

**”Täällä haisee ihan matematiikka!”
Toiminnallinen opetuskokeilu alkuopetuksen matematiikkaan**

Kati Liimatainen

**Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
Luokanopettajien aikuiskoulutus
Chydenius-Instituutti
Jyväskylän yliopisto
Kevät 2000**

TIIVISTELMÄ

LIIMATAINEN, K.: ”Täällä haisee ihan matematiikka!” Toiminnallinen opetuskokeilu alkuopetuksen matematiikkaan. Luokanopettajien aikuiskoulutus. Chydenius-Instituutti. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma, 2000.

Tutkielmassani esittelen alkuopetuksen matematiikkaan suunnatun, leikinomaisen ja toiminnallisen opetuskokeilun. Toteutin opetuskokeilun omassa 1 - 2 -luokassani syyslukukauden 1999 alussa. Kohderyhmänä olivat yhdysluokassa sekä ensimmäisen että toisen luokan oppilaat, vaikka kokeilu olikin pääasiallisesti suunnattu koulunsa aloittaville ensimmäisen luokan oppilaille. Opetuskokeilun pituus oli yhdeksän viikkoa. Opetuskokeilun tarkoituksena oli luokanopettajan keinoin vahvistaa oppilaiden matemaattisia valmiuksia, erityisesti lukukäsitettä ja lukujonotaitoja. Tutkimuksen tavoitteena oli oman opettajuuteni kehittäminen. Pyrin kehittämään matematiikanopetustani toiminnallisemmaksi, leikinomaisemmaksi ja lapsilähtöisemmäksi. Tähän pääsin vähentämällä kirjan tehtävien osuutta sekä käyttämällä monipuolisia ja vaihtelevia työtapoja. Käytettyjä työtapoja yksilötyöskentelyn ohella olivat pari- ja ryhmätyöskentely, oppimispelit ja -leikit, keskustelu, laskutarinat sekä pysäkkityöskentely. Tutkimuksen toinen tavoite oli pyrkiä ennaltaehkäisemään matematiikan mahdollisia oppimisvaikeuksia luomalla oppilaille vahva perusta, jonka varaan myöhempi matematiikan opiskelu rakentuu. Tutkimusmenetelmään opetuskokeilu oli toimintatutkimus, jossa aineistonkeruumenetelminä käytin osallistuvaa havainnointia, tutkimuspäiväkirjan kirjoittamista, videointia ja valokuvaamista sekä oppilaiden kanssa käytyä arviointikeskustelua. Opetuskokeilun myötä oma opettajuuteni vahvistui. Pystyin tekemään matematiikan opetuksesta vaihtelevaa ja monipuolista. Uskalsin jättää kirjan vähemmälle ja käyttää sitä vain valikoiden. Oppilaat pitivät käyttämästäni työtavoista ja matematiikan opiskelu oli heille helppoa ja hauskaa. Oppilaat saavuttivat normaalin osaamisen tason ja selviytyivät loppumittauksena käyttämästäni perinteisestä matematiikan kokeesta hyvin. Eniten opetuskokeilusta hyötyivät alkumittauksessa heikommin menestyneet oppilaat. Taidoiltaan paremmat oppilaat saivat edetä matematiikassa pidemmälle kuin tavallisesti ensimmäisen luokan syksynä, esim. laajentaa käytettävää lukualuetta yli sadan. Kokonaisuutena opetuskokeilu onnistui hyvin ja tulokset rohkaisevat käyttämään opetuskokeilun menetelmiä matematiikan opetuksessa tulevaisuudessaakin.

Hakusanat: alkuopetus, konstruktivismi, lukujonotaidot, lukukäsite, matematiikka

SISÄLLYS

| | |
|---|----|
| 1 JOHDANTO | 3 |
| 1.1 Opetuskokeilun toimintasuunnitelma | 5 |
| 1.2 Toimintatutkimus tutkimusmetodina | 6 |
| 1.2.1 Opettaja työnsä tutkijana | 9 |
| 1.2.2 Reflektiivinen ajattelu toimintatutkimuksessa | 11 |
| 1.2.3 Toimintatutkimuksen spiraalimalli | 12 |
| 2 OPETUSKOKKEILUN TEORIAPERUSTA | 14 |
| 2.1 Mitä matematiikka on? | 14 |
| 2.2 Matematiikan opetus | 15 |
| 2.2.1 Kritiikkiä perinteiselle matematiikan opetukselle | 16 |
| 2.2.2 Oppikirjan asema perinteisessä matematiikan opetuksessa | 17 |
| 2.2.3 Matematiikan opetuksen muuttuminen | 18 |
| 2.2.4 Matematiikan arvioinnin muuttuminen | 20 |
| 2.3 Konstruktivismi | 21 |
| 2.3.1 Heikko konstruktivismi | 22 |
| 2.3.2 Vahva, radikaali konstruktivismi | 22 |
| 2.3.3 Sosiaalinen konstruktivismi | 23 |
| 2.4 Konstruktivistinen oppimiskäsitys | 24 |
| 2.4.1 Konstruktivistinen oppimiskäsitys ja matematiikka | 25 |
| 2.4.2 Opettajan rooli konstruktivistisessa matematiikan opetuksessa | 26 |
| 2.5 Galperinin teoria ulkoisen materiaalin tarpeellisuudesta | 27 |
| 2.6 Piaget'n teoria kognitiivisesta kehityksestä | 30 |
| 2.6.1 Ajattelun kehityksen neljä pääkautta | 32 |
| 2.6.1.1 Esioperationaalinen kausi | 32 |
| 2.6.1.2. Konkreettisten operaatioiden kausi | 33 |
| 2.6.2 Matemaattisen ajattelun kehittyminen Piaget'n mukaan | 34 |
| 3 OPETUSKOKKEILUN TOTEUTTAMINEN | 36 |
| 3.1 Lähtötason arviointi ja tulokset | 36 |
| 3.2 Lukukäsitteen kehittyminen | 40 |
| 3.3 Lukujonotaitojen kehittyminen | 43 |
| 3.4 Toiminnallinen matematiikka | 49 |
| 3.4.1 Oppimispelit | 50 |
| 3.4.2 Keskustelu matematiikan opetuksessa | 54 |
| 3.4.3 Laskutarinat | 55 |
| 3.5 Toimintamateriaali matematiikan opetuksessa | 57 |
| 3.6 Loppumittaus | 61 |
| 3.6.1 Koe | 62 |
| 3.6.2 Pysäkkityöskentely | 63 |
| 4 OPETUSKOKKEILUN ARVIOINTI | 65 |
| LÄHTEET | 69 |
| LIITTEET | 74 |

1 JOHDANTO

Pro gradu -tutkielmani on alkuopetuksen matematiikkaan suunnattu opetuskokeilu. Kokeilun tarkoituksena oli luokanopettajan käytettävissä olevin keinoin auttaa ensimmäisen ja toisen luokan oppilaita vahvistamaan matemaattisia valmiuksiaan ja taitojaan sekä pyrkiä ennaltaehkäisemään matematiikan oppimisvaikeuksien syntymistä. Opetuskokeilun taustalla, ikään kuin punaisena lankana, kulkee konstruktivistinen oppimiskäsitys.

Olen perehtynyt alkuopetuksen matematiikan tavoitteisiin sekä sisältöihin ja valinnut sieltä kokeiluuni pääsisällöiksi lukukäsitteen ja lukujonotaitojen kehittämisen. Lukukäsite ja lukujonotaidot ovat olennainen osa ensimmäisen luokan syksyn oppisisältöjä. Valitsin juuri nämä sisällöt, koska halusin keskittyä opetuskokeilussani perustavaa laatua oleviin matemaattisiin taitoihin, joiden varaan myöhempi matematiikan kouluopetus kokonaisuudessaan rakentuu. Perusteluja opetuskokeiluani ja sen sisältöjä koskeville valinnoille sain useista aikaisemmista tutkimuksista. Matematiikka on runsaasti tutkittu kouluaine ja aikaisempia tutkimuksia on hyvin saatavilla.

Ikäheimo (1997) nimeää solmukohdiksi sellaiset matemaattiset taidot tai keskeiset oppisisällöt, joiden hallinnan puute aiheuttaa myöhemmin oppimisvaikeuksia. Sekä lukukäsite että lukujonotaidot ovat alkuopetuksen tärkeitä solmukohtia. Solmukohtia tulee harjoitella jo esiopetuksesta lähtien leikkien ja pelaten, jotta ne automatisoituisivat. Leikin ja pelien avulla lapsi jaksaa harjoitella niitä riittävän kauan rakentaakseen eli konstruoidakseen itselleen tällä tavalla konkreettisen ajattelun mallin asiasta. Tämän jälkeen opittavaksi jää ainoastaan se sopimus, jonka mukaan asia merkitään matemaattisesti kirjoittaen eli symbolisella tasolla. (Ikäheimo ym. 1997, 10 - 11.)

Lukukäsitteen kehittymistä on tutkittu Suomessa jo 1980-luvun alkupuolelta lähtien. Keranto (1981) tutki lasten lukukäsitteen kehittymistä ja opettajan mahdollisuuksia edistää kehittymistä opetuksellisin keinoin. Jo tuolloin lukukäsitteen heikkouden oli havaittu aiheuttavan matematiikan oppimisvaikeuksia.

Koponen ja Kupari (1982) kehittivät luokanopettajien käyttöön diagnosointikortit, joiden avulla oli tarkoitus löytää mahdollisimman varhaisessa vaiheessa matematiikan oppimisvaikeudet. Myös näissä korteissa liikkeelle lähdetään lukukäsitteen hallinnasta.

Vornanen (1984) tutki alkuopetuksen oppilaiden matemaattisia oppimisedellytyksiä ja kehitteli näiden oppimisedellytysten vahvistamiseksi harjoitusohjelman ensimmäisen luokan syyslukukauden alkuun. Myös hän havaitsi, että koulutulokkaan puutteelliset oppimisvalmiudet aiheuttivat myöhemmässä vaiheessa matematiikan oppimisvaikeuksia.

Lukujonotaitoja ja niiden hallintaa koulutulokkailla on tutkittu Turun oppimiskeskuksessa (Salonen ym. 1994; Vauras ym. 1994). Näissä tutkimuksissa havaittiin koulutulokkaan matemaattisten taitojen kehittymisen kannalta keskeisimmiksi juuri lukujonotaidot. Puutteet lukujonotaitojen hallinnassa ennustivat oppimisvaikeuksia myöhemmin koulumatematiikassa.

Opetuskokeilussani pyrin käyttämään monipuolisia, toiminnallisia menetelmiä; leikkiä, pelejä, eri aistikanavien kautta saatavaa tietoa (näkö, kuulo, tunto, kinesteettinen aisti), käsillä tekemistä mm. muovailua, askartelua, erilaisella materiaalilla toimimista. Materiaali oli tärkeässä asemassa sekä tutkimuksessani että matematiikan oppimisen alkuvaiheissa yleensäkin, kuten mm. Galperinin teoria osoittaa. Osa materiaalista olen valmistanut itse ja osa oli jo koululla valmiina. Pyrin luomaan luokkaan oppimisympäristön, joka kannustaa kokeilemaan ja tutkimaan matematiikkaa lapsen omasta innostuksesta lähtien. Pyrin saattamaan oppilaani turvalliselle ja mukavalle matkalle koulumatematiikan alkuun. Tavoitteenani oli jättää kirjan tehtävien tekeminen vähemmälle ja painottaa lasten omaa toimintaa ja tutkimista kokeilun aikana.

Kokeilu koostui leikinomaisista ja toiminnallisista matematiikan harjoituksista, peleistä ja leikeistä. Leikinomaisuudella pyrin madaltamaan lasten koulumatematiikan maailmaan siirtymisen kynnyistä ja aloittamaan matematiikan opiskelun tarpeeksi konkreettisella, toiminnallisella tasolla. Opetuskokeiluni toiminnallisuuden kautta pyrin myös tarjoamaan jokaiselle oppilaalle mahdollisuuden onnistumisen kokemuksiin. Onnistumisen ja osaamisen kokemuksilla on yhteys pienen koululaisen itsetunnon kehittymiseen.

Yksi opetuskokeiluni tavoite oli pyrkiä ennaltaehkäisemään mahdollisia matematiikan oppimisvaikeuksia. Luokanopettajalla on luokassaan nykyisin entistä heterogeenisempi oppilasryhmä, koska erityisopetuksen järjestäminen on kunnille kallista ja sitä on näin ollen karsittu säästösyistä. Erityisopettajista on ainakin kotikaupungissani Kuusamossa pulaa, yksi virka on ollut jo kauan täyttämättä pätevien hakijoiden puutteen vuoksi. Näin ollen lievemmistä oppimisvaikeuksista kärsivät ja erityistä tukea vaativat oppilaat ovat tavallisessa luokassa luokanopettajan opetuksessa. Luokanopettajana haluan tunnistaa ja havaita mahdolliset ongelmat mahdollisimman varhaisessa vaiheessa, jotta voin auttaa oppilasta itse ja tarpeen vaatiessa ohjata oppilaan erityisopetukseen.

1.1 Opetuskokeilun toimintasuunnitelma

Opetuskokeilun varsinaisen toiminnan suunnittelujakso ajoittui kesään 1999. Luin läpi useita alkuopetuksen matematiikanopetuksen opettajanoppaita, aiheesta jo tehtyjä opinnäytetöitä ja muita tutkimuksia, toiminnallisen ja leikinomaisen matematiikan menetelmiä esittelevää kirjallisuutta sekä kävin läpi omat varastoni, jotka koostuvat aikaisempien työvuosien aikana kerätyistä ideoista ja aikaisemmasta lastentarhanopettajankoulutuksesta saamistani materiaaleista. Näiden pohjalta kokosin tutkimustani varten toimintasuunnitelman (liite 1).

Toimintasuunnitelma koostuu opetuskokeiluni eli yhdeksän viikon ajalle tekemistäni viikkosuunnitelmista. Viikkosuunnitelmista näkyvät opetuskokeiluun suunnittelemani matematiikan tavoitteet ja sisällöt sekä työtavat ja menetelmät, joiden avulla ne käydään oppilaiden kanssa luokassani läpi. Toimintasuunnitelman keskeisinä sisältöinä ovat lukukäsite, lukujonotaidot sekä kymmenjärjestelmä. Olen valinnut nämä sisällöt esi- ja alkuopetuksen matematiikan sisällöistä niiden keskeisyyden takia. Ne ovat sellaisia perusasioita, joiden osaaminen on varmistettava alkuopetuksen aikana, sillä niiden puutteellinen hallinta aiheuttaa varmasti oppimisvaikeuksia matematiikassa ylemmillä luokilla. Matematiikan hierarkisen luonteen takia ”kivijalan” on oltava vankka ja tukeva, jottei koko rakennelma hajoaisi myöhemmin vaatimusten kasvaessa.

Suunnitelman tekemisen myötä koko tutkimuksen tekeminen konkretisoitui ja itselleni tuli todellinen tekemisen tunne. Kokeilun pääsisällöt selkiytyivät itselleni hyvin, kun etukäteen pohdin, mitä opetuskokeiluni aikana tulee tapahtumaan. Suunnitelman tekeminen oli kuitenkin melko työlästä. Yhdeksän viikon ajanjakso tuntui liian pitkältä tarkkojen suunnitelmien tekemiseen. Lisäksi samaan aikaan tehtävänä ollut yleinen lukukausisuunnitelma ja ainekohtainen suunnittelu vaati voimia. Koska suunnitelma täytyi tehdä hyvissä ajoin ennen varsinaisen kokeilun alkua, aiheutui ongelmia myös oppilaantuntemuksen ja erityisesti oppilaiden matemaattisten tietojen ja taitojen tuntemuksen puutteista. Koulu työyhteisönä ja kaikki oppilaat olivat minulle uusia tuttavuuksia. Tämä vaikeutti osaltaan suunnitelman tekemistä. Käytin suunnitelmaa tehdessäni hyväkseni aikaisempia kokemuksiani alkuopettajana sekä koulutuksen ja kirjallisuuden tarjoamaa kehityspsykologista tietoa 6 - 8 -vuotiaista lapsista ja erityisesti heidän matemaattisista taidoistaan. Ennakoin oppilaitteni olevan keskimäärin normaalilla tasolla matemaattisissa taidoissaan. Jätin suunnitelman tarkoituksella riittävän väljäksi ja loppua kohden yhä avonaisemmaksi. Muutoksia suunnitelmaan oli odotettavissa ja niitä ilmaantuikin kokeilun kuluessa. Suunnitelmassa mm. oli alunperin mukana lukukäsitteen ja lukujonotaitojen lisäksi kymmenjärjestelmä, joka jäi ajan puutteen takia pois varsinaisesta opetuskokeilusta.

Toimintasuunnitelman tekeminen aloitti opetuskokeilun käytännön osuuden. Suunnitelman tekemisen lisäksi valmistin kesällä paljon erilaista materiaalia kokeiluani varten. Valmistin mm. erilaisia pelejä (muistipelejä, ”Varo, se sulaa!” -pelin, niputuspelejä ja nopapelin), numerokortteja ja niitä vastaavia lukumääräkortteja, suuret lattianumerot, hiekkapaperinumerot tunnustelua varten ja kalenterin luokan seinälle. Valmistamani materiaalin lisäksi opetuskokeilussa käytössäni olivat koululla valmiina olevat materiaalit: kymmenjärjestelmävälineet, multilink -palikat ym. normaaliin alkuopetusmateriaaliin

kuuluvat välineet. Käytännön tekemisen, suunnittelemisen ja materiaalin valmistelun kautta tunsin vihdoon pääseväni toimintatutkimuksen tekemisessä omalle alueelleni: oikeaan käytännön työhön opettajana. Odotin innolla koulun alkamista.

Ensimmäisen luokan oppilaille oli tilattu matematiikan oppikirjoiksi ”Mieti ja laske 1”-kirjat. Kaikki koulun oppilaat opiskelivat matematiikkaa saman kirjasarjan mukaan. Kirja oli minulle uusi tuttavuus, mutta olin kuullut kehuttavan sitä hyväksi ja toiminnalliseksi. Kirja osoittautuikin hyväksi ja toimivaksi lisäksi opetuskokeiluun. Kuitenkin matematiikan kirja ja sen sisältämät tehtävät saivat tavallista pienemmän osan matematiikan tunteista toiminnallisen opetuskokeilun takia. Kirja ei määrännyt opetuksen etenemissuuntaa eikä -vauhtia matematiikan tunteilla. En käyttänyt lainkaan kirjassa etenemisvauhdiksi suunniteltua ”tunti per aukeama” -tahtia. Teimme kirjasta tehtäviä valikoiden, toiminnan kutakin vaihetta tukevia tehtäviä tehden. En jättänyt kirjaa kokonaan pois kokeiluvaiheeseen, esim. kotitehtävät annoin kirjasta. Kirjan osuuden vähentäminen, sen valikoiva ja soveltava käyttäminen oli harkittua. Pyrin kokeilussani tietoisesti irrottautumaan kirjasta ja kyseenalaistamaan sen aseman matematiikan oppituntien rakenteen määrittelijänä.

Opetuskokeiluni avulla pyrin uudistamaan ja tuulettamaan perinteisiä matematiikan opetuksen tapoja. Kirjan aseman kyseenalaistaminen oli yksi tavoitteeni. Toinen samantyyppinen, perinteistä matematiikan opetusta ja sen tapoja horjuttava tavoite oli matematiikan opetuksen työtapojen monipuolistaminen. Perinteisesti matematiikan opetus on ollut opettajajohtoista ja kirjaan sitoutunutta. Monipuoliset työtavat kuten leikki, pelaaminen, keskustelu, pysäkkityöskentely ja yhdessä tekeminen auttoivat irrottautumaan perinteistä ja tuomaan matematiikan tunteille toimintaa ja tekemistä pulpetissa istumisen ja itsenäisesti kirjan tehtävien tekemisen sijasta.

Matematiikan taitojen ja osaamisen arvioinnin monipuolistaminen kuului myös tutkimukseni tavoitteisiin. Matematiikan arvioinnissa on perinteisesti käytetty lähes ainoastaan koetta, joka mittaa oppilaiden matemaattisia taitoja melko rajatulta alueelta. Pyrin monipuolistamaan myös arviointia lisäämällä tilanteita, joissa oppilaiden työskentelyn arviointi mahdollistuu. Tällaisia arvioinnin paikkoja olivat mm. oppilaiden matemaattisen puheen dokumentoiminen sekä pysäkkityöskentely kokeilun lopussa. Käytin opetuskokeilun lopussa myös perinteistä kirjallista matematiikan koetta arvioidakseni oppilaiden selviytymistä mekaanisista laskutehtävistä. Opetuskokeilussa mekaaniset laskutehtävät jäivät vähälle huomiolle ja oppilaiden selviytyminen sellaisista askarruttikin mieltäni kokeilun edetessä. Samoin arveluttavalta tuntui kirjan vähäinen rooli opetuskokeilun aikana. Toisen luokan oppilaat olivat huolestuneita, kun kirjoista jäi sivuja tekemättä. He olivat ensimmäisen luokan aikana tottuneet kirjan valta-asemaan matematiikan tunteilla ja osalle heistä oikea matematiikka merkitsi samaa kuin kirjan tehtävien tekeminen.

1.2 Toimintatutkimus tutkimusmetodina

Opetuskokeiluni oli tutkimusmetodiltaan toimintatutkimus. Toimintatutkimuksen perusajatuksena on käytännönläheisyys. Tiedettä ei tehdä pelkästään yliopistoissa vaan tieteen

tekemisen voi yhdistää käytännön opettajan työhönkin. Toimintatutkimuksessa yhdistyvät tutkijan ja opettajan roolit toisiinsa niin opettajan ammatillisessa tietoisuudessa kuin käytännön toiminnassa luokkahuoneessakin. Toimintatutkimus ei kuitenkaan ole pelkkää arkista toimintaa, vaan se pyrkii sisällyttämään toimintaan uudenlaista ymmärrystä. (Heikkinen & Jyrkämä 1999, 25.)

Toimintatutkimus tutkimusmetodina on prosessiluonteinen ja käytännöllinen. Toimintatutkimus on käsite, joka kuvaa sitä laajaa ja monipuolista kirjavuutta eri toimintatapojen suhteen, joiden avulla tutkitaan, suunnitellaan ja kehitetään toimintaa, opitaan toiminnasta sekä muodostetaan toiminnasta teorioita. Toimintatutkimus on jatkuva oppimisen ja tutkimisen prosessi, jossa tutkija tekee pitkään työtä saman ongelma-alueen ja toimintatilanteen kanssa. Tutkija ei ole ulkopuolinen, vaan kuuluu parhaimmillaan ja aidoimmillaan tiiviisti tutkimaansa yhteisöön, kuten minä opettajana koululuokkaani. Toimintatutkimuksen perusideoita on aluillaan kaikessa siinä työssä, jota opettajat tekevät kehittäessään opetusmenetelmiään ja koulunsa toimintaa. Jotta kyseessä kuitenkin olisi varsinainen toimintatutkimus, prosessin tulee pyrkiä tuottamaan uutta tietoa ja saattaa se julkisesti arvioitavaksi myös muille. (Heikkinen & Jyrkämä 1999, 27, 34, 40.)

Toimintatutkimuksiksi luetaan varsin monenlaisia tutkimuksia. Toimintatutkimuksessa ei ole kysymys suoranaisesti varsinaisesta metodista, vaan kyseessä on väljä tutkimusstrateginen lähestymistapa, joka saa sisältönsä kulloiseltakin kohdealueeltaan (Heikkinen & Jyrkämä 1999, 35). Toimintatutkimuksen luonne määräytyy siitä, kenen lähtökohdista, arvomaailmasta ja eduista lähtien tutkimuksen tavoitteet ja päämäärät muotoillaan (Huttunen & Heikkinen 1999, 19).

On olemassa monenlaisia jaotteluja, joiden mukaan toimintatutkimukset voidaan jakaa erilaisiin suuntauksiin. Toimintatutkimus voi olla interventiosuuntautunut, tutkimussuuntautunut tai toimintasuuntautunut. Toinen toimintatutkimusten jaottelutapa toimii sen mukaan, millaiset tutkimustoimenpiteet tutkimusprosessissa kulloinkin painottuvat. Painotus voi olla eri vaiheissa diagnostisessa, osallistuvassa, empiirisessä tai kokeellisessa tutkimuksessa. Empiirisessä toimintatutkimuksessa tehdään jotakin sekä rekisteröidään, mitä on tehty ja mitä tapahtui. Empiirisessä tutkimuksessa toteutuu useimpien tutkijoiden mielestä aidoimmillaan toimintatutkimuksen idea. (Suojanen 1992, 16 - 18.)

Oma tutkimukseni oli toimintasuuntautunut eli se lähti liikkeelle kohdeyhteisöstä, omasta luokastani, ja sen tavoitteista eli pyrkimyksestä tarjota mahdollisimman onnistunut, yksilöllisesti suunniteltu matematiikan opiskelun alku jokaiselle pienelle koululaiselle ja samalla ennaltaehkäistä mahdollisia matematiikan oppimisvaikeuksia. Toisaalta mukana oli tutkimussuuntautuneen toimintatutkimuksen piirteitä, koska keskeisiä olivat myös tutkijan eli minun omat tavoitteeni, mm. matematiikan opetuksen kehittäminen kokeilemalla erilaisia työtapoja ja rikastamalla sekä monipuolistamalla opetustani.

Oma tutkimukseni oli myös empiirinen toimintatutkimus. Empiirisen toimintatutkimuksen määritelmään opetuskokeilu sopii hyvin. Olen suunnitellut ja toteuttanut opetuskokeilun matematiikan alkuopetukseen. Tämä raportti sisältää opetuskokeilun tapahtumat ja niiden arvioinnin.

Carr & Kemmis (1986, 134 - 136) esittävät kolmijaon, jossa esitellään toimintatutkimuksen tyypit Habermasin tiedonintressiteorian pohjalta. He jakavat toimintatutkimukset teknisiin, praktisiin sekä kasvatuksellisiin tai kriittisiin toimintatutkimuksiin. Tekninen toimintatutkimus pyrkii kehittämään toimintaa tehokkuuden ja materiaalsen tuloksellisuuden näkökulmasta. Praktinen toimintatutkimus pyrkii parantamaan osallistujien ymmärtämystä omasta toiminnastaan sekä toimintansa taustoista ja ehdoista. Kasvatuksellinen tai kriittinen toimintatutkimus pohjautuu emansipatoriseen tiedon intressiin ja pyrkii uudistumaan sekä vapautumaan perinteisistä, itsestään selvinä pidetyistä ajattelutavoista ja ideologioista. Viimeksi mainittu perustuu avoimesti ajatukseen, että toimintatutkimuksen avulla pyritään saavuttamaan jotain vapaampaa ja parempaa toimintaa kuin entinen.

Oma tutkimukseni sijoittunee praktisen ja kasvatuksellisen toimintatutkimuksen välimaastoon. Tutkimukseni kasvatuksellisenä tavoitteena oli tarjota oppilailteni mahdollisuus oppia matematiikkaa toimimalla, tekemällä ja kokeilemalla itse. Yleisenä tavoitteena oli alkuopetuksen matematiikan opetuksen kehittäminen, opetusmenetelmien ja työtapojen monipuolistaminen sekä niiden muuttaminen toiminnallisemmiksi. Praktiseksi toimintatutkimukseni teki se, että pyrin reflektoinnin kautta ymmärtämään ja kehittämään entistä paremmin omaa opettajuuttani. Pyrin opetuskokeiluni myötä kehittämään entistä paremmaksi matematiikan opettajaksi.

Toimintatutkimukset voidaan jakaa kahteen pääsuuntaan tutkimuksen päämäärän mukaan. Jos painotus on osallistujien kouluttamisessa itseään ja toimintaansa kriittisesti arvioiviksi toimijoiksi, puhutaan koulutuspainotteisesta tutkimuksesta. Toisena pääsuuntauksena pidetään hankepainotteista tutkimusta, jossa tärkeintä on tutkimuskohteen kehittäminen tarkoitustaan paremmin vastaavaksi tai jonkin epätyytyttävän organisaation ollessa kyseessä sen kehittäminen paremmin toimivaksi. (Suojanen 1992, 16 - 18.)

