa kuitenkin selvästi ja havainnollisesti muuttujien välisiä yhteyksiä (Alkula ym. 1994, 175). Tässä tutkimuksessa ristiintaulukointia ja khin-neliötestiä on tarkoituksenmukaista käyttää, kun tarkastellaan sukupuolittain oppilaiden emotioita. Tämä on ainut tilastomenetelmä, jonka avulla tällainen tarkastelu on mahdollista, sillä sekä sukupuoli että oppilaiden emootiot ovat luokitteluasteikollisia muuttujia.

Khin-neliötesti on jakauman yhteensopivuustesti, odotettujen ja havaittujen arvojen suhteen. Lisäksi testiä käytetään riippumattomuustestinä eli etsittäessä vastausta kysymykseen, ovatko tarkasteltavat muuttujat otoksessa merkitsevästi toisistaan riippuvia vai eivät. Testissä lasketaan havaittujen frekvenssien ja odotusarvojen (teoreettisten frekvenssien) välisen eron merkitsevyyttä. Kuitenkaan ei voida juurikaan tehdä kausaalipäätelmiä eli päätelmiä siitä, kumpi on syy ja kumpi on seuraus. Khin-arvoon vaikuttaa tutkittavan otoksen suuruus ja taulukon solujen määrä. Muuttujat voivat olla nominaali- eli laatueroasteikollisia, korkeintaan viidennes odotusarvojakauman frekvensseistä saa olla alle viisi ja jokaisen odotusarvofrekvenssin tulee olla suurempi kuin yksi. (Tähtinen & Kaljonen 1998, 79–80.)

Studentin t-testi on yksi käytetyimmistä menetelmistä kahden ryhmän välisten suhteiden ja erojen arvioimiseksi. Edellytyksenä kuitenkin on, että jakaumat ryhmissä ovat normaalijakauman mukaisia, ryhmien hajonnat eivät poikkea toisistaan ja muuttujien tulee olla joko välimatka- tai suhdeasteikollisia. Testi soveltuu kahden toisistaan riippumattoman ryhmän keksiarvojen vertailuun, riippuvien otosten testiin ja sekä suurten että pienten otosten analysointiin. Kuitenkin hyvin pienten otosten tulosten yleistyksissä tulee olla varovainen. (Tähtinen & Kaljonen 1998, 83.) Tässä tutkimuksessa studentin t-testiä käytetään tarkasteltaessa kokonaispistemäärien keskiarvoja ja keskihajontoja kaikkien tutkittavien ratkaisuista ja erikseen poikien ja tyttöjen ratkaisuista.

Varianssianalyysiä voidaan käyttää analysoitaessa yhden tai useamman tekijän vaikutusta muuttujaan. Kullakin tekijällä voi lisäksi olla useita tasoja eli arvoja. Varianssianalyysi voidaan pitää "t-testin laajennuksena" kahdessakin mielessä: ensinnäkin varianssianalyysilla voidaan tutkia usean tekijän samanaikaista vaikutusta yhteen muuttujaan, ja toiseksi kullakin tekijällä voi olla enemmän kuin kaksi tasoa. Varianssianalyysissa tutkitaan siis sekä kunkin tekijän vaikutusta erikseen että eri tekijöiden yhdysvaikutusta muuttujaan. (Tähtinen & Kaljonen 1998, 92–93.)

Yksisuuntainen varianssianalyysi on menetelmä, jonka avulla tutkitaan, eroavatko keskiarvot toisistaan tutkitussa muuttujassa. Tilastotieteellisessä mielessä havaintoaineiston kokonaisvarianssi hajotetaan ryhmien sisäistä ja ryhmien välistä varianssia kuvaavaan osaan, joita vertailemalla päätellään, kuuluvatko ryhmät samaan perusjoukkoon. Jos eroja havaitaan, voidaan jatkaa tutkimalla, mitkä ovat ne parit, jotka eroavat toisistaan. Kaksisuuntaisessa varianssianalyysissä on taas kyse siitä, että tarkastellaan keskiarvojen eroja sellaisessa tapauksessa, jossa luokittelevia muuttujia on kaksi. Ensin analysoidaan, onko havaittavissa yhdysvaikutusta ensimmäisen ja toisen luokittelevan muuttujan yhteydessä johonkin muuttujaan. Jos yhdysvaikutusta ei esiinny, on analyysin kohteena molempien luokittelujen omavaikutus. (Nummenmaa ym. 1997, 78.) Tässä tutkimuksessa yksisuuntaista varianssianalyysia käytettiin tarkasteltaessa tehtävien kokonaispistemäärien eroja kouluittain. Tämä oli perusteltua, sillä kouluja oli neljä kappaletta ja t-testi ei mahdollista luokitteluasteikollisessa muuttujassa olevan kuin kaksi luokkaa. Saman tehtävän tehneitä oppilaita samasta koulusta oli kuitenkin niin vähän, ettei tilastollisesti merkitseviä eroja varianssianalyysin mukaan ollut havaittavissa.

Korrelaatio kuvaa sitä, miten kaksi eri muuttujaa vaihtelevat samanaikaisesti ja miten ne ovat riippuvuussuhteessa toisiinsa eli millainen on näitten muuttujien yhteisjakauma. Korrelaatiota laskettaessa muuttujat voivat olla skaalaltaan erilaisia. Korrelaatiota mittaamaan käytetään erilaisia korrelaatiokertoimia, joiden etumerkki kertoo, onko kyseinen, kahden muuttujan välinen korrelaatio positiivista vai negatiivista. Korrelaatio ei kerro kumpi muuttujista on syy ja kumpi on seuraus eli se ei ilmaise kausaliteettia, vaan vain sen, onko muuttujien välillä lineaarinen yhteys. (Tähtinen & Kaljonen 1998, 108.) Positiivinen korrelaatio merkitsee sitä, että havainto, joka sijoittuu korkealle toisella muuttujalla sijoittuu korkealle yleensä myös toisella muuttujalla. Nollakorrelaatio tarkoittaa, että x:n ja y:n arvot vaihtelevat täysin toisistaan riippumatta. (Alkula ym. 1994, 234.) Korrelaatikerroin voi saada arvoja välillä [-1, +1]. Kun riippuvuus on voimakasta, korrelaatiokerroin on lähellä ääriarvoja. Positiivinen ääriarvoa lähellä oleva korrelaatiokerroin osoittaa, että muuttujat mittaavat likipitäen samaa asiaa ja negatiivisessa tapauksessa päinvastaista asiaa. (Tähtinen & Kaljonen 1998, 108.)

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin kuvaa kahden vähintään järjestysasteikollisen muuttujan välistä riippuvuutta. Tällöin korrelaatiokerroin ei perustu suoraan havaittuihin arvoihin, vaan havaitut arvot järjestetään yksikäsitteiseen järjestykseen, jolloin järjestyskorrelaatiokerroin lasketaan näiden järjestyslukujen avulla. Muuttujien ollessa vähintään välimatka-asteikollisia tarkastellaan riippuvuuden suuruutta Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokertoimen avulla. Muuttujien x ja y välisen korrelaatiokertoimen laskeminen perustuu nyt havaittuihin lukuarvoihin, eikä järjestyslukuihin. (Riukulehto & Huhtala 1992, 76–77.) Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokertoimen avulla tässä tutkimuksessa tarkastellaan sitä, minkälaisia riippuvuuksia tehtävien kokonaispistemäärien välillä on ja selvitetään mittarin tehtävien validiteettia eli sitä, mittaavatko ne sitä, mitä niiden on tarkoitus mitata.

3.3 Tutkimusasetelma

Aluksi on syytä selvittää tutkimusasetelmaa yleisellä tasolla. Tämän avulla on mahdollista ymmärtää paremmin tutkimuksen laajuus, aineistosta nousevat tulokset tutkimusasetelman määräämissä rajoissa ja tutkimuksen rajoitukset. Tutkimuksen kohdejoukkona on 113 peruskoulun kuudesluokkalaista oppilasta Jyväskylän seudulta. Heitä ei ole valittu millään erityisellä otannalla, sillä vaikka tutkimusmenetelmä on pääosin määrällinen, tuloksia ja päätelmiä ei ole tarkoitus alueellisesti yleistää. Oppilaista 57 on tyttöjä, 55 on poikia ja yhden oppilaan sukupuoli ei ole tiedossa, sillä hän ei ollut kirjoittanut nimeään.

Oppilaat ovat neljästä eri koulusta ja viidestä eri luokasta. Yhteensä 113:sta oppilaasta 21 oppilasta (18 %) on koulusta 1, 19 (17 %) koulusta 2, 44 (39 %) koulusta 3 ja 29 (26 %) koulusta 4. Koulun 2 poikkeuksellisen suuren testin tehneiden oppilaiden määrän selittää se, että kaksi opetusryhmää teki testin. Vaikka näitä opetusryhmiä yhdistää sama koulu, eri opettajat olivat vastuussa matematiikan opetuksesta. Kaksi kouluista on keskikokoisia ja kaksi on suuria Jyväskylän seudun muihin kouluihin verrattuna. Kahdessa koulussa 6. luokkalaisilla ei ollut rinnakkaisluokkia, yhdessä rinnakkaisluokkia oli kaksi ja yhdessä niitä oli peräti kolme. Koulun 1 oppilaista seitsemän oppilasta teki A-testin (4 poikaa, 2 tyttöä ja 1 ei tietoa), kuusi B-testin (4 poikaa ja 2 tyttöä) ja kahdeksan C-testin (2 poikaa ja 6 tyttöä). Koulussa 2 puolestaan kuusi oppilasta teki sekä A-testin (3 poikaa ja 3 tyttöä) että C-testin (5 poikaa ja 1 tyttö), mutta seitsemän oppilasta B-testin (4 poikaa ja 3 tyttöä). Koska koulusta 3 kaksi oppilasryhmää teki testin, oppilaiden lukumäärät ovat edellisiin verrattuna korkeampia. A-testin teki 14 oppilasta (7 poikaa ja 7 tyttöä), B-testin 15 oppilasta (4 poikaa ja 11 tyttöä) ja C-testin 15 oppilasta (7 poikaa ja 8 tyttöä). Myös koulusta 4 osallistui tutkimukseen melko paljon oppilaita, sillä luokan oppilasmäärä oli erittäin korkea. Tästä ryhmästä 11 teki A-testin (6 poikaa ja 5 tyttöä) ja yhdeksän teki sekä B-testin (5 poikaa ja 4 tyttöä) että C-testin (4 poikaa ja 5 tyttöä).

Aineiston hankinnassa käytettyjä testejä oli kolmea erilaista, joissa kussakin oli neljä tehtävää. Lisäksi oli tarjolla kolme mahdollista lisätehtävää, jos aikaa jäi. Näin ollen tehtäviä oli 15 erilaista. Sekä A-testin että C-testin varsinaisia tehtäviä tehtiin yhteensä 38, kun taas B-testin varsinaisia tehtäviä 37. Lisätehtäviä A5 tehtiin yhteensä 27, B5 23 ja C5 19 kappaletta. Lisätehtävät jaettiin testitilanteessa tarpeen mukaan satunnaisesti siten, että varsinaisella tehtäväsarjalla ei ollut vaikutusta siihen, minkä lisätehtävän oppilas sai. Esimerkiksi oppilas numero 8 on tehnyt B-testin varsinaiset tehtävät B1-B4, jonka jälkeen hän on lisäksi ehtinyt ratkaista lisätehtävät A5 ja C5. Jokainen oppilas ehti tekemään kolmesta seitsemään tehtävää, joten tehtäväpapereita muodostui yhteensä 521.

4 TUTKIMUSTULOKSET

Tutkimusaineistosta on pyritty erilaisin tutkimusmenetelmäluvussa esitellyin laadullisin ja määrällisin menetelmin selvittämään niitä kysymyksiä, joita tutkimusasetelman rajoissa on mahdollista selvittää. Tutkimustuloksien tarkastelu etenee siinä järjestyksessä, jossa tutkimusongelmat on esitetty.

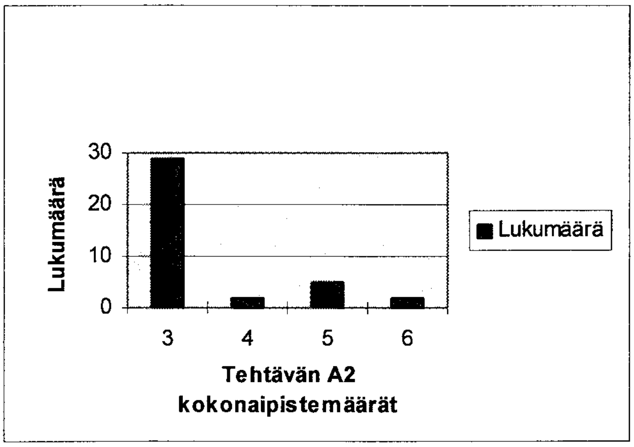
4.1 Peruskoulun 6. luokkalaisten osaaminen ongelmanratkaisutehtävissä

Saadakseni selville 6. luokkalaisten ongelmanratkaisutaitoja ja osaamista tehtäväsarjoissa A, B ja C käytin erilaisia tilastollisia menetelmiä. Tarkastelin ensin tehtäviä oppilaiden saamien kokonaispistemäärien keskiarvojen ja keskihajontojen avulla. Tämän avulla voidaan tehdä päätelmiä tehtävien vaikeusasteesta ja oppilaiden osaamisen tasosta. Tämän jälkeen tarkastelin t-testin avulla sukupuolittaisia pistekeskiarvoja saadakseni selville, oliko oppilaan sukupuolella merkitystä ongelmanratkaisutestissä onnistumiseen. Kaikkien näiden edellisten analyysimenetelmien lisäksi käytän kokonaispistemäärien frekvenssien kuvaamiseen havainnollista tapaa eli pylväsdiagrammia. Tämä kuvaa paremmin pistemäärien jakautumista kuin keskiarvo ja keskihajonta tai pelkkä taulukko. Saattaahan olla esimerkiksi niin, että tehtävästä on saatu paljon sekä hyviä pistemääriä että huonoja pistemääriä, mutta ei lainkaan tai hyvin vähän keskiarvoa lähimpänä olevia pisteitä. Taulukossa 1 on esitetty eri tehtäväsarjojen yksittäisten tehtävien kokonaispistemäärät ja keskihajonnat.

Taulukko 1 A-, B- ja C-testin kokonaispistemäärien keskiarvot ja keskihajonnat

Tehtävä	Keskiarvo	Keskihajonta	Tehtävä	Keskiarvo	Keskihajonta	Tehtävä	Keskiarvo	Keskihajonta
A1	5,03	1,42	B1	4,03	2,37	C1	4,50	1,45
A2	3,47	0,92	B2	1,73	1,58	C2	3,45	2,33
A3	2,79	1,77	B3	2,65	2,42	C3	1,50	1,47
A4	3,50	2,09	B4	1,86	2,28	C4	1,74	1,80
A5	3,63	2,34	B5	2,13	2,01	C5	3,68	2,29

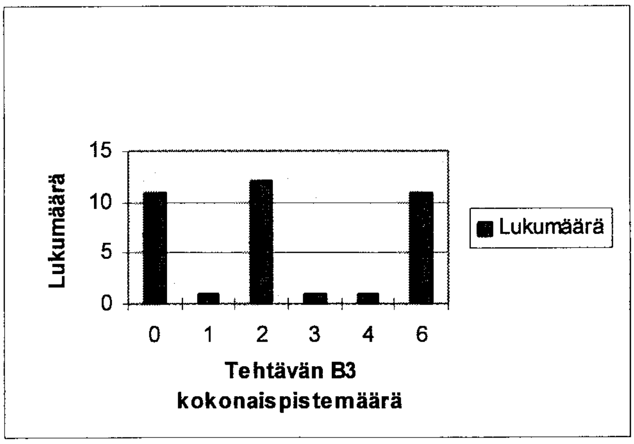
A-sarjan tehtävien kokonaispistemäärien keskiarvot vaihtelivat jonkin verran. Ensimmäisen tehtävän (myyntimääräongelma A) korkea keskiarvo (5,03) selittyy sillä, että ensimmäisen tehtävän tarkoituksena oli alusta lähtien olla melko helppo ja sellainen, että jokainen oppilas osaisi jotain. Tällöin jokainen oppilas saisi onnistumisen elämyksiä ja muihin haastavimpiin tehtäviin siirtyminen onnistuisi helpommin. Korkean keskiarvon perusteella tehtävä A1 oli ehkä liiankin helppo. Tehtävien A4 ja A5 (puutarhaongelma ja nuorisolehtiongelma) keskiarvot (3,50; 3,63) ja keskihajonnat (2,09; 2,34) ovat hyvin samansuuntaisia. Selvästi huonoin keskiarvo on tehtävässä A3 (etanaongelma) (2,79), joten siitä oppilaat ovat saaneet keskimäärin vähiten pisteitä A-sarjan tehtävistä. Tämä kertoo siitä, että tehtävä oli myös vaikeusasteeltaan melko vaativa.



Kuvio 1 Tehtävän A2 pistejakauma

Tehtävässä A2 (Noora-Teemu-ongelma) keskiarvo (3,47) on likimäärin sama kuin tehtävissä A4 ja A5, mutta sen keskihajonta (0,92) on erittäin pieni muihin verrattuna. Tämä selittyy sillä, että tehtävästä A2 suurin osa oppilaista (29/38) sai kolme pistettä, mikä taas johtui hyvin pitkälle tehtävän luonteesta ja oppilaiden pinnallisten strategioiden käytöstä. Nämä oppilaat olivat ymmärtäneet tehtävän osittain, ratkaisusuunnitelmassa he olivat onnistuneet oikein tulkitun osan mukaisesti ja vastaukseksi he olivat saaneet vain yhden äärettömän monista vastausvaihtoehdoista.

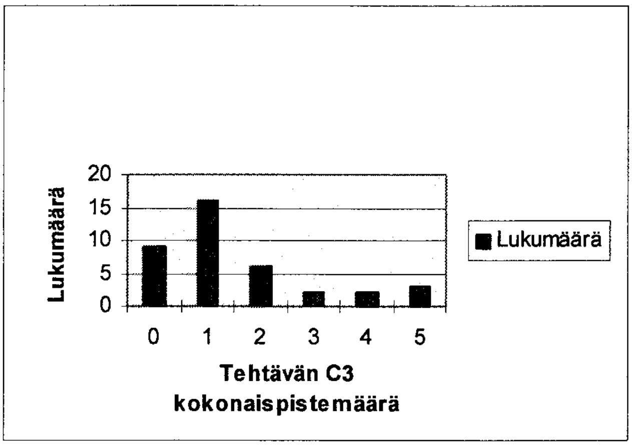
B-sarjan tehtävien kokonaispistemäärien keskiarvot vaihtelivat melko paljon. Korkein keskiarvo (4,03) saavutettiin tehtävässä B1 (kello-ongelma) samoista syistä kuin A-testissäkin. Tosin tehtävän B1 keskiarvo on alhaisempi kuin tehtävän A1, mikä selittyy joko tehtävien vaikeustasojen eroilla tai erilaisella oppilasaineksella tai näillä molemmilla. Koska tehtävien tehneitä oppilaita on molemmissa alle 40, keskiarvojen erot selittyvät todennäköisesti tehtävien A1 ja B1 tehneiden oppilaiden taitoeroilla tutkittavien pienen määrän vuoksi, mutta jos sattumalta taidot ovat samansuuntaiset, tämä kertoisi siitä, että tehtävä B1 oli tehtävää A1 vaativampi. On myös mahdollista, että molemmat tekijät ovat vaikuttaneet pistekeskiarvojen erilaisuuteen. Tehtävän B3 (ikäongelma) keskiarvo (2,65) poikkeaa tehtävän B1 keskiarvosta, mutta niiden keskihajonnat (2,42; 2,37) ovat jokseenkin samansuuruisia ja melko suuria. Tämä johtuu siitä, että vaikka ne poikkeavat vaikeustasoltaan toisistaan, molempien tehtävien oikea ratkaisu perustuu pitkälti yhteen oivallukseen tai vastaavasti hyvään arvaukseen ja tarkistamiseen. Jos tätä oivallusta ei tee, tehtävissä ei pääse kovinkaan pitkälle, mutta jos sen onnistuu tekemään, tehtävät ratkeavat sen jälkeen jokseenkin helposti. Selvästi heikoiten keskiarvojen mukaan ovat sujuneet tehtävät B2 ja B4 (käytäväongelma ja siltaongelma), joiden keskiarvot ovat melko matalia (1,73; 1,86) ja osoittavat sen, että tehtävät olivat melko vaativia.