Oma tutkimukseni oli osaltaan molempia. Tutkimukseni tavoitteena oli osaltaan kehittää alkuopetuksen matematiikan opetusta toiminnalliseen, monipuolisempaan suuntaan (hankepainotteisuus) ja osaltaan myös opettaa osalliset, itseni ja oppilaani, arvioimaan omaa toimintaansa ja oppimaansa (koulutuspainotteisuus). Mielestäni kaikki opettajan omassa luokassaan toteuttamat toimintatutkimukset ovat luonteeltaan koulutuspainotteisia, onhan kysymyksessä joka tapauksessa koulussa tapahtuva oppiminen. Hankepainotteisuus tulee mielestäni selkeämmin esille esim. opetussuunnitelmatyöhön liittyvissä toimintatutkimuksissa.

Toimintatutkimuksen määritelmistä nousee esiin toimintatutkimuksen kaksinaisuusluonne: toisaalta tarkoituksena on tuoda esille uutta tietoa toiminnasta ja toisaalta samalla kehittää itse toimintaa. Painotus voi vaihdella em. asioiden välillä. Omassa tutkimuksessani pyrin erityisesti kehittämään omaa toimintaani opettajana sekä matematiikan alkuopetuksen opetusta yleensä.

Toimintatutkimusta on käytetty paljon opetussuunnitelmien kehittämisessä ja erilaisissa opetuskokeiluissa. Toimintatutkimuksen ideaalina tavoitteena voidaan pitää pyrkimystä entistä parempaan toimintaan (Eskola & Suoranta 1998, 129). Toimintatutkimuksen päämääriä ovat mm. muutosten aikaansaaminen toiminnassa sekä näiden muutosten tutkiminen. Toimintatutkimusprosessin ominaisuuksia yleisesti sekä myös omassa tutkimuk-

sessani ovat kasvatuksellisuus, tilannesidonnaisuus, tulevaisuuteen suuntautuneisuus ja pyrkimys toiminnan kehittämiseen. Vaikka oma tutkimukseni olikin sidoksissa juuri näihin oppilaisiin, tulee tutkimuksen tuloksista varmasti olemaan hyötyä myös tulevaisuudessa, tulevillekin oppilaileni ja ennen kaikkea omalle opettajana kasvamiselleni. Toimintatutkimuksen määritelmistä esiin nousevat peruskäsitteet ovat reflektiivisyys, tutkimuksen käytännölläisyys, muutosinterventio ja ihmisten (kohdeyhteisön) osallistuminen tutkimukseen eri tavoin. Toimintatutkimus muodostaa syklin tapaan etenevän prosessin, jossa toiminta, sen tutkimus ja arviointi ovat kiinteässä yhteydessä toisiinsa. (Heikkinen & Jyrkämä 1999, 33.)

Omassa tutkimuksessani halusin muuttaa matematiikan opetustani yhä monipuolisemmaksi, toiminnallisemmaksi ja lapsilähtöisemmäksi, lyhyesti sanottuna siis entistä paremmaksi. Halusin painottaa opetustani enemmän toiminnallisuuteen ja tekemiseen sekä päästä irrottautumaan oppikirjasta. Oman opettajuuteni kehittäminen ja opetukseni monipuolistaminen oli yksi tärkeistä tavoitteistani koko tutkimukselle.

1.2.1 Opettaja työnsä tutkijana

Toimintatutkimusta käytetään paljon kasvatustieteessä. Opettajan ammattitaitoon katsotaan nykyisen ammatillisen itsenäisyyden ja vapauden lisääntymisen myötä kuuluvan valmiuksia oman työn tutkimiseen sekä oman toiminnan pohtimiseen ja myös toiminnan muuttamiseen ja uusiutumiseen. Opettajalta vaaditaan myös toimintatutkimuksen teorian tuntemusta. Toimintatutkimukseen sisältyy ajatus siitä, että opettajaksi kasvaminen jatkuu koko uran ajan ja että opettajankoulutus antaa ainoastaan edellytykset sitoutua jatkuvaan ammatilliseen kasvuun. Opettajan ammatillinen kasvu on monimutkainen, pitkäkestoinen ja yksilöllinen prosessi. Kasvu on henkilökohtaista ja omaan kokemukseen perustuvaa. Merkityksellinen tieto kehittyy yksilölle prosessinomaisesti. Toimintatutkimus auttaa henkilökohtaisesti merkityksellisen tiedon löytymisessä. Oma toimintatutkimusta tehdessäni pääsin juuri tällaisen, minulle itselleni merkityksellisen tiedon jäljille. (Syrjälä 1994, 25, 35 - 36.)

Heikkisen & Jyrkämän (1999, 27 - 28) mukaan tyypillinen toimintatutkimuksen tekijä on opettaja, joka haluaa kehittää työtään. Esimerkiksi opettaja työnsä tutkijana, ”Teacher as Researcher”, on kuulunut jo 70-luvulta mukaan osana toimintatutkimusta. Tuolloin pyrittiin kehittämään toimintatutkimusta siten, että opettajat itse alkaisivat tutkia ja kehittää omaa työtään. Opettaja työnsä tutkijana -ajatus levisi Englannista 1960 -luvun loppupuolella niin laajalle eri maihin, että siitä voidaan puhua liikkeenä. Liikkeen syntyyn oli ns. sosiaalinen tilaus: pohdittiin kriittisesti kasvatuskäytäntöjä ja koulun uudistamista. Myös opettajan ammatin professionalistuminen sekä opettajan vastuu- ja vapauskysymykset vaikuttivat liikkeen syntyyn. Opettajan ammattitaitoon katsottiin jo tuolloin sisältyvän jonkinlainen oman työn kriittinen analysointi tieteellisin perustein. Liikkeen eräs periaate on, että kirjatieoa eli teoriaa voi kyllä käyttää hyväksi, mutta opettajan todellinen uudistuminen voi tapahtua vain omakohtaisen tutkimuksen ja pohdiskelun kautta. (Lahdes 1989, 468 - 471.)

Toiset tutkijat käyttäisivät mieluummin opettajan omassa luokassaan tekemästä toimintatutkimuksesta nimeä luokkahuonetutkimus. Näin sen takia, että opettajan omassa luokassaan tekemät tutkimukset eivät aina johda toiminnan uudistamiseen tai muuttamiseen, kuten toimintatutkimuksessa yleensä tapahtuu. Opettajan omassa luokassaan tekemälle tutkimukselle on asetettu seuraavia teesejä, jotka myös omassa opetuskokeilussani toteutuivat kaikki. Tutkimus ei saa häiritä koulun opetussuunnitelman toteutumista eli toiminnan on nivouduttava koulun normaaliin toimintaan. Opetuskokeiluni lomittui sisällöllisesti ja tavoitteellisesti alkuopetuksen normaaliin matematiikan opetussuunnitelmaan. Aineiston keruu ei saa olla liian paljon aikaa vievää, jotta opettaja onnistuu yhdistämään tutkijan ja opettajan roolit. Tutkimusmenetelmien tulee olla luotettavia, kuten kaikessa tieteellisessä tutkimustoiminnassa. Toiminnan havainnointi ja dokumentoiminen (päiväkirja, valokuvaaminen ja videointi) sisältyivät tutkimuksessani jokapäiväiseen koulutyöskentelyyn. Dokumentoinnissa käytin myös kouluavustajaa apuna. Toimintatutkimuksen tulee täyttää tietyt eettisyyden vaatimukset, kuten toiminnan avoimuus ja luottamuksellisuus. Pyysin kokeiluani varten luvat sekä koulun johtajalta että lasten vanhemmilta. Tutkimuksen avulla saavutetun tiedon tulee olla julkista. Tämä raportti tekee opetuskokeilustani ja sen tuloksista julkiset. (Hopkins 1985, 77 - 80.)

Toiminnan dokumentoiminen ja tiedon kerääminen toiminnasta kuuluu oleellisena osana toimintatutkimukseen. Toimintatutkimus metodina ei etukäteen määrittele, millä tavalla tietoa pitäisi kerätä. Näin ollen on mahdollista kerätä tietoa monella eri tavalla ja monesta eri näkökulmasta. Tutkimuksen luotettavuudelle tiedon monipuolisilla keräämistavoilla on ratkaiseva merkitys. Systemaattinen havainnointi on se vaihe toimintatutkimuksessa, joka erottaa sen selvimmin käytännön työtoiminnasta. Dokumentoimiseen tulee käyttää mahdollisimman monipuolisia menetelmiä. Suojanen (1992, 59 - 60) pitää jonkinlaisen päiväkirjan kirjoittamista tai esim. äänittämistä välttämättömänä toimintatutkimuksessa. Tapahtumien arviointi jälkikäteen mahdollistuu videointia tai nauhoitusta käyttämällä.

Omassa tutkimuksessani pidin koko kokeilun ajan päiväkirjaa. Keräsin päiväkirjaan havaintoja oppilaiden työskentelystä, oppilaiden keskusteluista keskenään ja minun kanssani, omia tuntemuksiani ja reaktioitani sekä tapahtumien reflektointia ja mahdollisia selityksiä tapahtumille. Lisäksi päiväkirjaan sisältyi toimintasuunnitelmani ja ennen kaikkea toteutunut toiminta. Omassa tutkimuksessani videoin oppilaiden toimintaa 1½ tunnin ajan. Otin myös useamman filmirullan verran valokuvia toiminnasta. En käyttänyt valokuvia raportissani oppilaiden tunnistamissyistä. Oppilaiden nimet on myös muutettu. Näin sen takia, koska lupasin oppilaiden vanhemmille pitää lasten henkilöllisyyden salassa myös raportoidessani tutkimusta. Molempipuolisen luottamuksen säilyttäminen on minulle tärkeää niin opettajana kuin tutkijakin.

Opettajalla on mielestäni tutkijana erinomaiset lähtökohdat: hän on lapsille auktoriteetti, mutta silti tuttu ja turvallinen aikuinen. Tutulla, lapsen jokapäiväiseen maailmaan jo kuuluvalla tutkijalla on ulkopuolista tutkijaa paremmat mahdollisuudet saada aidointa tietoa lapsesta. Jos tutkijalla ei ole kokemusta lapsista tai hänen suhtautumisensa on liian autoritaarista tai ulkopuolista, voi hänen olla vaikea päästä hyvään vuorovaikutukseen lapsen kanssa. Lapsi on aito ja koska tutkija tuskin on passiivinen, neutraali, vaikuttaa tutkija itsekin myös osaltaan lapseen. (Munter 1993, 242 - 246.)

Omassa luokassa toimintatutkimusta tehdessään opettaja on samanaikaisesti sekä opettaja että tutkija. Kumpaakaan roolia ei sovi unohtaa: opettajana olen koko ajan vastuussa oppilaistani enkä voi jäädä seurailemaan tapahtumia, keskustelemaan jonkin yksittäisen oppilaan kanssa tai kirjoittelemaan päiväkirjaani. Minun on koko ajan oltava selvillä siitä, mitä luokassa tapahtuu. Toisaalta omassa luokassa tapahtuva tutkimus on helppoa, koska oppilaiden ja opettajan välillä vallitsee luottamus ja oppilaiden maailma avautuu omalle opettajalle selkeämmin kuin vieraalle tutkijalle. (Syrjälä 1994, 42 - 44.)

1.2.2 Reflektiivinen ajattelu toimintatutkimuksessa

Toimintatutkimus on itsereflektiivinen tutkimustapa. Tutkimus kohdistuu tutkijan omaan toimintaan ja sen kehittämiseen, näin minullakin. Omien toimintatapojen tunnistaminen vaatii refleктоivan ajattelun kehittymistä. Reflektiivinen ajattelu tarkoittaa sitä, että ajatteleva subjekti kääntää ajattelunsa itseensä. Reflektoidessaan ihminen tarkastelee omaa itseään tajuavana ja kokevana olentona. Tällä tavalla ihminen voi tarkastella omia ajatussisältöjään ja kokemuksiaan uudesta näkökulmasta, ikään kuin ylimääräisellä silmällä tai ulkopuolelta käsin. Ihminen pyrkii reflektoidessaan ymmärtämään, miksi ajattelee niin kuin ajattelee ja miksi toimii niin kuin toimii. (Heikkinen & Jyrkämä 1999, 32 - 36.)

Pidin koko opetuskokeilun ajan päiväkirjaa, jossa pyrin tapahtumien kuvailemisen ohella refleктоimaan omaa ja oppilaiden toimintaa. Reflektioni ei ollut helppoa. Suurin osa päiväkirjan tekstistä pelkästään kuvailee toimintaa eikä tavallaan pääse tapahtumien taakse. Reflektioni vaatii harjoittelua. Huomasin refleктоivan osuuden lisääntyneen päiväkirjassani kokeilun edetessä. Alkuvaiheessa oppitunneiden kuvaus saattoi olla ainoastaan kuvailevaa tekstiä: kuka teki ja mitä. Tutkimuksen edetessä pohdin päiväkirjassani enemmän tapahtumien syitä ja taustoja: miksi joku teki juuri niin kuin teki. Reflektionitaitoni kehittyivät kokeilun myötä.

Kiviniemi (1999, 64) kuvaa toimintatutkimuksen reflektionitavoitetta mielestäni erittäin osuvasti seuraavalla tavalla: ”Toimintatutkimuksen tavoitteena on osaltaan käyttäteoreettisen ajattelun tietoinen reflektioni, joka nivoutuu samalla kiinteästi arkipäivän työkäytäntöjen kehittämiseen.” Käyttäteoria on hyvä termi kuvaamaan sitä teoreettisen tiedon ja käytännön kokemuksen yhteensulauttavaa perusajatusta, jonka varassa kukin opettaja työssään toimii. Oman opetuksen kehittäminen teoriaa ja käytäntöä yhdistäen sopii erinomaisesti esimerkiksi opettajien toteuttamasta toimintatutkimuksesta (Eskola & Suoranta 1998, 131).

Reflektion -käsitteen taustalla on Deweyn ajattelu, jonka mukaan ihmisen toiminta voidaan jakaa kahteen perustyyppiin: rutiininomaiseen toimintaan ja ajateltuun eli reflektiiviseen toimintaan (Syrjälä 1994, 37). Reflektion tasoista ja kohteista on esitetty erilaisia jaotteluja. Toimintatutkimuksessa on oleellista, että reflektioni kohdistuu kaikkiin toiminnan vaiheisiin ja että reflektionia tarvitaan koko prosessin ajan. Näin ollen reflektionia voidaan pitää meta-ajatteluna eli ajatteluna, jossa tutkimme ajatustemme ja toimintamme vuorovaikutusta (Suojanen 1992, 27).

Reflektion tasoja on kolme: tekninen, tulkinnallinen ja kriittinen taso. Teknisellä, alimmalla, tasolla reflektiivisyys merkitsee joustavaa tapaa toimia luokassa, oppia kokemuksista ja ajatella sekä intuitiivisesti että radikaalisesti. Keskeistä on riittävä kasvatustieteellinen osaaminen ja soveltaminen käytäntöön. Tulkinnallisella tasolla opettaja tutkii toimintaansa aikaisempien kokemustensa ja oman arvojärjestelmänsä pohjalta. Hän tutkii omia pelkojaan, toiveitaan ja tunteitaan kyetäkseen arvioimaan omaa toimintaansa ja laajemmin koko koulua ja sen sosiaalisia yhteisöjä. Tällainen syvälinen pohdinta auttaa selkiyttämään erilaisten tilanteiden ja tapahtumien henkilökohtaista merkitystä sekä auttaa muuttamaan opittuja tapojaan reagoida tietyissä tilanteissa. Katson itse päässeeni tälle tasolle, joten kriittiseen reflektointiin on vielä matkaa. Onnistuneen reflektoinnin taustalla on usein tutkijan itsensä lisäksi ulkopuolisia henkilöitä, jotka tarjoavat uusia näkökulmia. Parhaimmillaan reflektio on ryhmässä tapahtuvaa ongelmanratkaisua. Kolmannella, kriittisen reflektion tasolla edetään yhä syvemmälle. Kriittisellä tasolla kyseenalaistetaan opetus ja ympäröivä kouluyhteisö. Kysymyksessä on ajatteluun painottuva arviointi. Konkreettiset tilanteet eivät enää ole keskustelun taustalla, vaan niihin on pystyttävä ottamaan etäisyyttä. (Syrjälä 1994, 38 - 37; Suojanen 1992, 27 - 28, 30 - 31.)

1.2.3 Toimintatutkimuksen spiraalimalli

Toimintatutkimus on avoin ja joustava prosessi, jonka aikana pyritään parantamaan toiminnan laatua. Käytännössä toimintatutkimus etenee vaiheittaisena prosessina. Prosessia on kirjallisuudessa kuvattu syklisen muodostamana kehänä tai spiraalina. Kirjallisuudessa (mm. Kiviniemi 1999, 67; Heikkinen & Jyrkämä 1999, 37; Syrjälä 1994, 40; Suojanen 1992, 42 - 43, 45) esitettyjen kuvioiden ja niiden sisältämien tarkasti kuvattujen vaiheiden järjestelmällisen toteuttamisen kautta eteneminen lienee todellisessa toimintatutkimuksessa melko mahdotonta. Myös vaiheiden järjestyksestä ja sisällöistä on kiistelty ja jokainen lähde kertoo asiasta oman, hiukan muista poikkeavan kantansa.

Toimintatutkimuksen spiraalimallia on myös kritisoitu. Heikkinen & Jyrkämä (1999, 37 - 38) arvostelevat spiraalia kaavamaisuudesta ja jopa kahlitsevuudesta. Tutkijalle voi käydä niin, että hän yrittää edetä mallin mukaisesti ja erottaa vaiheet toisistaan, mikä aiheuttaa ahdistusta epäonnistuessaan. Ja epäonnistuminen on lähes varmaa, sillä vaiheiden erottelu ei todellisuudessa liene mahdollistakaan. Voi käydä niin, että tutkija jää tavallaan spiraalin vangiksi, eikä pääse työssään eteen eikä taakse, koska kokee toimivansa metodisesti väärin joutumalla rikkomaan spiraalin eri vaiheita. Spiraalin syklisen vaiheiden korostaminen johtaa pahimmassa tapauksessa siihen, että tutkija unohtaa mitä oli tekemässä ja varsinkin käytännön toiminnan kehittäminen jää tekemättä.

Toimintatutkimuksen perusolettamus on, että oppiminen on kokemuksellinen, reflektioiva ja jatkuva prosessi. Toimintatutkimukseen liittyy käsitys toiminnan vähittäisestä ja usean vaiheen kautta tapahtuvasta kehittymisestä. Eli palaan taas spiraaliin. Spiraaliin sisältyvät menneisyys (menneiden tapahtumien pohtiminen) ja tulevaisuus (tulevan toiminnan suunnittelu ja toteutus). Toimintatutkimuksen toiminnan kehittämiseksi on ominaista jatkuvuus. Ensimmäisen toteutusvaiheen tulisi olla alkusysäys jatkuvalla kehitystyöllä ja toimintakäytäntöjen muutosideoille. Tutkimus ei tavallaan pääty, vaan kun toimintaa on

muutettu johonkin suuntaan, pysähdytään pohtimaan jatkoa ja mahdollista uutta suuntaa muutokselle. On jopa sanottu, että jos tutkimuksen toteutus jää ensimmäiseen suunnitteluun, toiminnan, havainnoinnin ja reflektion sykliin, kysymyksessä ei oikeastaan olekaan toimintatutkimus, koska kehittämistyö jää kesken. (Kiviniemi 1999, 66 - 67.)

Toimintatutkimukset voivat olla hyvinkin erilaisia. Prosessikuvauksia löytyy kirjallisuudesta yhtä paljon kuin määritelmiäkin ja kaikki ne ovat erilaisia, riippuen tutkijan näkökulmasta ja tutkimuskohteen luonteesta. Useimmille kuvauksille on yhteistä em. prosessin syklisen luonteen korostaminen. Yleensä liikkeelle on lähdetty jostain yleisluontoisesta ideasta, jota on alettu analysoida ja siitä on hankittu monipuolista tietoa. Seuraavaksi on muodostettu avainkäsitteitä, joiden pohjalta itse toiminta on suunniteltu. Suunnitelma saa olla väljä ja joustava, koska usein toimintatutkimuksen alussa ei itse tutkimustehtävään ole selkeästi hahmottunut. (Heikkinen & Jyrkämä 1999, 38.)

Omassa opetuskokeilussani lähdin liikkeelle minua kiinnostavasta oppiaineesta, matematiikasta. Matematiikan laajasta sisällöstä valitsin tarkemmaksi aiheeksi alkuopetuksen matematiikan ja erityisesti opetuksen kehittämisen ja monipuolistamisen. Tieto työpaikasta alkuopettajana vahvisti tutkimuksen sisällöksi kiinteästi käytännön työhön kytkeytyvän opetuskokeilun. Avainkäsitteiksi muodostuivat näin ollen alkuopetus, matematiikka, toiminnallisuus, konstruktivistinen oppimiskäsitys, lukukäsite sekä lukujonotaidot. Näiden avainkäsitteiden pohjalta rakensin toimintasuunnitelman opetuskokeiluani varten. Toimintasuunnitelma konkretisoi tutkimuksen. Suunnitelmani oli väljä, koska sisältöjen täydennyksiä ja karsimista oli odotettavissa. Itse toiminta, suunnitelman toteuttaminen käytännössä, oli olennaisin osa toimintatutkimukseni syklistä spiraalia. Oman tutkimukseni toimintajakson muodosti yhdeksän viikon mittainen opetuskokeilu. Opetuskokeilu alkoi konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisesti oppilaiden tietoihin ja taitoihin tutustumisella. Menetelminä tässä käytin alkumittausta sekä havainnointia. Toimintatutkimukseni alkoi suunnitelmasta ja sen tekemisestä, eteni suunnitelman käytännöllisen toteuttamisen kautta suunnitelman sekä erityisesti tapahtuneen toiminnan arviointiin.

2 OPETUSKOKEILUN TEORIAPERUSTA

Kiinnostuin matematiikasta ja erityisesti matematiikan opetuksen sekä opetusmenetelmien kehittämisestä luokanopettajakoulutuksen matematiikan opintojen myötä. Monimuotoiset matematiikan opetuksen työtavat ja erityisesti toiminnallinen matematiikka, matematiikan tekeminen, innostivat minua kokeilemaan niitä käytännössä. Idea matematiikan opetuskokeilun sisällyttämisestä opinnäytetyöhöni kypsyi keväällä 1999.

Opetuskokeiluni perustui avoimeen käsitykseen matematiikasta ja sen luonteesta. Oppimiskäsitykseni on konstruktivistinen ja konstruktivismi luo perustan koko tutkimukselleni. Piaget'n teoria antaa tietoa lapsen kehityspsykologiasta ja erityisesti minua kiinnostivat hänen ajatuksensa lapsen matemaattisesta kehittämisestä. Galperinin teoria ulkoisen materiaalin tarpeellisuudesta matematiikan oppimisessa tukee osaltaan Piaget'n teoriaa ja antaa perustelut toimintamateriaalin käyttämiselle tutkimuksessani.

Opetuskokeilussani olen pyrkinyt tuomaan oman luokkani oppilaille edes osan siitä ilosta, jonka itselleni matematiikasta luokanopettajakoulutuksessa kokeillessani ja toimiessani sain. Suurin oppimiskokemukseni lienee ollut se, että matematiikka ja matematiikan tekeminen on sekä hauskaa että kiehtovaa. Vaikka matematiikan olemukseen kuuluvat abstraktit käsitteet, ne voidaan asettaa vastaamaan todellisuuden eri elementtejä ja niiden suhteita. Matematiikan oppimisessa onkin olennaista käsitteiden ja todellisuuden vastaavuuden ymmärtäminen (Leino 1992, 42).

2.1 Mitä matematiikka on?

Matematiikkaa on kaikessa - kaikessa, minkä ihminen on tehnyt ja kaikessa, mitä ihminen ei ole tehnyt. Matematiikkaa on kulttuurissa ja luonnossa. Yksinkertaisesti kaikella mikä on olemassa, on määrä ja muoto. Määrä ja muoto ovat kaksi matematiikan olennaista komponenttia. Matematiikkaa on paitsi ympärillämme, niin myös meissä itsessämme.

Matematiikka on ollut jo kauan ihmisille kiinnostuksen kohde. Matematiikka tunnustetaan tieteen ja tekniikan perustaksi. Matematiikka palvelee luonnontieteiden lisäksi muita tieteitä ja myös taiteita ja taitoja. (Malaty 1997, 53 - 54.)

On olemassa kolme erilaista ajatusmallia siitä, mitä matematiikka luonteeltaan on. Instrumentaalisisessa näkemyksessä matematiikka on kuin työkalupakki, joka koostuu faktoista, säännöistä ja taidoista, joita ammattilainen käyttää saavuttaakseen jonkin päämäärän. Platonistisessa näkemyksessä matematiikka on johdonmukainen, staattinen, valmis kokonaisuus, jonka pitää koossa logiikka. Oma käsitykseni matematiikasta ennen luokanopettajakoulutusta asettui johonkin kahden em. käsityksen välimaastoon. Pekka Saraveden innostavan koulutusjakson jälkeen asenteeni ja käsitykseni matematiikasta muuttuivat avoimempaan suuntaan. Aloin lähestyä ongelmanratkaisuun pohjautuvaa näkemystä matematiikasta. Ongelmanratkaisunäkemyksessä matematiikka on dynaaminen, uusien ongelmien eteenpäin johdattama, inhimillinen luomus. Se ei ole valmis järjestelmä, vaan avoin korjauksille ja laajennuksille. (Lindgren 1998, 308, 313.)

Opettajan omaksuma käsitys matematiikan luonteesta vaikuttaa hänen matematiikan opetukseensa. Rohkeasti erilaisia kokeiluja, oppilaiden aktivoimista ja osallistumisen mahdollisuutta toteuttava opettaja johdattaa oppilaansa kohti avointa näkemystä matematiikan luonteesta. Minä haluan olla tällainen rohkea matematiikan opettaja.

2.2 Matematiikan opetus

Matematiikkaa opetetaan peruskoulussa kaikille pakollisena aineena. Miksi näin on? Kysymys saattaa kuulostaa oudolta, sillä matematiikan asemaa oppiaineiden joukossa ei juuri ole asetettu kyseenalaiseksi. Viime vuosikymmenellä tietokoneiden ja laskentavälineiden huikea kehitys kuitenkin horjutti matematiikan asemaa ja herätti kyseenalaistamaan sen aseman.

Matematiikan kuulumista peruskoulun opetussuunnitelmaan perustellaan mm. seuraavalla tavalla. Matematiikka on hyödyllistä monin tavoin. Hyöty voidaan nähdä tieteellisen kehityksen ja teknologian perustana tai yksilön kannalta laskennallisina taitoina, joita jokainen ihminen käyttää. Matematiikan hyödyllisyys perustuu siihen, että se on tehokas ja selkeä kommunikoinnin väline. Matematiikka on merkityksellistä ja hyödyllistä monille muille tieteellisen toiminnan ja yhteiskunnan aloille. Matematiikkaa käytetään mm. lääketieteessä, biologiassa, maantieteessä, kaupallisilla aloilla, teollisuudessa ja teknologiassa. Laskinten ja tietokoneiden käyttömahdollisuus ei vähennä matematiikan ymmärtämisen tarvetta yksilön kannalta. Matematiikka kehittää loogista ajattelua, tarkkuutta ja avaruudellista hahmottamista. Mekaanisten tehtävien suorittamisella tuskin saavutetaan ajattelutaitojen kehittymistä, joten tämä perustelu riippuu paljolti opetusmenetelmistä ja työtavoista eli loppujen lopuksi opettajasta. (Kupari 1993b, 115 - 116.)

Opettajalla on hyvin suuri merkitys matematiikan opetuksessa. Opettaja luo ja muokkaa osaltaan koulunsa matematiikan opetussuunnitelmaa. Opettaja valitsee sisällöt, työtavat

ja oppimateriaalit joita hänen luokassaan käytetään. Opettajan merkitys on suuri myös oppilaiden matematiikkaa koskevien asenteiden ja mielikuvien muovaajana.

2.2.1 Kritiikkiä perinteiselle matematiikan opetukselle

Perinteisen matematiikan opetuksen voi sanoa nojautuvan sekä behavioristiseen oppimiskäsitykseen että staattiseen tiedonkäsitykseen. Näihin periaatteisiin perustuvassa opetuksessa ei ole kiinnitetty huomiota siihen, miten oppilas hankkii ja omaksuu tietoa. Oppilas on nähty passiivisena objektina, opetuksen kohteena, jolle oppiminen on ymmärtämisen sijasta asian ulkoa muistamista. (Haapasalo 1993b, 269.)