Kuvio 2 Tehtävän B3 pistejakauma

Kaikista tehtävistä suurin keskihajonta oli tehtävässä B3. Tämän vuoksi keskiarvon lisäksi on syytä tarkastella jakaumaa tarkemmin. Tällöin on mahdollisuus saada yksityiskohtaisempaa ymmärrystä oppilaiden osaamisesta. Kaikista eniten löytyi kahden pisteen ratkaisuja (12/37), mutta runsaasti on myös nollan (11/37) ja kuuden (11/37) pisteen ratkaisuja, jotka aiheuttavat suuren keskihajonnan. Kolmen pisteen ratkaisuja on erittäin vähän (1), vaikkakin se on lähinnä keskiarvoa oleva kokonaispistemäärä. Tässä tapauksessa keskiarvon tarkastelu voikin johtaa harhaan, jos perusteettomasti pitäydyttäisiin normaalijakauma oletuksessa.

C-testissä pistekeskiarvot vaihtelevat A- ja B-testiin verrattuna kaikkein eniten. Kuten edellisissä, myös C-testissä ensimmäisen tehtävän (myyntimääräongelma C) keskiarvo (4,50) on muihin saman testin tehtäviin verrattuna korkein. Tehtävän C1 keskiarvon lisäksi keskihajonta on samansuuntainen kuin tehtävässä A1, mikä selittyy sillä, että tehtävissä käytettiin samaa graafia ja tehtävät ovat muutenkin hyvin samantyyppisiä. Seuraavaksi parhaiten keskiarvojen perusteella onnistuttiin tehtävissä C5 (kerho-ongelma) (3,68) ja C2 (liikuntailtapäiväongelma) (3,45) , joiden keskihajonnat ovat likimäärin samat (2,29; 2,33) ja melko suuret. Tämä kertoo siitä, että on paljon oppilaita, jotka ovat onnistuneet tehtävässä hyvin ja myös paljon niitä, jotka eivät ole päässeet kovin pitkälle. Keskimääräisiä pisteitä on vähän tai ei ollenkaan. Tehtävissä C4 ja C3 (astiaongelma ja kissa-hiiriongelma) oppilaat ovat keskiarvojen mukaan (1,74; 1,50) onnistuneet kaikkein huonoiten muihin C-testin tehtäviin verrattuna. Lisäksi tehtävä C3 on onnistunut kaikkein huonoiten kaikista testin tehtävistä, jos tarkastellaan kokonaispistemäärien keskiarvoja. Tämän vuoksi on syytä hieman tarkastella sen kokonaispistemäärien jakaumaa.



Kuvio 3 Tehtävän C3 pistejakauma

Tehtävässä C3 oli heikoin kokonaispistemäärien keskiarvo kaikista tehtävistä. Jos tarkastellaan pylväsdiagrammia, jossa pylväät kuvaavat saatujen kokonaispistemäärien lukumääriä, huomataan, että ylivoimaisesti eniten on saatu pistemäärää yksi (16/38). Lisäksi varsin moni (9/38) oppilaista on saanut nolla pistettä. Kukaan oppilaista ei ole saanut täysiä pisteitä. Keskihajonta on 1,47, joka on kyllä jokseenkin pieni, muttei testin pienimpiä. Pylväsdiagrammista onkin nähtävissä, että hajontaa on jonkin verran, vaikka yksi pistemääristä onkin hyvin vahvasti edustettuna.

Yleistä osaamista ja tehtävien vaikeusastetta voidaan tarkastella tehtävien kokonaispistemäärien keskiarvojen avulla. Tämän vuoksi on syytä määritellä portaat, joiden avulla sitten kartoitetaan oppilaiden osaamisen tasoa ja tehtävien vaikeusastetta. Olen määritellyt osaamisen portaat siten, että jos tehtävän kokonaispistemäärän keskiarvo on välillä]75-100] % maksimipisteistä, osaaminen on erinomaista. Vastaavasti välillä]50, 75] % olevat keskiarvot tarkoittavat hyvää osaamista, välillä]25, 50] % olevat keskiarvot tyydyttävää ja välillä [0, 25] % olevat keskiarvot huonoa tai heikkoa osaamista. Tämän mukaisesti tehtävä A1 osattiin erinomaisesti, tehtävät A2, A4, A5, B1, C1, C2 ja C5 osattiin hyvin, tehtävät A3, B2, B3, B4 ja C4 osattiin tyydyttävästi ja tehtävä C3 osattiin heikosti. Täten erinomaisesti osattuja oli yksi, hyvin osattuja oli seitsemän, tyydyttävästi osattuja kuusi ja heikosti osattuja tehtäviä oli yksi. A-testin kaikkien tehtävien kokonaispistemäärien keskiarvo oli 3,65, B-testin 2,51 ja C-testin 2,90. Eri testien melko suuret poikkeamat keskiarvoissa johtuvat joko oppilasryhmien eroista tai tehtävien vaikeusasteesta tai molemmista. Keskiarvojen suuren eron perusteella voidaan päätellä, että ainakin A-testi oli kaikkein helpoin, sillä se osattiin keskimäärin hyvin ja muut testit osattiin tyydyttävästi. Kaikkien tehtyjen tehtävien kokonaispistemäärien keskiarvoksi muodostui 3,03, joten se viittaa hyvään osaamiseen kuitenkin siten, että tyydyttävän osaamisen raja on kolmen sadasosan päässä.

Taulukko 2 Tehtävän A1 kokonaispistemäärien jakautuminen

Pistemäärä	Lukumäärä	Prosenttiosuus
0	1	2,6
2	1	2,6
3	4	10,5
4	4	10,5
5	7	18,4
6	21	55,3
Yhteensä	38	100,0

Oppilaiden onnistumista eri tehtävissä voidaan tarkastella kokonaispistemäärien frekvenssien ja niiden suhteellisten osuuksien avulla. Tässä käytän osaamisen portaita siten, että tarkastelen täysien pisteiden saaneiden oppilaiden suhteellisia osuuksia edellä mainitussa portaikossa. Kaikista tehtävistä eniten kuuden pisteen ratkaisuja (21/38) löytyi tehtävästä A1 (55,3 %). Tässä tehtävässä oppilaat ovat osanneet hyvin, sillä yli puolet on osannut tehtävän täydellisesti. Erinomaisesti ei osattu yhtään tehtävää. Korkean pistekeskiarvon ja täysien pisteiden suuren suhteellisen osuuden perusteella tehtävä A1 oli liiankin helppo, vaikkakin helppous oli alunperin tavoitteena. Tyydyttävästi osattiin tehtävät C5 (47,4 %), B1 (45,9 %), C1 (42,1 %), A5 (40,7 %), C2 (39,5 %), B3 (29,7 %) ja A4 (26,3 %). Heikosti osattuja tehtäviä olivat A3 (18,4 %), B4 (10,8 %), B5 (8,7 %), A2 (5,3 %), C4 (2,6 %) ja B2 sekä C3 (0 %). Siis vain yksi tehtävä osattiin yleisesti hyvin. Tyydyttävästi sekä heikosti osattuja tehtäviä oli kumpiakin seitsemän. Kaikkiaan kuuden pisteen ratkaisuja oli yhteensä 126. Koska ratkaisuja oli yhteensä 521, saadaan täysien pisteiden prosenttiosuudeksi 24,2, joka viittaa heikkoon osaamiseen.

Keskiarvojen perusteella osaaminen oli keskimäärin hyvän osaamisen alarajoilla ja täysien pisteiden suhteellisten osuuksien perusteella heikon osaamisen ylärajoilla. Tästä voidaan päätellä, että oppilaiden osaaminen näissä ongelmanratkaisutesteissä oli keskimäärin tyydyttävää. Näyttäisi siltä, että oppilaiden pistemäärät tehtävittäin vaihtelevat melko vähän, huippupistemääriä on pieni määrä ja keskihajonnat ovat keskimäärin suhteellisen pieniä. Tehtävät C3 ja B2 (kissa-hiiriongelma ja siltaongelma) osattiin selvästi huonoiten, kun tarkastellaan sekä keskiarvoja että täysien pisteiden suhteellisia osuuksia. Parhaiten puolestaan osattiin kaikkien tehtäväsarjojen ensimmäiset tehtävät.

Yleisen osaamisen tason tarkastelun jälkeen, on syytä selvittää, onko tehtävien välillä sukupuolittaisia eroja. T-testin avulla voidaan selvittää tehtävien kokonaispistemäärien keskiarvoja erikseen tytöille ja pojille, kun huomioidaan merkitsevyystaso. Näin saadaan selville, osasiko mahdollisesti jompikumpi sukupuolista yleisesti paremmin tai oliko joillain tietyillä osa-alueilla sukupuolittaisia eroja.

Taulukko 3 A-testin keskiarvot ja keskihajonnat sukupuolittain

	sukupuoli	Lukumäärä	Keskiarvo	Keskihajonta
Tehtävä A1	poika	20	5,05	1,50
	tyttö	17	4,94	1,39
Tehtävä A2	poika	20	3,50	0,95
	tyttö	17	3,47	0,94
Tehtävä A3	poika	20	2,85	1,87
	tyttö	17	2,76	1,75
Tehtävä A4	poika	20	3,85	2,32
	tyttö	17	3,00	1,77
Tehtävä A5	poika	14	3,57	2,38
	tyttö	13	3,69	2,39

Tehtäviä A1, A2, A3 ja A4 teki 20 poikaa ja 17 tyttöä ja tehtävää A5 teki 14 poikaa ja 13 tyttöä. A-sarjan tehtävissä pojat näyttävät menestyvän tyttöjä paremmin lukuun ottamatta tehtävää A5 tarkasteltaessa tehtävien kokonaispistemäärien keskiarvoja sukupuolittain. Myös poikien keskihajonta on suurempi tehtävissä A1, A3 ja A4, eli heidän suoritustensa taso oppilaiden välillä vaihteli hieman enemmän kuin tyttöjen. Tehtäväpistemäärien keskiarvoissa ei ole kuitenkaan suuria eroja tyttöjen ja poikien välillä, eivätkä ne ole tilastollisesti merkitseviä, sillä p-arvot ovat suuria (>0.05). Suurin ero sukupuolten välillä A-sarjan tehtävässä on A4, mutta sekään ei ole tilastollisesti merkitsevä.

Taulukko 4 B-testin keskiarvot ja keskihajonnat sukupuolittain

	sukupuoli	Lukumäärä	Keskiarvo	Keskihajonta
Tehtävä B1	poika	17	4,18	2,58
	tyttö	20	3,90	2,25
Tehtävä B2	poika	17	2,12	1,80
	tyttö	20	1,40	1,31
Tehtävä B3	poika	17	2,18	2,65
	tyttö	20	3,05	2,19
Tehtävä B4	poika	17	2,47	2,53
	tyttö	20	1,35	1,95
Tehtävä B5	poika	10	2,30	1,89
	tyttö	13	2,00	2,16

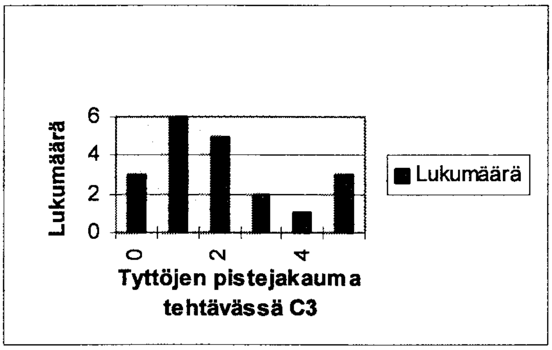
Varsinaisia B-sarjan tehtäviä teki 17 poikaa ja 20 tyttöä ja lisätehtävää teki 10 poikaa ja 13 tyttöä. B-sarjan osalta menestyminen on hyvin samantyyppistä, joskin tyttöjen ja poikien keskiarvojen erot ovat suurempi. Poikien keskiarvot ovat parempia ja keskihajonnat suurempia lukuun ottamatta tehtäviä B3 ja B5, joista edellisessä tytöillä on parempi keskiarvo ja jälkimmäisessä suurempi keskihajonta. Myöskään B-sarjan tehtävissä ei ole yhtään tehtävää, joiden osalta erot olisivat tilastollisesti merkitseviä.

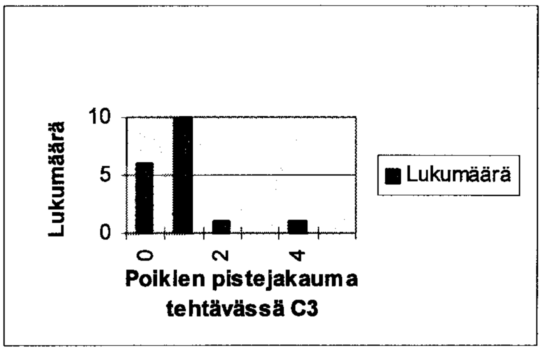
Taulukko 5 C-testin keskiarvot ja keskihajonnat sukupuolittain

	Sukupuoli	Lukumäärä	Keskiarvo	Keskihajonta
Tehtävä C1	poika	18	4,67	1,46

	tyttö	20	4,35	1,46
Tehtävä C2	poika	18	2,94	2,39
	tyttö	20	3,90	2,25
Tehtävä C3	poika	18	0,89	0,96
	tyttö	20	2,05	1,64
Tehtävä C4	poika	18	1,44	1,95
	tyttö	20	2,00	1,65
Tehtävä C5	poika	7	3,43	2,44
	tyttö	12	3,83	2,29

C-sarjan varsinaisia tehtäviä teki 18 poikaa ja 20 tyttöä ja lisätehtävää teki 7 poikaa ja 12 tyttöä. Oppilaiden menestymisen kannalta sukupuolittaiset erot ovat edellisiin verrattuna poikkeavia. Tehtävää C1 lukuun ottamatta tyttöjen keskiarvot ovat poikien vastaavia korkeammat ja erot ovat suurempia. Tyttöjen keskihajonta on suurempi tehtävissä C1 ja C3 ja poikien keskihajonta on suurempi puolestaan tehtävissä C2, C4 ja C5. Tehtävässä C3 keskiarvojen ero on suurimmillaan ja keskiarvot ovat matalimmat, sillä poikien keskiarvo on 0,89 ja tyttöjen 2,05. Tämän tehtävän sukupuolittaiset erot ovat myös tilastollisesti merkitseviä, sillä p-arvo on pieni (0,01). Näin ollen tässä pistekeskiarvojen perusteella vaikeimmassa tehtävässä tytöt onnistuivat huomattavasti paremmin kuin pojat, joiden keskihajonta on erittäin pieni. Tämän vuoksi onkin syytä hieman tarkastella tyttöjen ja poikien pistemäärien jakaumaa pylväsdiagrammin avulla, jotta saadaan selville, miksi poikien keskihajonta on niin pieni ja miksi tytöt ovat onnistuneet tehtävässä huomattavasti poikia paremmin.





Kuvio 4 Tyttöjen ja poikien pistejakauma tehtävässä C3

Poikien saamien kokonaispisteiden pieni keskiarvo (0,89) johtuu pitkälti siitä, että pisteitä 0 ja 1 on saatu hyvin paljon (16/18). Pieni keskihajonta (0,96) johtuu samoista syistä, sillä edellä mainittujen pistemäärien lisäksi vaihtelua on todella vähän. Ratkaisuissa on saatu pisteitä 2 ja 4 molempia yksi kappale, ja muita pistemääriä ei ole saatu yhtään. Jotta saataisiin selvyyttä siitä, mihin poikien heikko onnistuminen tässä tehtävässä pohjimmiltaan perustuu, on syytä tarkastella erilaisten haittaavien tekijöiden merkitystä ongelmanratkaisussa, tehtävässä etenemisen pituutta tai oppilaiden ilmaisemia emotioita tehtävistä.

Poikien ja tyttöjen keskiarvoissa ja keskihajonnoissa on selkeitä eroja, mutta vain yhden tehtävän kohdalla tulos on tilastollisesti merkitsevä. Tämä voi johtua siitä, että poikien ja tyttöjen lukumäärät ovat hyvin pieniä (17-20). Tämän vuoksi tarkastelen hyvin samantyyppisiä tehtäviä A1 ja C1 yhdessä. Niiden keskiarvot ja keskihajonnat ovat hyvin samansuuntaisia. Lisäksi ne perustuvat saman graafin tulkintaan, joskin tehtävänantoja on hieman muunneltu. Jotta voisin selvittää sukupuolittaisia eroja näiden tehtävien kohdalla, olen yhdistänyt ne havaintomatriisiin uudeksi muuttujaksi AC1. Tämän jälkeen tutkin muuttujan jakauman normaalisuutta. Koska jakauma poikkeaa normaalista, mutta ei niin paljon, että se estäisi t-testin käytön, analysoin sukupuolittaisia eroja kyseisen testin avulla.

Taulukko 6 Tehtävän AC1 sukupuolittaiset keskiarvot ja keskihajonnat

	Sukupuoli	Lukumäärä	Keskiarvo	Keskihajonta
Tehtävä AC1	poika	38	4,87	1,47
	tyttö	37	4,62	1,44

Yhdistettäessä kaikki tehtävien A1 ja C1 tehneet tutkittavat saadaan yhteensä 76 tehtävän AC1 tehnyttä koehenkilöä, joista 38 on poikaa ja 37 on tyttöä ja yhden sukupuolesta ei ole tietoa. Poikien keskiarvo (4,87) on hieman korkeampi kuin tyttöjen (4,62). Erot ovat kuitenkin tämän tehtävän kohdalla niin pieniä, että ne eivät ole tilastollisesti merkitseviä, sillä P-arvo on suuri (> 0,05). Lisäksi keskihajonnat ovat melko suuria (1,47; 1,44). Tämä vahvistaa entisestään sitä tulkintaa, että sukupuolittaiset erot eivät ole tilastollisesti merkitseviä.

Eri tehtävien yhteispistemäärien välillä olevaa riippuvuutta voidaan tarkastella korrelaatiokertoimen avulla, sillä Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokerroin edellyttää vähintään välimatka-asteikollisia muuttujia. Näin voidaan tarkastella mittarin validiteettia eli sitä, ovatko tehtävät mitanneet niitä taitoja, joita halutaankin mitata. Koska testin keskeisenä tarkoituksena on mitata ongelmanratkaisutaitoja, onnistuneen testin pistemäärien välillä ei tulisi olla voimakasta negatiivista korrelaatiota. Testissä jokainen tehtävä kuitenkin on erityyppinen ja yleisten ongelmanratkaisutaitojen lisäksi tarvitaan huomattava määrä erilaisia osataitoja, kuten esimerkiksi kuvaajan tulkitsemisen taitoja tai tasogeometrian käsitteellistä osaamista. Tämän vuoksi kaikkien tehtävien välillä ei oletettavasti ole voimakasta positiivista korrelaatiota, vaan niiden tehtäväpistemäärät saattavat vaihdella toisistaan vahvasti riippumatta. P-arvon olen merkinnyt näkyviin vain, jos tulos on tilastollisesti merkitsevä. Tällöin on nähtävissä, millä riskitasolla riippuvuus on tilastollisesti merkitsevä.

Taulukko 7 A-testin ja lisätehtävien kokonaispistemäärien riippuvuudet

		Tehtävä A1	Tehtävä A2	Tehtävä A3	Tehtävä A4	Tehtävä A5	Tehtävä B5	Tehtävä C5
Tehtävä A1	Korrelaatiokerroin	1	-0,11	-0,01	0,32	0,61	-0,56	0,12
	P-arvo	0			0,05		0,05	
	Lukumäärä	38	38	38	38	10	13	7
Tehtävä A2	Korrelaatiokerroin	-0,11	1	-0,07	0,27	0,23	0,18	0,54
	P-arvo		0					
	Lukumäärä	38	38	38	38	10	13	7
Tehtävä A3	Korrelaatiokerroin	-0,01	-0,07	1	0,02	-0,52	-0,00	-0,57
	P-arvo			0				
	Lukumäärä	38	38	38	38	10	13	7
Tehtävä A4	Korrelaatiokerroin	0,32	0,27	0,02	1	0,86	-0,02	0,41
	P-arvo	0,05			0	0,00		
	Lukumäärä	38	38	38	38	10	13	7
Tehtävä A5	Korrelaatiokerroin	0,61	0,23	-0,52	0,86	1	-0,01	0,23
	P-arvo				0,00	0		
	Lukumäärä	10	10	10	10	27	8	11
Tehtävä B5	Korrelaatiokerroin	-0,56	0,18	-0,00	-0,02	-0,01	1	-0,14
	P-arvo	0,05					0	
	Lukumäärä	13	13	13	13	8	23	4
Tehtävä C5	Korrelaatiokerroin	0,12	0,54	-0,57	0,41	0,23	-0,14	1
	P-arvo							0
	Lukumäärä	7	7	7	7	11	4	19

Korrelaatiomatriisin mukaan A-sarjan tehtävistä A1 yhteispistemäärä korreloi tehtävän A4 pistemäärän kanssa tilastollisesti melkein merkitsevästi. Tämä tarkoittaa sitä, että oppilaiden tehtäväpistemäärien välillä on riippuvuutta edellä mainittujen tehtävien osalta. Lisäksi varsinaisen tehtävän A1 ja lisätehtävän B5 välillä on tilastollisesti melkein merkitsevä voimakas negatiivinen riippuvuus. Tämä merkitsee sitä, että oppilaan, joka on saanut paljon pisteitä tehtävästä A1, on todennäköistä saada vähän pisteitä tehtävästä B5 tai päinvastoin. Tämä selittyy sillä, että vaikka molemmat tehtävistä mittaavatkin ongelmanratkaisutaitoja, ne ovat hyvin eri tyyppisiä ja edellyttävät erilaisia osataitoja. Tehtävässä A1 on keskeistä osata tulkita graafia ja selvittää sen avulla tehtävänannossa vaadittuja myyntimääriä, kun taas tehtävässä B5 pelkästään sanallisen tehtävänannon perusteella pitäisi selvittää Jonin myyntipalkkio päättelyn tai kokeilun ja tarkistuksen avulla. Tehtävässä A1 tarvitaan vain yhteen- ja vähennyslaskua, mutta tehtävässä B5 tarvitaan näiden lisäksi kerto- ja jakolaskua tai murtoluvuilla laskemista. Lisäksi tehtävien A4 ja A5 pistemäärien välillä on tilastollisesti erittäin merkitsevä hyvin voimakas positiivinen korrelaatio eli oppilaiden pistemäärät tehtävissä A4 ja A5 ovat voimakkaasti toisistaan riippuvaisia.

Taulukko 8 B-testin ja lisätehtävien kokonaispistemäärien riippuvuudet

		Tehtävä B1	Tehtävä B2	Tehtävä B3	Tehtävä B4	Tehtävä B5	Tehtävä A5	Tehtävä C5
Tehtävä B1	Korrelaatiokerroin	1	0,43	0,35	0,41	,	0,66	,
	P-arvo	0	0,01	0,03	0,01	,	0,05	,
	Lukumäärä	37	37	37	37	2	9	7
Tehtävä B2		0,43	1	0,32	0,28	,	0,67	0,64
	P-arvo	0,01	0		0,10	,	0,05	
	Lukumäärä	37	37	37	37	2	9	7
Tehtävä B3	Korrelaatiokerroin			1	0,02	,		
	P-arvo	0,03	0,06	0		,	0,04	
	Lukumäärä	37	37	37	37	2	9	7
Tehtävä B4	Korrelaatiokerroin	0,41	0,28	0,02	1	-1,00	0,42	0,35
	P-arvo	0,01			0	0,00		
	Lukumäärä	37	37	37	37	2	9	7
Tehtävä B5	Korrelaatiokerroin	,	,	,	-1,00	1	-0,01	-0,14
	P-arvo	,	,	,	0,00	0		
	Lukumäärä	2	2	2	2	23	8	4
Tehtävä A5	Korrelaatiokerroin	0,66	0,67	0,69	0,42	-0,01	1	0,23
	P-arvo		0,05	0,04			0	
	Lukumäärä	9	9	9	9	8	27	11

Tehtävä C5	Korrelaatiokerroin		0,64	-0,36	0,35	-0,14	0,23	1
	P-arvo							0
	Lukumäärä	7	7	7	7	4	11	19

B-sarjan tehtäviä ja lisätehtäviä tarkasteltaessa on löydettävissä monen tyyppistä riippuvuutta oppilaiden saamien tehtävien kokonaispistemäärien välillä. Tehtävässä B1 saadut kokonaispistemäärät korreloivat tilastollisesti merkitsevästi tehtävien B2, B3 ja B4 kanssa melko voimakkaasti. Lisäksi tehtävien B4 ja B5 välillä on täydellinen negatiivinen korrelaatio, joka on tilastollisesti merkitsevä, mutta tämä tieto ei ole tutkimuksen kannalta kovin tärkeä, sillä vain kaksi oppilasta on tehnyt ne molemmat. Tehtävien A5, B2 ja B3 välillä on tilastollisesti merkitsevä voimakas positiivinen korrelaatio viiden prosentin riskitasolla. Vaikka B-sarjan tehtävät edellyttävät hyvin erilaisia matemaattisia ja yleisiä kognitiivisia taitoja, niissä oppilaiden saavuttamien pistemäärien välillä on huomattava määrä tilastollisesti merkitseviä riippuvuuksia. Näyttäisi siltä, että tehtävät mittaavat onnistuneesti ongelmanratkaisutaitoja, ja tämän vuoksi pistemäärät korreloivat keskenään.

Taulukko 9 C-testin ja lisätehtävien kokonaispistemäärien riippuvuudet

		Tehtävä C1	Tehtävä C2	Tehtävä C3	Tehtävä C4	Tehtävä C5	Tehtävä A5	Tehtävä B5
Tehtävä C1	Korrelaatiokerroin	1	0,33	0,21	0,17	0,60	0,43	0,63
	P-arvo	0	0,04					
	Lukumäärä	38	38	38	38	5	8	8
Tehtävä C2	Korrelaatiokerroin	0,33	1	0,57	0,14	-0,06	0,76	0,38
	P-arvo	0,04	0	0,00			0,03	
	Lukumäärä	38	38	38	38	5	8	8
Tehtävä C3	Korrelaatiokerroin	0,21	0,57	1	0,15	-0,11	0,48	0,90
	P-arvo		0,00	0				0,00
	Lukumäärä	38	38	38	38	5	8	8
Tehtävä C4	Korrelaatiokerroin	0,16	0,14	0,15	1	0,21	0,61	0,10
	P-arvo				0			
	Lukumäärä	38	38	38	38	5	8	8
Tehtävä C5	Korrelaatiokerroin	0,60	-0,06	-0,11	0,21	1	0,23	-0,14
	P-arvo					0		
	Lukumäärä	5	5	5	5	19	11	4
Tehtävä A5	Korrelaatiokerroin	0,43	0,76	0,48	0,61	0,23	1	-0,01

	P-arvo		0,03				0	
	Lukumäärä	8	8	8	8	11	27	8
Tehtävä B5	Korrelaatiokerroin	0,63	0,38	0,90	0,10	-0,14	-0,01	1
	P-arvo			0,00				0
	Lukumäärä	8	8	8	8	4	8	23

Tehtävien C1 ja C2 yhteispistemäärien välillä on melko voimakas korrelaatio, joka on tilastollisesti merkitsevä viiden prosentin riskitasolla. Myös tehtävien C2 ja C3 sekä C2 ja A5 välillä on korrelaatio, joka on tilastollisesti merkitsevä ja voimakas. Lisäksi tehtävien C3 ja B5 pistemäärien välillä on erittäin merkitsevä ja hyvin voimakas riippuvuus. Tämä tarkoittaa sitä, että oppilas, joka on onnistunut tehtävässä C3, on hyvin todennäköisesti onnistunut myös tehtävässä B5 tai päinvastoin. Jos taas oppilaalla on ollut vaikeuksia tehtävässä C3, niin hänellä on lähes poikkeuksetta ollut niitä myös tehtävässä B5. Korrelaatiokerroin osoittaa riippuvuuden, mutta sen perusteella ei voida johtaa kausaalisuhteita eli ei voida tietää kummassa menestyminen on ollut syy ja kumpi on ollut seuraus. Näiden tehtävien pistemäärien välillä on vain selvä riippuvuus.

Näyttäisi siltä, että vaikka ongelmanratkaisutaitojen lisäksi oppilaat tarvitsevat eri tehtävissä eri taitoja, useiden tehtävien kokonaispistemäärien välillä on tilastollisesti merkitseviä positiivisia riippuvuuksia. Negatiivisia korrelaatioita on vähän ja niistäkin vain kaksi on tilastollisesti merkitseviä. Näin ollen voidaan olettaa, että testitehtävät mittasivat erilaisten toisistaan poikkeavien osataitojen lisäksi yleisiä ongelmanratkaisutaitoja. Siten mittarin validiteetti on hyvä ja sen voidaan katsoa mittaavan sitä, mitä sen on tarkoitettukin mittaavan.

4.2 Ongelmanratkaisuprosessissa ilmenevät ratkaisua haittaavat tekijät

Tässä tutkimuksessa käytettyjen tehtävien ongelmanratkaisua haittaavien tekijöiden lukumääriä tarkastellessa on selvästi havaittavissa erilaisten haittaavien tekijöiden suhteelliset osuudet. Tässä tutkimuksessa yleisin oppilaiden ongelmanratkaisua haittaava tekijä oli tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen ymmärtämisen vaikeus ja siihen liittyvä käsitteellinen puutteellisuus. Suurimmassa osassa tehtäviä matemaattis-loogiset haittaavat tekijät olivat yleisimpiä (12/15), mikä on nähtävissä tarkasteltaessa kaikkien tehtävien ratkaisua haittaavien tekijöiden frekvenssitaulukoita (esim. taulukot 10-13). Seuraavaksi suhteellisesti eniten oli pinnallisiin strategioihin, uskomuksiin ja vääriin käsityksiin liittyviä tekijöitä. Useimmissa tehtävissä suurimman haittaavien tekijöiden ryhmän muodostivat matemaattis-loogiset- ja hiukan pienempi oli pinnallisiin strategioihin liittyvät tekijät.

Kaikkiaan 395:ssä (75,8 %) tehtäväpaperissa oli jokin ratkaisua haittaava tekijä, oli se sitten huolimattomuusvirhe, käsitteellinen puutteellisuus tai jokin muu. Haittaavista tekijöistä yleisin oli matemaattis-loogiset tekijät, joita oli kaikista haittaavista tekijöistä 187 kappaletta (47,3 %). Sitten tulivat järjestyksessä pinnalliset strategiat 138 (34,9 %), huolimattomuus, laskuvirhe tai kopiointivirhe 26 (6,6 %), tekstin ymmärtämiseen liittyvät tekijät 23 (5,8 %) ja viimeisenä ajanpuute 21 kappaletta (5,3 %) ratkaisuista. Matemaattis-loogiset vaikeudet ja pinnalliset strategiat ovat ylivoimaisesti suurimmat haittaavat tekijät tässä tutkimuksessa (82,2 %). Viimeisimmät kolme muodostavat vähemmän haittoja aiheuttaneen ryhmän (17,7 %). Tässä on kuitenkin syytä huomioida se, että esimerkiksi pinnallista strategiaa jossain tehtävässä käyttänyt oppilas saattoi tehdä myös laskuvirheen, mutta vaikka hän olisi laskenutkin oikein, hänen ratkaisunsa olisi ollut virheellinen. Tämän vuoksi hänen haittaavaa tekijäänsä määrittävät ensisijaisesti pinnalliset strategiat eikä laskuvirhettä ole tämän vuoksi huomioitu.

Taulukko 10 Tehtävän A1 haittaavien tekijöiden frekvenssit ja prosenttiosuudet

	Lukumäärä	Prosenttiosuudet
huolimattomuus-, kopiointi- tai laskuvirhe	1	5,9
teksti	4	23,5
matemaattis-looginen rakenne	12	70,6
Yhteensä	17	100,0

Tehtävässä A1 vain 17:llä oppilaalla (36:sta) oli jotain ratkaisua haittaavia tekijöitä ongelmanratkaisuprosessissaan. Kaikista tähän tehtävään liittyvistä haittaavista tekijöistä 12:lla (70,6 %) oli matemaattis-loogisia tai käsitteellisiä puutteellisuuksia. Tämä selittyy sillä, että useilla oppilailla oli vaikeuksia tulkita kuvaajaa, jossa kulki kaksi myyntikäyrää tai sitten heillä oli vaikeuksia c- tai d-kohdan tehtävänannon matemaattis-loogisen haastavuuden vuoksi. Neljällä oppilaalla oli tekstiin liittyviä haittaavia tekijöitä ja yhdellä laskuvirhe. Tekstiin liittyvät haittaavat tekijät saattoivat johtua siitä, että sekä helmi- että heinäkuu lyhennettiin kuvaajassa puutteellisesti tavulla he, kun taas maalisja marraskuun kohdalla olivat tavut maa ja mar.

Taulukko 11 Tehtävän A2 haittaavien tekijöiden frekvenssit ja prosenttiosuudet

	Lukumäärä	Prosenttiosuudet
pinnallinen strategia, uskomus tai väärä käsitys	30	83,3
matemaattis-looginen rakenne	6	16,7
Yhteensä	36	100,0

Tehtävässä A2 on ylivoimaisesti eniten pinnallisiin strategioihin liittyviä ratkaisua haittaavia tekijöitä (30/36), mutta myös matemaattis-looginen rakenne aiheutti hankaluuksia (6/36). Tehtävässä A3 puolestaan haittaavina tekijöinä oli 28 pinnallista strategiaa ja kolme huolimattomuutta. Myös tehtävässä A4 oli huolimattomuutta (8/28), mutta sen lisäksi tekstiin (3/28) liittyviä tekijöitä, matemaattis-loogisia tekijöitä (15/28) ja ajanpuutetta (2/28). Ihan ongelmaton ei ollut tehtävä A5:kään, sillä huolimattomuuden (4/15) lisäksi sen ratkaisuissa esiintyi pinnallista strategiaa (10/15) ja ajanpuutetta (1/15). Tämä tehtävä oli siinä mielessä poikkeuksellinen, että matemaattis-loogisia haittaavia tekijöitä ei ollut ollenkaan ja suhteellisesti eniten löytyi pinnalliseen strategiaan liittyviä tekijöitä (66,7 %).

Taulukko 12 Tehtävän B4 haittaavien tekijöiden frekvenssit ja prosenttiosuudet

	Lukumäärä	Prosenttiosuudet
huolimattomuus-, kopiointi- tai laskuvirhe	4	12,1
pinnallinen strategia, uskomus tai väärä käsitys	12	36,4
matemaattis-looginen rakenne	14	42,4
aika	3	9,1
Yhteensä	33	100,0

Tehtävän B4 tehneillä oppilailla oli neljää oppilasta luukun ottamatta kaikilla jotain ratkaisua haittaavia tekijöitä (33/37). Kaikista haittaavista tekijöistä matemaattis-loogisia- oli 42, 4 % (14/37), pinnallisiin strategioihin liittyviä 36,4% (12/37), huolimattomuudesta, kopiointi- tai laskuvirheestä johtuvia 12,1% (4/37) ja ajanpuutteesta johtuvia 9,1% (3/37). Tehtävästä B1 löytyi kahdeksalta oppilaalta (40 %) matemaattis-loogiseen rakenteeseen liittyviä ratkaisua haittaavia tekijöitä. Lisäksi tekstiin ja pinnallisiin strategioihin liittyviä tekijöitä löytyi molempia kuudelta oppilaalta (30 %). Tehtävässä B2 jokaiselta oppilaalta löytyi jokin kolmesta seuraavasta ratkaisua haittaavasta tekijästä. Matemaattis-loogisia tekijöitä oli paljon (27/37), mutta sen lisäksi oli myös pinnalliseen strategiaan liittyviä haittaavia tekijöitä (8/37) sekä ajanpuutetta (2/37). Tehtävässä B3 haittaavia tekijöitä aiheuttivat tehtävän matemaattis-looginen rakenne (21/37), oppilaiden pinnalliset strategiat (1/37) ja huolimattomuus, kopiointi- tai laskuvirhe (1/37). Myös tehtävässä B5 matemaattis-looginen rakenne aiheutti eniten ratkaisua haittaavia tekijöitä (12/23). Sen lisäksi pinnalliset strategiat oli melko yleinen (9/23) ja aika loppui yhdeltä oppilaalta.

Taulukko 13 Tehtävän C1 haittaavien tekijöiden frekvenssit ja prosenttiosuudet

	Lukumäärä	Prosenttiosuudet
huolimattomuus-, kopiointi- tai laskuvirhe	2	9,1
teksti	8	36,4
matemaattis-looginen rakenne	12	54,5
Yhteensä	22	100,0

Tehtävässä C1 yleisin ratkaisua haittaava tekijä oli matemaattis-looginen rakenne (12/38). Oppilailla oli siinä myös tekstiin liittyviä hankaluuksia (8/38) sekä huolimattomuutta (2/38). Tässä mielessä tehtävä on poikkeuksellinen, sillä kaikista haittaavista tekijöistä runsas kolmannes muodostuu tekstiin liittyvistä haittaavista tekijöistä. Tehtävässä C2 puolestaan 13:lla oppilaalla oli matemaattis-loogiseen rakenteeseen liittyviä (56,5 %), seitsemällä pinnallisia strategioita (30,4 %), kahdella huolimattomuutta (8,7 %) ja yhdellä loppui aika (4,3 %). Matemaattis-looginen rakenne aiheutti eniten ratkaisua haittaavia tekijöitä myös tehtävässä C3 (19/38). Pinnalliset strategiat olivat lisäksi melko yleisiä (16/38). Aika loppui kahdelta oppilaalta ja yksi oppilas teki huolimattomuuteen viittaavan virheen. Tehtävässä C3 oli tyttöjen ja poikien välillä suuri ero keskiarvossa ja keskihajonnassa, joiden syitä yritin selvittää ristiintaulukoinnin avulla. Kun tarkastelin ratkaisua haittaavia tekijöitä sukupuolittain, en havainnut merkittäviä eroja tyttöjen ja poikien välillä. Eli haittaavien tekijöiden laatuerot eivät selitä näin suuria eroja. Näin ollen heidän välillään täytyy olla eroja tehtävässä etenemisen pituudessa tai emotioissa. Tehtävässä C4 yhtä lukuun ottamatta kaikilla oppilaista oli jokin ratkaisua haittaava tekijä. Oppilaista 18:lla oli matemaattis-loogiseen rakenteeseen liittyviä haittaavia tekijöitä, 11:lla pinnallisia strategioita, kuudella loppui aika kesken ja kahdella oli tekstiin liittyviä tekijöitä. Tehtävän C5 kaikkiaan 19:sta ratkaisusta kymmenessä oli matemaattis-loogiseen rakenteeseen liittyvä ratkaisua haittaava tekijä.