Matematiikan opetus on perinteisesti ollut opettajajohtoista ja oppikirjaa painottavaa. Opetuksessa on tähdätty osataitojen harjoitteluun, joihin myöhemmin opittavat taidot perustuvat. Perinteistä opetusta on moitittu liiasta teknisestä rutiinikeskeisyydestä, jolloin ymmärtäminen on jäänyt puutteelliseksi. Koulussa ei ole opittu ratkaisuvaihtoehtojen joustavaa pohdintaa tai matemaattisen tiedon soveltamista ”oikeassa” elämässä. (Kinnunen & Vauras 1998, 272 - 273.)

Perinteisesti toteutetulla matematiikan opetuksella ei ole saavutettu opetukselle asetettuja tavoitteita. Oppilaat oppivat suuren määrän merkitsemistöpoja, laskuoperaatioita ja algoritmeja sekä näiden muistitueksi kehiteltyjä kaavoja, mutta niiden perimmäinen tarkoitus ja ymmärtäminen jää puutteelliseksi. Oppilaat eivät opi ajattelemaan matemaattisia ongelmia ja niiden ratkaisuvaihtoehtoja joustavasti ja strategisesti. Myöskään matemaattisen tiedon soveltaminen ei onnistu. (Kinnunen & Vauras 1998, 273.)

Matemaattisia käsitteitä ja sääntöjä ymmärretään puutteellisesti. Peruskoulun oppilailla on erityisiä vaikeuksia keskeisissä geometrian ja aritmetiikan käsitteiden ymmärtämisessä. Käsitteiden ymmärtäminen on pinnallista eivätkä oppilaat ymmärrä saman käsitteen eri esitysmuotojen yhteyttä toisiinsa (esim. murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin käsitteet). Työtavat ovat usein opettajakeskeisiä ja yksipuolisia. Opettajat ovat hyvin tiukasti sidoksissa oppikirjan käyttöön. Oppilaiden sekä opettajien mielestä eniten käytettyjä työtapoja matematiikan tunneilla ovat opettajajohtoinen opetus ja oppikirjan tehtävien laskeminen yksin. Keskustelu on matematiikan tunneilla vähäistä. Matematiikan konstruktivistinen opettaminen ei ole mahdollista, mikäli opettaja opettaa ensin teorian ja sitten sitä sovelletaan käytäntöön oppikirjan tehtävissä. Tämä johtaa matemaattisen tietojen ja taitoaineiden ulkoa opetteluun. Mekaanisten laskutaitojen harjoittamista pidetään usein ensisijaisena tavoitteena ongelmanratkaisu- ja soveltamistaidon kustannuksella. Ongelmanratkaisu nähdään erillisenä osa-alueena, eikä sitä yhdistetä uuden opettamiseen. Opettajien ja oppilaiden uskomukset matematiikasta ovat yksipuolisia. Tyypillisiä uskomuksia ovat mm. seuraavat: kaikkiin matemaattisiin ongelmiin on olemassa vain yksi oikea vastaus, kaikki matematiikan tehtävät voidaan ratkaista muutamassa minuutissa, matematiikkaa opitaan vain jäljittelemällä ja muistamalla, ongelmanratkaisu ja soveltaminen tulevat esille vasta perustaitojen opettelemisen jälkeen. Myös oppimisen arvioinnissa on selviä puutteita. Runsaasti algoritmitehtäviä sisältävät kokeet eivät mittaa sitä, miten oppilas on asian ymmärtänyt. Matematiikan oppimisen arvioinnissa painopiste on perin-

teisesti ollut perustaitojen testaamisessa. Oppilaiden asenteet matematiikkaa kohtaan muuttuvat sitä kielteisemmiksi, mitä ylemmälle luokkatasolle mennään. Koulumatematiikasta pidetään peruskoulun alussa, mutta innostus laskee pian. Kuudesluokkalaisista melkein puolet piti matematiikkaa vastenmielisenä oppiaineena. Koulumatematiikka on katsottu aiheuttavan matematiikkapelkoja ja monille oppilaille jopa elinikäisen trauman. (Kaasila 1997, 6 - 14.)

2.2.2 Oppikirjan asema matematiikan opetuksessa

Oppikirja on perinteisesti ollut keskeisessä asemassa matematiikan opetuksessa. Alunperin opetusta helpottamaan syntyneen oppikirjan voidaan sanoa jopa hallitsevan toimintaa matematiikan tunneilla. Kirja ohjaa oppitunnin kulkua, oppilaiden ajankäyttöä ja läksyjen tekemistä. Koska kirja on näin keskeinen, on se käytännössä noussut opetussuunnitelman asemaan. Lähes jokainen opettaja käyttää matematiikan opetuksessaan kirjaa. Nykyiset matematiikan oppikirjat etenevät saman rakenteen mukaan: tunti ja aukeama -periaate, valmiiksi osoitetut kotitehtävät ja lisätehtävät löytyvät pääsääntöisesti kaikista matematiikan oppikirjoista. Oppikirjan on helppo antaa kantaa vastuu matematiikan tuntien sisällöistä, jokainen opettaja pystyy siihen. (Vaahtokari & Vähäpassi 1998, 214 -215.)

Oppikirjoissa tieto esitetään yksinkertaisena, pelkistettynä ja sellaisenaan opittavaksi ja mieleenpainettavaksi tarkoitettuna muodossa. Tiedon omatoiminen hankinta ja tiedon tarkoitus jäävät sivuseikoiksi. Pyrkimyksenä on osaltaan koko ikäluokan yhdenvertaisten tulosten saavuttaminen. (Koponen 1995, 22.)

Matematiikan oppikirja ei ole sama asia kuin matematiikan opetussuunnitelma. Kuitenkin kirjalla on suomalaisessa matematiikanopetuksessa niin vankka asema, että siitä on käytännössä tullut opetussuunnitelmaa vastaava asiakirja. Koska oppikirja ohjaa toimintaa niin paljon, tulee kiinnittää huomio siihen mitä kirjat sisältävät. Opettajan tulisi pystyä mm. karsimaan sisältöjä ja tekemään painotuksia omassa opetuksessaan. Ilman kirjaakin voi opettaa matematiikkaa. Opettajan tulisi ohjata oppilasta kirjan ulkopuolelle tutkimaan ja kokeilemaan itse matematiikkaa. (Vaahtokari & Vähäpassi 1998, 239.)

Opettajan voi olla vaikeaa irtautua oppikirjasta. Kynä-paperi -työskentely on vaarallisen helppoa ja houkuttelevaa. Tehtävien tekeminen kirjaan koetaan usein ns. oikeaksi matematiikaksi. Kuitenkin erityisesti alkuopetuksessa matematiikan opetuksen on oltava muutakin kuin kirjan tehtävien tekemistä. Liian varhainen symbolitasolle siirtyminen aiheuttaa usein puutteita keskeisten käsitteiden ymmärtämisessä, mistä taas seuraa oppimisvaikeuksia. Matemaattisten valmiuksien ja käsitteiden omaksuminen on paljon oleellisempaa kuin kauniiden numeroiden ja kuvioiden piirtäminen. Oppikirjan ja toimintamateriaalin käytön suunnittelu on tärkeää. Keskittyminen olennaiseen ja konkreettisen materiaalin käyttäminen ehkäisee oppimisvaikeuksia ja auttaa rakentamaan matematiikan perustan vahvaksi. (Ikäheimo 1998, 241, 247 -248.)

2.2.3 Matematiikan opetuksen muuttuminen

Perinteinen kouluopetus on perustunut pääasiassa suoraan vaikuttamiseen. Tämä on merkinnyt sitä, että opetuksen avulla on pyritty muuttamaan oppilaiden käyttäytymistä valmiiden mallien tai tehtävien avulla (vrt. behavioristinen oppimiskäsitys). Näin on tapahtunut erityisesti matematiikan opetuksessa.

Haapasalon (1998, 105) mukaan konstruktivismin päämäärien toteuttamiseen perinteinen opettajaohjoinen didaktiikka soveltuu huonosti. Konstruktivistinen oppimiskäsitys painottaa aikaisemman tiedon merkitystä uuden oppimisessa. Matematiikan opetusta on ensimmäisenä kouluaineista pyritty kehittämään konstruktivismin periaatteiden kanssa paremmin yhteensopivaksi. Koska konstruktivismin mukaan oppiminen on tietojen prosessoimista, tietorakenteiden muokkaamista ja muistin hallintaa, tulisi opetuksenkin muuttua suorasta vaikuttamisesta epäsuoraksi (Berry & Sahlberg 1995, 29). Matematiikka on nähty tiukasti hierarkisena tietorakennelmana (vrt. instrumentaalinen tai platonistinen näkemys matematiikasta) ja näin opetuksen päämääränä on ollut tuon tietorakennelman ulkoa oppiminen. Matematiikan opetuksessa voidaan korostaa joko pelkästään pyrkimystä oikean ratkaisun löytämiseen tai yksilöllistä ongelmanratkaisuprosessia. Konstruktivistisessa matematiikassa tulisi korostaa myös inhimillistä puolta: oppilaan aktiivisuutta ongelman ratkaisemiseksi, kontekstisidonnaisuutta, jatkuvaa muuttumista sekä välttämättömiä yhteyksiä muihin oppiaineisiin ja käytäntöön. (Kamii 1990, 26 -27; Leino 1998, 47.)

Suomalaisessa matematiikan opetuksessa on tapahtunut monenlaisia uudistuksia kahden viimeisen vuosikymmenen aikana. Matematiikan opetussuunnitelma on uudistunut. Entinen, matematiikan laskutaidollista ja menetelmällistä puolta korostanut opetussuunnitelma sai väistyä ja tilalle on tullut ongelmanratkaisua, soveltamista ja matemaattisen ajattelun kehittämistä koskevia korostuksia opetussuunnitelman perusteisiin. Matematiikan opetukselliset järjestelyt ovat muuttuneet. Entiset yläasteen tasokurssit poistettiin ensin ja sittemmin on poistettu myös ala- ja yläasteen raja. Myös koulujärjestelmän ohjaustapaa on muutettu. Entinen, keskitetty ohjaus valtakunnallisine opetussuunnitelmineen on hylätty ja nykyisin jokainen koulu opettajineen tekee omat opetussuunnitelmansa opetussuunnitelman perusteisiin nojautuen. (Kupari 1993a, 81 -82.)

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteet sisältää kokonaistavoitteet sekä joitakin sisältöjä peruskoulun matematiikan opetukselle. Tarkempi opetussuunnitelman laatiminen on annettu kuntien ja koulujen tehtäväksi. Peruskoulun matematiikan opetuksen päämääränä on tarjota kaikille oppilaille mahdollisuus hankkia sellaiset matemaattiset perustiedot ja -taidot, jotka luovat pohjaa myöhemmille opinnoille ja antavat valmiuksia selviytyä jokapäiväisissä toiminnoissa ja työelämässä. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 77.)

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (1994, 78) mukaan matematiikan opiskelussa on keskeistä, että oppilas

- ◇ tottuu ympärillä olevan maailman *havainnointiin* ja sen *tulkittamiseen* matematiikan keinoin sekä ongelmatilanteiden tunnistamiseen ja niissä toimimiseen,

- ◇ ymmärtää luonnollisen luvun sekä murto- ja desimaaliluvun *käsitteet* ja oppii *peruslaskutaidot* päässä, paperilla ja laskimilla ja näiden käyttämisen arkielämän ongelmien ratkaisemisessa sekä tottuu arvioimaan suuruusluokkia ja tulosten oikeellisuutta,
- ◇ oppii *arvioimaan ja mittaamaan* pituutta, massaa, pinta-alaa, tilavuutta, kulmaa ja aikaa sekä oppii näiden suureiden tavallisimmat *mittayksiköt* ja niiden muunnokset,
- ◇ ymmärtää *mittakaavan* käsitteen ja oppii käyttämään sitä piirustusten ja karttojen tulokinnassa,
- ◇ oppii tunnistamaan ja piirtämään tavallisimpia geometrisia *kappaleita ja kuvioita*, kuvaamaan näiden perusominaisuuksia ja laskemaan näiden pinta-aloja ja tilavuuksia sekä tutustuu symmetriaan,
- ◇ perehtyy asioiden ja esineiden lajitteluun ja luokitteluun, *säännönmukaisuuksien* löytämiseen ympärillä olevasta maailmasta ja näiden kuvaamiseen sekä tottuu laatimaan, lukemaan ja tulkitsemaan yksinkertaisia *taulukkoita ja diagrammeja*.

Matematiikan opetuksen tavoitteeksi ei enää riitä, että oppilaille annetaan jokamiehen laskutaidot. Vallitsevalla, valmiiden ratkaisumallien ”tuputtamisella” opettajakeskeisen opetustradition mukaan ei pystytä tarjoamaan oppilaille riittävää matemaattista yleissivistystä. Tarvitaan muutoksia niin näkemyksiin matematiikasta kuin sen opettamisesta ja oppimisestakin. Muutoksia tarvitaan opetussuunnitelmiin, käytännön opetusjärjestelyihin, oppimateriaaleihin ja loppujen lopuksi jokaisen matematiikkaa opettavan opettajan toimintaan omassa luokassaan. (Keranto 1993, 249, 255 - 256.)

Opetushallitus on tehnyt matematiikan opetuksen uudistamisen osalta kehittämisohjelman vuosille 1996 - 2000. Uudistamistarve on akuutti sekä matematiikan että luonnontieteiden opetuksessa, sillä nykyisellään ei saada riittävästi opiskelijoita näille aloille. (Kallonen-Rönkkö 1998, 257 -258.)

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (1994, 9) korostetaan oppilaan aktiivista roolia oman tietorakenteensa jäsentäjänä. Tämä tulisi huomioida myös matematiikan opetuksessa. Matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua. Matematiikka on näin ollen nähtävä laajemmin kuin vain tiettyjen laskutaitojen oppimisena. Tavoitteena on, että oppilas havainnoi ja tulkitsee ympärillä olevaa maailmaa matematiikan keinoin. Oppilasta tulisi alusta alkaen totuttaa ja kasvattaa keksivään ja luovaan oppimiseen ja ajatteluun (Haapasalo 1993a, 16).

Matemaattisen ajattelun kehittymistä tuetaan parhaiten silloin, kun ei liian nopeasti kiihEDITä abstraktiin symboliesitykseen. Käytännön toiminnalla ja havaintovälineillä kokeilemalla oppilaat muodostavat matemaattisia malleja todellisuudesta. Mitä enemmän he saavat tällaisia konkreettisia kokemuksia, sitä helpompaa heidän on ymmärtää matemaattisilla symboleilla ilmaistuja kuvauksia todellisuudesta. Matematiikan opetusta voidaan muuttaa entistä toiminnallisempaan suuntaan. Toiminnallisessa matematiikan opetuksessa korostuu oppilaan aktiivinen rooli tiedon hankkijana ja käsittelijänä. Oppilaalla on mahdollisuus toimia erilaisissa tilanteissa konkreettisten mallien parissa, kokeilla, tehdä havaintoja ja keskustella havainnoistaan. Toiminnallisuus aktivoi ja motivoi oppilasta. Toiminnallisia, matematiikan opetukseen sopivia työtapoja on runsaasti. Monipuoliset ja vaihtelevat työtavat kehittävät myös myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan. Leikinomaisuuden ja konkreettisuuden säilyttäminen on tärkeää erityisesti alkuopetuksen matematiikassa. (Helin ym. 1998, 5 - 7; Vähäpassi ym. 1997, 7.)

2.2.4 Matematiikan arvioinnin muuttuminen

Arvioinnilla on keskeinen osuus opetussuunnitelman laadinnassa. Arvioinnin, niin kuin opetussuunnitelman, tulee olla jatkuvan kehittämisen väline (Björkqvist 1995, 38). Arviointi on muuttumassa peruskoulussa. Oppilaiden itsearviointi ja sen kehittäminen kuuluu osana arvioinnin uudistamiseen. Myös matematiikan arvioinnin tulisi muuttua. Pelkästä produktin, vastauksen, arvioinnista tulisi siirtyä arvioimaan laajemmin oppilaan matemaattista taitoa. Arviointikeinoja ovat mm. oppilaiden matemaattisen puheen kuunteleminen, oppilaiden matematiikka-aiheisten kirjoitelmien käyttäminen arvioinnissa ja oppilaiden toiminnan havainnointi matematiikan tunneilla. (Ross & Kurtz 1993, 256 - 257.)

Arviointimenetelmänä on yleisesti käytetty koetta. Nykyinen matematiikan koe on hyvin paljon samanlainen kuin matematiikan koe 15 vuotta sitten. Tällainen perinteinen koe ei ota huomioon kuin osan matematiikan opetuksen tavoitteista. Oppilaiden asenteet, toimintatavat ja viestintätaidot jäävät kokonaan perinteisen koearviointin ulottumattomiin. Arvioinnin kohteita matematiikassa voisivat olla mm. seuraavat: yleinen käsitys matematiikasta yhteiskunnassa eli mihin sitä tarvitaan, sosiaalinen kanssakäyminen matematiikan tunneilla, kommunikaatio, aktiivisuus, käsitteenmuodostus, sovellukset ja luovuus. (Björkqvist 1993, 13 - 14; Björkqvist 1995, 37.)

Matematiikan oppimisen arviointitapoja on olemassa muitakin kuin perinteinen koe. Yksi uusimmista on portfolioarviointi. Oppilaat voivat koota omista tehtävistään tavallaan kirjanpidon tietyltä ajanjaksolta kansioon tai salkkuun eli koostaa ns. portfolioon. Portfolio voi sisältää mm. koetehtäviä, kotitehtäviä, avoimia tehtäviä, kuvia tai raportteja projekteista, mahdollisesti opettajan tai oppilaan pitämän päiväkirjaa oppimisesta ja erilaisia luovuuden osoituksia. Oppilaan tulee perustella tehtävien valintansa portfolioon. Osan töistä valitsee opettaja, esim. jonkun saman työn jokaiselta oppilaalta. Kirjallisten ja kuvallisten tuotosten ohella portfolio voi sisältää myös ääni- ja videonauhoja. (Björkqvist 1995, 41 - 42; Pehkonen 1995, 47.)

Arvioinnin kehittämisen yhtenä tavoitteena on arvioinnin monipuolistaminen. Arvioinnin kohteina voivat olla esim. matemaattinen ongelmanratkaisutaito, avoimet tehtävät, valmiiksi suoritettut tehtävät, joissa on jokin virhe ja oppilaan on etsittävä ja korjattava se, oppilaiden itse laatimat koetehtävät, tiedon tarkoituksenmukainen valinta tehtävää varten, käsittekartat, käytännölliset matematiikan tehtävät mm. erilaiset arviointitehtävät ja erilaiset matematiikkaan liittyvät projektityöt. Hyvin suunniteltu ja monipuolinen arviointijärjestelmä on hyvä ottaa käyttöön esim. uudelle luokka-asteelle siirryttäessä. Muutosvastarintaa voi esiintyä niin oppilaiden kuin vanhempienkin taholta, joten arvioinnin muutokset on pystyttävä myös perustelemaan. (Björkqvist 1993, 28 -33.)

Opetuskokeiluni aikana pyrin monipuolistamaan oppilaiden matematiikan taitojen arviointia. Käyttämiäni arvioinnin muotoja olivat perinteisen kokeen ohella laskutarinoiden ja oppilaiden matemaattisen puheen arviointi ja pysäkkityöskentelyn aikana tapahtunut oppilaiden toiminnan havainnointi sekä arviointi.

2.3 Konstruktivismi

Konstruktivismi on opettajalle yleinen lähestymistapa oppimisen ymmärtämiseksi. Konstruktivismi ymmärretään eräänlaisena perspektiivinä, jossa oppimista tarkastellaan. Konstruktivismi ei ole yksi oppimisen selitysmalli, vaan joukko oppimisteorioita, jotka perustuvat yhteisiin filosofis-teoreettisiin lähtökohtiin. Voidaan puhua myös konstruktivismista metateorianana tai paradigmana. Konstruktivismi perustuu seuraaviin oletuksiin ihmisestä. Ihminen voi oppia vain suhteessa aikaisempaan tietoonsa ja tällä tiedolla on tärkeä merkitys hänen oppimiselleen ja toiminnalleen. Ihmisellä itsellään on ainakin osittainen kontrolli oppimiseensa eli kukaan ei voi oppia toisen puolesta. Oppiminen on näin ollen myös tavoitteellista toimintaa. Ihminen on sosiaalinen olento, joka muodostaa merkityksiä sosiaalisesta ympäristöstään ja toimii sosiaalisten normien puitteissa. (Haapasalo 1998, 95 - 96; Leino 1993b, 1- 4.)

Oppimisteorianana konstruktivismiin vastakohtaksi on tavallista asettaa behaviorismi. Behaviorismi korostaa erilaisten käyttäytymismuotojen oppimisen lainalaisuuksia. Reaktiot ja toimintatavat pyritään selittämään oppimislakien, klassisen ja instrumentaalisen ehdollistumisen, avulla. Toivottua käytöstä vahvistetaan yksilön ulkopuolelta palkitsemalla ja ei-toivottu käytös pyritään sammuttamaan mm. sivuuttamalla virheellinen reaktio kiinnittämättä siihen huomiota tai rankaisemalla. Behaviorismi perustuu staattiseen tiedonkäsitykseen ja oppimisen ulkoiseen säätelyyn. Konstruktivismiin pohjana olevassa dynaamisessa tiedonkäsityksessä korostuu oppijan aktiivinen, yksilöllinen rooli oman tietonsa konstruoijana ja prosessoijana. Oppimisen säätely tapahtuu näin ollen yksilössä itsessään. Tieto sinänsä ei ole ongelmatonta, siirrettävissä olevaa, vaan olennainen osa tiedosta muodostuu siihen kytkeytyvistä viitteistä ja merkityksistä ihmisen toiminnoissa - ilman käyttötarkoitusta tieto on hyödytön (Leino 1993a, 15). Konstruktivismi kiinnittää huomion oppimis- ja ajatteluprosessien laadullisiin ominaisuuksiin. Oppiminen on erilaista, yksilöllistä. Oppiminen voi laadullisesti vaihdella samalla yksilöllä eri tilanteissa ja samassa tilanteessa eri yksilöiden välillä. Konstruktivismi on noussut oppimistutkimuksen valtaväyläksi. (Haapasalo 1993b, 269; Lehtinen ym. 1991, 17 - 26; Rauste-von Wright & von Wright 1994, 104 - 105.)

Konstruktivismiin tulkintoja on kasvatustieteen alueella useita. Myös jaottelutapoja on useita erilaisia. Konstruktivismi jaetaan mm. heikkoon, vahvaan tai radikaaliin sekä sosiaaliseen konstruktivismiin. Konstruktivismiin jaottelua voisi mielestäni käyttää myös yksilön konstruktivistisen ajattelun kehittymisen kuvaajana. Kehitys lähtee liikkeelle heikosta konstruktivismista. Jos kehitys jatkuu, se voi vahvistua radikaaliksi konstruktivismiksi. Oma konstruktivistinen kehitykseni on aika alkuvaiheissa, heikon konstruktivismiin ja sosiaaliseen konstruktivismiin välimailla. Vahva konstruktivismi on mielestäni käytännössä täydellisenä toteutuakseen liian radikaali.

2.3.1 Heikko konstruktivismi

Heikko konstruktivismi on konstruktivismin muodoista väljin ja vähiten radikaali. Heikkoon konstruktivismiin kuuluu oleellisena osana kognitiivinen oppimiskäsitys. Yksilö on kognitiivisen oppimiskäsityksen mukaan aktiivinen ja valikoiva havainnoija, joka käsittelee ja suhteuttaa havaintoihinsa perustuvaa tietoa aikaisemmin oppimaansa. Heikko konstruktivismi on edistysaskel verrattuna pelkkään oppilaalle merkityksettömän tiedon esittämiseen ja siirtämiseen. Se pakottaa keskittymään siihen, miten oppilas oppii eikä vain siihen, mitä oppilas oppii. (Leino 1993b, 1 - 2.)

Heikko konstruktivismi rajoittuu tarkastelemaan pelkästään oppijan tiedon muodostumista. Tällaisenaankin se muuttaa staattisen tiedonkäsityksen. Tieto ei ole jotakin sellaisenaan annettavaa tai vastaanotettavaa, joka opitaan tai ei opita, vaan jotakin persoonallisempaa ja yksilöllistä. Tieto voi olla joko objektiivista tai subjektiivista. Ulkoista maailmaa pidetään olemassa olevana realiteettina ja kaikille samanlaisena, objektiivisesti havaittavana. (Haapasalo 1998, 98.)

Heikko konstruktivismi näkyy opetuksessa mm. oppilaiden ennakkokäsitysten huomioimisena ja ottamisena opetuksen lähtökohdaksi sekä sosiaalisen vuorovaikutuksen korostamisena. Oppilaiden omia ajatuksia ja suunnitelmia rohkaistaan. Sosiaalisuutta korostetaan ryhmätöitä ja yhteistoiminnallisuutta lisäämällä. Opetuksessa pyritään järjestämään ongelmatilanteita, joita oppilaat yhdessä ratkaisevat. Toimintamateriaalin käyttö korostuu. Oppimisen arviointia pyritään monipuolistamaan. Myös tuotokseen johtanutta prosessia arvioidaan varsinaisen vastauksen tai tuotoksen arvioinnin ohella. (Kaasila 1997, 32 -34.)

2.3.2 Vahva, radikaali konstruktivismi

Vahvan konstruktivismin mukaan katsotaan, että ulkoinen maailma ei ole objektiivinen, kaikille sama. Kaiken tiedon katsotaan olevan ihmismielen omaa tuotetta. Ihmisen havaintoja maailmasta ohjaavat hänen aikaisemmat kokemuksensa ja niistä muodostunut tietorakenne. Lapsen ulkoinen maailma ei ole samanlainen kuin aikuisen. Sama tilanne on erilainen eri yksilöiden havaitsemana ja samankin yksilön havainnointi vaihtelee tilanteesta riippuen. Ihminen luo vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa oman tiedollisen rakenteensa, jota säätelee hänen geneettinen perimänsä. Ihminen ottaa ja käyttää informaatiota samalla itsekkin muuttuen tässä prosessissa. Vahva konstruktivismi saa vastustajia erityisesti matemaatikoista, sillä totuuteen suhtaudutaan kuin saavuttamattomaan haaveeseen. Jonkinlainen todellisuus on vahvankin konstruktivismin mukaan olemassa, mutta tiedon totuutta ei voida varmistaa. Näin on tyydyttävä kokemusten kanssa yhdenmukaiseen tietoon. Vahva konstruktivismi on saanut kritiikkiä myös yksilöllisyyden liiallisesta painottamisesta. Vahvimmat radikaalin konstruktivismin edustajat eivät hyväksy konkreettisten tavoitteiden asettamista oppimiselle eivätkä myöskään hyväksy konstruktioprosessin ohjailua ulkoapäin. Eristyneisyys ja yksilöllisten kokemusten merkitys korostuvat ja sosiaalinen vuorovaikutus jää toissijaiseksi. Edellä mainitut syyt ovat estäneet tämän ideologian

tulemisen oppilaitosten tasolle. (Haapasalo 1998, 97 - 98; Kaasila 1997, 37; Leino 1993b, 2 - 3.)

Matematiikan opetuksessa radikaalin konstruktivismin päätavoitteena on se, että opettajan tulee edistää ja rohkaista jokaista oppilasta kehittämään tietovarastoaan tehokkaiden konstruktioiden kautta. Tämä tapahtuu asettamalla, keksimällä, ratkaisemalla ja todistamalla matemaattisia ongelmia ja käsitteitä. Jokaisen oppilaan tulisi myös arvioida ja reflektoida omia konstruktioitaan eli omaa oppimistaan. Ongelmakeskeisyyden yksipuolista korostamista kuitenkin kritisoidaan. Ei voida olettaa, että jokainen peruskoulun oppilas itse tavallaan uudelleen keksisi matematiikan säännönmukaisuudet, koska heidän matemaattinen päättelynsä ei ole vielä tarpeeksi kehittynyttä. Osalle oppilaista ongelma-keinen metodi sopii, osa taas oppii parhaiten seuraamalla toisten oppilaiden keksimiä ratkaisustrategioita ja niistä keskustelemalla. Radikaalin konstruktivismin edustajien suurimpia ansioita ovat monien opetukseen ja oppimiseen liittyvien käsitteiden kyseenalaistaminen. (Kaasila 1997, 37 - 39.)