Kun halutaan tarkastella sitä, minkä vuoksi tehtävät B2 ja C3 ovat vaikeimpia tehtäviä, syitä tulee etsiä siitä, minkälaisia haittaavia tekijöitä näissä tehtävissä ilmenee. Molemmissa matemaattis-looginen rakenne on ollut suurin haittaava tekijä. Lisäksi molemmissa on jonkin verran pinnallisten strategioiden aiheuttamia haittaavia tekijöitä. Tästä ja tehtävänannosta voidaan päätellä, että näistä tehtävistä tekee vaikean tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen monimutkaisuus.

4.3 Ongelmanratkaisuprosessin vaiheiden ajoittuminen ja niiden yhteydet oppilaiden kohtaamiin haittaaviin tekijöihin

Tehtävien numeerisessa arvioinnissa on käytetty apuna Charlesin pisteytystaulukkoa. Tämän vuoksi pisteytyksessä erottuvat ongelmanratkaisun vaiheet. Kun halutaan saada tietoa siitä, missä vaiheessa ongelmanratkaisuprosessia haittaavia tekijöitä alkaa ilmetä, voidaan tarkastella eri tehtävien ongelmanratkaisun vaiheiden pistemäärien frekvenssejä. Koska ongelmanratkaisun vaiheita on kolme, on tilannetta syytä hieman yksinkertaistaa. Jos oppilas on saanut jostain vaiheesta täydet kaksi pistettä, hänellä ei ilmene tässä vaiheessa ratkaisua haittaavia tekijöitä. Vaiheessa, jossa ratkaisua haittaavat tekijät alkavat ilmetä, oppilas on saanut joko yhden tai nolla pistettä. Vaikka jokaisesta vaiheesta voi saada jonkin kolmesta mahdollisesta pistemäärästä, tässä tarkastellaan yksinkertaistetusti sitä, kuinka moni oppilaista on osannut ongelmanratkaisuprosessin vaiheen täysin oikein (saanut 2 pistettä) ja kuinka monella ilmenee ratkaisua haittaavia tekijöitä (saanut 1 tai 0 pistettä). Taulukoissa edellistä merkitään symbolilla + ja jälkimmäistä symbolilla -.

Taulukko 14 Tehtävän A4 ongelmanratkaisuprosessin vaiheiden osaaminen

Ong.ratkaisun vaiheet		Oppilaslukumäärä	Prosenttiosuudet
Ymmärtäminen	-	19/38	50
	+	19	50
	Yhteensä	38	100
Ratkaisu	-	22/38	58
	+	16	42
	Yhteensä	38	100
Vastaus	-	28/38	74
	+	10	26
	Yhteensä	38	100

Kun tarkastelin oppilaiden tekemien tehtävien pistemäärien frekvenssejä eri ongelmanratkaisun vaiheissa, havaitsin, että vaihe vaiheelta oppilaiden ratkaisut heikkenivät. Jos ymmärtäminen oli kunnossa, niin ratkaisun suunnittelussa tai viimeistään vastauksen antamisessa epäonnistuttiin. Tehtävä A4 on tässä mielessä tyypillinen esimerkki. Puolet oppilaista (50 %) ymmärsi tehtävän, kaksi viidestä (42,1 %) onnistui ratkaisusuunnitelmassaan ja vain neljännes (26,3 %) päätyi oikeaan vastaukseen. Tässä tehtävässä tehtävän ymmärtäneistä oppilaista, vain kolme ei onnistunut ratkaisusuunnitelmassaan, mutta peräti kuudella oppilaista, jotka onnistuivat ratkaisun suunnittelussa ilmeni haittaavia tekijöitä vastauksen antamiseen siirryttäessä.

Taulukko 15 Tehtävän B3 ongelmanratkaisuprosessin vaiheiden osaaminen

Ong.ratkaisun vaiheet		Oppilaslukumäärä	Prosenttiosuudet
Ymmärtäminen	-	24/37	65
	+	13	35
	Yhteensä	37	100
Ratkaisu	-	25/37	68
	+	12	32
	Yhteensä	37	100
Vastaus	-	26/37	70
	+	11	30
	Yhteensä	37	100

Tehtävän B3 ratkaisut ovat tietyssä mielessä poikkeuksellisia ongelmanratkaisuprosessin vaiheiden onnistumisen suhteen. Ongelman ymmärtäneitä oli 13 (35,1 %), ratkaisusuunnittelussa onnistuneita oli 12 (32,4 %) ja oikeaan vastaukseen päätyneitä oli 11 (29,7 %). Vain kolmannes siis ymmärsi tehtävän siten, että siinä ei ilmennyt haittaavia tekijöitä. Seuraaviin vaiheisiin siirryttäessä vain yksi oppilas kohtasi haittaavia tekijöitä molemmissa vaiheissa. Tehtävässä B3 tehtävänannon ymmärtäminen oli hyvin tärkeä tekijä ja yhtä tapausta lukuun ottamatta kaikilla ratkaisun onnistumisen tae. Tässä tehtävässä ylivoimaisesti suurin osa haittaavista tekijöistä ilmeni jo tehtävän ymmärtämisen vaiheessa.

Taulukko 16 Tehtävän C5 ongelmanratkaisuprosessin vaiheiden osaaminen

Ong.ratkaisun vaiheet		Oppilaslukumäärä	Prosenttiosuudet
Ymmärtäminen	-	10/19	53
	+	9	47
	Yhteensä	19	100
Ratkaisu	-	10/19	53
	+	9	47
	Yhteensä	19	100
Vastaus	-	10/19	53
	+	9	47
	Yhteensä	19	100

Vain tehtävässä C5 oli yhtä monta (9) tehtävän ymmärtänyttä, ratkaisusuunnittelussa onnistunutta ja oikeaan vastaukseen päätynyttä. Tässä tehtävässä korostui ymmärtämisvaihe muita tehtäviä enemmän. Ratkaisujen perusteella tehtävän ymmärtänyt oppilas osasi suunnitella ratkaisunsa ja päätyi oikeaan vastaukseen täysin onnistuneesti. Lisäksi tehtävissä C3 ja C4 tehtävän ymmärtäneitä (33;31) ja ratkaisusuunnitelmassa onnistuneita (33;31) on yhtä paljon, mutta vastauksen saamisessa on tullutkin sitten hankaluuksia, jonka seurauksena onnistuneen vastauksen antajia on edellisessä nolla ja jälkimmäisessä yksi. Näissä tehtävissä korostuu erittäin voimakkaasti vastauksen antamisen vaihe. Ylivoimaisesti suurin osa oppilaista on ymmärtänyt tehtävän ja onnistunut ratkaisun suunnittelussaan (86,8 %; 81,6 %), mutta kohdannut ratkaisua haittaavia tekijöitä vastauksen antamisen vaiheessa ja lopulta oikean vastauksen antaneita on hyvin vähän tai ei ollenkaan (0 %; 2,6 %). Lukuun ottamatta tehtäviä C3, C4 ja C5 kaikissa muissa tapauksissa tehtävän ymmärtäneitä oli enemmän verrattuna ratkaisun suunnittelussa onnistumiseen ja ratkaisun suunnittelun osanneita on enemmän kuin oikeaan vastaukseen päätyneitä.

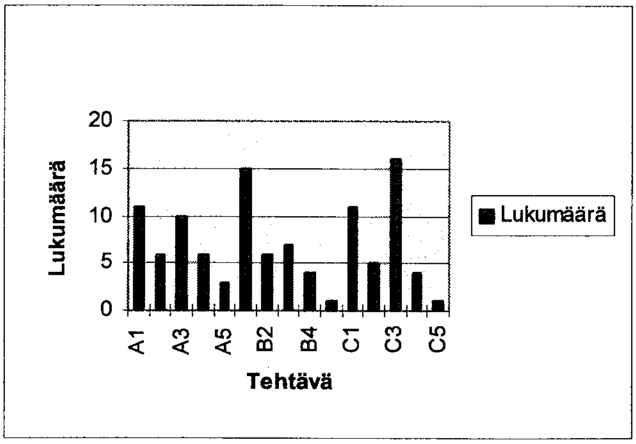
Yritettäessä selvittää tehtävän C3 poikien ja tyttöjen keskiarvojen suurta eroa on syytä tarkastella ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheissa osaamista sukupuolittain. Kun tarkastellaan t-testin avulla sukupuolittaisia eroja keskiarvon suhteen eri vaiheissa nähdään, että ymmärtämisvaiheessa keskiarvoissa (0,72; 1,05) ei ole suurta eroa, eikä ero ole tilastollisesti merkitsevä, sillä p-arvo on suuri (>0,05). Sen sijaan ratkaisun suunnitteluvaiheen (0,17; 0,75) ja vastauksen antamisen vaiheen (0,00; 0,25) keskiarvoissa on suuret erot ja ne ovat tilastollisesti merkitseviä, sillä p-arvot ovat pieniä (0,01; 0,02). Kun taas tarkastellaan ristiintaulukoinnin ja khin-neliötestin avulla sukupuolittaisia eroja eri ratkaisuvaiheiden pistemäärissä, voidaan nähdä, että eroja löytyy tämän tehtävän osalta. Tehtävän ymmärtämisestä saaduissa pistemäärissä on eroja tyttöjen eduksi, mutta ne eivät ole khin-neliötestin mukaan tilastollisesti merkitseviä. Sen sijaan tehtävän ratkaisun suunnittelussa on merkittäviä eroja, sillä pojista 16 ja tytöistä 9 on saanut nolla pistettä, pojista 1 ja tytöistä 7 on saanut yhden pisteen ja pojista 1 ja tytöistä 4 on saanut kaksi pistettä. Sukupuolittaiset erot ovat suuria ja khin-neliötestin mukaan tilastollisesti merkitseviä kahden prosentin riskitasolla. Lisäksi vastausta annettaessa pojista 18 ja tytöistä 15 sai nolla pistettä ja ei yksikään pojista, mutta 5 tytöistä sai yhden pisteen. Myös tämä ero on tilastollisesti merkitsevä.

Sekä t-testin että ristiintaulukoinnin tuloksien perusteella sukupuolten välillä on tilastollisesti merkitseviä eroja tehtävän C3 ongelmanratkaisuprosessien vaiheiden onnistumisessa. Ymmärtämisvaiheessa erot eivät ole vielä merkittäviä, mutta ratkaisun suunnittelun ja vastauksen antamisen yhteydessä tytöt ovat onnistuneet merkittävästi poikia paremmin. Tämä selittää sen, miksi poikien ja tyttöjen keskiarvot poikkeavat niin paljon toisistaan tarkasteltaessa tämän tehtävän osalta kokonaispistemäärien keskiarvoja sukupuolittain.

4.4 Emootiot ja niiden merkitys tehtävien ratkaisussa onnistumiseen

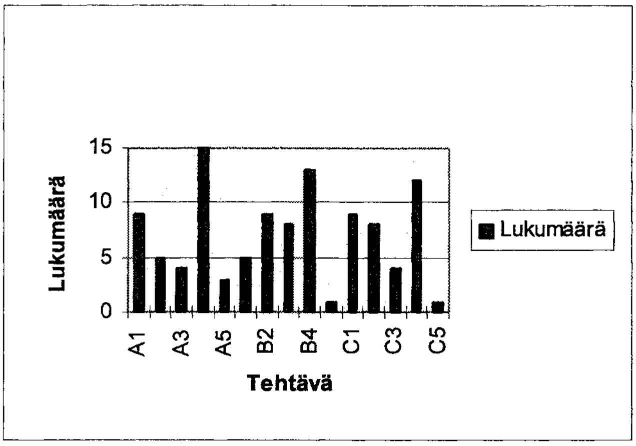
Tässä selvitetään, miten oppilaiden emootiot jakautuvat eri tehtävien välillä. Lisäksi tarkastellaan sitä, onko oppilaan kokemilla emootioilla merkitystä ratkaisun onnistumisen kannalta ja jos on niin, minkälaisia vaikutukset ovat kunkin tehtävän kohdalla.

Testin tekemisen lopuksi pyysin jokaista oppilasta kirjaamaan tehtäväpaperiinsa, mikä tehtävistä oli hänen mielestään hauskin, tylsin, helpoin ja mikä oli vaikein. Lähes kaikki oppilaat ilmaisivat mielipiteensä, mutta oli oppilaita, joiden mielestä ei ollut esimerkiksi helpointa tehtävää tai vastaavasti vaikeinta tehtävää, mitä he perustelivat sillä, että kaikki tehtävät olivat olleet vaikeita tai, että kaikki tehtävät olivat olleet helppoja.



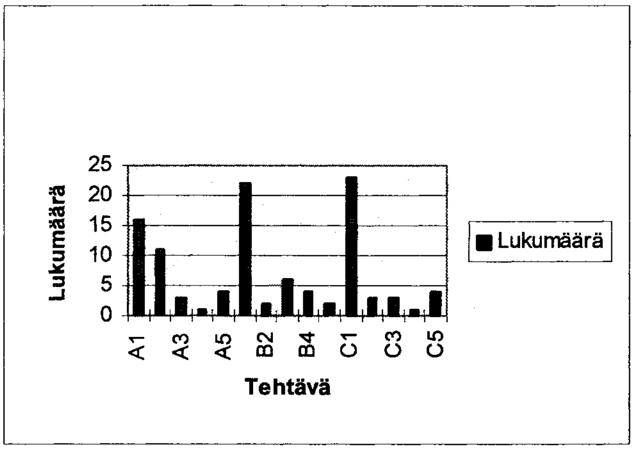
Kuvio 5 Oppilaiden hauskimmaksi määrittelemien tehtävien lukumäärät

Eri sarjojen hauskimmaksi tehtäväksi kannatusta saivat eniten tehtävä A1 (11/38) , B1 (15/37) ja C3 (16/38). Hauskimpina pidettiin yleisesti myös tehtäviä A3 (10/38) ja C1 (11/38). Vähiten kannatusta saivat tehtävät A5, B5 ja C5 osittain siitä syystä, että niitä myös tehtiin kaikkein vähiten, sillä ne olivat lisätehtäviä, joihin monet eivät edes ehtineet. Tehtävät A1, B1 ja C1 ovat selvästi parhaiten osatut tehtävät eri sarjoissa, joten monet oppilaat ovat pitäneet helpoimmaksi kokemaansa tehtävää myös hauskimpana. Useat oppilaat eivät ole kuitenkaan välittäneet tehtävän vaikeusasteesta valitessaan hauskinta tehtävää, mitä puoltavat sekä tehtävä C3 että A3. Nämä tehtävät ovat nimittäin määritelty sekä hauskimpien että vaikeimpien joukkoon. Molemmissa osaaminen on ollut tehtäväsarjojensa heikointa, mutta silti edellisen hiiri- ja kissa-aihe sekä jälkimmäisen etana-aihe on koettu yleisesti hyvin hauskaksi. Oppilaiden valintoja hauskimmaksi tehtäväksi ovat ohjanneet tehtävän aihepiiri ja henkilöt tai eläimet sekä vaikeusaste.



Kuvio 6 Oppilaiden tylsimmäksi määrittelemien tehtävien lukumäärät

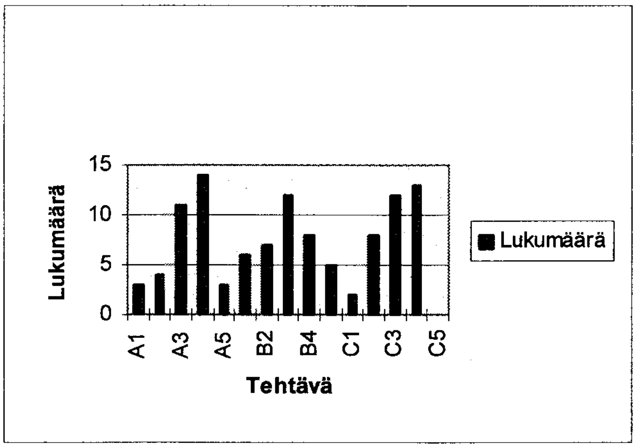
Ylivoimaisesti tylsimpinä tehtävinä pidettiin kaikissa sarjoissa neljänsiä tehtäviä. Tehtävä A4 sai 15 ääntä, B4 13 ääntä ja C4 12 ääntä (38:sta). Myös tehtäviä A1, B2 ja C1 on pidetty tylsinä, sillä kullekin on annettu 9 ääntä. Jokaisen tehtäväsarjan neljännet tehtävät on osattu sekä keskiarvojen että kuuden pisteen ratkaisujen suhteellisten osuuksien perusteella keskimäärin välttävästi. Näyttäisi siltä, että tehtävän tylsyys on kääntäen verrannollinen tehtävässä onnistumisen kanssa, mikä johtopäätös on löydettävissä myös kirjallisuudesta (luku 2.3.2), jossa motivaation merkitystä ongelmanratkaisuprosessissa korostetaan. Tämän tulkinnan kumoavat kuitenkin toiseksi eniten ääniä saaneet tehtävät A1 ja C1, sillä ne ovat parhaiten osattuja tehtäviä. Näyttäisi siltä, että koska oppilaat ovat määritelleet ne myös helpoimmiksi tehtäviksi, ne ovat liian helppoja ollakseen kiinnostavia. Tehtävä B2 sitä vastoin on B-sarjan heikoiten mennyt tehtävä, jos vertaillaan kokonaispistemäärien keskiarvoja.



Kuvio 7 Oppilaiden helpoimmaksi määrittelemien tehtävien lukumäärät

A-sarjan tehtävistä oppilaat ovat pitäneet helpoimpana tehtävää A1 (16/38) ja toiseksi helpoimpana tehtävää A2 (11/38). B-sarjan tehtävistä ei löydykään näin tasaisia kandidaatteja helpoimmaksi tehtäväksi, vaan ylivoimaisesti eniten helpoimmaksi tehtäväksi määritelty on tehtävä B1 (22/37). Myös C-sarjan kohdalla on edellisenkaltainen tilanne, sillä suurin osa on pitänyt tehtävää C1 kaikkein helpoimpana (23/38).

Kaikissa sarjoissa pidettiin yleisesti helpoimpana ensimmäisiä tehtäviä, mikä oli alusta lähtien tarkoituksenakin. Tehtävien kokonaispistemäärien keskiarvojen perusteella oppilaat ovat myös osanneet nämä tehtävät parhaiten. Jos tarkastellaan kuuden pisteen ratkaisujen suhteellisia osuuksia, nähdään, että myös tämän seikan perusteella nämä tehtävät osattiin parhaiten, joskin tehtävässä C5 oli toiseksi eniten kuuden pisteen ratkaisuja prosentuaalisesti. Sitä tehtiin kuitenkin niin vähän (19), että se ei ole saanut kovin paljon kannatusta helpoimmaksi tehtäväksi. Oppilaiden mielipiteet helpoimmasta tehtävästä ovat selvästi yhteydessä siihen, kuinka hyvin tehtävä osattiin. Jos tehtävä osattiin hyvin, niin oppilaat pitivät sitä yleisesti helpoimpana tehtävänä. Näyttäisi siltä, että tehtävän helppous johtuu ongelman tuttuudesta, matemaattis-loogisen rakenteen selkeydestä ja tehtävänannon mutkattomuudesta.