2.3.3 Sosiaalinen konstruktivismi

Sosiaalisessa konstruktivismissa yhdistyvät tietoteoreettiset, oppimispsykologiset ja sosiologiset näkökohdat. Oppiminen on oman elämän järjestämistä koskeva prosessi, jossa yksilö on aktiivisessa vuorovaikutuksessa ulkoisen maailman kanssa. Ihmisen ulkoinen maailma ei koostu vain fyysisestä, vaan myös sosiaalisesta ympäristöstä. Sosiaaliseen maailmaan liittyy ihmiskunnan kehityksensä kautta kokoamaa luotettavaa tietoa. Radikaalin konstruktivismin edustajalle tällainenkin tieto on kokemusten kautta konstruoituva, se ei kelpaa sellaisena kuin se on esitetty. Sosiaalisessa konstruktivismissa ihminen nähdään erottamattomasti vuorovaikutteisena; ihmistä ei voi tarkastella irrallaan sosiaalisesta ympäristöstään. Tarkasteltaessa esim. jotakin matemaattista seikkaa - sellaisena kuin se meille kokemusmaailmassa ilmenee - tarkastellaan sekä kohdetta että sen kokemista. Tieto nähdään kokemusten summana, pohjimmiltaan se on kokemusten uudelleen järjestämistä. Oppimista tapahtuu, kun kokemusten kokonaisuudessa tapahtuu muutoksia. (Haapasalo 1998, 98 - 100; Leino 1993b, 3 - 4.)

Matematiikan opetuksessa sosiaalinen konstruktivismi lähtee liikkeelle oppilaan arkipäivän kokemusten ja kielen korostamisesta. Matemaattiset ongelmat ja ajatuspähkinät ovat keskeinen elementti opetuksessa. Kirjallisia testejä ja tehtäviä käytetään myös. Opettaja toimii luokassa objektiivisen matemaattisen tiedon edustajana ja oppilaat muodostavat omia subjektiivisia merkityksiään matemaattisesta tiedosta. Eri yksilöiden konstruoimilla matemaattisilla merkityksillä on paljon yhteistä, mm. sovitut käsitteet ja symbolit. Näin ollen ne eivät ole mielivaltaisia, vaikka ovatkin yksilöllisiä. Kukaan ei konstruoi edes matemaattisia merkityksiä täysin samalla tavalla jonkun toisen kanssa. Ongelmanratkaisutilanteet johdattavat oppilaat keskustelemaan eri ratkaisutavoista. Oppilaat perustelevat ja puolustavat omaa kantaansa verbaalisesti. Keskustelujen kautta pyritään siihen, että heidän konstruoimansa matemaattiset merkitykset voisivat lähestyä toisiaan. Opettajalla on tärkeä rooli keskustelun virittäjänä ja tarpeen vaatiessa myös keskustelun suuntaajana. (Kaasila 1997, 45, 49.)

2.4 Konstruktivistinen oppimiskäsitys

Oppimiskäsitys tarkoittaa selitystä tai teoriaa siitä, mitä oppiminen on ja millaisia periaatteita oppimiseen sisältyy. Oppimiskäsitys on oleellinen osa opettajan didaktista ajattelua ja vaikuttaa hänen toimintaansa ja asennoitumiseensa opetuksen suunnittelussa, toteutuksessa ja arvioinnissa. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perustana on konstruktivistinen tieteenteoria ja kognitiivinen psykologia. Konstruktivistinen oppimiskäsitys pohjautuu oletukseen lapsesta tavoitteisena, tulkitsevana ja yksilöllisenä, omaa oppimistaan ohjaavana toimijana. Oppiminen ei tapahdu pelkästään kuuntelemalla, näkemällä tai tuntemalla vaan yksilön kehityksen ja kokemusten pohjalta kehittyneiden ajattelurakenteiden, tiedollisten prosessien, avulla. Oppilas konstruoi eli rakentaa käsityksensä tapahtumista ja ilmiöistä omien kokemustensa ja aikaisemmin konstruoimiensa mallien perusteella. Se, mitä oppilas oppii, riippuu paljolti oppimisympäristöstä, tiedon luonteesta ja siitä, mitä oppilas entuudestaan tietää ja mitä hän haluaa oppia. Opettajan tärkein tehtävä on luoda sellainen oppimisympäristö, joka tarjoaa haasteita ja mahdollisuuksia lapsen oppimiselle. Oppiminen on luonteeltaan aktiivista rakentamista, tietojen tarkentamista ja uudelleenmuotoilemista. Oppiminen on kasautuvaa eli uuden oppiminen rakentuu jo olemassaolevan tietämyksen varaan. Jos aikaisempi tietämys on heikosti jäsentynyttä tai virheellistä, voi uuden oppiminen vaikeutua tai estyä kokonaan. Taitohierarkian alemmien, korkeampien oppimisprosessien kannalta välttämättömien toimintaskaemojen, kuten luku- ja kirjoitustaidon sekä peruslaskutaitojen hallinta on välttämätöntä. (Berry & Sahlberg 1995, 18, 22 - 25; Olkinuora 1994, 58, 61 - 66.)

Lummelahti (1993, 27) korostaa koulun aloitusvaiheen merkitystä lapsen myöhemmänkin kehityksen kannalta. Luokanopettajan tehtävänä on hänen mukaansa tiedostaa oppilaidensa yksilöllisyys ja tukea jokaisen oppilaan kehitystä suotuisaan suuntaan. Opettajan on nähtävä tilanteen mahdollisuudet ja pyrittävä kasvatuksellisin keinoin tukemaan oppilaitaan. Lapsen on saatava myönteistä kannustusta, jotta itseluottamus ja itsearvostus säilyvät.

Ihminen oppii uutta liittämällä opittavan asian olemassa oleviin tietoihin tai taitoihin. Ennakkokäsitykset ovat konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan uuden tiedon ankkureita. Ennakkokäsitykset ovat oppimisen edellytys, mutta ne voivat olla myös oppimisen este. Oppilaiden omien kokemustensa kautta rakentamat käsitykset ovat yleensä pysyviä, paljon pysyvämpiä kuin opettajan tai oppikirjan välittämä uusi informaatio. Laadukas oppiminen edellyttää ennakkokäsitysten selvittämistä ennen opetusta ja virheellisten käsitysten hyväksikäyttämistä niin, että uusi tieto on oppilaalle merkityksellisempää kuin vanha tieto. (Berry & Sahlberg 1995, 25 -26.)

Oppilaan ennakkokäsitysten osuus tiedon muodostamisessa on tärkeää; opettaja ei voi oppia oppilaan puolesta eikä siirtää tietojaan sellaisenaan oppilaalle. Koska oppijalla ja hänen aikaisemmalla oppimisellaan on olennainen osuus uuden oppimisessa, on tämän aikaisemman tiedon esille saaminen ja opetuksen mukauttaminen siihen opettajan opetus-työn olennainen osa. Opetus on oppilaiden käsityksiin, tulkintoihin, tarkoituksiin ja merkityksiin vaikuttamista. Konstruktivismi näkee oppilaan aktiivisena tiedon hankkijana ja käyttäjänä, joka näiden prosessien kautta muuttaa itseään. Oppijassa heräävät omiksi koetut, opittavaan asiaan liittyvät kysymykset, oma kokeilu, ongelmanratkaisu ja ymmär-

täminen. Sosiaalinen vuorovaikutus on olennainen osa oppimistapahtumaa. Oppiminen on aina konteksti- ja tilannesidonnaista. (Leino 1998, 39 - 40; Rauste- von Wright 1997, 17 - 19.)

2.4.1 Konstruktivistinen oppimiskäsitys ja matematiikka

Koulutulokkaalla on jo olemassa monenlaisia kokemuksia matematiikkaan liittyvistä asioista ja käsitteistä sekä matemaattisia valmiuksia ja taitoja. Opettajan tehtävä on selvittää kunkin oppilaan valmiudet ja taidot. Seuraavaksi näitä olemassa olevia taitoja aletaan laajentaa ja lisätä. Tärkeä tehtävä opettajalla on myös liittää koulumatematiikka näihin jo olemassa oleviin taitoihin, jotta lapsi ymmärtää yhteyden koulumatematiikan ja omien matemaattisten kokemustensa välillä (Aubrey 1997, 21 - 22).

Koulumatematiikka tuo lapselle uusia matemaattisia toimintatapoja. Uudet käsitteet liittyvät entisiin. Jos lapsella on myönteisiä kokemuksia, on hän motivoitunut yrittämään uutta. Jos lapsella on kielteisiä kokemuksia, hän saattaa vältellä tilanteita, joissa epäonnistumisen kokemukset voisivat toistua. Lapsella on käsityksiä ja uskomuksia itsestään ja omista matemaattisista taidoistaan. Pehkonen (1998, 29) nimittää tätä yksilön matematiikkakuvaksi. Matematiikkakuvaan kuuluvat mm. yksilön uskomukset itsestään matematiikan oppijana. Matemaattisten käsitteiden omaksuminen tapahtuu aktiivisen toiminnan kautta, itse rakentaen ja muokaten omaa ajattelua, tarkistaen sen paikkansapitävyyttä. Opettajan rooli on ohjata lasta, antaa oikeat termit ja luoda sopiva oppimisympäristö matemaattiselle ajattelulle. Opettajien asenteet matematiikkaa kohtaan ja uskomukset siitä, mitä matematiikka on ja miten sitä pitäisi opettaa, ovat tärkeitä matematiikan oppimisen kannalta (Lindgren 1998, 307). Osana oppimisympäristöä ovat nimittäin aikuisten omat asenteet matematiikkaa kohtaan. Näistä asenteista tulisi olla tietoinen, sillä niin positiiviset kuin negatiivisetkin asenteet välittyvät lapsiin. Oma asenteeni matematiikkaa kohtaan kääntyi positiiviseksi luokanopettajakoulutuksen innostavien matematiikan opintojen myötä. (Ikäheimo ym. 1997, 8; Kinnunen & Vauras 1998, 272 - 273.)

Kun konstruktivismi otetaan matematiikan opetuksen lähtökohdaksi, nousee ensimmäiseksi tehtäväksi oppilaiden tietojen ja kokemusten esille saaminen kulloinkin kohteena olevasta aiheesta. Kiinnostuksen kohteena on se, millaisia uskomuksia ja ennakkokäsityksiä oppilailla jo on, miten ne ovat ymmärrettävissä, mitä niistä voidaan pitää oikeina, mitä pitäisi saada muutetuksi ja miten muutos voidaan saada aikaan. Ausubelin (1978, 163) sitaatti kertoo ennakkokäsitysten merkityksestä: ”Tärkein yksittäinen oppimiseen vaikuttava tekijä on se, mitä oppija entuudestaan tietää. Ota siitä selvää ja opeta sitten sen mukaisesti.” Opetusta suunnittelevan kannalta tämä herättää kaksi kysymystä: miten ennakkokäsitykset vaikuttavat oppimiseen sekä miten opetuksessa ja opetussuunnitelmassa pitäisi ottaa huomioon oppilaan aikaisemmat käsitykset opetettavista asioista. (Berry & Sahlberg 1995, 16 -17; Leino 1993a, 16.)

Opettajalla tulisi olla kiinnostusta oppilaalla jo olemassaolevasta tiedosta, eli ennakkokäsityksistä ja oppilaiden antamista merkityksistä ja tulkinnoista opetettaville käsitteille. Opettajan tulisi olla kiinnostunut myös siitä, miten oppilas konstruoi eli rakentaa tietonsa

vuorovaikutustilanteissa fyysisen ja sosiaalisen ympäristön kanssa sekä mahdollisista eroista eri oppilaiden käsitysten ja konstruoimisprosessien välillä. Konstruktivistinen opettaja on hyvä kuuntelija, toiminnan tarkkailija sekä ajattelutavan arvioitsija (Leino 1993b, 7). Tiedon konstruointi vaatii aikaa ja energiaa, määrän vaihdelta yksilöllisesti oppilaasta toiseen. Tämä asettaa opettajalle ja hänen opetukselleen eriyttämisvaatimuksia, jotta kukin oppilas saisi käyttää tiedon konstruointiin riittävästi aikaa. Opettajalla on kuitenkin suuri vapaus toimia oppilaiden yritelmiä ja toimintoja kannustavasti sekä muuttaa opetustaan entistä toiminnallisempaan suuntaan. (Leino 1998, 45 - 46.)

Matematiikan opetuksessa on hyväksyttävä realiteettina tietyt matematiikan tietojärjestelmät ja vakiintuneet toimintamuodot. Matematiikan opetuksessa on edettävä järjestelmällisesti oppiaineksen selvän hierarkisuuden vuoksi, vaikka opettajan näkemys matematiikasta ei olisikaan instrumentaalinen. Matematiikan oppimista voi verrata talon rakentamiseen: jos perustus ei ole kyllin tukeva, koko rakennelma tulee horjumaan myöhemmin (Gluck 1991, 10). Opetusta suunniteltaessa tulisi aina varmistaa alemmalla taitohierarkian tasolla olevien taitojen hallinta ennen kuin siirrytään taitohierarkiassa korkeammalla tasolla olevien taitojen opettamiseen. Ellei edellistä asiaa (esim. kertotaulut) hallita, on seuraavan asian (esim. kertolasku allekkain) opiskelu hankalaa tai jopa mahdotonta ilman apukeinoja, esim. laskinta. Käsitteiden konkretisoiminen välineiden avulla, yhdessä miettiminen, asian johdonmukainen eteneminen helpommasta vaikeampaan jne. vaativat opettajan tarkkaa suunnittelua. (Ikäheimo ym. 1997, 48; Vauras ym. 1994, 61.)

2.4.2 Opettajan rooli konstruktivistisessä matematiikan opetuksessa

Konstruktivismi asettaa haasteita matematiikan opetukselle. Toteutuessaan konstruktivistinen matematiikan opetus tulee muuttamaan suuresti perinteistä opetusta sekä ylipäänsä käsitystä hyvästä opetuksesta (Leino 1992, 40). Uudet tuulet matematiikan opetuksessa erityisesti peruskoulussa painottavat käytännön tilanteista lähtevää opetusta. Tilanne tulee ensin jäsentää ja analysoida ja vasta lopuksi kytketään mahdolliset matemaattiset käsitteet mukaan. Tällä tavalla pyritään luomaan pohjaa oppilaiden omien konstruktioiden muodostumiselle. Painotus tulee siis saada oppilaan toimintaan, hänen konstruktioihinsa ja niiden muodostumista ohjailevaan tukemiseen. Opettajan toiminta muuttuu opiskelun organisoijaksi ja tukijaksi. Kokeilujen mukaan muutos on kuitenkin positiivinen niin opettajan oppilaantuntemuksen ja arvioinnin kuin opiskelun ilmapiirinkin suhteen. (Leino 1992, 43 - 44.)

Konstruktivistinen oppimiskäsitys siis muuttaa perinteistä opettajan roolia. Konstruktivistinen opettaja rohkaisee oppilaita luomaan omia konstruktioitaan käyttämällä toimintamateriaalia, vertailemalla eri malleja ja keskustelemalla omista ratkaisuisistaan toisten oppilaiden kanssa. Opettaja ohjaa luokassa keskustelua ja auttaa oppilaiden ajattelua sopivilla kysymyksillä. Opettaja kuuntelee oppilaitaan. (Maher 1998, 30, 39 - 40.)

Opettajan tehtävä on luoda mahdollisimman suosiollinen oppimisympäristö, jossa matematiikan konstruktivistinen oppiminen mahdollistuu. Oppimisympäristön tulee olla turvallinen, onnistumisen kokemukset mahdollistava. Oppimisympäristön tulee olla positiiv-

vishenkinen ja sen tulee rohkaista luovaan ja aktiiviseen toimintaan. Jokaiselle oppilaalle tulee järjestää mahdollisuus tehdä omalle tasolleen sopivan vaativia tehtäviä ja saavuttaa tällä tavalla onnistumisen kokemuksia. (Hägglom 1994, 96 -97.)

Opettajan tulee järjestää sellaisia oppimistilanteita, jotka edistävät matemaattisten konstruktioiden rakentumista oppilaan mielessä. Opettajan tulee kannustaa oppilaitaan reflektivoivaan ajatteluun, jotta he muokkaisivat skeemojaan tehokkaammiksi ja yleisemmiksi. Opettajan tulisi käyttää opetuksessa hyväksi lasten omia matemaattisia kokemuksia. Opettajan tulee olla käytettävissä, kun joku oppilas tarvitsee apua tai ohjausta. Opettajan tulee pyrkiä paljastamaan oppilaiden virheelliset ajattelumallit ja ratkaisustrategiat sekä ohjata oppilasta havaitsemaan ja muuttamaan ne. Opettaja voi erityisesti alkuopetuksessa ratkaisevasti vaikuttaa siihen, millaisen kuvan oppilaat saavat matematiikasta. Opettajan tulisi toimia niin, ettei oppilaille synny sellaista väärää käsitystä, että matematiikka on vain laskemista ja että kaikkiin tehtäviin on vain yksi oikea ratkaisu. Tärkeä tehtävä opettajalla on myös oppimateriaalin ja toimintamateriaalin valitsemisessa ja niiden käytön ohjaamisessa. (Strang 1993, 137 -138.)

Edellä luetellut konstruktivistisen opettajan ominaisuudet ovat tavoitteita opettajana kasvamiselleni. Yhdessä avoimen ja ongelmanratkaisumallisen matematiikkakäsityksen kanssa nämä ominaisuudet muodostavat sellaisen opettajaihanteen, jota kohti haluan pyrkiä. Oleellinen osa opettajana kehittymistäni on tämä opetuskokeilu, joka toiminnallisena ja oppilaslähtöisenä perustuu konstruktivistiseen käsitykseen oppimisesta ja opettamisesta.

2.5 Galperinin teoria ulkoisen materiaalin tarpeellisuudesta

Materiaalin ja välineiden merkitystä matematiikan oppimisessa on tutkittu runsaasti. Tutkijat ovat yksimielisiä konkreettisen materiaalin tarpeellisuudesta ja hyödyllisyydestä matemaattisen ajattelun kehittäjänä. Ulkoinen toimintamateriaali sekä konkreettisella materiaalilla toimiminen kuuluivat opetuskokeiluni perusajatuksiin. Näin pyrin auttamaan oppilaita vahvistamaan ja kehittämään matemaattisia taitojaan sekä konstruoimaan tarvittavia laskumalleja.

Galperinin teoriaa ihmisen psyykkisten prosessien keston lyhenemisestä sekä tietojen ja taitojen muodostumisesta on käytetty monissa matematiikan opetukseen liittyvissä tutkimuksissa. Haapasalo (1998, 89) on tutkimuksissaan todennut orientaatiovaiheen ja äänen ajattelun tärkeän merkityksen matemaattisten käsitteiden oppimisessa. Lindgren (1990, 179 - 180) korostaa konkreettisen toimintamateriaalin käytön merkitystä matemaattisten käsitteiden oppimisessa. Lehtisen (1988, 59, 66) mukaan matematiikan oppimisessa automatisoituminen on se tavoitetaso, jolle pyritään. Ongelmana on, että kouluopetuksessa siirrytään liian varhaisessa vaiheessa symboliesityksiin ja pyritään liian nopeasti automatisoituneisiin suorituksiin (Kaasila 1997, 25 - 26).

Galperin korostaa teoriassaan yksilön ulkoisen toiminnan ja toimintaa vastaavien henkisten prosessien välistä yhteyttä. Toimintamateriaali toimii eräänlaisena siltana todellisen maailman ja matemaattisen symboliesityksen välillä. Tämän sillan rakentamisessa opetta-

jalla on merkittävä rooli. Kun silta on valmis, sitä voidaan kulkea kahteen suuntaan: konkreettisesta abstraktiin ja päinvastoin. Sillan toistuva käyttäminen lyhentää matkaa konkreettisen ja abstraktin välillä. Painopiste on käytännön tasolla oppimisprosessin hahmottamisessa siten, että kuljetaan konkreettisesta kohti symbolista esitystä. Oikean-tyyppisellä harjaannuttamisella ja oppimisella on suuri merkitys henkisten operaatioiden muodostumisessa. (Haapasalo 1998, 89; Lindgren 1990, 93 - 94.)

Galperinin teorian mukaan konkreettisella oppimateriaalilla on keskeinen rooli kaiken uuden henkisen toiminnan sisäistämisessä. Ihmisen jokainen henkinen toiminto on ulkoisen, aineellisen toiminnan heijastus. Siksi jokaisen uuden henkisen asian opettamisessa toiminnan pitää alkaa konkreettisesta lähtökohdasta. Galperinin mukaan oppimisessa ovat oleellisia asioiden ja ilmiöiden väliset suhteet. Oppijan on opittava orientaation malli, jonka avulla yksilö ja ympäristö kykenevät tehokkaaseen vuorovaikutukseen. (Ikäheimo 1995, 12; Lindgren 1990, 54.)

Ihmisen sisäiset, henkiset prosessit lyhenevät oppimisen yhteydessä kestoltaan säännömukaisesti ja nopeasti. Uusi tehtävä on usein helpointa suorittaa konkreettisen toimintamateriaalin avulla. Vaikeampaa tehtävän suorittaminen on ääneen pohtimalla ilman materiaalia ja kaikista vaikeinta se on ”päässä” suoritettuna, ainoastaan ajattelua käyttäen. Näitä henkisen toiminnan tasoja Galperin nimittää sisäistämisen asteeksi tai toiminnan tasoksi. Tasot muodostavat asian omaksumisen peräkkäiset vaiheet. Vaiheiden erottaminen toisistaan on suhteellisen helppoa esi- ja alkuopetusikäisten lasten oppimisessa, mutta myöhemmin vaiheista tulee vähemmän säännöllisiä. Näin moni alunperin ymmärrettävä älyllinen toiminta muuttuu automatisoituessaan hyvin tehokkaaksi ja samalla tavallaan tunnistamattomaksi. (Galperin 1979, 28 - 31.)

Uusien tietojen ja taitojen oppiminen alkaa orientoitumisvaiheella, jossa oppimista ohjataan konkreettisen materiaalin avulla. Seuraavaksi oppija vähitellen irtautuu materiaalin tuesta, mutta toistaa sen sisällön vielä ääneen puhuen. Seuraavassa vaiheessa oppija puhuu enää hiljaa itsekseen. Viimeisessä vaiheessa orientoivan osuuden muisteleminen käy yhä lyhyemmäksi, toiminta sisäistyy ja ajatus on puhetta nopeampi. Lopuksi uuteen aineistoon tutustuttaessa tapahtuu sen pikainen analyysi, jota seuraa välittömästi sen käsitäminen ja vastaava toiminta. Lopputuloksena orientaatiotoiminta lyhenee ja prosessi automatisoituu. (Galperin 1979, 35 - 36.)

Ulkoinen toiminta muuttuu sisäiseksi tiedoksi tai ymmärtämiseksi viisivaiheisen kehityskulun kautta. Vaiheet ovat: 1. orientoitumisvaihe, 2. materiaallinen vaihe, 3. puhuttu vaihe, 4. sisäisen puheen vaihe ja 5. sisäistynyt vaihe. Kaikki toiminnan tason vaiheet ovat tärkeitä uutta henkistä toimintaa opittaessa. Toiminnan tasot ilmentävät niitä perustavanlaatuisia muutoksia, joiden kautta ulkoinen toiminta muuntuu sisäiseksi. Jos jokin näistä vaiheista jätetään pois, lapsille tulee oppimisvaikeuksia. Suurimmat oppimisvaikeudet syntyvät lapsilla, joilta jätetään materiaallinen vaihe pois. (Ikäheimo 1995, 12; Lindgren 1990, 55, 57.)

Orientoitumisvaiheella on ratkaisevan tärkeä merkitys uuden toiminnon omaksumisessa. Orientoitumisvaiheessa hankitaan perusta toiminnalle ja sen tarkoitukselle. Orientoituminen on siis tapahtuma, jossa yksilö yrittää saada tilanteesta kokonaiskuvan. (Haapasalo 1998, 92.)

Materiaalisessa vaiheessa keskeistä on työskentely konkreettisella materiaalilla, esim. malleilla, kuvioilla, kaavioilla, diagrammeilla tms. Materiaalisen vaiheen mallit voivat Galperinin mukaan olla a) geometrisesti analogisia tutkittavan asian kanssa, b) fysikaalisesti samankaltaisia eli sellaisia, jotka tuovat esille tutkittavan prosessin dynamiikan, tai c) malleja, jotka tuovat esille mallin ja vastaavan objektin välillä vallitsevan rakenteellisen tai funktionaalisen suhteen. 10-järjestelmäateriaali on hyvä esimerkki viimeksi mainitusta mallista (Lindgren 1998, 302). Oleellista malleissa on, että ne toistavat juuri ne konkreettisten asioiden ominaisuudet, jotka ovat tärkeitä toiminnon kannalta ja antavat oppijalle mahdollisuuden suorittaa toiminto käyttäen näitä korvaavia ilmaisuja. Vaikka materiaalin käyttöön tässä vaiheessa liittyy usein opettajan tai lapsen puhetta, puhe ei tässä vaiheessa korvaa konkreettista mallia. (Galperin 1969, 253; Lindgren 1990, 55 - 56.)

Puhutussa vaiheessa puhe on tullut itsenäiseksi, riippumattomaksi materiaalin läsnäolosta. Oppija suorittaa toiminnon puhuen ääneen. Päästäkseen tähän vaiheeseen oppijan on täytynyt perehtyä kahteen asiaan: opitun kohteen todelliseen sisältöön ja sen verbaaliseen esittämiseen. Näiden hallinnassa oppija tarvitsee opettajan apua. Ymmärtäminen voi estyä, jos konkreettisesta materiaalista irtaudutaan liian aikaisin. Oppija voi puhua asiasta ymmärtämättä sitä. Opettajan on vaadittava, että tehtävät suoritetaan ääneen siten, että puheen muoto vastaa tehtävän todellista sisältöä. Puheen tärkeä merkitys on se, että se mahdollistaa abstraktion. Abstraktiossa ulkoinen toiminta on yksinkertaistunut ja irtaantunut materiaalisesta perustasta. Toiminto on siis esineiden kielellistä käsittelyä. Abstraktio mahdollistaa käsitteen muodostamisen. Puhutulla vaiheella on keskeinen merkitys yleistämisessä ja toiminnon lyhentymisessä. (Galperin 1969, 261 - 262; Lindgren 1990, 56 -57.)

Sisäisen puheen vaiheessa lapsi puhuu hiljaa itsekseen. Galperin (1969, 263) käyttää tästä vaiheesta ilmausta ”puhetta ilman ääntä”. Puhe ei siis ole puhumista sen varsinaisessa, verbaalisessa merkityksessä, vaan ilmiön ajattelemista puheen keinoin. Toiminta ei ole täysin sisäistynyt, koska lapsi käyttää puhetta. (Lidgren 1990, 57.)

Sisäistyneessä vaiheessa toiminta on jo täysin sisäistynyt ja ajatus on puhetta nopeampi. Toiminta automatisoituu, lyhenee ja tiivistyy. Oppijan ei tarvitse enää tietoisesti suorittaa alkuperäistä aktiivista toimintaa. (Galperin 1969, 264; Lindgren 1990, 57.)

Ihminen voi siis hallita jonkin henkisen toiminnon ensin käyttäen apuna konkreettisia objekteja, sitten puhuen ääneen, seuraavaksi puhuen itsekseen ja viimein puhuen yksinomaan päässään. Kaikilla toiminnan tasoilla kehitystä voi tapahtua myös niin, että toiminnan yleistys lisääntyy (yleistämisen aste). Toiminta tai teko voidaan laajemmin yleistää. Toiminto voi myös lyhetä (lyhentämisen aste), jolloin toiminto suoritetaan muutamia oleellisia toiminta-askelia, operaatiota käyttäen. Toiminto automatisoituu (hallinnan aste), kun suorituksen nopeus kasvaa ja vaikeusaste laskee. Aktiivisesta toiminnasta tulee vähitellen automatisoitunutta toimintaa. Automatisoitumisen myötä oppijalta vapautuu henkisiä resursseja, joita hän voi käyttää uuteen orientaatioon. Näin aikaisemmin itsenäisestä aktiivisesta toiminnasta tulee jonkin uuden, laajemman aktiivisen toiminnan osatoiminta. Aktiivinen ja automaattinen toiminta ovat toisiaan täydentäviä, eivät toisilleen vastakkaisia toimintoja. (Haapasalo 1998, 91 -92.)

Myös monet muut oppimisen ja opetuksen tutkijat Galperinin ohella korostavat oppijan produktiivisen puheen ja selittämisen merkitystä. Lapset rakentavat ja täsmentävät omia tietorakenteitaan puhumisen, selittämisen, väittelyn ja kyselemisen avulla. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (1994, 79) mukaan matematiikan oppimistilanteista tulisi rakentaa keskustelunomaisia, kokeilevia ja ongelmakeskeisiä. Kommunikaatio hyvän oppimisen yhteydessä sisältää myös aktiivisen kuuntelemisen ja halun ymmärtää, mitä toiset sanovat. Hieman yksinkertaistaen edellisen voi tiivistää: Mitä enemmän puhut, sitä enemmän opit! (Berry & Sahlberg 1995, 27, 42.)