Kuvio 8 Oppilaiden vaikeimmaksi määrittelemien tehtävien lukumäärät

Kaikista eniten mielipiteet hajaantuivat vaikeimman tehtävän kohdalla. Eri sarjoissa vaikeimpina pidettiin kuitenkin tehtäviä A4 (14/38), B3 (12/37) ja C4 (13/38), joskaan kauaksi eivät kannatuksessa jääneet tehtävät A3 (11), B4 (8) ja C3 (12). Mielipiteet vaikeimmasta tehtävästä ovat yhteydessä niissä osaamiseen, vaikkakaan ei niin paljon kuin mielipiteessä helpoimmasta tehtävästä. Keskiarvon mukaan kaikissa sarjoissa kahdeksi vaikeimmaksi tehtäväksi määritellyt ovat kolmen heikoimman joukossa ja ne on osattu joko tyydyttävästi tai välttävästi. Jos tarkastellaan kuuden pisteen ratkaisujen suhteellista osuutta, kahdeksi vaikeimmaksi määritellyt on osattu joko tyydyttävästi tai heikosti. Kuvaajasta on selvästi nähtävissä, että tehtävän tylsyys ja vaikeus ovat yhteydessä toisiinsa.

Taulukko 17 Oppilaiden vaikeimmaksi määrittelemien tehtävien lukumäärät sukupuolittain

	Sukupuoli			yhteensä
	poika	tyttö	ei tietoa tai ei varmuutta	
A1	1	1	1	3
A2	1	3		4
A3	8	3		11
A4	7	7		14
A5	2	1		3
B1	3	3		6
B2	4	3		7
B3	6	6		12
B4	4	4		8
B5	2	3		5
C1	1	1		2
C2	2	6		8
C3	4	8		12
C4	8	5		13
Yhteensä	53	54	1	108

Taulukko 18 Khii-neliötestin P-arvo sukupuolittaisista eroista

	P-arvo
Khii-neliö	0,02

32:ssa solussa (76,2%) on odotettu arvo alle 5. Pienin odotettu arvo on 0,02.

Tämän jälkeen tarkastelin sitä, oliko näissä mielipiteissä eroja sukupuolittain. Ristiintaulukoinnin ja khin-neliötestin avulla sain selvitettyä, että sukupuolten välillä oli merkittäviä eroja vain mielipiteestä vaikeimmaksi tehtäväksi. A-sarjan tehtävissä merkittävin ero oli siinä, että kahdeksan poikaa piti tehtävää A3 vaikeimpana, kun tytöistä näin ajatteli vain kolme. B-sarjan tehtävissä ei ollut merkittäviä eroja sukupuolten välillä. C-sarjan tehtävistä C2:ta vaikeimpana piti kaksi poikaa ja kuusi tyttöä, C3:a neljä poikaa ja kahdeksan tyttöä ja C4:ää kahdeksan poikaa ja viisi tyttöä. Sukupuolten välisiä eroja oli siis vain vaikeimman tehtävän osalta khin-neliötestin arvon perusteella (<0.05), mutta suurimmaksi osaksi paljon ääniä saanut sai suhteellisen paljon ääniä molemmilta sukupuolilta. Khin-neliötesti osoittaa tässä kuitenkin yleistävien tulkintojen olevan perusteettomia, sillä yli 20%:ssa (76,2%) soluista odotettu frekvenssi on alle 5. Tämän vuoksi päätelmiä mielipiteiden sukupuolittaisista eroista ei voida tilastollisesti osoittaa päteviksi.

Tehtävää C3 piti siis vaikeimpana pojista neljä ja tytöistä kahdeksan ja tämä sukupuolia erottava tieto on khin-neliötestin mukaan tilastollisesti merkitsevä, jos ei huomioida sitä, että yli viidenneksessä soluista odotettu frekvenssi on alle 5. Kuitenkin pojat onnistuivat tehtävässä huomattavasti heikommin kuin tytöt keskiarvojen (0,89; 2,05) perusteella, sillä poikien osaaminen tässä tehtävässä oli heikkoa ja tyttöjen osaaminen oli puolestaan tyydyttävää. Tämä sukupuolittainen ero on tilastollisesti merkitsevä. Lisäksi mielipiteet hauskimmasta tehtävästä osoittivat, että sekä tytöt että pojat pitivät tätä tehtävää myös yleisesti hauskimpana. Kun taas tarkastellaan poikien ja tyttöjen ratkaisuista ilmenneitä ratkaisua haittaavia tekijöitä, niissä ei ole tilastollisesti merkitseviä eroja. Näyttäisi siis siltä, että vaikka tytöt ovat pitäneet tehtävää C3 huomattavasti yleisemmin vaikeimpana tehtävänä kuin pojat, he ovat onnistuneet ratkaisemaan sen paljon paremmin. Tälle löytyy kaksi mahdollista selitystä. Ensimmäiseksi pojat ovat tyytyneet omaan vastaukseensa ilman perusteluita ja pitäneet tehtävää ratkaistuna herkemmin kuin tytöt, jotka ovat yleisesti kokeneet olleensa vaikeuksissa tehtävän ratkaisussa. Tai toiseksi tehtävän yleinen hauskuus on motivoinut sekä tyttöjä että poikia, mutta tytöt ovat pitäneet sitä vaikeampana ja siten haastavampana, eivätkä ole tyytyneet helpoimpaan mahdolliseen ratkaisuun. On myös mahdollista, että molemmat selityksen taustalla olevat syyt ovat vaikuttaneet tulokseen yhtäaikaisesti.

5 POHDINTA

Tutkimuksen päätarkoituksena oli saada ymmärrystä ongelmanratkaisusta prosessina, oppilaiden ongelmanratkaisutaidoista, heidän kohtaamistaan ratkaisua haittaavista tekijöistä ja niiden ilmenemisestä prosessin eri vaiheissa sekä emotioista ja niiden vaikutuksista ratkaisussa onnistumiseen. Tutkimusasetelman määräämissä rajoissa ilmiötä pyrittiin kartoittamaan siten, että saataisiin tuoretta tutkimustietoa siitä, millainen on peruskoulun kuudesluokkalaisten tilanne ongelmanratkaisuun liittyen.

Yksi keskeisimmistä tuloksista oli se, että oppilaat osaavat ratkaista ongelmakeskeisiä matemaattisia tehtäviä yleensä ottaen tyydyttävästi. Sukupuolittaisia eroja keskiarvoja verrattaessa oli osaamisessa kahden ensimmäisen tehtäväsarjan osalta poikien eduksi ja viimeisen tehtäväsarjan osalta puolestaan tyttöjen eduksi, mutta ne eivät olleet tilastollisesti merkitseviä kuin yhden tehtävän osalta. Tässä tehtävässä (C3) tytöt osasivat huomattavasti paremmin. Suurimmassa osassa tehtävistä poikien saamat kokonaispistemäärät vaihtelivat enemmän kuin tyttöjen. Se, että sukupuolten väliset erot eivät olleet merkitseviä johtui joidenkin tehtävien kokonaispistemäärien pienten erojen lisäksi kohdejoukon pienuudesta, sillä missään tehtävässä ei ollut yli kahtakymmentä oppilasta sukupuolta kohti.

Kaikista ratkaisua haittaavista tekijöistä oli yleisin matemaattis-loogiset tekijät. Usein oppilaan muodostama representaatio tehtävässä kuvattujen tekijöiden välisistä suhteista oli vääränlainen tai jokseenkin puutteellinen. Oli myös yleistä, että joillakin oppilailla oli käsitteellisiä puutteellisuuksia niissä tiedoissa ja taidoissa, joita olisi tarvittu tehtävän onnistuneeseen ratkaisuun. Sen lisäksi pinnalliset strategiat, uskomukset ja väärät käsitykset leimasivat useiden oppilaiden ratkaisuja. Oli hyvin tyypillistä usean tehtävän kohdalla, että muutama oppilas poimi vain tehtävässä annetut luvut ja suoritti niillä joitakin laskutoimituksia sattumanvaraisesti tai omien vahvuuksiensa mukaisesti tai päätyi onnistuneen ratkaisusuunnitelman jälkeen vain yhteen vastaukseen tehtävässä, jossa oli useampia vastauksia. Tämä johtui usein siitä, että he ovat koulumatematiikassa tottuneet siihen, että vastauksia on vain yksi mahdollinen.

Oppilailla oli myös jonkin verran huolimattomuuteen sekä lasku- ja kopiointivirheisiin liittyviä haittaavia tekijöitä. Useimmiten tällaisia virheitä sattui ratkaisun loppuvaiheessa oikean ratkaisusuunnitelman jälkeen, jolloin ne eivät olleet kovin kohtalokkaita koko ratkaisun kannalta. Yhtenä ratkaisua haittaavana tekijänä ilmeni tekstiin liittyvät vaikeudet varsin vähäisessä määrin. Kuudesluokkalaisilla oppilailla on harvoin vaikeuksia mekaanisessa lukemisessa, mutta yleisempää on, että vaikeuksia ilmenee tekstin ymmärtämisessä. Tekstiin liittyviä haittaavia tekijöitä oli vain muutaman sanallisesti haasteellisen tehtävän kohdalla ja vain yhdessä tehtävässä niitä oli runsaasti (C1: 8/38). Lisäksi joillakin oppilailla ilmeni myös suoranaista ajanpuutetta. Nimittäin jotkut oppilaat ehtivät ratkaista testiin käytetyn oppitunnin aikana vain kolme varsinaista testitehtävää tai neljäs tehtävä jäi heiltä kesken. Joillakin näistä oppilaista oli selvästi nähtävissä hitautta ratkaista ongelmakeskeisiä tehtäviä mahdollisesti tottumattomuuden vuoksi. Toisilla taas aika loppui kesken heidän perusteellisuutensa vuoksi. Testiin varattu aika oli kohtuullinen, joten ajanpuutetta kokeneita ei voida ilman riittäviä perusteita tulkita hitaudesta kärsiviksi.

Ongelmanratkaisuprosessia vaiheittain tarkasteltaessa oli havaittavissa, että lähes kaikissa tehtävissä suurin osa ratkaisua haittaavista tekijöistä ilmeni jo tehtävän ymmärtämisen vaiheessa. Oppilailla, joilla haittaavia tekijöitä ilmeni jo tässä vaiheessa oli vaikeuksia tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen, tekstin ymmärtämisen tai pinnallisten strategioiden muodossa. Vain kolmen tehtävän kohdalla tehtävän ymmärtäneitä oli yhtä paljon kuin ratkaisusuunnitelmassaan onnistuneita, joten näissä tehtävissä ymmärtämisvaiheesta siirryttäessä ei ilmennyt mitään ratkaisua haittaavia tekijöitä. Lisäksi yhdessä edellä mainituista kolmesta tehtävästä ratkaisusuunnitelman onnistuminen oli tae myös oikean vastauksen saamiselle. Se, missä vaiheessa ratkaisua haittaavia tekijöitä ilmeni eniten, riippui tulosten mukaan hyvin pitkälle tehtävän luonteesta, mutta yleisesti ottaen näitä ilmeni jokaisessa ongelmanratkaisuprosessin vaiheessa.

Oppilaiden emotioiden merkitystä ongelmanratkaisussa onnistumiseen tarkasteltiin pyytämällä oppilaiden mielipiteitä hauskimmaksi, tylsimmäksi, helpoimmaksi ja vaikeimmaksi tehtäväksi ja sitten vertaamalla näitä mielipiteitä yleiseen osaamiseen. Niissä tehtävissä, joita oppilaat pitivät hauskimpina, oppilaat osasivat vaihtelevasti. Toisaalta hauskimmaksi oli määritelty sellaisia tehtäviä, joissa oppilaat onnistuivat hyvin, mutta toisaalta myös sellaisia, joissa oppilaat onnistuivat heikosti. Tähän mielipiteeseen vaikuttivat myös sellaiset syyt, jotka eivät olleet yhteydessä tehtävän vaikeusasteeseen, kuten esimerkiksi tehtävän aihepiiri. Yleisesti tylsimpinä pidetyt tehtävät on puolestaan osattu välttävästi eli ne ovat vaikeusasteeltaan jokseenkin haastavia, mutta aihepiirinsä, tarvittavien käsitteellisten valmiuksien tai muun mahdollisen syyn vuoksi eivät olleet oppilaiden mielestä yleisesti hauskoja. Kuitenkin toisiksi eniten tylsimmiksi valitut tehtävät on osattu erittäin hyvin, joten ne näyttävät olleen liian helppoja ollakseen kiinnostavia.

Kaikissa sarjoissa yleisesti helpoimpana pidetyt tehtävät on myös osattu parhaiten. Oppilaiden mielipiteet helpoimmasta tehtävästä ovat selvästi yhteydessä siihen, kuinka hyvin tehtävä osattiin. Jos tehtävä osattiin hyvin, niin oppilaat pitivät sitä yleisesti helpoimpana tehtävänä. Myös mielipiteet vaikeimmaksi tehtäväksi ovat yhteydessä tehtävässä osaamisen kanssa, vaikkakaan ei niin paljon kuin edellisessä. Ne tehtävät, joita oppilaat ovat yleisesti pitäneet vaikeimpina, on osattu yleisesti melko heikosti, mutta kaikkia tehtäviä ei kuitenkaan huonoiten kaikista tehtävistä. Tämä näyttäisi johtuvan siitä, että joidenkin vaikeustasoltaan haastavien tehtävien kohdalla useat oppilaista käyttivät pinnallisia strategioita ja olettivat onnistuneensa ratkaisemaan kyseisen tehtävän. Tämän seurauksena oppilaat eivät arvioineet kyseistä tehtävää vaikeimmaksi, vaikka todellisuudessa se saattoikin mennä kaikista tehtävistä heikoiten.

Tämän tutkimuksen tuloksia ei voida alueellisesti yleistää Jyväskylän seutuun tai Keski-Suomeen, sillä tutkimusjoukko on pieni (113) ja sitä ei valittu millään erityisellä otannalla. Tutkimuksen tavoitteena oli pikemminkin saada tietoa oppimispsykologisesta ilmiöstä, joka ilmenee sijainnista riippumatta. Vaikka tuloksia ei voida yleistää alueellisesti, voidaan olla vakuuttuneita siitä, että paikasta ja koulusta riippumatta oppilaat kohtaavat hyvin samantyyppisiä ongelmanratkaisua haittaavia tekijöitä prosessin eri vaiheissa, ja heidän prosessiinsa vaikuttaa hyvin samantyyppiset emootiot.

Tutkimuksessa käytettiin kolmea tehtäväsarjaa ja yhteensä 15:tä testitehtävää. Toisaalta kolmen tehtäväsarjan käyttö mahdollisti kokonaisten tiettyjen opettajien määrittämien oppilasryhmien testaamisen, mutta toisaalta se vähensi yksittäisten tehtävien tehneiden oppilaiden lukumäärää. Tämän myönteisenä seurauksena on se, että yhdestä oppilasryhmästä saatu tieto on todenmukaisempaa. Sitä vastoin kielteisenä seurauksena voidaan nähdä se, että tällä melko rajallisella tutkimusjoukolla tehdyt vertailut esimerkiksi sukupuolten kesken eivät useimmiten osoittautuneet tilastollisesti merkitseviksi. Tämän estämiseksi testattuja oppilaita tulisi olla vähintään kaksin- tai kolminkertainen määrä tähän tutkimukseen verrattuna.

Tutkimuksen rajoituksena voidaan nähdä se, että kaikki oppilaat eivät perustelleet ja pohtineet tekemiään oivalluksia, valintoja ja päätelmiä kirjallisesti tehtäväpaperiin annetuista ohjeista huolimatta, vaan jotkut heistä vain pyrkivät vastaukseen kirjoittamatta prosessiaan sen tarkemmin näkyville. Tämä näyttäisi johtuvan koulumatematiikan vastauskeskeisestä laskemisesta eli he eivät ole tottuneet siihen, että matemaattisissa ongelmatehtävissä keskitytään prosessiin. Tutkimuksen rajoituksena tätä voidaan pitää siksi, että jos jokainen oppilas olisi kirjoittanut omaa prosessiaan näkyviin, tulkintavaiheessa olisi voitu selvittää sellaisia ongelmia, joihin nyt ei päästy syventymään ollenkaan. Tästä esimerkkinä mainittakoon oppilaiden strategioiden tarkastelu kvalitatiivisen analyysin avulla. Myös joidenkin valittujen oppilaiden haastattelujen avulla olisi saatu lisää ymmärrystä ja syvyyttä ilmiötä koskeviin tulkintoihin.

Tutkimuksen aihepiiriä ja ongelmanratkaisua voidaan pitää ajankohtaisena asiana, vaikkakaan se ei ole asiana uusi. Asia kuitenkin herättää keskustelua nykyaikana, kun peruskoulut erikoistuvat esimerkiksi tietotekniikkaan, liikuntaan tai matematiikkaan. Perinteistä matematiikan opetusta on pyritty muuttamaan modernimpaan suuntaan ja tässä on onnistuttu enemmän ja vähemmän, mikä on nähtävissä kentällä työskennellessä ja esimerkiksi tämän tutkimuksen tuloksista. Matematiikkaan liittyvää koulusaavutusten mittaamista ja vertaamista on tehty jonkun verran kansainvälisellä tasolla ja näissä kartoituksissa on keskitytty lähinnä monivalintakysymyksiin, joita tässä tutkimuksessa ei käytetty ollenkaan. Tämän tutkimuksen näkökulmaan tuoreutta tuo se, että kaikki fokusoituu oppilaan ongelmanratkaisuprosessiin, siinä osaamiseen, siinä ilmenneisiin ratkaisua haittaaviin tekijöihin ja niiden ajoittumiseen sekä oppilaiden emotioiden vaikutuksiin ratkaisussa onnistumisen kannalta. Aiempien tutkimusten perusteella matematiikan osaaminen soveltamisen yhteyksissä on todettu kansainvälisesti korkeatasoiseksi. Tämän tutkimuksen perusteella oppilaiden osaaminen vastaavissa yhteyksissä oli tyydyttävää. Näitä tuloksia vertailtaessa tulee kuitenkin huomioida se, että tutkimusten kohdejoukkona ovat eri-ikäiset peruskoulun oppilaat ja oppilaiden tekemät tehtävät olivat hyvin eri tyyppisiä.

Tutkimuksen perusteella voidaan herättää kysymyksiä siitä, kuinka pitkälle kentällä ollaan käytännössä päästy matematiikan opetuksen uudistamisessa. Tämä olisikin yksi mahdollinen jatkotutkimuksen aihe. Näkökulmaa voitaisiin siirtää opetuksen arvioinnin suuntaan oppilaiden oppimistulosten arvioimisen korostamisesta. Toiseksi ilmiötä voitaisiin tutkia siten, että keskityttäisiin ainoastaan ratkaisua haittaaviin tekijöihin voimakkaasti kvalitatiivisen tutkimusmenetelmän avulla. Tällöin tehtäisiin ensimmäiseksi koulusaavutustesti oppilaille, joiden joukosta sitten etsittäisiin eri tyyppisten haittaavien tekijöiden esimerkkitapauksia. Tämän jälkeen tehtäisiin heille haastattelut, joiden avulla saataisiin syvällisempää ymmärrystä erilaisista oppilaiden kohtaamista ongelmanratkaisua haittaavista tekijöistä.