Galperinin teoria antaa matematiikan alkuopetukseen hyvän pohjan. Ulkoinen materiaali ja ääneen ajattelu on tarpeellista kaikille ja erityisesti heikommin suoriutuville oppilaille. Leikinomaisuus, toiminnallisuus ja toimintamateriaalin käyttö ovat keskeisiä työtapoja matematiikan alkuopetuksessa. Samat välineet sopivat kaikille, toiset lapset kehittävät niiden avulla ajatteluaan syvemmälle kuin toiset. (Ikäheimo 1998, 246.)

Galperinin teoria tukee opetuskokeilussa käyttämäni toiminnallisten työtapojen valintaa sekä erityisesti keskustelun ja puheen merkitystä matematiikan oppimisessa. Oppilaiden omakohtainen toiminta, tutkiminen ja kokeileminen kuuluvat konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen. Myös Piaget painottaa teoriassaan lapsen omaa aktiivisuutta oppimisessa ja kehittämisessä.

2.6 Piaget'n teoria kognitiivisesta kehityksestä

Oppilaantuntemus on minulle opettajana tärkeä asia. Oppilaisiin tutustuminen on tärkeää erityisesti uuden ryhmän kanssa ja koulun aloitusvaiheessa. Opettajana pyrin vähitellen tutustumaan luokkani oppilaisiin yhä paremmin ja paremmin. Oppilaantuntemus auttaa suunnittelemaan ja toteuttamaan opetusta. Opetuksen eriyttämisen kannalta oppilaantuntemus on välttämätöntä. Oppilaantuntemuksesta on opettajalle monenlaista hyötyä joka-päiväisessä koulutyössä, mm. istumajärjestystä suunniteltaessa sekä pari- että ryhmätöitä valmistellessa.

Jokainen ihminen on yksilö, oma ainutkertainen itsensä. Lapsen kehitykseen vaikuttavat perimän ja kasvamisen eli kypsymisen lisäksi ne ympäristötekijät, joiden vaikutuksen piirissä hän kasvaa ja elää. Puhutaan kontekstista, niistä luonnollisista olosuhteista ja ympäristöistä, joissa lapsen kehitys tapahtuu: koti, perhe, päiväkot, koulu, kulttuuri jne. (Lyytinen ym. 1995). Nämä tekijät vaikuttavat jokaiseen lapseen yksilöllisesti ja ne tulisi huomioida myös lapsen kehitystä ja oppimista arvioitaessa. Lapsen yksilöllisen oppimisen ja ajattelun tason selville saamiseksi tarvitaan yleistä tietoa lapsen kehityksestä ja sen normaalista etenemisestä. Oppilaantuntemuksen ja oppilaitten taitojen arvioimisen pohjaksi opettajalla on oltava kehityspsykologista tietoa oppilaittensa ikäkaudesta ja kehitykseen vaikuttavista tekijöistä.

Piaget'n teoria tarjoaa kasvattajalle viitekehyksen, jonka avulla hän voi tulkita lasten käyttäytymistä sekä suunnitella kasvatuksen ja opetuksen niin, että se tukee lapsen kokonaiskehitystä. Teorian ydinajatus on, että lapsen henkiset perusrakennelmat eivät ole syn-

nynnäisesti jäsenyneet, vaan ne syntyvät ja kehittyvät vähitellen lapsen aktiiviseen toimintaan perustuvan prosessoinnin kautta. Ajattelun kehitys tapahtui Piaget'n mukaan biologisesti määräytyvien kehitysvaiheiden kautta. Kussakin kehitysvaiheessaan lapsi omaksuu uusia tapoja jäsentää eli konstruoida todellisuutta. Lapsi omaksuu uusia käsitteellisiä työkaluja todellisuuden tulkitsemiseksi. Samalla hän vapautuu edeltävälle vaiheelle ominaisista ajattelunsa rajoituksista. Opetuksessa on tärkeä jäsentää opetettava aines lapsen kulloisenkin ajattelun kehitysvaiheen mukaan. Tärkeää on myös tukea lapsen aktiivisuutta: hän oppii parhaiten keksiessään ongelmien ratkaisut itse. Piaget'n kasvatuksen metodin keskeinen sanoma on lyhyesti: oppiminen on aktiviteettia. Piaget'n tutkimuksia on myös kritisoitu paljon, mutta niiden anti on kiistaton lapsen kognitiivisen kehittymisen kuvaajana. (Rauste -von Wright & von Wright 1994, 117 -118; Takala & Takala 1992, 117.)

Piaget'n mukaan henkisen kehityksen perustekijöitä on neljä. Ensimmäinen näistä on orgaaninen kasvu, erityisesti hermoston ja sisäeritysjärjestelmän kypsyminen. Kypsyminen vaikuttaa henkiseen kasvuun koko kehityksen ajan, mutta sen vaikutus vähenee iän mukana fyysisen ja sosiaalisen ympäristön merkityksen jatkuvasti kasvaessa. Toinen tekijä on esineisiin kohdistuvasta toiminnasta saadun kokemuksen ja harjoittelun tulos. Kasvatuksen kannalta kokemus on kiinnostavin tekijä. Kokemuksia on kahdenalaisia: fyysisiä havaintokokemuksia ja loogis-matemaattisia kokemuksia. Fyysisellä havaintokokemuksella Piaget tarkoittaa esineisiin kohdistettua toimintaa niiden ominaisuuksien selvittämiseksi, esim. kahden esineen painon vertaamista. Tehdessään havaintoja lapsi saa tietoa kohteista ja niiden ominaisuuksista, esim. lapsi havaitsee kiven olevan painavampi kuin pallo punnittuaan molemmat esineet. Loogis-matemaattinen kokemus perustuu myös esineisiin kohdistettuun toimintaan, mutta sen tarkoituksena on päästä selville toimintojen koordinoimisen tuloksesta. Loogis-matemaattinen tieto saadaan toiminnasta, ei itse esineistä, joten tällainen kokemus muodostaa käytännöllisen, lähes motorisen vaiheen siitä, mistä myöhemmin tulee operationaalista päättelyä. Loogis-matemaattiseen kokemukseen liittyy aina lapsen oma oivallus ja sitä kautta tapahtuu lapsen ajattelumallien kehittyminen. Kolmas perustekijä on sosiaalinen vuorovaikutus ja välittyminen. Lapsen ajattelulle ja oivalluksille voidaan antaa aineksia, mutta ilman lapsen omaa panosta hänen ajatteluun ei voi ulkoapäin kehittää. Esimerkiksi koulussa saatava opetus on tehotonta ilman lapsen puolelta tapahtuvaa aktiivista toimintaa. Neljäs perustekijä on tasapainottuminen eli itsesäätely. Ajattelu tavallaan säätelee itse omaa kehittymistään. Lapsen kehityksestä ei ole olemassa ennalta laadittua suunnitelmaa. Kehitys on asteittain etenevää konstruointia, uusien rakenteiden muodostamista, jossa jokainen uusi kehitysaskel on riippuvainen edellisestä. (Kallonen-Rönkkö 1986, 10 - 11; Piaget & Inhelder 1977, 147 - 150.)

Piaget näkee lapsen aktiivisena oppijana, joka konstruoi uutta tietoa käyttäen hyväkseen jo olemassaolevia tietorakenteitaan. Oppiminen on aina tiedon yksilöllistä rakentamista. Kehitys koostuu peräkkäisistä kognitiivisen rakenteen muutoksista, jotka ovat ihmisen käyttäytymisen perusta. Lapsen taidot ja tiedot ovat organisoituneet kokonaisuuksiksi, skeemoiksi. Oppimisella on toki osuutensa tässä kehityksessä, mutta Piaget katsoo uusiin ajattelumuotojen edellyttävän aina valmiuksien kypsymistä. Mitä enemmän lapsi saa kokemuksia ympäristöstään, sitä kehittyneemmät sisäiset skeemat hänelle muodostuvat. Skeemat ovat kognitiivisia rakenteita, joiden kautta yksilö suuntautuu ympäristöönsä ja muokkaa sieltä saatuja havaintoja. Skeemat kehittyvät kahden osittain vastakkaisen,

osittain toisiaan täydentävän perusmekanismin, assimilaation eli sulauttamisen ja akkomodaation eli mukauttamisen kautta. Assimilaatiolla Piaget tarkoittaa tilannetta, jossa yksilö sulauttaa vanhaan skeemaan uutta tietoa säilyttäen entisen skeeman ja liittää näin uuden tiedon aikaisempiin tietorakenteisiinsa. Akkomodaatiossa skeema rakentuu uudelleen, muuttuu. Assimilaation ja akkomodaation tasapainoa Piaget kutsuu sopeutumiseksi. Henkinen kasvu merkitsee hänen mukaansa entistä tarkempaa sopeutumista todellisuuteen. (Piaget 1988, 21 - 27; Rauste -von Wright & von Wright 1994, 117 -118; Takala & Takala 1992, 74 -75.)

2.6.1 Ajattelun kehityksen neljä pääkautta

Piaget'n mukaan lapsen henkinen kehitys etenee toisiaan seuraavissa, suuria rakenteita muodostavissa vaiheissa siten, että jokainen uusi rakenne on aina jatkoa edelliselle, siirtää sen uudelle tasolla ja ylittää sen. Vaiheille on ominaista niiden ilmaantuminen samassa järjestyksessä jokaisella lapsella. Ikä, jossa vaiheet ilmaantuvat, saattaa vaihdella samoin kuin eri vaiheiden kesto. Piaget on kuitenkin määritellyt ikävuodet, joissa kehitysvaiheet keskimäärin esiintyvät. Kehitys voi yksilöllisesti olla nopeampaa tai hitaampaa, mutta kehitysvaiheiden ilmaantumisjärjestys on aina sama. Jokaiselle kehitysvaiheella on oma, luonteenomainen kokonaisrakenteensa, jonka puitteissa tärkeimmät käyttäytymismuodot ja reaktiot voidaan selittää. Kokonaisrakenteet ovat integratiivisia, eikä niiden muodostumisjärjestystä voida muuttaa. Jokainen vaihe on tuloksena edellisestä ja jokainen niistä valmistaa seuraavaa vaihetta yhdistyen siihen ennemmin tai myöhemmin. Olennaista on, että kussakin vaiheessa lapsi noudattaa tietynlaisia ajattelun ja toiminnan muotoja. Ajattelu ja toiminta muuttuvat joiltakin osiltaan laadullisesti toisenlaisiksi kehitysvaiheiden edetessä. Ajattelun kehityksen neljä pääkautta ovat sensomotorinen kausi, esioperatiivinen kausi, konkreettisten operaatioiden kausi sekä formaalisten operaatioiden kausi. (Beard 1971, 31 - 33; Kivi 1995, 23 - 24; Piaget & Inhelder 1977, 146 - 147.)

Keskityn seuraavassa tarkastelemaan opetuskokeiluni kannalta keskeisiä eli 6 - 8 - vuotiaiden lasten kehityskausia; esioperatiivista kautta ja konkreettisten operaatioiden kautta.

2.6.1.1 Esioperatiivinen kausi

Esioperatiivinen kausi ajoittuu ikävuosiin 2 - 5(7) ja se jakautuu kahteen osavaiheeseen, esikäsitteelliseen (ikävuodet 2 - 4) ja intuitiivisen ajattelun (ikävuodet 4 - 6/7) vaiheeseen. Koko esioperatiivisen kehityskauden keskeisenä tuntomerkkinä on symbolisten representaatioiden kehittyminen ajattelun apuvälineiksi. Esikäsitteellisellä kaudella esiintyy kaikkia representaatioiden lajeja: toiminnallisia, kuvallisia ja sanallisia. Symbolien merkitys pohjautuu läheisesti yksilöllisiin kokemuksiin. Lapsen päättelyä ohjaavat voimakkaasti lapsen omat toiveet ja halut. Intuitiivisen ajattelun kausi on saanut nimensä

siitä, että lapsella on silloin monenlaisia ajattelutoimintoja, mutta hän ei näytä olevan itse selvillä niistä säännöistä, joita hän noudattaa ajattelussaan. Hän voi ratkaista ongelmia oikein, mutta ei osaa selittää millä tavalla päätyi oikeaan lopputulokseen. Luonteenomaisin ajattelun piirre esioperationaalisella kaudella on sitoutuminen omaan näkökulmaan. Lapsen on vaikea ymmärtää toisen ihmisen näkökulmaa johonkin asiaan. Lapselta puuttuu ns. säilyvyyskäsite, hän kuvittelee esineen koon, tilavuuden tai esineiden lukumäärän muuttuvan kun niiden järjestystä muutetaan tai niitä muovataan toisennäköiseksi. Lapsi ei myöskään vielä pysty käyttämään luokittelua johdonmukaisesti. (Copeland 1984, 405 - 406; Takala & Takala 1992, 122-126.)

2.6.1.2 Konkreettisten operaatioiden kausi

Konkreettisten operaatioiden kausi ajoittuu ikävuosiin 6(7) - 11(12). Koulutulokkaat ovat ajattelun kehityksessä joko siirtymässä tai siirtyneet konkreettisten operaatioiden kauteen. Lapsen ajattelussa tapahtuu suurta kehitystä tässä vaiheessa, voidaan puhua jopa harppauksesta. Ajattelun hyppelehtivyyttä ja lyhytjännitteisyyttä alkavat vähetä ja lapsen ajatteluun ilmaantuu piirteitä, jotka saavat sen muistuttamaan aikuisen ajattelua. Lapsi pystyy jäsentämään ja yhdistelemään uusia asioita aikaisemmin oppimaansa entistä tehokkaammin. Lapsen päättely ei enää ole riippuvainen välittömistä havainnoista, vaan hän alkaa ajatella sisäisten representaatioiden varassa niitä monella tavoin yhdistellen. Lapsi alkaa hallita sellaisia operaatioita kuin lisääminen ja vähentäminen ja tajuaa, että ne ovat käänteisiä. Operaatiolla Piaget tarkoittaa juuri tällaisia toimintoja, jotka lapsi voi sisäistää ja jotka ovat käännettävissä. Lukumäärän säilyvyyden käsitteen lapsi oivaltaa noin seitsemän ikävuoden vaiheilla. Myöhemmin konkreettisten operaatioiden kaudella lapsi saavuttaa käsityksen myös massan, pituuden ja tilavuuden säilyvyydestä. Lapsi hallitsee luokittelun periaatteen. Hän on tarkka havaitsemaan samanlaisuuksia ja eroja vertaillessaan kohteita toisiinsa. Piaget erottaa luokittelussa yksinkertaisen ja kerrannaisen luokittelun. Yksinkertainen luokittelu perustuu vain yhden ominaisuuden mukaan luokitteluun. Kerrannaisessa luokittelussa ominaisuuksia on mukana kaksi tai useampia. Lapsen vertailukyky kehittyy. Hän kykenee muodostamaan sarjoja eli järjestämään esineitä jonkin ominaisuuden mukaan niin, että muodostuu jatkumo esim. pienimmästä suurimpaan. Konkreettisten operaatioiden kauden nimikin viittaa siihen, että lapsi on fyysikaalisen maailman peruskäsitteiden muodostumisesta ja päättelyn tasostaan huolimatta ongelmanratkaisussaan ja ajattelussaan sidoksissa siihen, mistä hänellä on konkreettisiä kokemuksia ja mistä hänellä on havainnollisia mielikuvia. (Copeland 1984, 406 - 409; Hohmann ym. 1992, 148 - 150, 168 - 169; Kallonen-Rönkkö 1986, 4 - 6; Kivi 1995, 32; Takala & Takala 1992, 126 - 127.)

Piaget'n teoria henkisen kehityksen etenemisestä on kehityspsykologisesti ajatellen merkittävä. Teoriaa on kritisoitu paljon, etenkin Piaget'n määrittelemien ikäkausien osalta. Lapsen kehitys on moniulotteisempaa ja kokonaisvaltaista. Jollakin kehityksen osa-alueella - sellaisella, mistä hänellä on paljon kokemusta - lapsi voi olla hyvinkin kehittynyt. Mutta jos mitataan kehitystä lapselle oudommalta alueelta, voi taso olla paljon alhaisempi kuin lapsella keskimäärin yleisesti ottaen on. Piaget'n teorian heikkoutena on pidetty myös sitä, ettei siinä oteta huomioon riittävästi ajattelun ja oppimisen kontekstisi-

donnaisuutta eli riippuvuutta lapsen omasta todellisuuden tulkinnasta. Fyysistäkin maailmaa koskeva ajattelu muovautuu sosiaalisessa vuorovaikutuksessa. (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 117 -118).

Piaget on esittänyt teoriassaan myös näkemyksensä lapsen matemaattisen ajattelun kehittymisestä. Matemaattisen ajattelun kehittymisestä Piaget on eritellyt tarkemmin omaksi alueekseen lukukäsitteen kehittymisen.

2.6.2 Matemaattisen ajattelun kehitys Piaget'n mukaan

Piaget'n teoria antaa omalta osaltaan perustelunsa konkreettisen, leikinomaisen ja toiminnallisen matematiikan alkuopetuksen toteuttamiselle. Lapsen matemaattisen ajattelun kehityksestä puhuttaessa on huomioitava se, että matemaattiset valmiudet rakentuvat koko ajattelun kehitykselle. Ei ole olemassa jotakin erityistä matemaattisen ajattelun osaluuetta vaan lapsen ajattelun kehittyminen on kokonaisuus, jossa kaikki vaikuttaa kaikkeen. Oman opetuskokeiluni lähtötason arvioinnin tehtävät perustuvat Piaget'n teoriaan loogis-matemaattisten operaatioiden kehittymisestä. Lähtötason arvioinnin eri tehtävissä tutkittiin mm. lukumäärän säilyvyyttä, transitiivista päättelyä ja pienten esinejoukkojen lukuisuuksien vertailua.

Piaget nostaa esiin joukon matemaattis-loogisen ajattelun perusvalmiuksia, joiden hallinta on edellytyksenä myöhemmälle matemaattisen ajattelun kehitykselle. Lähtökohtana on ajatus, että ennen kuin varsinaisesti lukumääriä koskevat aritmeettiset operaatiot voivat tulla mahdollisiksi, lapsen on ensin konstruoitava lukuisuuden käsite ja lukuisuuksien vertailujen operaatiot. Varsinainen lukujen ymmärtäminen on mahdollista konkreettisten operaatioiden kauteen siirryttäessä. Piaget'n teorian ajattelumalleista matematiikkaan, erityisesti määrien havaitsemiseen ja käsittelyyn, kytkeytyvät erilaiset säilyvyyden ymmärtämiseen liittyvät ajattelumallit. Piaget kutsuu näitä ajattelumalleja loogis-matemaattisiksi operaatioiksi. Keskeisimpiä ovat yksi yhteen -vastaavuus, lukumäärän säilyvyys, transitiivinen päättely ja pienten esinejoukkojen lukuisuuksien vertailu. Kyetäkseen tekemään vertailuja lapsen on ymmärrettävä käsitteet enemmän, vähemmän ja yhtä monta. (Kallonen-Rönkkö 1986, 7 - 8; Piaget & Inhelder 1977, 95 - 97; Vauras ym. 1994, 56 - 57; Vornanen 1984, 18.)

Yksi yhteen -vastaavuuden hallinnalla tarkoitetaan sitä, että lapsi ymmärtää esinejoukkojen koostuvan elementeistä, jotka määrällisen vertailun suorittamiseksi voidaan asettaa yksi yhteen -suhteeseen toisen esinejoukon elementtien kanssa. Laskettavien elementtien ominaisuuksista ei välitetä, jolloin jokainen elementti vastaa toista. Esim. yksi appelsiini, yksi puu ja yksi ihminen vastaavat toisiaan lukumäärältään eli $1 = 1 = 1$. Lukumäärän säilyvyyden havainto ilmenee siten, että lapsi ymmärtää esinejoukon lukumäärän pysyvän samana sen ulkonäössä aiheutetuista muutoksista huolimatta, jollei määrään lisätä eikä määräästä vähennetä mitään. Esim. 18 nappia on edelleen 18 nappia, vaikka napit pantaisiin kasaan tai riviin tai ne jaoteltaisiin kuuden tai yhdeksän napin osajoukkoihin. Transitiivinen päättely edellyttää valmiutta yhdistää eri joukkojen lukuisuutta koskevia tietoja ja tehdä niiden perusteella päätelmiä. Lapsi oppii ymmärtämään, että jos $A = B$ ja $B = C$,

niin $A = C$. Transitiivinen päättely yleistyy edellisestä päätelmästä käsittämään useampien joukkojen välisiä vertailuja. Esim. Jos Kallella on enemmän karkkeja kuin Matilla ja Ristolla on vähemmän karkkeja kuin Matilla, niin kummallako on enemmän karkkeja, Kallella vai Ristolla? (Beard 1971, 84 -85; Copeland 1984, 106 - 108; Kallonen-Rönkkö 1986, 7 - 8; Piaget 1952, 25 - 38; Piaget & Inhelder 1977, 95 - 97, 103; Vauras ym. 1994, 57.)

Matematiikan alkeiden oppiminen ja ymmärtäminen perustuu ennen kouluikää hankituille taidoille. Matemaattinen ongelmanratkaisu perustuu myöhemminkin näihin taitoihin sekä niiden automatisoitumiseen. Tämä tukee käsitystä matematiikan hierarkista rakenteesta. Matematiikan oppimista voidaan pitää selvemmin varhaisempien taitojen varaan rakentuvana kuin monien muiden kouluaineiden oppimista. Matemaattis-looginen ajattelu alkaa kehittyä jo varhaislapsuudessa. Kognitiivisen kehityspsykologisen näkemyksen mukaan tätä kehitystä ohjaavat lapsen oman kypsymisen ohella sekä lapsen fyysinen että sosiaalinen ja kulttuurinen toimintaympäristö. Lapsen esineympäristö, leikkikäytännöt ja muut arkipäivän toimet määräävät osaltaan lapsen ajattelun kehittymistä ja sitä konstruointiprosessia, jonka avulla hän alkaa ympäristöään jäsentää ja ymmärtää. Kouluikään mennessä lapset ovat yleensä kehittäneet suuren määrän matemaattis-loogisen ajattelun valmiuksia, joita he käyttävät käytännön tilanteiden määrällisissä ja loogisissa päättelyissään. Lasten välillä voi olla suuriakin yksilöllisiä eroja, koska he tulevat niin fyysisiltä kuin sosiaalisilta ominaisuuksiltaan hyvin erilaisista ympäristöistä. Selvät kehitysviivästymät koulutulokkailla matemaattis-loogisissa taidoissa ovat melko harvinaisia. Kuitenkin poikkeuksellisen puutteellinen ympäristö lapsuusaikana voi hidastaa näiden taitojen kehitystä. Tällaisissa tapauksissa esiintyy yleensä viivästymistä myös muilla kehityksen osa-alueilla. (Lyytinen ym. 1995, 183; Vauras ym. 1994, 56.)

Piaget'n teoria antaa vankan pohjan konstruktivistiselle oppimiskäsitykselle, erityisesti sen opettajalle asettamille vaatimuksille oppilaantuntemuksesta ja oppilaiden aikaisempien tietojen sekä ennakkokäsitysten tuntemisesta. Konstruktivismi perustuu Piaget'n teoriaan ja Piaget'n voidaan sanoa olleen konstruktivistisen ajattelun "isä".

3 OPETUSKOKEILUN TOTEUTTAMINEN

Aloitin työt 16. 8. 1999 luokanopettajan sijaisena Kuusamon kunnan Törmäsen koulussa. Koulu on kolmiopettajainen sivukylän koulu, jossa oli 45 oppilasta syyslukukaudella 1999. Minun luokallani oli 12 oppilasta, 5 ensimmäisellä luokalla ja 7 toisella luokalla. Opetuskokeiluni toteutin oman työni ohessa omassa luokassani. Kokeiluun osallistuivat yhdysluokan opetuksellisista järjestelyistä johtuen molemmat luokat, vaikka pääasiallinen kohderyhmä olivatkin ensimmäisen luokan oppilaat. Viikoittain oli käytössä kaksi jakotuntia, jotka käytin yleensä kokeiluuni ensimmäisen luokan oppilaiden kanssa. Jakotunneilla toisen luokan oppilaat olivat 3 - 4 -luokan opettajan ohjauksessa.

Luvan opetuskokeilun järjestämiseen olin saanut koulun johtajaopettajalta jo keväällä puhelimesta sijaisuudestani sopiessamme. Heti koulun alkaessa pyysin lasten vanhemmilta luvan lasten tietojen käyttämiseen tutkimuksessani. Luvan kysymiseen käytin kirjallista lupahakemusta (liite 2). Kaikki vanhemmat antoivat suostumuksensa ja olivat innostuneita mm. lastensa koulutyön videoimisesta.

Tunnelmat koulun alkaessa olivat puolin ja toisin innostuneen odottavat. Kerroin oppilaille opetuskokeilustani ja siitä, että matematiikan tunneilla tulemme leikkimään, pelaamaan ja tekemään monenlaisia harjoituksia kirjan tehtävien lisäksi. Samoin kerroin toiminnan videoimisesta ja se herätti jännittyneitä innostusta oppilaissa.

3.1 Lähtötason arviointi ja tulokset

Aloitin opetuskokeilun tutustumalla oppilaisiin ja heidän matemaattisiin taitoihinsa. Konstruktivistinen oppimiskäsitys painottaa oppijan aikaisempien tietojen ja taitojen merkitystä uuden oppimisessa. Opetuksen suunnittelu pohjautuu oppilaantuntemukseen ja erityisesti oppilaiden tietojen ja taitojen tuntemukseen. Oppilaan tuntemus on opettajalle tärkeä työväline. Tutustuminen tapahtui pienessä ryhmässä nopeasti. Oppilaiden havainnointi luokkatyöskentelyssä antoi minulle opettajana paljon tietoa heidän taidoistaan.

Oppilaiden matemaattisten valmiuksien ja taitojen arvioinnin tein yksilöllisesti jokaiselle ensimmäisen luokan oppilaalle toisella kouluviikolla. Käytin testinä Turun oppimiskeskuksen diagnostisen testistön koulutulokkaille tarkoitetusta matemaattisten taitojen testistä muokkaamaani versiota (liite 3).

Testi koostui matemaattisloogisen ajattelun tehtävistä (joukkojen vertailu, transitiivinen päättely ja lukumäärän säilyvyys), lukujonotaitoja mittaavista tehtävistä (lukujen spontaani luettelutaito, esineiden lukuisuuden määrittely, lukujen luettelutaito annetusta luvusta, annetusta luvusta annetun luvun verran ja annetusta luvusta toiseen annettuun lukuun sekä eteen- että taaksepäin) ja spontaaneja aritmeettisia perustaitoja mittaavista tehtävistä. (Salonen ym. 1994.)

23.8. Aloitin tänään ekaluokan testaamisen, alkumittauksen, yksilöllisesti. Ajankohtana iltapäivä ei ole paras mahdollinen, mutta "avustajateknisistä" syistä se on ainoa mahdollinen aika näin alkuvuikosta minulle irrottautua luokasta. Testi on siis Diagnostisesta testistöstä hiukan muokattu matemaattisten taitojen testi koulutulokkaille. Tein testin jokaiselle yksilöllisesti opettajanhuoneessa, Sakari-avustaja puuhaili sillä aikaa muiden oppilaiden kanssa. Aikaa meni n. 20 - 25 min per oppilas ja ehdin tänään ottaa neljä, Susanna jäi huomiselle. Testaaminen oli helppoa, olin perehtynyt testiin hyvin muokattessani sen itselleni "selkokielelle". Testissä oli oppilaille vaikeitakin osioita, mm. lukujen luetteleminen taaksepäin alkaen jostain tietyistä luvusta päättyen johonkin tiettyyn lukuun (esim. 13:sta 8:aan) alkaen oli suurelle osalle hankalaa. Raskasta hommaa tuo testaaminen, saman toistaminen juuri samalla tavalla neljä kertaa peräkkäin ei ole ihan kevyt juttu.

Arvioinnin tulokset kirjasin sekä oppilas- että tehtäväkohtaisesti. Testin tulosten arvioinnissa käytin apuna Salosen ym. (1994) tutkimusta. Vertasin lopuksi omien oppilaitteni tehtävistä saamia pistemääriä alkuperäisessä tutkimuksessa mukana olleiden lasten saamiin tuloksiin. Sain tällä tavalla lisää luotettavuutta tulosten arviointiin. Koko testin maksimipistemäärä oli 29 pistettä. Essi sai 25/29, Susanna 24/29, Tuomas 20/29, Mirka 18/29, ja Ville 12/29. Kokonaispistemäärää ei voi verrata alkuperäisen testin pisteisiin, koska olen muokannut testiä mm. jättämällä viimeisen osion pois sen pisteytyksen epäselvyyksien vuoksi (Salonen ym. 1994, 124).