LÄHTEET

Ahtee, M. 1998. Luonnontieteiden opettaminen ja konstruktivismi. Teoksessa J. Lavonen & M. Erätuuli (toim.). Tuulta purjeisiin. Matemaattisten aineiden opetus 2000-luvulle. Juva: WSOY, 138–153.

Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: Oy Edita Ab.

Alkula, T., Pöntinen, S. & Ylöstalo, P. 1994. Sosiaalitutkimuksen kvantitatiiviset menetelmät. Juva: WSOY.

Berry, J. & Sahlberg, P. 1995. Matematiikka elämään. Juva: WSOY.

Branca, N.A. 1980. Problem solving as a goal, process, and basic skill. In: NCTM Yearbook 1980, 3–8. Reston (VA): Council.

Charles, R., Lester, F. & O'Daffer, P. 1987/1990. How to evaluate progress in problem solving. Reston (VA): NCTM.

Erätuuli, M., Leino, J. & Yli-luoma, P. 1994. Kvantitatiiviset analyysimenetelmät ihmistieteissä. Rauma: West Point.

Haapasalo. L. 1985. Ongelmakeskeisen matematiikan opetuksen metodiikka. Jyväskylän yliopisto: Opettajankoulutuslaitos. Opetusmonisteita 10.

Haapasalo, L. 1992. Murtolukukäsitteen konstruktivistinen oppiminen. Jyväskylä: Yliopiston monistuskeskus.

Haapasalo, L. 1993. Desimaalilukujen ja yksikönmuunnosten konstruktivistinen oppiminen. Jyväskylä: Yliopistopaino.

Haapasalo, L. 1994/1997. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Vaajakoski: Medusa-Software.

Halinen, I., Hänninen, L., Joki, J., Leino, J., Näätänen, M., Pehkonen, E., Pehkonen, L., Sahlberg, P., Sainio, E., Seppälä, R. & Strang, T. 1991. Peruskoulun matematiikan opetuksen kehityssuunnasta 1990-luvulla. Kasvatus & Opetus -sarja. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Heinonen, V. 1961. Koulusaavutustestit. Jyväskylä: Gummerus.

Heinonen, V. & Viljanen, E. 1980. Evaluaatio koulussa. Keuruu: Otava.

Häggblom, L. 1993. Tänk och räkna – ett uttveklingsprojekt med utgångspunkt i en konstruktivistisk inlärningssyn. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.). Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoriaa ja käytäntöä. Helsinki: Yliopistopaino, 89-102.

Ikäheimo, H. 1995. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. Helsinki: Monila Oy.

Kangasniemi, E. 1989. Opetussuunnitelma ja matematiikan koulusaavutukset. Jyväskylä: Yliopiston monistuskeskus.

Kantowski, M.G. 1980. Some Thoughts on Teaching for Problem-solving. In: NCTM Yearbook 1980, 195–203. Reston (VA): Council.

Kinnunen, R. & Vauras, M. 1998. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen, P. Malinen (toim.). Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Yliopistopaino, 269–282.

Konttinen, R. 1981. Testiteoria. Johdatus kasvatus- ja käyttäytymistieteellisen mittauksen teoriaan. Mänttä: KY Mäntän Kirjapaino.

Krulik, S. & Rudnick, J.A. 1982. Teaching problem solving to preservice teachers. Arithmetic teacher 29 (6), 42–45.

Kupari, P. (toim.) 1988. Koulumatematiikka 1990-luvulle: lähtökohtia ja mahdollisuuksia. Jyväskylä: Yliopiston monistuskeskus.

Kupari, P 1993. Matematiikan opetussuunnitelmien uudistamisen ongelmia ja mahdollisuuksia. Teoksessa L. Haapasalo & P. Kupari (toim.) Konstrukstivismi matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman kehittämisessä. Jyväskylä: Yliopiston monistuskeskus, 48–52.

Kupari, P. 1993. Mistä rohkeus ja keinot koulumatematiikan uudistumiseen. Teoksessa: E. Kangasniemi & Konttinen, R. (toim.). Lue, etsi, tutki. Tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Juva: WSOY, 114-131.

Kupari, P., Reinikainen, P., Nevanpää, T. & Törnroos, J. 2001. Miten matematiikkaa ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Kolmas Knsainvälinen matematiikka ja luonnontiedetutkimus TIMSS 1999 Suomessa. Jyväskylä: Yliopistopaino.

Kuusinen, J. (toim.) 1991/1995. Kasvatuspsykologia. Juva: WSOY.

LeBlanc, J.F., Proudfit, L. & Putt, I.J. 1980. Teaching problem solving in the elementary school. In: NCTM Yearbook 1980, 104–116. Reston (VA): Council.

Leino, J. 1993. Konstruktivismi ja matematiikan opetus. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.). Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoriaa ja käytäntöä. Helsinki: Yliopistopaino, 11–19.

Leino, J. 1998. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.). Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Yliopistopaino.

Mayer, R.E. 1985. Mathematical ability. In: Human abilities: an information-prosessing approach (ed. R.J. Sternberg), 127–150. New York: Freeman.

Nummenmaa, T., Konttinen, R., Kuusinen, J. & Leskinen, E. 1997. Tutkimusaineiston analyysi. Porvoo: WSOY.

Pehkonen, E. 1993. Oppilaiden matemaattiset uskomukset oppimisen piilovaikuttajina. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.). Matematiikan opetus ja konstruktivismi - teoriaa ja käytäntöä. Helsinki: Yliopistopaino, 36–44.

Pehkonen, E. 1997. Introduction to the concept "open-ended problem". In: Use of open-ended problems in mathematics classroom (ed. E. Pehkonen). Helsinki: Hakapaino, 7–11.

Pehkonen, E. 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. Kasvatus 4, 375–381.

Pehkonen, E., Pekama, E. & Seppälä, R. 1991. Matemaattinen ongelmanratkaisu. Tehtäviä peruskoulun ja lukion matematiikan opetukseen. Helsinki: Forssan kirjapaino Oy.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Polya, G. 1973. How to solve it. Princeton: University Press.

Riukulehto, T. & Huhtala, K. 1992. Tilastomenetelmien peruskurssi. Jyväskylä: Yliopiston monistuskeskus.

Ruokamo, H. 2000. Matemaattinen lahjakkuus ja matemaattisten sanallisten ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen teknologiaperustaisessa oppimisympäristössä. Helsinki: Hakapaino.

Schoen, H.L. & Oehmke, T. 1980. A new approach to the measurement of problem-solving skills. In: NCTM Yearbook 1980, 216–227. Reston (VA): Council.

Schoenfeld, A.H. 1980. Heuristics in the classroom. In: NCTM Yearbook 1980, 9–22. Reston (VA): Council.

Schoenfeld, A.H. 1985. Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.

Sorvari, J. 1999. Matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisuun vaikuttavista tekijöistä. Teosessa K. Laine & J. Tähtinen (toim.) Oppimisen ohjaaminen esi- ja alkuopetuksessa. Turku: Painosalama Oy, 145–172.

Strang, T. 1993. Avoimuuden kokeilua ensiluokkalaisten matematiikan oppimisessa. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.). Matematiikan opetus ja konstruktivismi - teoriaa ja käytäntöä. Helsinki: Yliopistopaino, 132–140.

Tähtinen, J. & Kaljonen, A. 1998. Tilastollisen analyysin perusteita kasvatustieteellisessä tutkimuksessa. Turku: Painosalama Oy.

Vaahtokari, A. & Vähäpassi, A. 1998. Kirjat esiin ja laskekaa! Teoksessa J. Lavonen & M. Erätuuli (toim.). Tuulta purjeisiin. Matemaattisten aineiden opetus 2000-luvulle. Juva: WSOY, 213–230.

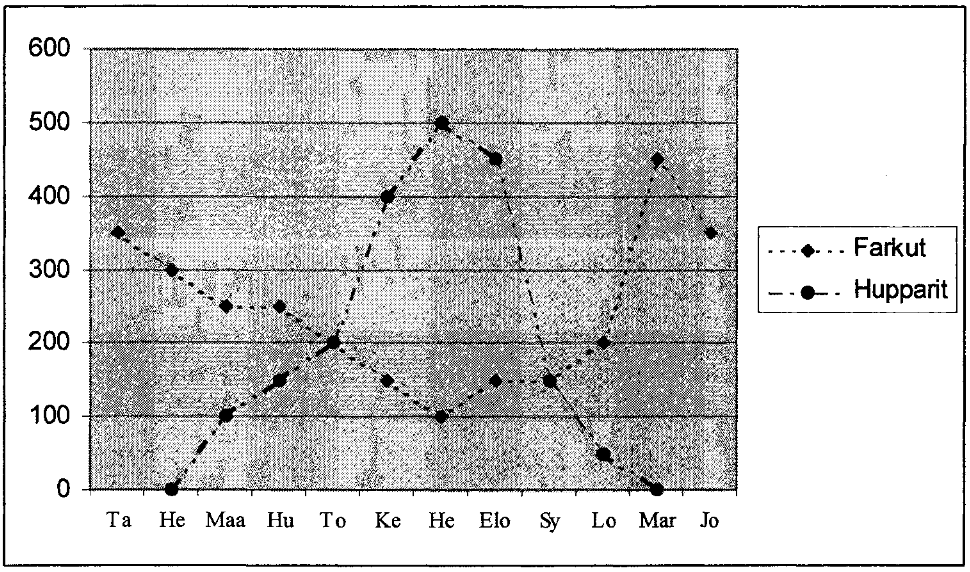
Vaulamo, J & Pehkonen, E. 1999. Avoimista ongelmatehtävistä peruskoulun yläasteen matematiikassa. Helsinki: Yliopistopaino. Tutkimuksia 205.

Voutilainen, T., Mehtäläinen, J. & Niiniluoto, I 1989. Tiedonkäsitys. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Välijärvi, J., Linnakylä, P., Kupari, P., Reinikainen, P., Malin, A. & Puhakka, E. 2001. Suomen tulevaisuuden osaajat. 15-vuotiaiden nuorten lukutaito sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen kansainvälisessä vertailussa. Jyväskylä: ER-paino

Liite 1: Testitehtävät

A1. Tehtävän kuvaaja esittää farkkujen ja huppareiden myyntimääriä eri kuukausina.



a) Montako hupparia myytiin toukokuussa?

b) Montako hupparia ja farkkuja yhteensä myytiin toukokuussa?

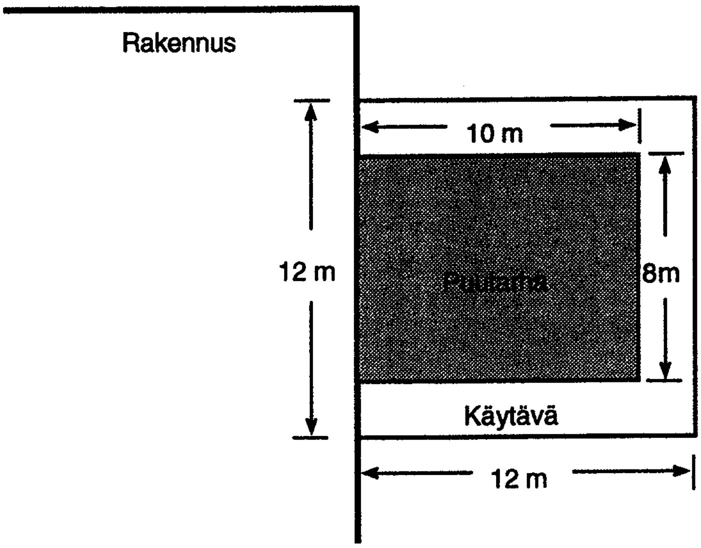
c) Minkä kahden peräkkäisen kuukauden aikana myytiin huppareita eniten farkkuihin verrattuna?

d) Kuinka paljon enemmän huppareita myytiin farkkuihin verrattuna noiden kahden kuukauden aikana?

A2. Noora ja Teemu käyvät samaa koulua. Nooran koulumatka on 5 kilometriä ja Teemun 3 km. Kuinka kaukana he asuvat toisistaan?

A3. Jukka huomasi yhtenä päivänä etanan kiipeävän kerrostalon seinää pitkin suoraan ylöspäin. Hän teki seuraavat havainnot. Etana kiipeää päivässä 7 metriä seinää ylöspäin ja luisuu aina yöllä 4 metriä alaspäin. Jos etanan kiipeäminen jatkuisi samaa rataansa, niin monessako päivässä se pääsisi kerrostalon katolle, kun seinä on 19 metriä korkea.

A4. Kuvassa on suorakulmion muotoinen puutarha, jonka yhdellä sivulla on rakennus ja jonka kolmea muuta sivua kiertää käytävä.
Mitä kaikkea voit selvittää kuvan ja annettujen tietojen avulla? Selvitä mahdolliset asiat.



A5. Kari on aikeissa tilata kuvalehden 24 numeroa. Hän lukee alla olevat kahden lehden mainokset. Karin asuinmaassa rahayksikkö on ced. Kumpi lehti maksaa vähemmän 24 numeron tilauksena? Kuinka paljon vähemmän maksaa halvempi vaihtoehto?

Nuorten Maailma

24 numeroa
Ensimmäiset neljä numeroa
ILMAISEKSI
Loput 3 cediä kappale.

Teinisanomat

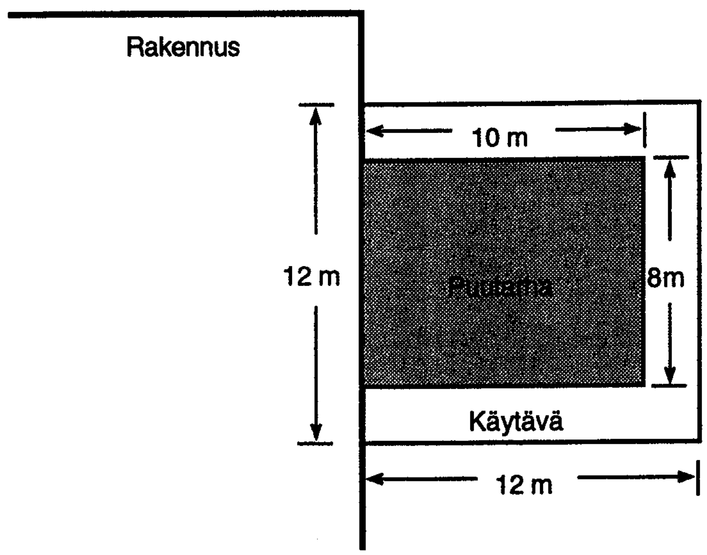
24 numeroa
Ensimmäiset kuusi numeroa
ILMAISEKSI
Loput 3,5 cediä kappale.

B1. Yhdistä viivoilla kellotaulun numerot pareittain siten, että parien summat ovat samoja.

B2. Antti, Veera, Jenni ja Ville ovat samassa päässä äärimmäisen vaikeakulkuista 150 metrin mittaista riippusiltaa. On erittäin sumuista ja pilkkopimeää, mutta silti heidän kaikkien tulee päästä turvallisesti sillan ylitse. He tietävät, että silta kestää korkeintaan kaksi henkilöä kerrallaan ja että matkalla tarvitaan ehdottomasti koko ajan taskulamppua. Antti kulkee sillan yli 5:ssä, Veera 4:ssä, Jenni 2:ssa ja Ville 1 minuutissa. Miten heidän on meneteltävä, kun käytettävissä on vain yksi taskulamppu, jonka patteri ovat loppumaisillaan? Mikä on mielestäsi pienin aika, joka tarvitaan kaikkien neljän saamiseksi sillan ylitse?

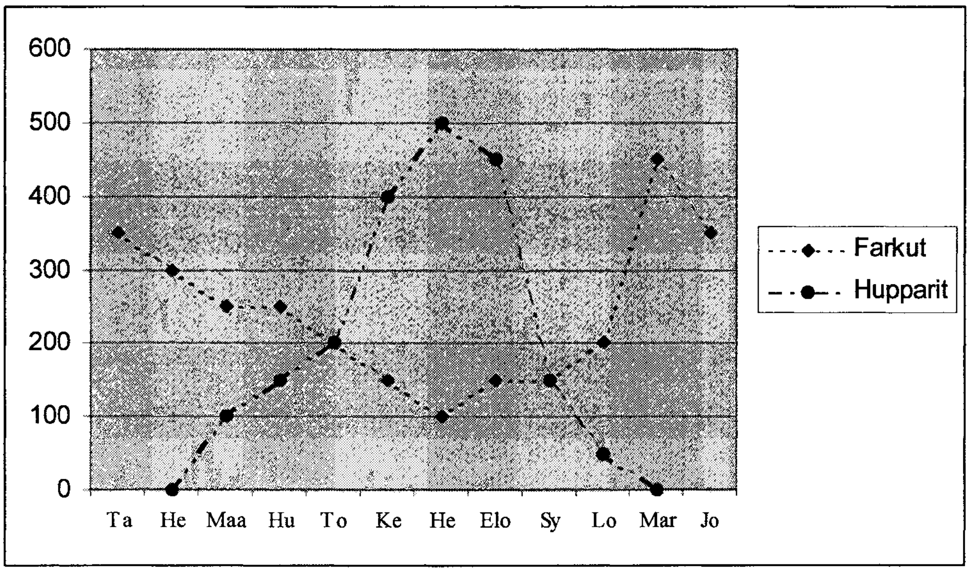
B3. Maria on nyt kaksi kertaa niin vanha kuin Anna. Neljä vuotta sitten hän oli kuusi kertaa vanhempi kuin Anna. Minkä ikäisiä he nyt ovat?

B4. Kuvassa on suorakulmion muotoinen puutarha, jonka yhdellä sivulla on rakennus ja jonka kolmea muuta sivua kiertää käytävä.
Mikä on käytävän pinta-ala?



B5. Joni myi 60 lehteä ja Marko 80 lehteä. Kaikki lehdet myytiin samalla hinnalla. Lehtien myynnistä pojat saivat yhteensä 700 mk myyntipalkkiota. Kuinka paljon Marko sai rahaa?

C1. Tehtävän kuvaaja esittää farkkujen ja huppareiden myyntimääriä eri kuukausina.



a) Montako hupparia myytiin maaliskuussa?

b) Montako hupparia ja farkkuja yhteensä myytiin maaliskuussa?

c) Minkä kahden perättäisen kuukauden aikana myytiin farkkuja eniten huppareihin verrattuna?

d) Kuinka paljon enemmän farkkuja myytiin huppareihin verrattuna noiden kahden kuukauden aikana?

C2. Liikuntapäivänä kaikille luokan 24 oppilaalle on varattu jäätelöpurkki. Osa oppilaista on kuitenkin poissa koulusta ja opettaja jakoi heidän jäätelönsä koulussa olleille oppilaille. Jokainen oppilas sai puolitoista purkillista jäätelöä. Kuinka monta oppilasta oli poissa?

C3. Hiiri on 50 (hiiren) askeleen päässä kolostaan kissan ajaessa sitä takaa. Kissa on 12 (kissan) askelta jäljessä. Kissan ottaessa kaksi askelta ehtii hiiri ottaa viisi askelta. Kissan askel on kuitenkin 6 kertaa niin pitkä kuin hiiren askel. Ehtiikö hiiri koloonsa?

C4. Marikalla on 7 desilitran ja 4 desilitran astiat, joissa ei ole mittamerkintöjä.
Kuinka hän voi näillä astioilla mitata kolmanteen astiaan tasan 1 litran vettä?
Voiko hän mitata tasan 1 litran vettä ilman kolmatta astiaa ja jos voi niin miten?

C5. Kerhoon kuuluu 86 jäsentä ja tyttöjä on 14 enemmän kuin poikia. Kuinka monta poikaa ja kuinka monta tyttöä kerhoon kuuluu?

Liite 2: Ohjeet

1. Nimi paperiin!
2. Lue tehtävä huolellisesti – ei kiirettä.
3. Piirrä kuva – se auttaa usein.

4. Perustele ja kirjoita tekemiäsi oivalluksia, valintoja ja päätelmiä
5. Laskutoimitukset näkyviin – pelkkä vastaus ei riitä

Jos et päässyt ratkaisuun,

6. älä pyyhi pois.
7. kirjoita mikä tuntui vaikealta.

8. Tarkista ratkaisusi huolellisesti - merkitse sekin näkyviin.

9. Kun olet ratkaissut tehtävän, käy läpi ohjeet 4-8 ja täydennä ratkaisuasi niiden mukaan.

Liite 3: Tehtävien pisteytys

A1.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Kaikki kohdat (a-d) ymmärretty täysin oikein.
1: 1-3 kohdista ymmärretty väärin.
0: Kaikki kohdat ymmärretty väärin tai ei yritystä.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Ratkaisusuunnitelmat ovat onnistuneet.
1: 1-3 kohdan ratkaisusuunnitelma epäonnistunut.
0: Ei ratkaisua tai tehtävään sopimaton ratkaisu.

Vastauksen
saaminen

2: Oikea vastaukset ja oikeat merkinnät.
1: 1-3 kohdan vastaus oikea.
0: Ei vastausta tai tehtävään sopimaton vastaus.

A2.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas ymmärtää, että tehtävään ei löydy vain yksi ratkaisu, vaan ratkaisuja on useita mahdollisia.
1: Oppilas on ymmärtänyt tehtävän siten, että siihen löytyy yksi selvä ratkaisu.
0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilas on onnistunut ratkaisun suunnittelussaan ja päätyy useampaan ratkaisuun.
1: Oppilas on päätynyt ratkaisun suunnittelussaan siihen, että tehtävään on vain yksi ratkaisu.
0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton.

Vastauksen
saaminen

2: Oppilas on löytänyt kaikki mahdolliset ratkaisut.
1: Oppilas on päätynyt yhteen tai äärelliseen määrään oikeita ratkaisuja.
0: Ei vastausta tai väärä vastaus.

A3.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas on ymmärtänyt, että etana etenee vuorokaudessa 3 metriä ja sen, että päästessään katolle etana ei enää valu alaspäin.
1: Oppilas on ymmärtänyt tehtävän osittain ja saanut selville etanan etenemisen nopeuden.
0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilas on onnistunut ratkaisun suunnittelussa joko kuvan tai joidenkin aritmeettisten operaatioiden avulla.
1: Oppilas on onnistunut ratkaisussaan niiltä osin, joilta oli tulkinnut tehtävän oikein.
0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton.

Vastauksen
saaminen

2: Oikea vastaus ja oikea merkintä.
1: Oppilas on tehnyt kopiointi- tai laskuvirheen, jonka seurauksena vastaus on virheellinen.
0: Ei vastausta tai väärä vastaus, joka perustuu väärään ratkaisuun.

A4.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas on ymmärtänyt, että hänen tulee annettujen tietojen avulla selvittää jotain sellaista, mitä ei ole valmiiksi annettu ja sen, että ratkaisuja on useita.
1: Oppilas on ymmärtänyt tehtävän siten, että löytyy vain yksi ratkaisu ja mahdollisesti sen lisäksi selvittänyt jo annettuja tietoja.
0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilas on osannut ratkaista tehtävän oikein ja päätyy useampaan relevanttiin ratkaisuun.
1: Oppilas ratkaissut oikein vain yhden tiedon siitä huolimatta, että olisi yrittänyt useampaa.
0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton.

Vastauksen
saaminen

2: Useita (vähintään kaksi) oikeita ratkaisuja oikein merkinnöin.
1: Yksi oikea ratkaisu tai useita oikeita ratkaisuja, mutta vääriä merkintöjä tai laskuvirheitä.

0: Ei vastausta tai väärä vastaus, joka perustuu väärään ratkaisuun.

A5.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas on ymmärtänyt tehtävänannon, kuvan ja niiden välisen yhteyden.
1: Oppilaalla on jäänyt jotain ymmärtämättä tehtävästä.
0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilas on ratkaisussaan osannut laskea molempien hinnan, niiden välisen erotuksen ja ratkaissut molemmat kysymykset.
1: Oppilas on onnistunut ratkaisussaan niiltä osin, joilta oli tulkinnut tehtävän oikein.
0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton

Vastauksen
saaminen

2: Molempien kysymysten vastaukset oikein.
1: Laskuvirhe, kopiointivirhe tai toinen vastauksista väärä.
0: Ei vastausta, väärät vastaukset tai toinen vastauksista oikein väärän ratkaisun perusteella.

B1.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas ymmärtänyt tehtävän siten, että jokaiselle löytyy pari ja kaikkien parien summat ovat yhtä suuria.

1: Oppilas on ymmärtänyt tai tulkinnut osan tehtävästä väärin.

0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilaan ratkaisu on onnistunut ja johtaisi oikeaan tulokseen, jos se olisi suoritettu oikein.

1: Oppilas on onnistunut ratkaisussaan niiltä osin, joilta oli tulkinnut tehtävän oikein.

0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton.

Vastauksen
saaminen

2: Oikea vastaus, oikea merkintä ja laskutoimitukset tai perustelut näkyvissä.

1: Oikea vastaus, mutta perustelut puuttuvat tai ovat virheelliset.

0: Ei vastausta tai väärä vastaus, joka perustuu väärään ratkaisuun.

B2.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas on ymmärtänyt, että lasten on syytä kulkea menomatkalla pareittain, taskulamppu ei valaise kovin pitkälle pimeässä ja sumuisessa säässä, jonkun heistä on aina palautettava lamppu, ja hitaamman ja nopeamman etenijän kulkiessa yhdessä on edettävä hitaamman tahdissa.

1: Oppilas on ymmärtänyt vain osan tehtävän ehdoista ja olosuhteista.

0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilaan ratkaisu olisi johtanut oikeaan tulokseen, jos se olisi suoritettu oikein.

1: Oppilas on onnistunut ratkaisussaan niiltä osin, joilta oli tulkinnut tehtävän oikein.

0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton

Vastauksen
saaminen

2: Oppilas on päässyt ratkaisussaan lyhyimpään mahdolliseen aikaan ja antanut ihanne-vastauksen lisäksi toimintatavan.
1: Oppilaan vastaus on lähellä lyhyintä mahdollista aikaa ja vastaus perustuu oikeaan toimintatapaan.
0: Ei vastausta tai oikea vastaus, joka perustuu väärään ratkaisuun.

B3.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas on ymmärtänyt tehtävän molemmat ehdot.
1: Oppilas on ymmärtänyt vain toisen tehtävän ehdoista.
0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilas on osannut käyttää ratkaisussaan molempia ehtoja.
1: Oppilas on käyttänyt onnistuneesti vain toista tehtävän ehdoista.
0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton

Vastauksen
saaminen

2: Oikea vastaus perusteluineen molempien ehtojen osalta.
1: Oikea vastaus, mutta ei perusteltu molempien ehtojen osalta.
0: Ei vastausta tai väärä vastaus, joka perustuu väärään ratkaisuun.

B4.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas on ymmärtänyt tehtävänannon ja kuvan sekä niiden välisen yhteyden.
1: Oppilas on ymmärtänyt osan tehtävästä ja/tai selvittänyt käytävän leveyden.
0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilaan ratkaisu olisi johtanut oikeaan tulokseen, jos hän olisi suorittanut sen oikein.
1: Oppilas on onnistunut ratkaisussaan niiltä osin, joilta oli tulkinnut tehtävän oikein.
0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton.

Vastauksen
saaminen

2: Oikea vastaus ja oikea merkintä.
1: Kopiointivirhe, laskuvirhe tai väärä merkintä oikeassa ratkaisussa.
0: Ei vastausta tai väärä vastaus, joka perustuu väärään ratkaisuun.

B5.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Tehtävä ymmärretty täysin oikein.
1: Osa tehtävästä ymmärretty tai tulkittu väärin.
0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilas on ratkaisussaan osannut selvittää lehtien kokonaismäärän ja piirtämällä tai aritmeettisin laskutoimituksin pääsee ratkaisuun.

1: Oppilas on onnistunut ratkaisussaan niiltä osin, joilta oli tulkinnut tehtävän oikein tai päätynyt ratkaisuunsa arvionomaisesti.

0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton.

Vastauksen
saaminen

2: Oikea vastaus ja oikea merkintä perusteluineen.

1: Oikea vastaus ilman riittäviä laskutoimituksellisia, kuvallisia tai sanallisia perusteluja.

0: Ei vastausta tai väärä vastaus, joka perustuu väärään ratkaisuun.

C1.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Kaikki kohdat (a-d) ymmärretty täysin oikein.

1: 1-3 kohdista ymmärretty väärin.

0: Kaikki kohdat ymmärretty väärin tai ei yritystä.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Ratkaisusuunnitelmat ovat onnistuneet.

1: 1-3 kohdan ratkaisusuunnitelma epäonnistunut.

0: Ei ratkaisua tai tehtävään sopimaton ratkaisu.

Vastauksen
saaminen

2: Oikea vastaukset ja oikeat merkinnät.
1: 1-3 kohdan vastaus oikea.
0: Ei vastausta tai tehtävään sopimaton vastaus.

C2.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas on ymmärtänyt tehtävän täysin oikein.
1: Oppilas on ymmärtänyt vain osan tehtävästä oikein.
0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilas on kuvan, aritmeettisten operaatioiden tai kokeilun ja tarkistuksen avulla päätynyt oikeaan ratkaisuun.
1: Oppilaan ratkaisu on oikeansuuntainen tai oikein tulkitun osan mukainen.
0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton.

Vastauksen
saaminen

2: Oikea vastaus, joka johtuu oikeasta ratkaisusta ja perustelut nähtävissä.
1: Oikea vastaus ilman kunnollisia perusteluita.
0: Ei vastausta tai väärä vastaus.

C3.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas on ymmärtänyt tehtävän oikein ja tulkinnut sen siten, että kissan askeleet on muutettava hiiren askeliksi, jotta tehtävä voidaan ratkaista.
1: Oppilas on ymmärtänyt vain osan tehtävästä oikein.
0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilas on edennyt aritmeettisten operaatioiden ja/tai piirroksen avulla ratkaisussaan oikeaan suuntaan.
1: Oppilaan ratkaisu on edennyt oikeaan suuntaan oikein tulkitun osan mukaisesti.
0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton.

Vastauksen
saaminen

2: Oikea ratkaisu ja oikeat perustelut.
1: Oikea vastaus, mutta puutteelliset perustelut.
0: Väärä vastaus, ei vastausta tai oikea vastaus, joka perustuu väärään ratkaisuun.

C4.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas on ymmärtänyt, että käytössä on vain kolme mittamerkitöntä astiaa, joista kahden tilavuudet on annettu ja sen, että tavoitteena on mitata täsmälleen haluttu määrä vettä.
1: Oppilas on ymmärtänyt vain osan tehtävän ehdoista oikein.

0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilas on onnistunut ratkaisussaan ja huomioinut kaikki ehdot.
1: Oppilaalla on jäänyt jokin tehtävän ehdoista käyttämättä ratkaisussa.
0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton.

Vastauksen
saaminen

2: Oikeat vastaukset molempiin tehtävän kysymyksiin.
1: Oikea vastaus (, joka perustuu oikeaan ratkaisuun) toiseen kysymykseen.
0: Väärä vastaus tai ei vastausta ollenkaan.

C5.

Tehtävän
ymmärtäminen

2: Oppilas on ymmärtänyt tehtävän molemmat ehdot: jäsenten yhteismäärän ja tyttöjen ja poikien erotuksen.
1: Oppilas ei ole ymmärtänyt molempia ehtoja.
0: Oppilas ei ole ymmärtänyt tehtävää tai on ymmärtänyt sen täysin väärin.

Ratkaisun
suunnittelu

2: Oppilas on ratkaisussaan onnistuneesti huomioinut tehtävän molemmat ehdot.
1: Oppilaalla on jäänyt toinen tehtävän ehdoista käyttämättä ratkaisussa.
0: Oppilas ei ole yrittänyt tai ratkaisu on tehtävään soveltumaton

Vastauksen
saaminen

2: Oikea vastaus, joka perustuu oikeaan ratkaisuun.

1: Kopiointivirhe tai laskuvirhe.

0: Ei vastausta tai väärä vastaus, joka perustuu väärän ratkaisuun.

Liite 4: Kvalitatiivinen analyysi oppilaiden ratkaisuja haittaavista tekijöistä

Tehtävässä A1 oli poikkeuksellisen paljon ratkaisuja, jotka olivat saaneet täydet kuusi pistettä (21/38). Tämä johtunee hyvinkin pitkälti siitä, että jo rakentaessani testiä pyrin siihen, että testin tekeminen olisi helppo aloittaa ja jokainen oppilas osaisi jotain, ainakin ensimmäisessä tehtävässä. Yksi oppilaista on ymmärtänyt tehtävän kaikki kohdat täysin oikein, hän tehnyt onnistuneet ratkaisusuunnitelmat ja tarjonnut ratkaisuksi oikeaan tulokseen johtavia aritmeettisia operaatioita, mutta hän tekee viimeisessä laskutoimituksessa laskuvirheen, joka ei selvästikään johdu käsitteellisestä puutteellisuudesta, vaan huolimattomuudesta. Tämä ratkaisu muodostaa oman ryhmänsä ja on tässä tehtävässä ainoa laatuaan. Tämän lisäksi ratkaisujen joukosta löytyi kaksi ratkaisua, jotka olivat muuten täysin onnistuneita, mutta c-kohdassa molemmat olivat vastanneet kuvan perusteella kahdeksi perättäiseksi kuukaudeksi helmi- ja elokuun, kun oikea vastaus oli heinä- ja elokuu. He olivat kuitenkin molemmat käyttäneet d-kohdassa heinä- ja elokuun myyntimääriä onnistuneesti. Kuvassa heinäkuun lyhenteenä oli He, joten oppilaiden vaikeudet johtuivat selvästi huolimattomuudesta. Seuraava ryhmä muodostuu yksittäisen oppilaan ratkaisusta. Hän ei ole päässyt ratkaisussaan yhtä pitkälle kuin kaksi edellistä. Hänen ratkaisunsa c-kohdassa oli kesä ja helmikuu, mikä kertoo graafin tulkinnan vaikeuksista. Lisäksi tähän ryhmään voidaan liittää kaksi ratkaisua, joissa oppilaat kahden ensimmäisen tavoin ovat onnistuneet ratkaisuissaan d-kohta mukaan lukien, mutta toinen vastaa c-kohdassa kahdeksi peräkkäiseksi kuukaudeksi kesä- ja heinäkuun ja toinen elo- ja syyskuun. He ovat molemmat tulkinneet graafia oikein ja löytäneet oikeat myyntiluvut, mutta tulkinneet kuukaudet väärin. Myös nämä ratkaisua haittaavat tekijät kahden edellisen tavoin johtuvat graafin tulkinnan vaikeuksista ja kuuluvat siten matemaattis - loogisiin vaikeuksiin. (yhteensä 5/38).

Kolmantena ryhmänä tehtävän A1 ratkaisuista nousi esiin neljän (4/38) oppilaan ratkaisu, jossa he olivat onnistuneet monin eri tavoin, mutta d-kohdassa antaneet vastauksiksi erikseen sekä heinä- että elokuun huppareiden myyntivoiton farkkuihin nähden, kun tehtävänannossa nimenomaan pyydettiin kahden kuukauden kokonaismäärää. Oppilaiden vaikeudet johtuivat tekstin ymmärtämisen vaikeuksista. Lisäksi kaksi näistä oppilaista oli tehnyt laskuvirheen viimeisen kohdan laskutoimituksessa. Neljännen ryhmän muodostavat ratkaisut (5/38), joissa perustavana vaikeutena on d-kohdan matemaattis-loogisen rakenteen ymmärtämisen vaikeus. Tehtävässä eteneminen on toisistaan poikkeavaa, mutta jokaisessa d-kohdan ratkaisuyritys tai sanallinen vihje ymmärtämättömyydestä paljastaa sen, että tehtävän rakennetta ei ole ymmärretty. Viidentenä ryhmänä nousee esiin kaksi (2/38) kaikista edellisistä poikkeavaa ratkaisua, joissa perustavana vaikeutena on graafin tulkintaan liittyvä voimakas käsitteellinen puutteellisuus. Oppilaat ovat saaneet numeerisesti erilaiset arvioinnit, mutta heidän perusajattelunsa muistuttaa toisiaan ja siten he muodostavat viidennen ryhmän.

Tehtävässä A3 kuuden pisteen ratkaisuun ylsi seitsemän (7/38) oppilasta. Suurin osa (20/38) oppilaista oli kuitenkin ratkaissut tehtävän siten, että oli laskenut ensin etanan vuorokaudessa kulkeman matkan, jakanut koko seinä korkeuden tällä matkalla ja saanut vastaukseksi 6, 6 1/3, 6 1/2 tai 7 päivää. Tällöin jää huomioimatta se tehtävän onnistuneen ratkaisun kannalta tärkeä seikka, että etanan päästyä katolle se ei enää valu alaspäin. Oppilaat ovat koulumatematiikassa tottuneet siihen, että sanalliset tehtävät ratkeavat lähes poikkeuksetta siten, että tekstistä poimitaan oikeat luvut ja tehdään niiden avulla joitakin laskutoimituksia. Siksi tällaisen ajattelutavan omaksuneet oppilaat eivät olleet viitsineet tai osanneet piirtää kuvaa, joka olisi auttanut tehtävän ratkaisussa, vaan ovat joko vain suorittaneet aritmeettisia operaatioita tai piirtäneet niiden lisäksi kuvan, joka ei auta ratkaisussa, vaan on ainoastaan viihdyttävä tai ovat seuranneet ohjeiden kehotusta käyttämään piirtämistä apunaan. Tällaiset ratkaisut sisältyvät teoriasta nousevan pinnallisten strategioiden, uskomusten ja väärien käsitysten vaikeusluokkaan, sillä niissä juuri korostuvat "koulun sanallisten tehtävien pelisäännöt" ja kiire päästä suoraan toteuttamaan laskutoimituksia. Toisen ryhmän muodostavat (3 /38) sellaiset ratkaisut, joissa on myös osattu laskea etanan vuorokaudessa etenemä matka, jonka jälkeen tämä on kerrottu kerrostalon korkeudella ja saatu vastaukseksi 57 päivää. Myös tämän ryhmän ratkaisua luonnehtii pinnallinen strategia. Kolmannen ryhmän muodostavat ratkaisut (5/38), joissa oppilaat ovat poimineet tehtävässä annetut tiedot ja niiden avulla muodostaneet laskutoimituksia, joista on hyvin vaikea löytää mitään logiikkaa. Kuten kahdessa edellisessäkin, kyseessä on pinnalliset strategiat ja vieläpä erittäin pinnalliset sellaiset. Viidennessä ryhmässä (3/38) ovat ratkaisut, joissa oppilaat ovat ymmärtäneet tehtävän täysin oikein, onnistuneet ratkaisua suunnitellessaan, mutta tehneet jossain vaiheessa ratkaisua laskuvirheen ja päätyneet näin hieman virheelliseen vastaukseen.