Matemaattisloogista ajattelua mittaavien tehtävien maksimipistemäärä oli 5. Oppilaistani Mirka sai täydet 5 pistettä, Essi 4 pistettä, Susanna sekä Tuomas saivat molemmat 3 pistettä ja Ville 2 pistettä. Alkuperäisessä tutkimuksessa mukana oli 217 lasta ja heidän keskimääräinen pistemääränsä oli 4. Heistä 49% oli ratkaissut kaikki osion tehtävät oikein ja 5% oli osannut ratkaista vain yhden tai ei yhtään tehtävistä oikein.

Joukkojen vertailutehtävä meni jokaisella oikein. Transitiivisen päättelyn tehtävässä vain Tuomaksella tuli virhe. Tuomaskin kyllä vastasi kysymykseen oikein, että punaisessa laatikossa on enemmän karkkeja kuin valkoisessa, mutta perusteluksi hän sanoi: "Minä vaan arvasin". Perustelut vaikuttavat pisteytykseen testin ohjeiden mukaan siten, että jos perustelut osoittavat lapsen vastauksen virheellisesti päätellyksi, niin vastaus tulee merkittä vääräksi. Mirka perusteli vastaustaan: "No ku siinä on kerta enempi ku tuossa (osoittaa sinistä laatikkoo), nii siinä on sitte enempi ku tuossakin" (osoittaa lopuksi valkoista laatikkoo). Tehtävässä lapsen on kyettävä operoimaan käsitteillä enemmän, vä-

hemmän ja yhtä paljon. Tämä tehtävä ja osa muistakin testin tehtävistä oli hyvin paljon samanlaisia kuin Vornasen (1984) omassa tutkimuksessaan käyttämät tehtävät. Molempien testien tehtävät perustuvat Piaget'n teoriaan matemaattisen ajattelun kehittymisestä.

Tämän osion tehtävistä hajonta oli suurin viimeisessä, lukumäärän säilyvyyden ymmärtämistä mittaavassa tehtävässä. Kaikilla ensimmäisen luokan oppilaillani säilyvyyskäsite ei ollut vielä koulun aloitusvaiheessa selkiintynyt, esim. Ville ei saanut näistä lukumäärän säilyvyyden käsitettä mittaavista tehtävistä yhtään oikein. Hän sanoi nappien lukumäärän muuttuneen, kun niiden järjestystä muutettiin. Ville sanoi näin siitakin huolimatta, että laski napit ohjeiden vastaisesti. Susannakin varmisti päättelynsä laskemalla napit kahdessa viimeisessä kohdassa, sen vuoksi hän sai vain yhden pisteen tehtävästä. Myös Essi ja Tuomas vastasivat virheellisesti nappien lukumäärän muuttuneen viimeisessä kohdassa. Essi perusteli virheellistä päätelmäänsä sanomalla: ”Kun kerta on pitemmät välit niin on enempi nappejakin.”.

Piaget'n mukaan lukumäärän säilyvyyden käsite ja sen ymmärtäminen kehittyy n. 7 vuoden iässä eli siirryttäessä konkreettisten operaatioiden kaudelle. Näin ollen edellisen tehtävän tuloksista voi päätellä, että oppilaani ovat tältä osin vasta siirtymässä konkreettisten operaatioiden kaudelle ajattelun kehityksessään. Toisissa tehtävissä oppilaat, erityisesti Tuomas, toimivat kuitenkin jo konkreettisten operaatioiden kaudelle ominaisella tavalla. Erilaisten tehtävien mukaan he vaikuttivat olevan ajattelun kehityksessään eri tasoilla. Ilmeisesti oppilaat pärjäsivät paremmin heille ennalta tutummissa tehtävissä. Tämä ajattelun kehitysvaiheiden tiukasta jaottelusta johtuva sama ristiriita on esitetty Piaget'n teoriaan perustuvien tutkimusten yhteydessä aikaisemminkin.

Seuraavassa osiossa mitattiin lukujonotaitojen hallintaa. Tämän osion merkittävyys oli suurin koko testissä, sillä oppilaan matemaattisten taitojen kehittymisen kannalta keskeisiä ovat juuri lukujonotaidot ja niiden hallinta kouluun tultaessa (Salonen 1994, 95). Osion maksimipistemäärä oli 20. Oppilaani saivat pisteitä seuraavasti: Essi 18/20, Susanna 17/20, Tuomas 13/20, Mirka 10/20 ja Ville 8/20. Villen kohdalla jätin osan loppupuolen vaikeimmista kysymyksistä tekemättä, koska helpommisakin tehtävissä oli selvästi hänelle liian vaativia. Ville oli oppilaista ainoa, joka ei yrittänytkaan vastata kaikkiin kysymyksiin. Hän vastasi useampaan tehtävään: ”Emmä ossaa” tai ”En tiä”.

Lukujonotaidot voidaan jaotella neljään tasoon. Eri tasoja mittaavia tehtäviä sisältyi lähtötason arviointiin. Ensimmäinen taso on lukujen luettelemista loruna eteenpäin ja taaksepäin. Esimerkkitehtävä tältä tasolta voisi olla: luettele eteenpäin luvusta yksi. Toisella tasolla lapsi osaa laskea annetusta luvusta eteen/taaksepäin, esim. luettele eteenpäin luvusta 15 tai luettele taaksepäin luvusta 20. Kolmannella tasolla lapsi osaa laskea annetusta luvusta annettuun lukuun eteen/taaksepäin. Esimerkkitehtävä: luettele luvusta 6 lukuun 9 tai luettele luvusta 12 lukuun 8. Neljännellä, kehittyneimmällä tasolla lapsi osaa laskea annetusta luvusta annetun luvun verran eteen/taaksepäin. Tällä tasolla lapsi kykenee ratkaisemaan ongelmanratkaisutehtäviä, esim. minkä luvun saat, kun lasket 8:sta viisi eteenpäin tai minkä luvun saat, kun lasket 12:sta kuusi taaksepäin. (Ikäheimo ym. 1997, 13.)

Lukujen spontaani luetteleminen eteenpäin kuuluu lukujonotaitojen ensimmäiselle tasolle. Tämä ei tuottanut kenellekään oppilaista vaikeuksia. Ville ja Mirka luettelivat 30:een asti

virheittä ja lopettivat siihen. Muut oppilaat luettelivat yli 50:n ja keskeytin heidät. Susanna aloitti lukujen luettelemisen sanomalla: ”Osaan vaikka tuhanteen!”. Alkuperäisten tutkimustulosten mukaan lapsista 74% osasi luetella luvut 1 - 50 virheettömästi ja 2%:lla ilmeni selkeitä vaikeuksia lukujen luettelemisessä. Esineiden lukuisuuden määrittäminen eli nappien laskeminen onnistui jokaiselta täysin ongelmitta. Salosen ym. (1994, 122) tuloksissa tässä tehtävässä ilmeni virheitä 15%:lla lapsista.

Lukujonotaitojen toiselle tasolle kuuluu taito, että lapsi osaa luetella annetusta luvusta eteen/taaksepäin, esim: luettele eteenpäin luvusta 15 tai luettele taaksepäin luvusta 20. Eteenpäin luettelemisessa Villellä ja Mirkalla tuotti vaikeuksia kymmenylitys: kumpikaan ei osannut jatkaa eteenpäin luettelemista aloitusluvun ollessa 19. Taaksepäin luettelemisen pysähtyi heillä myös kymmenylitykseen. Lukujen luetteleminen eteenpäin oli yleensä ottaen oppilaille helpompaa kuin lukujen luetteleminen taaksepäin. Samanlaisia tuloksia ilmeni myös alkuperäisessä tutkimuksessa: 9%:lla lapsista oli vaikeuksia eteenpäin luettelemisessä ja 17%:lla taaksepäin luettelemisessä. Luvusta eteen- ja taaksepäin luetteleminen ovat diagnostisesti ”kriittisiä” matemaattisten perustaitojen rakentumisessa ja laskusuoritusten automatisoitumisessa (Salonen ym. 1994, 123).

Kolmannella tasolla lapsi osaa luetella annetusta luvusta annettuun lukuun eteen/taaksepäin. Esimerkkitehtävä: luettele luvusta 2 lukuun 7 tai luettele luvusta 13 lukuun 8. Susanna hallitsi virheettömästi lukujen luettelemisen sekä eteen- että taaksepäin myös tällä tasolla. Samoin kuin edellisessä, tuotti myös tässä taaksepäin luetteleminen oppilaille vaikeuksia.

Neljännellä, kehittyneimmällä tasolla lapsi osaa luetella annetusta luvusta annetun luvun verran eteen/taaksepäin. Susanna, Tuomas, Mirka ja Essi tekivät osan myös tämän tason tehtävistä oikein. Villelle en esittänyt vaikeimpia tehtäviä, koska helpommatkin tuottivat hänelle vaikeuksia. Erityisen hankalaa oppilaille oli annetusta luvusta annetun luvun verran taaksepäin luetteleminen, esim. ”Minkä luvun saat, kun lasket neljästä kolme lukua taaksepäin?” Osaltaan vaikeutena voi olla ”luvun” käsite. Oppilaat olivat kummastuneen näköisiä kuullessaan kysymyksen. Yritinkin auttaa esittämällä kysymyksen uudestaan vaihtaen luvun paikalle sanan numero. Se ei kuitenkaan paljoa auttanut. Jokaisella oppilaalla esiintyi virheitä näissä tehtävissä. Tulokset eivät kuitenkaan liene huolestuttavia, sillä alkuperäisessä tutkimuksessa n. 20%:lle lapsista annetusta luvusta annetun luvun verran eteen- ja taaksepäin laskeminen olivat ylivoimaisia.

Testin viimeinen osio mittasi oppilaiden aritmeettisten perustaitojen hallintaa. Osion maksimipistemäärä oli 4. Maksimipistemäärään ylsivät Tuomas ja Susanna, Mirka ja Essi saivat molemmat 3 pistettä ja Ville 2 pistettä. Ville oli testin tässä vaiheessa väsynyt, hän haukotteli ja ilmaisi pitkästymisensä selvästi. Alkuperäisessä tutkimuksessa spontaanit aritmeettiset taidot olivat kehittyneet noin kolmasosalla lapsista ja 10%:lla lapsista ilmeni selviä puutteita näissä taidoissa eli he olivat osanneet ratkaista vain yhden tai eivät sitäkään tehtävistä oikein.

Nappien käyttäminen apuvälineinä laskemisessa oli sallittua alkuperäisessä tutkimuksessa. Tuomasta lukuunottamatta kaikki oppilaani selvästi käyttivätkin nappeja konkreettisenä materiaalina hyväkseen laskutehtävissä. Esim. kun tehtävässä pyydettiin ottamaan rasiasta neljä nappia enemmän kuin pöydällä jo oli, ottivat oppilaat ensin yhtä monta

nappia kuin pöydälläkin ja järjestivät ne pöydällä jo olleiden nappien viereen ja tämän tehtyään ottivat vielä neljä nappia lisää. Samoin tehtävässä, jossa piti ottaa viisi nappia vähemmän kuin pöydällä oli, oppilaat ottivat ensin yhtä monta kuin pöydälläkin oli ja sitten laittoivat viisi napeista pois. Tuomas näytti laskevan tehtävät päässään ja otti suoraan tarvittavan määrän nappeja, ilman välivaiheita. Viimeisen kysymyksen kohdalla (Kuinka monta nappia pitäisi poistaa kahdeksasta pöydällä olevasta napista, jotta jäljelle jäisi neljä nappia?) Tuomas vastasi hiukan tuohtuneena: ”No puolet tietenki!” ja otti riva-kasti neljä nappia pois. Tuomas osoittautuikin syyslukukauden aikana nokkelaksi ja nopeaksi laskijaksi matematiikan tehtävissään, vaikka ei alkumittauksessa parhaiten menestynytäkään.

Useissa, mm. johdannossa esittelemissäni tutkimuksissa on todettu olevan merkitystä sillä, millaisin matemaattisin perusvalmiuksin lapsi aloittaa koulun. Erityisesti lukujonotaitojen ja kymmenjärjestelmän periaatteiden jonkin asteinen hallinta on edellytys sille, että lapsi saavuttaisi ensimmäisen luokan aikana vähintään keskitasoiset matemaattiset taidot. Taitava edistyminen vaatii jo automatisoitunutta lukujonon käsittelyä sekä hyvin hallittua matemaattis-loogista ajattelua. Koulutulokkaalla on matemaattisia valmiuksia, joiden varaan matematiikan opetus perustuu. Kouluun tullessaan lapset yleensä ymmärtävät lukuisuuden käsitteen ja hallitsevat lukuisuuksien vertailua: mm. enemmän, vähemmän, yhtä monta, yksi yhteen -vastaavuus ja lukumäärän säilyvyys. Suurin osa koulutulokkaisista ymmärtää lukujonon merkitsevän määrällistä kasvua ja osaa liikkua ajatuksellisesti lukujonossa eteen- ja taaksepäin. Suurimmalla osalla on myös kehittymässä peruslaskutaitojen pohjana oleva taito käyttää lukuja yhtäsuuruuden toteutamisessa sekä yhteen- ja vähennyslaskuissa pienellä lukualueella. (Kinnunen & Vauras 1998, 271 - 272.)

Koulutulokkaiden matemaattisissa taidoissa on suuria yksilöllisiä eroja. Erot näkyivät myös omien oppilaitteni kohdalla. Essi, Susanna ja Tuomas osoittivat jo alkumittauksessa hallitsevansa monia alkuopetuksen matematiikan keskeisiä taitoja, kun taas Mirka ja Ville olivat taidoiltaan heikompia. Erityisesti Ville erottui joukosta taidoiltaan muita heikompana.

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan jokaiselle oppilaalle on tärkeää saada aloittaa omalta tasoltaan ja edetä omien taitojensa ja edellytystensä mukaista tahtia. Opettajana minulle on tärkeää tietää, mitä oppilaani osaavat ja millä tasolla he ovat matemaattisissa taidoissaan. Vasta oppilaiden tiedot ja taidot tunteva opettaja voi suunnitella ja toteuttaa matematiikan opetustaan konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan.

3.2 Lukukäsitteen kehittyminen

Opetuskokeilussani lähdimme liikkeelle perehtymällä lukukäsitteeseen. Lukukäsitteen kehittyminen on läheisessä yhteydessä sarjoittamiseen ja luokitteluun. Myös luokittelua ja sarjoittamista kertosimme mm. järjestämällä esineitä eri ominaisuuksien mukaan (esim. koko tai väri). Laskimme monenlaisia asioita: palikoita, pikkuesineitä, simpukoita, luonnonmateriaalia, rahoja ja hintoja jne. Pelasimme ”Varo, se sulaa” -peliä. Tutkimme päivittäin kalenteria ja järjestäjät tekivät rautalankoihin päivämäärän helmillä kymmenjärjestel-

män mukaisesti. Käytimme lukua kymmenen isompiin lukuihin tutustumiseen; simpukka-kasasta laskettiin kymmenen kasoja ja näistä kymmenen kasoista saatiin sata jne. Hajoitimme lukuja mm. käyttämällä kymmenen munan munakennoa ja kahta eri väriä olevia massapalloja.

Pyrin säilyttämään kaikessa toiminnassa konkreettisuuden ja välttämään liian aikaista siirtymistä symbolitasolle. Varsinaisissa paperilla tehtävissäkin laskutehtävissäkin oppilaila oli käytössään toimintamateriaalia mm. palikoita tai helminauha. Jokaisen oppilaan omakohtaiseen kokeiluun ja tutkimiseen soveltuva toimintamateriaali kytkee oppimisen käytännön toimintaan. Opetin oppilaat käyttämään aina mukana olevaa välinettä, omia sormia. Sormet ovat lapsille luonnollinen apuväline laskemiseen. Opetin oppilaat laskemaan sormistaan johdonmukaisesti, aina samalla tavalla. Näin he oppivat pian, että yhdessä kädessä on viisi sormeaa, eikä niiden määrää tarvitse joka kerta erikseen laskemalla tarkistaa. Oppilaat nimesivät sormet osuvasti ”sormilaskukoneeksi”.

Lukumäärän ja sitä vastaavan numeromerkin yhdistämistä harjoittelimme paljon erilaisilla välineillä. Luokasta, luonnosta ja omasta kehosta etsittiin esim. kaksi jotakin.. Noppa oli hyvä väline. Käytin mm. tavallisia arpanoppia ja itse valmistamiani isoja, pehmonoppia (särmä n. 10 cm) eri tavoin, mm. noppapelissä, jossa nopalla heitetään ja nostetaan nopan osoittaman numeron kohdalta kortti, josta lukutaitoinen oppilas lukee tehtävän, joka tehdään. Arpakuutioita minulla oli käytössä kahdenlaisia: sellaisia, joissa lukumäärä on merkitty pistein ja sellaisia, joissa lukumäärä on merkitty numeromerkillä. Numeromerkejä opettelimme tunnistamaan mm. tunnustelemalla valmistamiani hiekkapaperinumeroita, tutkimalla muovisia numeromerkejä ja muodostamalla numeroita omasta kehosta yksin ja parin kanssa. Varsinaiseen numeromerkkien kirjoittamiseen siirryttiin tauluun ja kaverin selkään piirtämisen sekä suurten lattianumeroiden ”läpikävelemisen” kautta paperin ja kynän avulla tapahtuvaan harjoitteluun. Kaiken uuden opettelemisen aloitimme konkreettisesta toiminnasta eri materiaalien avulla ja siirryimme pikkuhiljaa kohti saman asian symbolista esittämistä. Tällä tavalla pyrin auttamaan heikompia ja hitaampia oppilaita, kuten Villeä, kehittämään lukukäsitettään edelleen.

Heti kokeilun alkuvaiheessa huomasin ensimmäisen luokan oppilaista Villen erottuvan joukosta matemaattisten taitojensa suhteen. Alkumittaus vahvasti havaintoni ja osoitti Villen olevan taidoiltaan muita heikempi. Lukukäsitteen ja lukujonotaitojen hallintaa vaativissa tehtävissä Ville oli selvästi hitaampi ja heikempi kuin muut. Päiväkirjassani on useita merkintöjä ja pohdintoja Villestä ja hänen taidoistaan.

17.8. Annoin oppilaille pieniä lukujonotehtäviä: aloitettiin 4:stä ja jokainen sanoi omalla vuorollaan oikean luvun lukujonoon. Helppoilla luvuilla onnistui myös ekaluokalta, kymmenen ylikin meni jokakerta (kun on siis 12 lasta). Mutta isommilla (esim. 18) aloitettaessa piti kakkosten auttaa. Jussille ja Villelle kuulosti olevan hankalaa. Villen matemaattisia taitoja mietiskelin, osaako hän vai onko vain niin hidas ja hiljainen, että toiset ehtii aina ensin tai auttamaan häntä?

19.8. Torstain jakotunnilla teetin ykkösille lukukäsitetehtävän. Tehtävissä piti vetää viiva aina ohjeen mukaan riviltä löytyvien esineiden päälle. Tehtävän tekemiseen meni koko tunti, hyvin jaksoivat ja osasivat seurata apupaperin avulla, millä rivillä ollaan menossa. Tulokset olivat: Ville 11/ 24, Susanna 18/24, Mirka 18/24, Tuomas 20/24 ja

Essi 24/24. Eli näin äkkiä tulkittuna, Villellä voi olla ongelmia lukukäsitteen hallinnassa. Villen virhetyypit olivat lukumäärän ja järjestyksluvun sekoittamista (vedä viiva toisen kalan päälle, niin Ville oli vetänyt viivan kahden kalan päälle) ja laskutoimituksia vaativissa tehtävissä, mm. yhteen- ja vähennyslaskuissa sekä käsite "puolet" oli väärin. Muilla oppilailla virheitä oli myös yleisimmin järjestyksluvun ja lukumäärän kanssa (kahdeksas - kahdeksan).

23.8. Aloitimme kirjan tehtävät molempien luokkien kanssa. Ekaluokan kirjassa oli tehtävänä etsiä kuvasta jotakin tietyn lukumäärän verran. Ville oli ylihidas, hänellä meni tehtävän tekemiseen koko tunti. Muut ehtivät pelaamaan "Varo se sulaa!" -peliä lopputummista.

Lukukäsitteen kehittyminen on läheisessä yhteydessä sarjojen ja luokkainklusioiden muodostamiseen. Vaikka lapsi osaisikin luetella lukuja eli sanallisesti laskea, hän ei välttämättä ymmärrä lukukäsitettä. Todellisuudessa lukumäärän arvioiminen on pitkään yhteydessä elementtien avaruudelliseen sijaintiin. Järjestyksessä olevat elementit on helpompaa laskea kuin epäjärjestyksessä olevat. Jos elementit eivät ole järjestyksessä, lapsilla on taipumus järjestää ne. Jollei lapsi järjestä esineitä konkreettisesti, hän kuitenkin järjestää sen mielessään jollakin tapaa laskiessaan ne. Tämä ehkäisee saman esineen laskemisen useampaan kertaan tai esineiden yli hyppäämisen jättäen ne laskematta. (Kamii 1990, 24 - 25; Piaget & Inhelder 1977, 102 - 103.)

Villen kohdalla lienee kysymys lukukäsitteen kehittymisen hitaudesta. Hän kyllä osasi laskea järjestyksessä olevat elementit (esim. muistipelikorttien kuviot), mutta epäjärjestyksessä olevien kanssa tuli ongelmia: sama elementti saattaa tulla lasketuksi useampaan kertaan tai joku jää kokonaan laskematta. Seuraava katkelma videonauhalla kuvaa Villen laskemista.

2.9. Pojilla on muistipeli menossa. Ville nostaa sinisen kortin, jossa on paljon pallukoita. Hän laskee niitä tarkasti, melkein nenä kiinni kortissa. Ensin ilman sormella seuraamista, lasku menee sekaisin. Sitten uudelleen sormella seuraten. Tuomas tulee viereen kurkistelemaan ja laskee sipisten.

Ville: Yheksän! Tuomas nyökyttelee. Ville kääntää keltaisen kortin. Se on 7. Ville laittaa kortit takaisin.

Lukukäsitteen lähtökohtana on lukumäärän käsite. Lukumääriin liitetään luvut. Lukukäsitteeseen kuuluu kolme eri osa-aluetta: lukumäärä (***) , lukusana (kolme) ja kirjoitettu numeromerkki (3). Luku ja numero ovat siis kaksi eri asiaa. Esim. 235 on luku, joka merkitään numeroin 2, 3 ja 5. Numeroita ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. Luvut kirjoitetaan numeromerkein. Lukukäsitteen oppimisessa on olennaista, että kaikkia lukukäsitteen osa-alueita harjoitellaan riittävän kauan. Lapsen tulee hallita lukumäärän, lukusanan ja numeromerkin keskinäiset vastaavuudet eli käsitteiden väliset yhteydet. Vasta kun tämä on ymmärretty, voidaan sanoa lukukäsitteen olevan hallinnassa. (Ikäheimo ym. 1997, 11.)

Piaget erottaa lukukäsitteen kehittymisessä kolme tasoa. Nämä tasot ovat globaalinen eli perseptuaalinen taso, intuitiivinen taso ja operationaalinen taso. Ensimmäinen taso on globaalinen eli perseptuaalinen eli havaintoon yhdistyvä taso. Tällä tasolla lapsi perustaa

arviointinsa välittömiin havaintoihinsa. Toinen taso on intuitiivinen taso. Silloin lapsi alkaa yritys-erehdys -menetelmää käyttäen yhdistää havaintojaan ja pyrkii intuitiivisesti, ei kuitenkaan tietoisesti, operationaaliin ratkaisuihin. Kolmannella, operationaalisella, tasolla lapsi on vapautunut välittömän havainnon vaikutuksesta ja pystyy määrittämään esineiden lukuisuuden laskemalla ne. (Copeland 1984, 26; Dickson, Brown & Gibson 1984, 181 - 185.)

Piaget testasi lasten lukukäsitteen tasoa asettamalla heidän eteensä esineitä ja antamalla ohjeen: ”Tässä on tietty määrä esineitä, ota sama määrä.” Samanlainen tehtävä oli mukana lähtötason mittauksessani. Lapsi, joka on intuitiivisella tasolla, ei pysty ottamaan testitilanteesta yhtä monta esinettä, jos mallin esineet ovat epäjärjestyksessä. Villen toiminnassa tämä näkyi mm. muistipelin pelaamisessa, jossa piti laskea kuvasta lukumäärä ja yhdistää se oikeaan numeromerkkiin. Ilman selkeää etenemistä ja jonkinlaista esineiden järjestämistä laskeminen meni Villeltä helposti sekaisin. Selvästi rivissä olevien esineiden kanssa tehtävä onnistui kokeilemalla, järjestämällä uudet esineet samalla tavalla mallin mukaan eli yksi yhteen -vastaavuuteen. Näin suurin osa oppilaistani tekikin: he järjestivät napit yksi yhteen -vastaavuuteen valmiiksi annettujen nappien kanssa. Globaalilla tasolla olevat lapset päätyivät aina jonkin verran väärin ratkaisuihin, vaikka yrittivätkin järjestää esineitä. Osa oppilaistani on siirtymässä operationaaliselle tasolle, sillä järjestettyään napit heidän onnistui päästä oikeaan ratkaisuun tehtävässä. Operationaalisella tasolla olevat lapset totesivat testitilanteessa esineiden lukumäärän laskemalla, eivätkä he välittäneet siitä, missä järjestyksessä esineet mallissa olivat. Tuomas on jo selvästi operationaalisella tasolla. Hän tajuaa reversibiliteetin eli ilmiön palautettavuuden tai käännettävyyden. Kolmas vaihe, operationaalinen taso, lukukäsitteen kehittämisessä saavutetaan yleensä konkreettisten operaatioiden kaudelle siirryttäessä. Tämän osion mukaan Tuomas on jo siirtynyt ajattelun kehityksessään konkreettisten operaatioiden kaudelle. (Vornanen 1984, 18 -19, 26 - 27.)

Lapsi kykenee ymmärtämään lukukäsitteen täydellisesti konkreettisten operaatioiden kaudella. Yksilölliset erot ovat suuria, joku ymmärtää lukukäsitteen kokonaisuudessaan jo kauden alkuvaiheessa (6 - 8 vuotiaana) ja joku toinen saavuttaa taidon vasta kauden loppupuolella (10 - 12 vuotiaana). Taidon saavutettuaan lapsi pystyy säilyttämään mielessään lukumäärän ja ymmärtää yksi yhteen -vastaavuuden. Lapsi ymmärtää myös erilaisten mittojen (senttimetri, askel, kämmenen leveys) käyttämisen mittaamisessa. Hän osaa myös jakaa joukon pienempiin yhtä suuriin osiin sekä muodostaa erisuurista joukoista yhtäsuuria. Jatkossa yhä monimutkaisempien käsitteiden ymmärtäminen mahdollistuu, tällaisia käsitteitä ovat esim. ääretön ja tuntematon, kuten x yhtälöissä. (Copeland 1984, 26; Dickson, Brown & Gibson 1984, 181 - 185; Hohmann 1992, 175 -176; Vornanen 1984, 18 -19, 26 - 27.)

3.3 Lukujonotaidot

Lukujonotaitojen harjoittelu liittyi mukaan opetuskokeiluuni jo toisella viikolla eli samanaikaisesti lukukäsitteen harjoittelun kanssa. Lukujonotaitojen harjoitteluun käytimme konkreettista materiaalia ja oppilaita itseään. Oppilaat järjestivät muovinumeroita lukujo-

noksi samoin hiekkapaperinumerot laitettiin tunnustelemalla järjestykseen. Jaoin oppilaille numerolaput ja heidän tuli muodostaa oikea järjestys. Lukujonojen luettelemista harjoittelimme eteen- ja taaksepäin. Pelkkä lukujen rimpsuna luetteleminen ei riitä, vaan tärkeää on oppia tietämään mikä luku on ennen mitäkin ja mikä luku minkäkin luvun jälkeen. Tällaisia taitoja harjoittelimme mm. isojen lattianumeroiden kanssa liikuntasalissa.

2.9. Amman heille jokaiselle vuorollaan jonkinlaisen lukujonotehtävän. Essi menee ensin. Kulkee lukujonon vieressä ja luettelee numerot.

Essi: Nolla, yks, kaks, kol, nel, viis, kuus, seitsemän, kaheksan ja yhdeksän. Loppuun päästyään palaa jonoon salin ovelle.

Minä: Hyvä. Susanna, sinun täytyis löytää semmonen numero, mikä on kolmen ja viiden välissä.

Susanna lähtee liikkeelle, menee suoraan numeron 4 eteen seisomaan.

Minä: Mikä se on?

Susanna: Neljä.

Minä: Hyvä. Sitten tule pois sieltä. Ville. Sinun täytyis löytää kaikista suurin numero.

Susanna palaa pois lukujonon luota ja Ville lähtee liikkeelle. Hän kävelee suoraan yhdeksän luokse ja osoittaa sitä pontevasti useamman kerran sormella.

Minä: Sano, mikä se on.

Ville: Yhdeksän. Juoksee samantien jonoon takaisin. Susanna nauraa jonossa.

Minä: Hyvä. Ja Mirka, sinun täytyis löytää numero, joka on viiden ja seitsemän välissä.

Mirka kävelee suoraan numeron 6 luo. Pysähtyy ja palaa jonoon sanottuaan vastauksen.

Mirka: Kuusi.

Minä: Hyvä. Tuomas, mikä on kaikista pienin numero? Tuomas menee nollan luo.

Tuomas: Nolla.

Kuten edellinen esimerkki osoitti, helpot lukujonotaidot lukualueella 0 - 10 olivat oppilaille hallinnassa jo heti koulun aloitusvaiheessa. Lukujonotaitoja harjoiteltiin jo pian lukualueella 0 - 20. Lukujonoa luettiin eteen- ja taaksepäin vaihdellen aloituslukua. Taaksepäin luetteleminen oli oppilaille vaikeampaa kuin eteenpäin luetteleminen. Sen takia harjoittelimmekin sitä enemmän kuin eteenpäin luettelemista. Taaksepäin luettelemista käytin paljon ”lähtölaskentana” eri asioihin, mm. välitunnille. ”Mikä luku piilossa?”-leikkiä harjoiteltiin ensin lukujonolla 0 - 10 ja seuraavaksi lukujonolla 0 - 20. Lukujonosta peitettiin jokin luku pienellä pyykkipojalla ja lapsen tuli päätellä mikä luku on piilossa.

14.9. Tuomas saa Villeltä uuden tehtävän, piilossa on 18.

Tuomas: Kaheksan...toista.

Ville: Mitä?

Tuomas: Kaheksantoista! No kato. Tässois kaheksan vaan. Kääntää lukujonon Villen suuntaan ja siirtää pyykkipoikaa luvun 18 päällä niin, että vain numero 8 on piilossa.

Ville: Nii onki! Minne minä paan? Laittaa piiloon uuden luvun, 14. Kääntää lukujonon Tuomakselle.

Ville: Yritäpä arvata!

Tuomas: Neljätoista. Helppoa.

Lukujonotaitojen kehittyessä laajennettiin lukualuetta ensin 100:n asti. Mirkalle ja Villelle lukualueen laajeneminen oli esittelynomaista, heidän lukukäsitteensä kehittäminen oli ensisijainen tavoite. Lukualueen laajeneminen ei ollut heidän kohdallaan vielä ajankoh- taista. Tuomas, Essi ja Susanna ottivat laajennetun lukualueen heti todelliseen käyttöön. Satatalolla harjoittelimme lukualuetta 1 - 100. Valmistin koottavan satatalon, jossa on pohjaruudukko valmiina ja lukukortit 1 - 100 irrallisina. Myöhemmin lukualuetta laajen- nettiin aina 150 asti. Tähän oli hyvä käyttää puolentoista metrin mittanauhaa. Mittanau- haä käytettiin myös em. luvun piilottamisleikkiin. Seuraava kuvaus on kokeilun lopussa pidetystä pysäkkityöskentelystä.

14.10. Ville saa pyykkipojan mieleiseensä paikkaan ja näyttää mittanauhaa Susannalle.

Ville: Mikä numero? Susanna katsoo mittanauhaa. Ottaa sen käsiinsä ja katsoo.

Minä: Onkohan vähän liian vaikea teille se?

Susanna: Ei. Satakakskytäneljä!

Minä: Näytäppäs tämepäin. Oliko satakakskytäneljä? Ville katsoo mittanauhaa, Pasi- kin (kakkosluokkalainen) tulee katsomaan. Ville ottaa mittanauhan ja irrottaa pyykkipo- jan. Pasi katsoo tarkasti.

Pasi: Näytä. On! Susanna ja Ville nauravat.

Susanna: No mikä tässä tämä numero on? Näyttää Villelle mittanauhaa, johon hän on pannut pyykkipojan. Ville katsoo. Yritän zoomata, mutta justiin kun saan mittanauhan hyvin näkyviin, Susanna vetää sen eri paikkaan.

Ville: Ei, se on kakssattaakolmekymmentäneljä.

Susanna: Ei oo!

Ville: Kaksattaa sitten.

Susanna: Seitemänkymmentäkahdeksan.

Edellinen esimerkki osoittaa myös oppilaiden tasoerot lukujonotaidoissa. Susannalle oli selvä lukualue 0 - 150, hän osasi päätellä puuttuvan luvun katsomalla sen viereisiä luku- ja. Ville sen sijaan arvasi vastauksensa umpimähkään, pystymättä hyödyntämään näkyvis- sä olevia lukuja. Villen arvaaminen näkyi myös siitä, että koko mittanauhassa ei ole 150:ä suurempia lukuja, kun molemmat hänen vastauksensa ylittävät kyseisen lukualueen. Oppilaille oli mahdollisuus valita piilotettava luku lukujonoista 0 - 10, 0 - 20 ja mittanau- ha 1 - 150. Susanna tekikin aikaisemmat tehtävät Villelle lukujonoon 0 - 20, esimerkin tehtävä oli ainoa mittanauhaan tehty ja selvästi liian vaikea Villelle. Yleensä oppilaat osasivat suhteuttaa antamansa tehtävät parin taitoja vastaaviksi. Tällaista parityöskente- lyssä tapahtuvaa, oppilaiden itsenäisesti tekemää eriyttämistä tapahtui kokeilun aikana useita kertoja. Oppilaille oli muodostunut selkeä käsitys omien taitojensa ohella myös luokkatovereittensa matemaattisista taidoista.

Toinen esimerkki oppilaiden välisistä tasoeroista on samalta pysäkkityöskentelypäivältä, valmiiseen pohjaan lukukorteilla koottavan sataruudukon kokoamisesta. Tehtävä oli tar- koitettu erityisesti toisen luokan oppilaille ja se olikin useimmille ensimmäisen luokan oppilaille vaikea. Pysäkillä ovat Tuomas ja Mirka. Ensin Mirkan näyte sataruudukon ko- koamisesta.

Mirka laskee joka kerta ruudukon alusta ääneen ja osoittaa samalla sormella ruutuja laittaessaan lukuja paikalleen. Mirka menee ruudukon luokse kädessään 21. Hän laittaa luvun 21 luvun 12 alapuolelle, ilmeisesti vertailee niitä keskenään.

Mirka: Hö! Sitten sormella alusta liikkeelle.

Mirka: Yks, kaks, kol, nel, viis, kuus, seittemän, kaheksan, yheksän, kymmenen, ykstoista, kakstoista, kolmetoista, neljätoista, viistoista, kuustoista, seitsemäntoista, kaheksäntoista, yheksäntoista, kaksikymmentä. Mirka laittaa 21:n 20:n paikalle.

Mirkan lukujonotaidot olivat vielä epävarmat, hän varmisti jokaisen luvun paikan lukujonossa laskemalla aina alusta eli yhdestä lähtien tarvittavaan lukuun asti. Paikoilleen jo laitettu luku 10 ei ohjannut Mirkaa laittamaan seuraavaa kymmenlukua sen alapuolelle. Tuomas korjasi myöhemmin luvun 21 oikealle paikalleen. Tuomaksen lukujonotaidot olivat kehittyneemmät kuin Mirkan, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Sataruudukko alkaa olla valmis, vain muutama luku sieltä täältä puuttuu. Mirka pitelee koria ja Tuomas kokoaa. Kokoamisessa on tullut virhe: 71, 72, 73, 74, 76, 77 ja tyhjä ennen 78, 79 ja niin edelleen. Tuomaksella on enää kaksi korttia kädessään, 75 ja 56. Hän kokeilee 75:ä 77:n jälkeen. Ei laita sitä siihen.

Tuomas: Hä? Mirka osoittaa sormella tyhjää koloa 56:n paikalla.

Mirka: Tuohon! Tuomas siirtää kortin sinne, mutta ei laita siihenkään. Tuomas haroo hiuksiaan. Osoittaa sormellaan 65:ä. Siirtää sormensa 71 kohdalle ja alkaa laskea eteenpäin siirtäen sormeaan.

Tuomas: Seitkytyks, seitkytkaks, seitkytkolme, seitkytneljä ... äää! Tuomas huomaa säpsähtäen virheen, ottaa 76:n pois ja vaihtaa kädestään siihen toisen luvun. Hänen kätensä on luvun edessä, joten lukua ei nauhalla näy. Tuomas ottaa senkin pois ja yrittää laittaa sen 77:n jälkeen. Mutta ei ole tyytyväinen siihenkään. Sitten Tuomas ottaa 77:n ja vaihtaa sen 78:n vasemmalle puolelle, tyhjään koloon. Hänellä on edelleen käsissään kolme korttia. Hän kokeilee yhtä niistä 77:n vasemmalle puolelle, se saa jäädä siihen. Kun Tuomas siirtää kättään, näkyy, että 76 on oikealla paikallaan. Seuraavaksi menee 75 nopeasti paikalleen ja viimeisenä 56.

Tuomas: Ope, me tehtiin!

Tuomas selvitti tutkimalla ja kokeilemalla virheellisen järjestyksen oikeaksi. Hän on jo konstruoinut itselleen lukujen etenemisen mallin eli hän tietää ykkösten etenevän samalla tavalla täysien kymmenten välissä, riippumatta kymmenten suuruudesta. Tuomaksen lukujonotaidot alkavat olla taitavimmalla tasolla. Kuitenkin lukujen luetteleminen ääneen auttoi häntäkin, samoin kuin Mirkaa. Lukujen luetteleminen ääneen alkaen 71:stä auttoi Tuomasta huomaamaan virheensä. Puhe ohjaa näin ollen ajattelua myös kehittyneempien taitojen kohdalla. Puheen merkitys ajattelun kehittymiselle on todella suuri.

Oppilaiden numerokortit olivat hyvä väline lukujonotaitojen harjoitteluun. Omat kortit mahdollistivat jokaisen oppilaan samanaikaisen lukujonon kokoamisen ja omakohtaisen kokeilemisen sekä lukujonon säännönmukaisuuksien tutkimisen. Muita välineitä lukujonotaitojen harjoitteluun olivat muovi- ja hiekkapaperinumerot. Seuraavassa muutamia esimerkkejä käyttämistäni harjoituksista.

1.9. Rakensimme tällä kertaa myös palikoilla lukujonoon 0 - 10 vastaavat palikkatornit. Eli numeron 1 kohdalle yksi palikka jne. Lukumäärän ja numeromerkin yhdistäminen omistuu jokaiselta tällä lukualueella. Ville on hidas, mutta osaa kyllä, kunhan muistan antaa hänelle aikaa hiukan enemmän kuin toisille. Nopeina tekijöinä Tuomas ja Essi tekivät toisilleen tehtäviä: toinen otti jonkin numerolapun ja sitä vastaavan palikkator-

nin pois lukujonosta ja toisen piti päätellä mikä puuttuu. Helppoa heille molemmille. Ja mikä parasta: he keksivät idean peliinsä ihan itse.

8.9. Lukujonoharjoitusta muovinumeroilla. Oppilaat rakensivat lukujonon 0 - 10 ja luettelivat numerot minulle alusta loppuun ja lopusta alkuun. Kaikki osasivat. Essillä meinasi mennä pilalle, kun ei meinannut riittää sinisiä ja vaaleanpunaisia numeroita vuorotellen koko lukujonoon. Hiukan odotettuaan ja vaihtokauppaa hierottuaan muiden kanssa sai Essikin oman ”vuorovärisen” lukujonon rakennettua.

Lukujonotaidot ovat keskeinen osa lapsen matemaattisia valmiuksia koulun aloitusvaiheessa. Niinpä oppilaille tekemäni lähtötason arvioinnin tehtävistäkin suurin osa olikin lukujonotaitoja mittaavia tehtäviä. Lukujonotaitojen jonkin asteinen hallinta koulutulokkailla on edellytyksenä sille, että oppilas ensimmäisellä luokalla saavuttaa vähintään keskitasoisen taitotason aritmeettisten operaatioiden hallinnassa.

Lukusanojen luetteleminen ja käyttö lukumäärien laskemisessa on meidän kulttuurissamme niin yleinen tapahtuma, että jo varhaislapsuudessa siitä tulee osa lasten elämää. Jopa kaksi- ja kolmevuotiaat lapset käyttävät lukusanoja puheessaan. Alkuvaiheessa lukujen luettelemisessa ei ole matemaattista sisältöä, vaan se on pikemminkin kielellinen tapahtuma. Lapsi luettelee aluksi lukusanoja kuin mitä tahansa lorua. Lapsi esimerkiksi osaa luotella lukusanat oikeassa järjestyksessä yhdestä kymmeneen, mutta ei osaa aloittaa laskemista mistään muusta luvusta kuin yhdestä eikä osaa myöskään luotella lukusanoja taaksepäin aloittaen kymmenestä. Loru välittää lapselle tiedon määrätystä järjestyksestä ja jäljittelemällä hän oppii liittämään lukusanat laskemiselta näyttävään toimintaan, esim. osoittamaan sormella esineitä ja sanomaan lukusanoja. Tässä vaiheessa lapsi ei varsinaisesti osaa vielä laskea, hän saattaa osoittaa samaa esinettä useamman kerran tai hän saattaa jättää jonkin esineen kokonaan välistä. Pian lapsi oppii käyttämään lukusanoja esineiden lukuisuuden määrittelemiseksi. Tämä tapahtuu lukualueella 1 - 10 ennemmin kuin lukusanojen vakiojärjestys on opittu laajemmin, esim. 1 - 30. (MacLellan 1997, 33 - 34; Vauras ym. 1994, 57.)

Lukusanojen käyttö esineiden lukuisuuden määrittelemisessä on matemaattis-loogiselta sisällöltään monitasoinen tapahtuma. Lapsen matemaattisen ajattelun kehitystaso vaikuttaa siihen, kuinka hyvin hän suoriutuu tehtävästä. Jonoon järjestettyjen esineiden laskeminen jonon avulla on melko yksinkertainen ja mekaaninen tapahtuma. Jos esineet ovat epäjärjestyksessä, on laskeminen vaikeampaa. Epäjärjestyksessä olevien esineiden laskeminen edellyttää jonkinlaista toiminnallista strategiaa, joka perustuu yksi yhteen - vastaavuuteen. Tällaisen strategian käyttö edellyttää myös lukumäärän säilyvyyden käsitteen hallintaa. Esineiden määrä säilyy siis samana sittenkin, kun joukon jokainen esine on siirretty yksitellen uuteen asetelmaan. Lukusanojen ja merkitsemistekniikoiden oikea käyttö epäjärjestyksessä olevien esineiden laskemisessa on taito, joka voi kehittyä joko oman keksimisen tai sosiaalisen mallin kautta. (Vauras ym. 1994, 57 - 59.)

Lukujonotaitojen kehittyminen tapahtuu sääntöjen konstruoinnin kautta. Toisaalta lukujonotaidot kehittyvät myös luvun määrää koskevan (kardinaaliaspekti) ja luvun järjestystä koskevan (ordinaaliaspekti) ominaisuuden integroinnin kautta. Lukusanoja on kielessä niin paljon, että niiden oppiminen ilman tuottamisääntöjen hallintaa olisi mahdotonta.

Näin ollen lapsen on konstruoitava itselleen sellaiset säännöt, joiden avulla lukusanat voidaan tuottaa kunkin kymmenen ylityksen jälkeen. (Piaget 1952, 147 - 157)

Ensimmäisessä vaiheessa lapsi oppii yleensä järjestyksessä lukusanat 1 - 10, mutta kymmenen jälkeisten lukusanojen järjestys vaihtelee sattumanvaraisesti. Lapselle välittyy sosiaalisessa vuorovaikutuksessa ilman varsinaista opettamistakin kielellinen malli, miten tuotetaan kymmenen jälkeisiä lukusanoja liittämällä päätte ”toista” aikaisemmin opittujen lukusanojen perään: yksitoista, kaksitoista jne. Säännön konstruomisesta kertoo tyypillinen virhe lapsen yrittäessä jatkaa lukujen luettelemista yhdeksästätoista eteenpäin: ”...yhdeksätoista, kymmenentoista...”. Seuraava laadullisesti uusi konstruimisprosessi alkaa siinä vaiheessa, kun lapsi alkaa itse tuottaa uusia kymmenlukuja. Lisäämällä päätte ”kymmentä” : kaksikymmentä, kolmekymmentä jne. Samantyyppinen virhe, kuin edellä mainittu ”kymmenentoista”, esiintyy lapsen päästessä sataan asti. Lapsi luettelee lukuja ”... yhdeksänkymmentä, kymmenenkymmentä...” (Piaget 1952, 147 - 157; Vauras ym. 1994, 57 - 59.)

Opetuskokeiluni aikana esiintyi selvästi tällaista lukusanojen konstruimista. Mirkan kohdalla onnistuin dokumentoimaan tällaista toimintaa. Lähtötasomittauksen lukujono-tehtävissä 6 ja 7, Mirka käytti lukusanan kymmenen tilalla sanaa ”nollatoista”. Tämä ihmetytti minua ensin, mutta sitten huomasin kyseessä olevan käänteinen konstruimisprosessi sanalle ”kymmenentoista”. Eteenpäin luettellessa luvut suurenevät: ”...kahdeksantoista, yhdeksäntoista, kymmenentoista...” ja kun kyseessä on taaksepäin luetteleminen, niin luvut vastaavasti pienenevät: ”...kaksitoista, yksitoista, nollatoista...”. Lukujonojen konstruointiprosessit olivat Mirkalla vielä kesken, kuten myös seuraava esimerkki päiväkirjasta osoittaa.

20.9. Ykköset saivat tehtäväkseen laskea ja muodostaa simpukoista kymmenen simpukan kasoja. Simpukat (100 kpl) olivat aluksi korissa, josta oppilaat kaatoivat ne lattialle ja alkoivat muodostaa kymmenen kasoja. Koska ekaluokkalaisia on viisi, homma meni käytännössä niin, että jokainen kasasi kaksi kymmenen simpukan kasaa. Sitten laskemaan: Montako kasaa sinulla on? Montako kasaa teillä kaikilla on yhteensä? Saatiin selville, että kasoja on kymmenen. Ja siitpä nopeimmat (Essi ja Tuomas) päättelivätkin, että simpukoita on kaikkiaan yhteensä sata. Muut olivat hiukan hämmästyneen oloisia ja niinpä yhdessä laskettiin ensin kasoina: Yksi, kaksi ... kymmenen kasaa. Montako simpukkaa yhdessä kasassa olikaan? No, kymmenen. Ja sitten laskettiin kymmenkasat täysinä kymmeninä: Kymmenen, kaksikymmentä, kolmekymmentä yhdeksänkymmentä, sata! Mirka tosin sanoi lopuksi sadan sijaan ”kymmenen kymmentä”. Alkumittauksessa Mirka osasi luetella lukuja suoraan eteenpäin yhdestä alkaen vain kolmeenkymmeneen asti, joten hänen kohdallaan lukualue on laajenemassa hurjasti. Huomasimme, että kun osaa laskea kymmeneen, niin osaa laskea vaikka sataan asti. Oppilaat olivat innoissaan. Me osataan laskea sataan! Simpukkakasoja järjesteltiin jonoon ja erilaisiin muodostelmiin. Vasta myöhemmin oivalsin, että ehkä oppilaat testasivat näin lukumäärän säilyvyyttä: onko sata varmasti sata myös jonossa, kahdessa jonossa ja kymmenkasojen ollessa sekaisin.

Matemaattisen sisällön lukujonoille antaa vasta luvun määrää ja järjestystä kuvaavien aspektien integroituminen. Matemaattisen sisällön omaavasta lukujonotaidosta voidaan puhua vasta sitten, kun lapsi ymmärtää lukujonon järjestyksen edustavan myös määrällis-

tä kasvua. Lukujonotaidoille ominainen ajatuksellinen liikkuminen lukujen järjestelmässä kehittyi monipuolisemmaksi ja nopeammaksi vähitellen. (Keranto 1981, 112 -118; Vauras ym. 1994, 59.)

3.4 Toiminnallinen matematiikka

Opetuskokeilussani pyrin käyttämään mahdollisimman monipuolisia ja toiminnallisia työtapoja matematiikan opetuksessa. Konstruktivistinen oppimiskäsitys edellyttää monipuolisten, erilaisten opetusmenetelmien käyttämistä. Jokainen lapsi oppii ja konstruoi tietonsa omalla tavallaan. Kaikki opetusmenetelmät eivät sovi kaikille oppilaille, joten opettajan on tarjottava erilaisia menetelmiä erilaisille oppijoille. Opetuskokeiluni monipuolisten työtapojen käyttämisen osittaisena perusteluna oli tämä konstruktivistinen ajatus. Halusin oppilaitteni voivan myös kokea matematiikan opiskelun iloisena asiana. Niinpä sisällytin matematiikan tunneilla tapahtuvaan toimintaan monenlaista tekemistä. Erilaisia toimintoja mahtui matematiikan nimikkeen alle monenlaista, kuten seuraavat esimerkit päiväkirjasta osoittavat.

20.8. Luokan seinällä on kalenteri, jonka ajan tasalla pitäminen on järjestäjien homma. Kalenterista rastitetaan aina menossa oleva päivä ja viikonpäivän nimilappu vaihdetaan. Päivämäärä rakennetaan myös helmistä rautalankapätkiin. Kymmenen helmeä samaan pötköön ja sitten jatketaan uuteen. Kymmenluvun ymmärtämistä voi harjoitella näinkin.

24.8. Oltiin "Kapteeni käskee" -leikkiä numerokorttien avulla. Minä olin kapteeni ja näytin korteilla, hyppää näin monta kertaa, nosta käsi ylös näin monta kertaa jne.

26.8. Opeteltiin uusi laulu, "Numerot". Pitkä laulu, jokaisesta numerosta 1 - 10 on oma säkeistönsä. Innokkaita laulajia on tämä sakki.

1.9. Ykköset rakentelivat malleista palikoilla. Olipas yllättävän vaikeaa! Hyvää hahmottamisharjoitusta: katso kortista kuva ja rakenna palikoilla samanlainen.

7.9. "Etsi yhtä monta"-leikki oli lapsista helppo alustan (ruudutettu pahvialusta, joka ruudussa jonkin luonnonmateriaalin kuva ja vieressä numero) kanssa ja kaikki saivatkin kerättyä oikean määrän käpyjä ym. Otin sen uudelleen vaikeutettuna; annoin ohjeet suullisesti, ilman alustaa, ja sitten etsimään. Kaikki toivat tälläkin kertaa oikean määrän, vaikka muistamista oli useampia asia: 3 käpyä, 5 punaista lehteä, 1 vihreä lehti, 2 marjaa, 4 männynneulasta ja oksa. Matematiikkaa tämäkin.

Oppimismotivaation ylläpitämiseksi ja kasvattamiseksi perinteistä matematiikan opetusta tulee rikastaa. Opetuksen rikastamisessa voidaan käyttää erilaisia toiminnallisia ja oppilaskeskeisiä menetelmiä. Monipuoliset ja vaihtelevat työtavat motivoivat oppilaita (Koponen 1995, 15). Tavoitteelliset pelit ja leikit soveltuvat mielestäni hyvin matematiikan leikinomaiseen alkuopetukseen. Opettajajohtoisen toiminnan määrää sekä kynä ja paperi -tehtävien osuutta voidaan vähentää matematiikanopetuksessa. Oppikirjaa tulisi

käyttää matematiikan opetuksessa joustavasti ja valikoiden (Leino 1998, 48 - 50). Itsenäinen työskentely, kirjan tehtävien tekeminen yksin, on perinteisesti ollut vallitseva työtapa matematiikan opetuksessa. Se ei ole ainoa oikea tapa. Pari- ja ryhmätyöskentely sopivat hyvin matematiikan opetukseen (Ross & Kurtz 1993, 256).

Toiminnallisuus matematiikassa on joskus liitetty kaikenlaiseen askarteluun, jonka ei ole uskottu sisältävän kovin vaativia ajattelun taitoja (Rossi 1995, 26). Näin ei kuitenkaan ole. Toiminnallinen matematiikka on yksi tapa lisätä oppilaan osallistumista matematiikan tunneilla. Koska lapsi on luonnostaan aktiivinen toimija, on myös matematiikan opetusta muutettava nykyistä toiminnallisemmaksi (Rask 1995, 19). Lapsella on tarve toimia ja leikkiä, tarve saada jotakin aikaan ja onnistua. Nämä tarpeet voidaan ohjata palvelemaan matematiikan oppisisältöjen ymmärtämistä ja muistamista. Saadessaan toteuttaa synnynäistä toiminnan viettiä, lapsi antaa tehtävälle mielessään positiivisen tunnesävyä. Matematiikkaa opitaankin parhaiten tekemällä matematiikkaa (Leino 1992, 41). Toiminnallinen matematiikan opetus auttaa muuttamaan asenteita matematiikkaa kohtaan myönteisemmiksi (Lindgren 1998, 302 - 303).

Matematiikka voidaan ymmärtää luovan toiminnan kenttänä, jossa oppilas voi tietyissä puitteissa edetä haluamaansa suuntaan määritellen itse myös asioiden käsittelysyvyyden ja -nopeuden. Oppilaan toimintaa matematiikan tunneilla voidaan kuvata seuraavilla verbeillä: tutkia, selvittää, kuvailla, kehittää, käyttää soveltaa, keksiä, suhteuttaa, mallintaa, esittää, selittää ja arvioida. (Pehkonen 1995, 44 - 45.)

Toiminnallisen matematiikan perusidea on siis siinä, että passiivisen seuraajan, kuuntelijan roolin sijasta oppilas itse toimii aktiivisena oppijana. Toiminnallisessa matematiikassa suositaan toiminnallisia, oppilaskeskeisiä työtapoja ja käytetään toiminnallisia, oppilaskeskeisiä materiaaleja. Oppiminen lähtee konkreettisista kokemuksista. Oppilaan aktiivinen rooli tiedon hankkijana, käsittelijänä ja tallentajana korostuu. Toiminnallisen matematiikan kulmakivenä on motivoivan ja innostavan oppimisympäristön luominen. Oppimisympäristön luomisessa on muistettava seuraavat seikat: lapsen arkipäivän toimintojen kytkeminen matematiikkaan, toiminnallisuus ja leikinomaisuus, tilanneherkkyys eli aikuisella on oltava valmiudet tukea lapsen matemaattisen ajattelun kehittymistä sopivan haasteellisella toiminnalla ja keskustelun merkityksen muistaminen, sillä kun lapsi puhuu matematiikkaa toisille lapsille, on sillä heijastusvaikutusta myös sosiaaliseen kehitykseen. Oppimisympäristö on laajempi käsite kuin luokkahuone. Siihen kuuluvat mm. koko koulu asenneilmastoineen. (Saravesi 1998.)

3.4.1 Oppimispelit

Oppilaita innostava, toiminnallinen työtapa oli pelaaminen. Oppimispeli on peli, jolla on opetuksellisia tavoitteita. Tavoitteet voivat olla tiedollisia, taidollisia tai sosiaalisia. Oppimispelienä on monenlaisia, ostettavia ja opettajien itse tekemiä. Omaan kokeiluuni en saanut valmiita pelejä, vaan valmistin tarvittavat pelit itse.

Valmistin kokeiluani varten seuraavat pelit: ”Varo, se sulaa!” -peli, noppapeli, niputus-peli ja erilaisia muistipelejä: lukumäärä - lukumäärä, lukumäärä - numeromerkki ja kymmenparit. Muistipeleissä oli erilaisia tasoja; ensin etsittiin korttiparit, joissa oli yhtä monta kuviota, seuraavaksi laskettiin kuvioista kymmenpareja, esim. kuusi banaania ja neljä omenaa muodostivat kymmenparin eli sydänparin, lopuksi siirryttiin symboliselle tasolle ja tehtiin sama numeromerkeillä: 6 ja 4 on 10. Pelit olivat luokassa oppilaiden käytössä koko kokeilun ajan ja he pelasivatkin niillä myös muulloin kuin opetustuokioilla.