Tehtävästä A4 löytyi useampi (10/38) kuuden pisteen ratkaisu. Sen lisäksi tutkittuani ratkaisuja löysin selkeän ryhmän (8/38), jonka ratkaisut olivat samalla tavoin hyvin onnistuneita, mutta jossain vaiheessa ratkaisua oli tullut huolimattomuus- tai laskuvirhe. Nämä ratkaisut muodostavat ensimmäisen ryhmän. Lisäksi löytyi ratkaisuja (2/38), joissa oppilaat eivät olleet ehtineet syventyä tehtävään ollenkaan ja ilmoittivat ajan loppuneen kesken. Kolmanneksi paperista nousi esiin ryhmä (5/38), joiden ratkaisuissa oli joko ratkaistu vain yksi uusi tieto tai sen lisäksi jo annettuja tietoja tai pelkästään tietoja, jotka oli jo annettu. Nämä luokittelin luetun ymmärtämisen vaikeuksien luokkaan. Oppilaat olivat kyllä osanneet lukea tehtävänannon, mutta he eivät olleet selvästikään syventyneet tai tutustuneet siihen riittävän tarkasti. Neljännen ryhmän muodostavat ratkaisut (11/38), joissa oppilaan keskeisimpänä vaikeutena ovat selvästi käsitteelliset puutteellisuudet trigonometriassa eli ne kuuluvat matemaattis - loogisiin vaikeuksiin. Lisäksi neljällä tähän ryhmään kuuluvalla oli myös hankaluuksia kuvan tulkitsemisessa. Tähän ryhmään kuuluu sekä tyydyttävästi (3/6) että huonosti (0/6) numeerisesti menestyneitä oppilaita. Jokaisessa ratkaisussa olivat kuitenkin vaikeutena trigonometrian käsitteet ja niiden puutteet. Esimerkiksi puutarhan pinta-alaa laskettaessa jotkut oppilaat joko laskivat todellisuudessa tilavuutta tai käyttivät kertolaskun sijaan yhteenlaskua. Viidennen ryhmän ratkaisujen (2/38) haittaavat tekijät johtuvat kuvan tulkinnan ongelmista, jotka voidaan edellisen tavoin liittää matemaattis-loogisiin ja käsitteellisiin puutteellisuuksiin.

Tehtävässä A5 on peräti kymmenen kuuden pisteen ratkaisua (10/25). Tehtävä onkin matemaattis-loogiselta rakenteeltaan melko helppo. Ensimmäinen ryhmä muodostuu ratkaisuista (4/25), joissa huolimattomuus ja siihen liittyvä laskuvirhe johtaa väärään vastaukseen. Toinen ryhmä muodostuu yksittäisestä ratkaisusta (1/25), jossa aika on loppunut kesken. Loput ratkaisut (10/25) muodostavat samantyyppiseen perusajatteluun nojaavan ryhmän. Jokaisessa näistä ratkaisuista oppilas lähtee annetuista luvuista suoraan laskutoimituksiin sen kummemmin syventymättä tehtävän matemaattis-loogiseen rakenteeseen. Ensisijaisena vaikeutena tämän ryhmänoppilailla ovat pinnalliset strategiat.

Tehtävässä B1 on edellisen testin ensimmäisen tehtävän tavoin melko paljon kuuden pisteen ratkaisuja (17/37) samoista syistä. Ensimmäinen ryhmä (6/37) muodostuu niistä ratkaisuista, joissa oppilaat ovat kyllä löytäneet kellotaululta oikeat parit, mutta eivät ole vastaustaan laskutoimituksellisesti tai sanallisesti perustelleet, vaikka ohjeissa näin nimenomaan neuvottiinkin. Tämä johtuu siitä, että koulumatematiikassa korostuu usein vastaus prosessin kustannuksella, joten oppilaat eivät ole vaivautuneet antamaan muuta kuin vastauksen. Tämä ryhmä kuuluu pinnallisiin strategioihin, uskomuksiin ja vääriin käsityksiin liittyviin ratkaisua haittaaviin tekijöihin. Toinen ryhmä (6/37) muodostuu ratkaisuista, joissa jokaisessa on löydetty sellaisia pareja, joiden summat ovat samoja, kuten 11, 12 tai 16. Niissä jokaisessa on kuitenkin sellainen ongelma, että joku tai jotkut kellotaulun numerot jäävät ilman paria. Tällaiseen ratkaisuun päätynyt oppilas on kyllä ymmärtänyt osittain tehtävänannon, mutta ratkaisujen perusteella tekstin ymmärtäminen on jäänyt hieman puutteelliseksi siinä, että jokaiselle numerolle olisi löydyttävä pari. Viimeinen ryhmä (8/37) muodostuu ratkaisuista, joissa vaikeudet johtuvat joko tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen epäselvyydestä oppilaalle tai summan käsitteen puutteellisuuksista tai näiden kahden yhdistelmästä. Tämän ryhmän ongelmanratkaisuprosessin ratkaisua haittaavat tekijät kuuluvat siis matemaattis-loogisiin, joka pitää sisällään myös käsitteelliset puutteellisuudet.

Tehtävässä B2 ei yksikään oppilas yltänyt kuuteen pisteeseen eli jokaisella ilmeni jokin ratkaisua haittaava tekijä ongelmaa ratkaistaessa. Ensimmäisen ryhmän (5/37) muodostavat ne ratkaisut, joissa sillan ylittämisen lähes nopein mahdollinen toteutustapa on keksitty. Oppilaat ovat ymmärtäneet tehtävän ehdot ja olosuhteet oikein ja suunnitelleet ratkaisunsa niiden mukaisesti. He ovat saaneet vastaukseksi 13 minuuttia lukuun ottamatta yhtä, joka on tehnyt laskuvirheen, kun nopein mahdollinen olisi ollut 12 minuuttia. Ainut, mikä heiltä on jäänyt huomioimatta on se, että nopeimmassa mahdollisessa ratkaisussa kaksi hitainta etenijää on järjestettävä ylittämään silta yhdessä. Heidän vaikeutensa johtuu tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen ongelmallisuudesta. Toinen ryhmä (2/37) muodostuu niistä, jotka olivat kokeneet ajan loppuvan kesken. Seuraava ryhmä (11/37) koostuu niistä ratkaisuista, joissa jäi huomioimatta tehtävässä annetut sääolosuhteet ja taskulampun realistinen iskunkestävyys. Näissä oppilaat ratkaisivat ongelman siten, että he joko laittoivat lapset osoittamaan lampulla toisille valoa toisesta päästä tai puolesta välistä, heittämään tai vetämään taskulamppua narulla tai jopa huutamaan toisille ohjeita sillalla etenemiseen. Ratkaisua haittaavat tekijät johtuivat puutteellisesta tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen ymmärtämisestä.

Tehtävässä B2 löytyy vielä kolme selvästi edellisistä ja toisistaan poikkeavaa ryhmää, joiden sisällä perusajattelutapa on hyvin samankaltainen. Ensimmäisessä ryhmässä (8/37) oppilaat ovat toteuttaneet tehtävässä annetuilla luvuilla erinäisiä laskutoimituksia huomioimatta mitenkään tehtävän ehtoja tai olosuhteita. Nämä oppilaat käyttivät kaikki pinnallista strategiaa, eivätkä edes ponnistelleet ymmärtääkseen tehtävän rakennetta. Toinen näistä ryhmistä (3/37) muodostuu niistä ratkaisuista, joissa oppilaat ovat kyllä yrittäneet suunnitella toimintatapaa, mutta ovat kokeneet tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen liian vaikeaksi, eivätkä ole edenneet ratkaisussa oikeastaan ollenkaan. Viimeinen ryhmistä (8/37) on löytänyt jonkinlaisen suunnitelman sillan ylittämiseen, mutta matemaattis-loogisen rakenteen ymmärtämisen puutteellisuus on johtanut siihen, että ratkaisut ovat tehtävään sopimattomia ja sillan ylittäjien ajankäyttö tehtävän ehtojen vastainen.

Tehtävässä B4 vain kolme oppilasta sai kuusi pistettä (3/37). Lisäksi ratkaisuista neljällä (4/37) oppilaalla oli loppunut aika kesken tämän neljännen tehtävän kohdalla. Seuraavan ryhmän muodostavat ne neljä (4/37) oppilasta, joiden ymmärtäminen, ratkaisusuunnitelma ja ratkaisun toteutus olivat onnistuneet, mutta laskuvirhe aiheutti sen, että lopullinen vastaus oli väärä. Kolmannen ryhmän (12/37) ratkaisua haittaavat tekijät johtuivat selvästi pinnallisista strategioista, sillä he olivat poimineet kuvassa annettuja lukuja ja toteuttaneet niillä jokseenkin mielivaltaisia laskutoimituksia. Heidän vaikeutenaan oli myös matemaattis-loogisen rakenteen vaikeudet ja trigonometrian käsitteiden puutteet, mutta pinnallinen strategia on selvästi paremmin heidän ratkaisujaan kuvaava ja ensisijainen vaikeus. Analysoituani tehtävän ratkaisuja löysin myös selvästi perusajattelultaan muista ryhmistä poikkeavan joukon ratkaisuja, joita kuitenkin yhdistää toisiinsa samantyyppinen ajattelutapa. Tässä ryhmässä (10/37) oppilaiden trigonometrian käsitteellisessä valmiudessa ei ole puutteita tämän tehtävän puitteissa, mutta heillä on selvästi ollut vaikeuksia tulkita kuvaa ja osata erottaa tehtävän kannalta oleellinen informaatio kuvan perusteella. Tämän vuoksi ratkaisut kuuluvat matemaattis-loogisiin vaikeuksiin, sillä vaikka pinta-alan laskemisessa ei ollutkaan käsitteellisiä puutteellisuuksia, niitä on kuitenkin ollut kuvan tulkinnassa. Viimeisen ryhmän (4/37) muodostavat ne ratkaisut, joita leimaa pinta-alan käsitteen puutteellisuus. Ratkaisuista on selvästi nähtävissä se, että oppilaiden pinta-alan laskemisen osaaminen ei ole tehtävän vaatimalla tasolla. Oppilaat ovat esimerkiksi laskeneet tilavuuksia tai vähentäneet toisistaan pituuden ja pinta-alan mittalukuja ja saaneet mittayksiköksi vain jälkimmäistä.

Tehtävässä B5 kaksi oppilasta (2/22) sai kuusi pistettä ja yhdeltä (1/22) loppui aika kesken. Yhden ryhmän (5/22) muodostavat ratkaisut, joiden vastaus oli oikea ilman riittäviä tai oikeita laskutoimituksellisia, sanallisia tai kuvallisia perusteluja. Nämä ratkaisua haittaavat tekijät voidaan luokitella pinnallisiksi strategioiksi, sillä heidän ratkaisussaan korostuu se, että pelkkä vastaus on tärkeä ja riittävä, vaikka ohjeissa nimenomaan neuvottiin perustelemaan ja piirtämään sekä vaadittiin laskutoimitusten esiin kirjoittamista. Myös seuraavassa ryhmässä (3/22) vaikeuksia aiheutti pinnalliset strategiat, sillä jokaisessa näissä oppilaat olivat laskeneet jokseenkin mielivaltaisia laskutoimituksia tehtävässä annetuilla luvuilla. Kaksi oppilasta (2/22) oli kohdannut haittaavia tekijöitä matemaattis-loogisessa rakenteessa niin, ettei ollut päässyt etenemään tehtävässä ollenkaan. Lisäksi yksi ryhmä (9/22) muodostuu ratkaisuista, joissa oppilaat olivat kyllä suunnitelleet ratkaisuaan ja edennyt ratkaisussaan, mutta eivät olleet päässeet oikeaan ratkaisuun tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen ymmärtämisen vaikeuksien vuoksi.

Myös C-sarjan ensimmäisessä tehtävässä oli poikkeuksellisen paljon (16/38) kuuden pisteen ratkaisuja. Ensimmäisessä ryhmässä on kaksi (2/38) ratkaisua, joista toisessa on huolimattomuus- ja toisessa on laskuvirhe muuten täysin onnistuneen ratkaisun lisäksi. Toisen ryhmän (8/38) muodostavat ne ratkaisut, joissa c- tai d-kohdan tekstin ymmärtäminen on jäänyt puutteelliseksi ja tätä kautta matemaattis-loogisen rakenteen ymmärtäminen on aiheuttanut vaikeuksia. Tehtävänannossa nimenomaan etsitään kahta peräkkäistä kuukautta, mutta tähän ryhmään kuuluvista kuusi ongelmanratkaisijaa on päätynyt ratkaisussaan kahteen kuukauteen, jotka eivät suinkaan ole peräkkäisiä. Lisäksi ryhmään kuuluu kaksi ratkaisua, joissa on ollut vaikeuksia d-kohdan tekstin ymmärtämisessä. Seuraavaan ryhmään (3/38) kuuluvat ne ratkaisut, joissa on kahdeksi peräkkäiseksi kuukaudeksi annettu sellaiset, joissa huppareita myytiin enemmän farkkuihin verrattuna eikä päinvastoin, kuten tehtävänannossa kysyttiin. Nämä ratkaisut viittaavat graafin tulkitsemisen vaikeuksiin, jotka kuuluvat matemaattis-loogisiin haittaaviin tekijöihin. Lisäksi löytyy edellisestä poikkeava ryhmä (2/38), joiden ratkaisuissa 0-myyntilukua osoittava piste on tulkittu toisessa kymmeneksi ja toisessa 50:ksi. Myös heidän vaikeutensa johtuvat graafin tulkitsemisen vaikeuksista ja näin ollen ne kuuluvat matemaattis-loogisiin haittaaviin tekijöihin. Myös viimeisen ryhmän (7/38) vaikeudet ongelmanratkaisuprosessissa liittyvät graafin tulkitsemiseen. Tämän ryhmän toisiinsa yhdistävä ajattelutapa erottaa sen kuitenkin kaikista edellisistä ryhmistä. He ovat kaikki osoittaneet osaavansa tulkita graafia onnistuneesti, mutta ovat kohdanneet ratkaisua haittaavia tekijöitä sen suhteen d-kohdassa ja päätyneet osittain tai kokonaan väärän vastaukseen.

Tehtävän C2 ratkaisujen joukosta löytyi peräti 15 (15/38) kuuden pisteen arvoista ratkaisua. Sen sijaan ensimmäinen ratkaisua haittaava tekijä löytyi kahdesta (2/38) ratkaisusta, joissa molemmissa onnistuneesta ratkaisusuunnitelmasta ja sen toteutuksesta huolimatta vastaus oli virheellinen, sillä he olivat molemmat tehneet huolimattomuudesta johtuvan laskuvirheen. Lisäksi yhdellä oppilaalla (1/38) loppui aika kesken. Kolmannen ryhmän (7/38) muodostavat sellaiset ratkaisut, joissa koko oppilasmäärä oli joko jaettu kahdella tai kerrottu puolella ja päädytty tätä kautta siihen, että oppilaita oli 12 poissa. Kaikissa näissä ratkaisuissa näkyi se, että tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen ymmärtäminen oli jäänyt puutteelliseksi. Seuraavaan ryhmään (7/38) kuuluvat ne ratkaisut, joiden ratkaisua leimaa pinnallinen strategia. Oppilaat ovat poimineet tehtävässä annettuja lukuja ja käyttävät mahdollisesti sellaisiakin, joita siinä ei ole annettu ja suorittavat laskutoimituksia, jotka eivät johda tämän tehtävän kannalta järkevään ratkaisuun. Lisäksi löytyy kaksi ratkaisua (2/38), joissa molemmissa ratkaisu on lähtenyt etenemään oikeaan suuntaan, mutta jakolaskun käsitteen puutteellisuus on johtanut väärään ratkaisuun, joten tämä ryhmä kuuluu matemaattis-loogisiin haittaaviin tekijöihin. Myös viimeinen ryhmällä (4/38) matemaattis-loogisia haittaavia tekijöitä, mutta ne liittyvät tehtävän rakenteen ymmärtämisen vaikeuksiin, vaikkakin yksi heistä on päätynyt oikeaan vastaukseen. Hänen ratkaisussaan olevat laskutoimitukset kuitenkin osoittavat matemaattis-loogisen rakenteen aiheuttaneen vaikeuksia.

Tehtävässä C3 ei ollut ainuttakaan kuuden pisteen ratkaisua. Sen sijaan viisi pistettä saivat kolme (3/38) perusajattelultaan hyvin samantyyppistä ratkaisua. Niistä jokaisessa oppilas oli osannut muuntaa kissan askeleet hiiren askeliksi ja edennyt tehtävässä loppuun saakka, mutta jokaisella oli joitakin vaikeuksia tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen loppuun asti ymmärtämisessä. Lisäksi ratkaisujen joukossa oli yksi ratkaisu (1/38), jossa oppilas oli myös edennyt ratkaisussaan erittäin onnistuneesti, mutta laskuvirhe vähennyslaskussa aiheuttaa ratkaisua haittaavia tekijöitä tehtävän loppuun saakka. Tässä tehtävässä kaksi oppilasta (2/38) koki ajan loppuneen kesken. Seuraavan ryhmän (6/38) muodostavat ne ratkaisut, joissa oli poimittu luvut ja suoritettu niillä laskutoimituksia jokseenkin tehtävään sopimattomalla tavalla. Näissä ratkaisuissa oli ratkaisua haittaavana tekijänä pinnalliset strategiat, kuten myöskin seuraavassa ryhmässä (9/38), joka poikkeaa perusajattelultaan kuitenkin edellisestä. Ryhmässä vastaukset on perusteltu sillä, että kissa on nopeampi tai sillä, että hiirellä on etumatkaa tai perusteita ei ole ollenkaan, mutta ei olla ratkaisussa sen kummemmin nojattu tehtävässä annettuihin tietoihin. Viimeisessä ryhmässä on huomattava määrä ratkaisuja (16/38). Kaikissa niissä on edetty samansuuntaisesti tehtävässä annettujen tietojen perusteella joko kuvallisesti tai aritmeettisesti tai molempiin nojaten, mutta ratkaisussa vaikeuksia on kuitenkin aiheuttanut tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen monimutkaisuus.

Tehtävässä C5 kahdeksan (9/19) sai täydet kuusi pistettä. He olivat kaikki ymmärtäneet ja osanneet ratkaisussaan huomioida sekä tyttöjen ja poikien yhteismäärän että heidän määränsä erotuksen. Vaikeuksia kartoittaessani löysin vain yhden ryhmän (10/19), joka kylläkin voidaan jakaa kahteen osaan. Molemmissa oli ongelmana se, että ei oltu osattu huomioida kuin toinen tehtävän ehdoista, tässä tapauksessa tyttöjen ja poikien erotus. Kaikkien ongelmana oli se, että heidän ratkaisunsa ei johtanut oikeaan yhteismäärään. Jokaisella oli siis puutteita tehtävän matemaattis-loogisen rakenteen ymmärtämisessä. Tämän ryhmän kuitenkin hajottaa se, että osa (7/19) antoi vastauksensa vääränä, eikä näin huomioinut yhteismäärää ollenkaan ja osa (3/19) huomasi päätyneensä väärään tulokseen ja veti vastauksensa yli, mikä osoittaa sen, että he ymmärsivät yhteismäärän olleen virheellinen.