Noppapeliin tarvittiin suuri pehmonoppa ja nopan silmälukujen määrää vastaavat numerokortit, joissa jokaisessa oli jokin tehtävä. Pelin avulla harjoiteltiin lukumäärän (nopan pisteet) ja numeromerkkin (korttien numerot) yhdistämistä. Oppilaisiin ja heidän taitoihinsa tutustumisessa tämä peli oli hyvä apu. Lukutaidon taso selvisi, kun tehtäväkortteja luettiin. Lukumäärän ja numeromerkkin vastaavuuden ymmärtäminen kävi ilmi pelatessa, kun noppaa heitettyään oppilas nosti nopan pisteiden lukumäärää vastaavan numeroidun tehtäväkortin.

17.8. Pelattiin koko porukalla noppapeliä. Isolla pehmonopalla heitettiin vuorotellen, heittäjä tutkii montako pistettä nopassa tuli ja mikä numero määrää vastaa lukumäärää ja ottaa oikeasta pinosta (1, 2, 3, 4, 5, 6) kortin, jossa lukee tehtävä. Lukutaitoiset auttoivat lukemisessa. Jokainen oppilas osaa laskea (suurin osa katsoo, tunnistaa nopan pistemäärän suoraan) nopasta silmäluvun ja yhdistää sen vastaavaan numeromerkkiin ihan oikein. Tehtävät olivat oppilaiden mielestä hauskoja (esim. matki apinaa, hypi yhdellä jalalla pulpetin ympäri) eikä kukaan ujostellut esiintymistä.

”Varo, se sulaa!” -pelin avulla harjoiteltiin yksi yhteen -vastaavuutta sekä helppoja luku-jonotaitoja. Pelin valmistin piirtämällä, värittämällä ja kontaktimuovilla päällystämällä 20 erilaista jäätelönkuvaa. Peli oli erityisesti ensimmäisen luokan oppilaiden suosikkipeli pitkälle syksyyn. Päiväkirjassa ja videolla esiintyy useammassa kohdassa pelin pelaamista koskevia merkintöjä.

19.8. Uutena harjoituksena otin jäätelönkuvilla pelattavan ”Varo, se sulaa!” - pelin. Joku menee oven taakse ja toiset päättävät mikä jätski on sulava jätski. Oven takana ollut tulee ja alkaa kerätä jäätelöitä toisten laskeissa niitä ääneen. Jännittävää... Kun kerääjä ottaa käteensä sen sulavan jäätelön, huutavat kaikki kuorossa: ”Varo se sulaa” ja kerääjä säikähtää! Lopuksi lasketaan vielä, montako jätskiä kerääjä sai kerättyä ennen sulamista. Ensin jäätelöitä oli 10, mutta se oli liian helppoa, joten lisäsin määrän jo ensimmäisellä pelikerralla 20:een. Kakkosluokkalaisetkin olivat innoissaan pelistä. Jokainen sai kerätä vuorollaan jäätelöitä, pienen ryhmän etuja sekkin. Muiden pelaajien mielenkiinto pysyy yllä, kun he laskevat ääneen ja odottavat h-hetkeä, jolloin saa huutaa: ”Varo, se sulaa!”.

Niputus-peli oli peli, jonka avulla harjoitellaan kymmenluvun kokoamista ykkösistä. Niputus-peli koostui erivärisistä askartelutikuista (n. 800 kpl), kumirenksuista ja pelialustoista, joissa on piirrettynä kymmenen viivaa. Tikkujen keräämiseksi heitettiin noppaa. Oppilas sai ottaa alustalleen niin monta uutta tikkuja, kuin nopan silmäluku näytti. Kun alusta täyttyi, niputettiin saatu täysi kymmen kumirenksulla yhdeksi kymmennipuksi. Myös niputus-peliä pelattiin paljon. Oppilaat kehittyivät nopeasti taitaviksi ennakoimaan ja laskemaan seuraavaa omaa vuoroaan varten, paljonko he tarvitsevat uuteen kymmennippuun.

14.10. Kamera siirtyy niputuspelipysäkillä. Täällä ovat Jussi ja Essi. Essi on juuri saanut ensimmäisen kympin täyteen. Hän siirtää kymmenen tikkua sivuun alustaltaan ja laittaa yli kympin jääneet tikut, 5 kpl, alustalle.

Essi: No niin minä saan laittaa nämä loput tänne. Jussi heittää noppaa, saa 4. Järjestää neljä uutta tikkua alustalle. Hänellä on nyt yhteensä 9. Essi niputtaa kuminauhalla oman kymmennippunsa kasaan.

Jussi: Minä oon tällä hetkellä johossa. Essi heittää noppaa. Tulee kuutonen.

Essi: Kuus, yes! Essi kerää kuusi violettia tikkua itselleen ja asettelee ne pelialustalle.

Koska Essillä on jo entisiä, hän saa uuden nipun. Jussi heittää noppaa, tulee kolme.

Jussi: Kolme! Jussi ottaa kolme tikkua, ja koska hänellä on jo alustalla 9 tikkua ennestään, saa hän uuden nipun.

Jussi: No niin, tuli pakka täyteen! Jussi niputtaa tikut ja laittaa kaksi ylitse jäänyttä pelialustalle.

Essi: Mulla on kaksikymmentä pakkaa. Paljon on muuten kymmenen plus kymmenen?

Jussi: Kymmenen plus kymmenen? Kaksikymmentä. Kaikkihan sen tietää, yks viisvuotiaskin mejän kaveri.

Essi: Kymmenen kertaa kymmenen on sata.

Oppilaiden keskinäinen pelaaminen ilman minun apuani onnistui, kun he olivat oppineet pelin säännöt. Näin ollen minulle jäi aikaa tarkkailla oppilaiden pelaamista. Pelaamisen havainnoinnista sain hyödyllistä tietoa mm. oppilaiden sosiaalisista suhteista ja taidoista. Mielestäni opettaja saa arvokasta tietoa oppilaista havainnoimalla eli seuraamalla heidän toimintaansa normaaleissa luokkahuonetilanteissa. Havainnoinnin tueksi kirjoitin huomaamiani asioita päivittäin päiväkirjaani. Oppilaantuntemus lisääntyi päivä päivältä.

17.8. Kakkosten kanssa otettiin ”Tästä lähdetään” -moniste, jossa kerrattiin ekaluokan kevään asioita mm. kymmenylitys, Jussille se tuottaa näköjään ongelmia. Maija, Niina, Pasi ja Sami ovat todella nopeita ja innokkaita laskijoita. Seppo ja Heikki ovat hitaampia, kaikessa mm. syömisessäkin... Ja Jussi on heikko, erityisen hyvin heikkous näkyy nopeiden ja taitavien rinnalla.

18.8. Erityisopettaja kävi koululla. Opettajapulasta johtuen hänellä ei ole mahdollisuutta käydä vakinaisesti meillä, vaan aina silloin tällöin. Pirjo, erityisopettaja siis, testasi ekaluokan Frostigin testillä, jossa pitää piirtää mallin mukaan samanlainen kuvio pistepohjalle. Kaikilla meni hyvin, Tuomaksella jopa 15/16. Reippaita ovat ja kouluun valmiita, sanoi Pirjokin ekaluokkalaisista.

Jo pian koulun alkamisen jälkeen huomasin oppilaitteni alkavan erottua joukosta yksilöinä. Oppilaista alkoivat erottua johtajatyypit Essi ja Pasi, hiljaisemmat Susanna, Seppo ja Heikki. Kaveriryhmiä alkoi pikkuhiljaa muodostua. Oppilaiden tasoerot eri oppiaineissa alkoivat näkyä. Erityisesti matemaattisilta taidoiltaan joukosta erottuivat toisen luokan Jussi sekä ensimmäisen luokan Ville, josta kerroin tarkemmin lukukäsitteen yhteydessä.

Pelatessaan oppilaat myös puhuivat keskenään matematiikkaa, kuten edellinen ja seuraava esimerkki päiväkirjasta osoittavat.

28.9. Pelin tiimellyksessä lapset puhuivat taas paljon matematiikkaa.

Ville: Minä alotan.

Tuomas: Ei ku arvotaan. Se kumpi saa isomman, saa alottaa.

Ville: No joo. (Heittää noppaa) Mulla tuli kolme.

Tuomas: (Heittää noppaa, tulee myös kolme) Hö, tasapeli. Uuvestaan!

Ville: (Heittää noppaa, tulee yksi) Nyt hävisin. Ei voi saaha vähemmän ku yks.

Tuomas: Niin, tai saman verran taas. (Heittää noppaa, tulee viisi) Minä alotan.

Pelaaminen innosti oppilaita todella paljon. Jos tuntien lopussa jäi aikaa omalle tekemiselle, hakivat oppilaat jonkun pelin pelattavakseen mieluummin kuin esimerkiksi olisivat piirtäneet omaan puuhavihkoonsa tai ottaneet jonkun kirjan luettavakseen.

Matematiikan oppimispeli voidaan määritellä peliksi, jossa on kyse esim. matemaattisten käsitteiden, merkkien ja tosiasioiden sekä niiden välisten suhteiden harjoittamisesta. Oppimispelien pelaaminen sopii hyvin yhteen oppilaan oman aktiivisuuden ja toiminnallisuuden periaatteiden kanssa. Pelit kiehtovat lasta, kun pelisäännöt ovat sopivan vaikeat. Pelissä on jännitystä ja siitä saadaan usein onnistumisen kokemuksia. Pelissä oppilas saa palautetta osaamisestaan. Matemaattisten oppimispelien tavoitteita ovat mm. seuraavat: matemaattisten käsitteiden käyttämiseen tottuminen, päättelämistaitojen harjaannuttaminen, varman laskutaidon kehittäminen ja myönteisen asennoitumisen aikaansaaminen. Pelin avulla voidaan opettaa uutta asiaa tai kerrata jo opittua asiaa. Kertaamiseen ja taitojen varmistamiseen peli sopii mielestäni hyvin. Pelaamalla oppilas jaksaa kerrata opeteltavaa asiaa riittävän kauan. Pelien pelaamisella on myös sosiaalisia tavoitteita. Luokkaan voi luoda myönteistä ilmapiiriä ja yhdessä pelaaminen tukee sosiaalisten taitojen kehittymistä. (Ikäheimo ym. 1997, 6; Pehkonen 1987, 38; Pehkonen & Pehkonen 1993, 6, 9 - 11 .)

Pelejä voivat valmistaa opettaja tai oppilaat itse. Pelivälineet voivat olla hyvinkin yksinkertaisia. Usein välineiksi riittävät noppa, esim. palikka tai nappi pelimerkiksi tai numerokortit. Monien pelien valmistaminen vaatii aikaa, mutta työ kannattaa. Kun pelin tekee huolella, se kestää ja sitä voi käyttää useamman vuoden. Pelien avulla, peli-idea tai materiaalia hiukan muunnellen, voidaan harjoitella monenlaisia matemaattisia taitoja. Kaupallisista peleistä saa hyviä ideoita ja osa kaupan peleistä vahvistaa matemaattisia taitoja sellaisenaan. Kun peli-idea on lapsille kaupallisesta pelistä tuttu, ei opettajan tarvitse selittää heille niin paljon pelisääntöjä ja pelaamaan päästään nopeasti. Tällainen tuttu peli-idea on esim. Musta Pekka -korttipelin idea, jota Mittrowann ja Pehkonen (1985, 3) käyttävät useissa kehittelemissään peleissä. Lukukäsitettä kehittää esim. Uno -korttipeli. Sirkus -peli, jossa nopalla heittäen edetään pelimerkillä luvusta 1 lukuun 100, sisältää hyvää lukujonossa liikkumisen taidon harjoittelua. (McBride & Lamb 1991, 15 - 16; Karnii 1990, 29.)

Valmiita, varsinaisesti opetuskäyttöön suunniteltuja oppimispelejä on myös tarjolla. Oppimispelejä tarjoavat mm. Early Learning ja Krutsin. Turun oppimiskeskuksessa on kehitetty ”Kultaisen maljan metsästys” -oppimispeli motivoimaan peruskoulun oppilaita matematiikan oppimiseen. Peli on lauta- ja seikkailupelin yhdistelmä ja siitä ollaan tekemässä myös tietokoneversioita. (Vainikainen 1998, 37.)

3.4.2 Keskustelu matematiikan opetuksessa

Puhuminen ja keskustelu kuuluvat olennaisena osana jokapäiväiseen koulutyöhön, niin myös matematiikkaan. Pysin käyttämään paljon oppilaiden puhumista opetuksessani, sillä monen tutkijan mukaan puhuminen auttaa ajattelun, tietojen ja taitojen kehittymistä. Näin on mielestäni myös matematiikassa. Kun oppilas kertoo laskeessaan, miten hän tehtävän ajattelee, saa opettaja häntä kuunnellessaan arvokasta tietoa oppilaan ajattelusta.

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan kommunikaatio - tehtävistä, ongelmista ja ratkaisuista keskusteleminen - on tärkeä osa matematiikan oppimisprosessia (Strang 1993, 134). Oppilaiden tulisikin antaa keskustella keskenään matematiikan tunneilla. Esi- ja alkuopetusikäiset ovat luonnostaan innokkaita keskustelijoita. Tätä ominaisuutta tulisi myös koulussa kasvattaa ja rohkaista lapsia keskustelemaan, puhumaan matematiikkaa (Spungin 1996, 174). Myös oppilaiden sosiaaliset tarpeet tyydyttyvät heidän saadessaan yhdessä pohtia ja ratkoa asioita yhdessä toisten kanssa. Kun lapsi joutuu omin sanoin kertomaan oivalluksistaan ja ratkaisuistaan, hänen ajatuksensa selkiytyvät. Hän oppii luonnostaan puhumaan matematiikan kieltä. (Rask 1995, 19.)

Matematiikassa on oma kielensä, jonka ymmärtäminen on usein helpompaa keskustellen ikätovereiden kanssa. Oppilaiden toiminnan ja matemaattisen puheen havainnoiminen on tärkeää ja opettajalle hyvä keino saada tietoa kunkin oppilaan ajatusmalleista. Opettajan tulisi kuunnella oppilasta. Ei vain sitä, oliko vastaus varmasti oikea vaan myös sitä, mitä oppilas todella sanoo. Kuuntelemalla oppilasta opettaja pääsee selville oppilaan ajatuksista. On tärkeää luoda tilanteita, jossa oppilaat saadaan keskustelemaan tehtävistä ja niiden sisältämistä ongelmatilanteista. Toiminnallisuudesta ja reaali maailmasta opittu matemaattinen sanasto on oppilaalle merkityksellisempää, kuin puhtaasti matemaattisista lausekkeista opittu. (Koponen 1995, 33.)

Leikkirahat ja niiden käyttäminen ostamiseen motivoivat lapsia erityisesti. Rahat ovat yksi keino yhdistää lapsen jokapäiväinen arkimaailma ja koulumatematiikka toisiinsa. Seuraavat esimerkit päiväkirjasta osoittavat, miten lapset oppivat leikin tiimellyksessä matematiikkaa keskustellen keskenään. Kyseessä on 1 - 2 -luokan ja esikoululaisten yhteinen torileikki.

Ville (myyjä, 1 lk): Porkkana maksaa markan. Siis markan aina palanen.

Essi (ostaja, 1 lk): Minä ostaisin kaksi palaa, kiitos. (Antaa Vилlelle 5 mk kolikon)

Ville: Olkaa hyvä, tässä rahaa takaisin. (Antaa kolikoita takaisin, summassa ilmeisesti)

Essi: (Laskee saamansa rahat) Tässä on vaan markka viiskyt penniä. (Näyttää kolmea viisikymmenpennistä kädessään) Sun tarvii antaa vielä saman verran lisää. (Auttaa Vилleä etsimään sopivan määrän rahaa ja lähtee. Vилle ihmettelee, ei oikein ymmärtänyt tapahtunutta. Vähän ajan kuluttua Vилle tulee kysymään mimulta, onko markka sama kuin kaksi viisikymmenpennistä ja selvitän hänelle asian leikkirahojen kanssa)

Marjaana(ostaja, esikoululainen): Mää tahon kukkakaalia.

Pasi (myyjä, 2 lk): Onko sulla rahaa? Se maksaa markan.

Marjaana: On mulla. Tuossa. (Antaa rahat Pasille)

Pasi: (Laskee rahat ensin) Sulla on neljä markkaa. Montako kukkakaalia sä saisit sillä?

Marjaana: (Miettii, laskee sormilla ja ilme kirkastuu) Joo, mä otan neljä.

Koululaisten ja esikoululaisten yhteiset harjoitukset ja oppituokiot kuuluivat osana normaaliin koulutyöhön koulullamme. Näissä tilanteissa lapset pääsivät luonnollisesti opettamaan toinen toisiaan, kuten edellinen esimerkki osoittaa. Keskenään tutuilla lapsilla on luonnollinen taipumus mukauttaa opetuksensa toisen osapuolen taidoille sopivaksi. Lisäksi lasten oma, keskinäinen puhe on erilaista kuin aikuisen puhe lapselle.

Toimiva matemaattinen ajattelu syntyy ymmärtämisestä, ei sanojen tai lausekkeiden ulkoa muistamisesta (Herbert 1985, 4). Matemaattinen keskustelu on asia, jota voidaan harjoitella. Oppilaat harjaantuvat vähitellen tuomaan esille omia mielipiteitään ja ajatuksiaan käsiteltävästä matemaattisesta ongelmasta. Yhdessä toimiminen matematiikan parissa, kysymysten asettaminen ja ratkaisujen hakeminen paljastavat oppilaan ajattelutavat vielä paremmin kuin pelkkä puhe (Ross & Kurtz 1993, 257). Keskustelu antaa oppilaille myös hyvät mahdollisuudet oppia toisiltaan ja peilata omia ajatusmallejaan muiden keskustelijoiden vastaaviin malleihin (Atkins 1999, 294).

Matemaattisen keskustelun dokumentointi oli ongelmallista. Kuulin luokassa monia hyviä keskusteluja, mutta kun rupesin niitä kirjoittamaan muistiin, niin tilanne oli jo ohiitse. Oikeastaan koko kokeilun ajan olisi tarvittu jonkinlaista nauhuria, jotta keskustelunpätkät olisi saanut talteen. Jos olisin voinut keskittyä pelkästään oppilaiden keskustelun havainnointiin ja kirjaamiseen, olisin varmasti saanut matemaattista puhetta dokumentoitua enemmänkin.

3.4.3 Laskutarinat

Laskutarinoiden käyttö matematiikan opetuksessa kehittää oppilaiden kekseliäisyyttä ja luovaa ajattelua. Oppilas joutuu käsittelemään lukumäärien ja lukujen välisiä suhteita eritavalla keksiessään omia laskuja kuin laskeessaan valmiita laskuja (Helin ym. 1998, 8). Laskutarinat ovat hyvä keino matemaattisen puheen ja ajattelun kehittämiseksi. Kokeilusani erilaisia laskutarinoita keksittiin yhdessä ja yksin. Ensimmäiset laskutarinat tehtiin ja esitettiin konkreettista materiaalia - simpukoita - käyttäen. Kirjassa olevia kuvia apuna käyttäen oppilaat harjoittelivat kertomaan laskutarinan kuvasta omin sanoin. Seuraavaksi oppilaat piirsivät paperille oman laskutarinansa ja esittivät sen toisille. Videonauhalla on kuvattuna ensimmäisten itse piirrettyjen laskutarinoiden esittäminen.

14.9. Ensimmäisenä vuorossa on Essi. Hän seisoo taulun edessä ja pitää käsissään omaa piirustustaan ”yleisöön” päin. Essin paperissa on piirrettynä useampi laskutarina. Osoittaa kertoessaan kuvia paperista.

Essi: Tässon kaks ja kun toinen menee pois, ni siihen jää yks. Ja tässon kolme sutta, ni yks lähtee pois ni jää kaks. Ja tuossa on kuus palloa, yks lähtee ...

Mirka: En minä nää.

Essi: ... pois ni viis jää. Ja tuossa on seitsemän palloa ja siitä yks lähtee pomppimaan, ni jää kuusi. Ja tuossa on kolme palloa ja ... yks lähtee, ni jää kaks. Ja tuossa on kolme muu... neljä muurahaista ja siihen jää kolme muurahaista. Ja tuosson viis perhosta, ja

yks lentää pois. Ni sitten tuosson yks perhonen ja kun se jää ... lähtee pois, ni ei jää enää yhtään.

Essin laskutarinat olivat loogisia ja hän osasi esittää ne mallikkaasti. Laskutarinoiden selkeä kertominen onnistui Essiltä hyvin. Lukualue laskutarinoissa oli alle kymmenen, vaikka Essi pystyi simpukoilla tekemään suuremmillakin luvuilla tehtäviä. Kuvien piirtäminen supistaa osaltaan laskutarinoiden lukualuetta. Kukapa ensimmäisen luokan oppilas jaksaisi piirtää kaksikymmentä kissaa? Essi käytti kaikissa laskutarinoissaan vähennyslaskua eli jotakin lähti kuvasta pois. Laskutarinassa pois lähtevät on helppo merkitä vetämällä viiva poistettavien päälle. Lisää tulevia on vaikeampi kuvata niin, etteivät ne sekoitu kuvassa jo aikaisemmin olleiden hahmojen kanssa. Matemaattisesti Essin laskutarinat olivat oikein laskettuja vähennyslaskutehtäviä. Mirka oli piirtänyt myös monta laskutarinaa paperille, mutta niiden kertominen oli hänelle vaikeampaa kuin Essille.

14.9. Mirka on siirtynyt oman paperinsa kanssa taulun eteen. Puhuu tosi hiljaisella äänellä, katsoo itse omaa paperiaan, ei näytä sitä muille.

Mirka: Tuossa on neljä ja sitten tulee... eiku tuossa on neljä, neljä possua ja ... Miettii, panee käden suun eteen. Katsoo tarkasti paperiaan.

Minä: Mitä sitten tapahtuu?

Mirka: Seittemän, ootappa... on viis ... Mumisee jotakin, mistä ei saa selvää. Käsi suun edessä edelleen.

Mirka: Tässon kaks ja ... eiku...

Minä: Käännä sillä lailla, että toisetkin näkee. Mirka kääntää paperia toistenkin näköksälle.

Mirka: Kaheksan ja ... Mikä se oli? Osoittaa paperiaan sormella, katsoo kysyvästi minuun.

Minä: Etkö muista?

Mirka: Ja sitten tulee... ja se on... tossa on yhdeksän ... Kääntää paperin taas itselleen ja tutkii sitä. Istuu tuolille, venkoilee.

Minä: Lähteekö siitä pois vai tuleeko siihen lisää?

Mirka: Tulee lisää.

Minä: Kuinka monta?

Mirka: Siinon yks ja ... yhdeksän. Ja siinä on neljä omenaa ja sitten siihen tulee vielä yks ja sitten on kuus ... eiku yks lähtee pois, ni jää ... nii kolme. Sitten... Kääntää paperin yleisölle, osoittaa siitä jotakin sormella ja alkaa nauraa.

Minä: Mikäs siellä on?

Mirka: Niin yksi ... tuo yks pupujussi ja siihen tulee yks hiiri. Sitten se sanoo että ... mitä se sanoo ... Piirtää jotakin, ilmeisesti kirjaimia ilmaan.

Mirka: Siinä on tämmönen ... ja tämmönen ... ja tämmönen ja tämmönen. Ja sitten siinä on kaks.

Mirkan laskutarinoiden esittämisestä puuttui selkeys. Mirkan esittäminen oli hyppelehtivää ja epäloogista Essiin verrattuna. Mirka on ajattelultaan kehittymättömämpi kuin Essi, joka on jo siirtynyt ajattelun kehityksessään konkreettisten operaatioiden kaudella. Mirkan piirtämistä kuvista löytyi samanlaisia vähennyslaskuja kuin Essilläkin. Pois lähtevien hahmojen päälle oli vedetty viiva. Mirka oli piirtänyt vähennyslaskujen lisäksi yhteenslaskuja, joiden tulkinta kuvasta on hankalampaa. Mirkan tarinoissa esiintyi myös matemaattisia virheitä, kuten ylläolevasta esimerkistäkin näkee. Omenoita oli ensin neljä

ja kun yksi tuli lisää, laski Mirka niitä olevan yhteensä kuusi. Yhteenlasku kääntyi kuitenkin heti perään vähennyslaskuksi ja vastauskin tuli sitten oikein. Laskutarinoissa näkyy myös oppilaiden yleinen kielellinen taso. Essi on lahjakkaampi kertoja ja tarinoiden keksijä kuin Mirka ja hänen sanavarastonsa on Mirkan sanavarastoa laajempi ja rikkaampi. Laskutarinoiden keksiminen ja esittäminen kehittävät mielestäni myös oppilaiden kielellisiä taitoja.

Konkreettisilla pikkuesineillä laskutarinoiden keksiminen oli jokaiselle oppilaalle helppoa. Pikkuesineillä tehdyt laskutarinat sisälsivät myös kymmenylityksiä ja olivat muutenkin matemaattisesti vaativampia kuin oppilaiden paperille piirtämät laskutarinat. Piirretyt laskutarinat sijoittuivat yleisesti lukualueelle 0 - 10. Oppilaat innostuivat laskutarinoiden keksimisestä ja piirtämisestä. He pitivät myös tästä työtavasta.

Laskutarinoiden käyttäminen oli minulle työtavana uusi ennen tätä kokeilua. Oppilaiden kielelliset ja matemaattisten taitojen erot näkyivät laskutarinoiden keksimisessä ja esittämisessä. Tämän vuoksi opettaja voi mielestäni käyttää laskutarinoita myös yhtenä arvioinnin keinona. Oppilaiden laskutarinoita voi arvioida lukualueen laajuuden sekä aritmeettisten laskutoimitusten vaativuustason esim. kymmenylitysten perusteella.

3.5 Toimintamateriaali matematiikan opetuksessa

Opetuskokeilussani olivat keskeisiä erilaiset toimintamateriaalit ja -välineet. Toimintamateriaalista käytetään myös nimitystä manipulatiivinen materiaali (engl. manipulatives, manipulative aids tai manipulative materials). Toimintamateriaali käsittää sellaisia oppilaskohtaisia välineitä ja materiaaleja, joita voidaan havainnoida useilla aisteilla sekä siirrellä ja järjestellä uudelleen. Toimintamateriaalin käytön tulee johtaa matemaattiseen ajatteluun ja sitä tulee voida hyödyntää matemaattisen käsitteen oppimisvaiheessa. Huolellisesti ja tarkoituksenmukaisesti valitun toimintamateriaalin käyttö edistää uusien matematiikan käsitteiden sisäistämistä ja hallintaa. (Lindgren 1990, 90, 180; Ilmavirta 1995, 61.)

Ensimmäisen luokan oppilaillani oli pulpetissaan rasia, jossa he säilyttivät matematiikan toimintamateriaalejaan. Rasiassa oli lukukortit 0 - 10, kymmenen palikkaa, helminauha (jossa 20 helmeä, 10 kahta eri väriä), noppa ja leikkikolikoita. Toisen luokan oppilailla oli pulpetissaan kymmenjärjestelmävälineet. Kun jokaisella oppilaalla on omat välineet aina helposti saatavilla, voi hän itse valita mitä käyttää apuna laskemisessa.

Konkreettiset esineet ja toimintamateriaalit ovat tärkeitä matematiikan opetuksessa. Eri-laisen toimintamateriaalin käyttö, mm. erilaiset palikat, helmet, pikkuesineet, leikkirahat ja nopat, on usein välttämätöntä hyvän ymmärtämispohjan luomiseksi (Helin ym. 1998, 8). Konkreettisen mallin esittäminen ja käsittelyn periaatteen oppiminen ovat keskeisiä opiskelusta saatavien kokemusten kannalta. Opettajan tulee järjestää oppilaille oppimislanteita, joissa tarkasti valitut ja kehitetyt opetusvälineet ovat oppilaiden vapaasti käytettävissä. Havaintomateriaali muodostaa viitekehyksen oppilaan kehitykseen. Materiaalin tarkoituksena on synnyttää lapsen sisäisten mallien tulkintoja. Siksi on tärkeää antaa las-

ten valita mitä välineitä he käyttävät ja kuinka kauan he kutakin välinettä käyttävät. (Yrjönsuuri 1998, 42.)

Toimintamateriaalia tulee käyttää harkitusti ja tavoitteellisesti. Toimintamateriaalin käyttö sinänsä ei ole oppimisen tavoite vaan ainoastaan ”tie” tiettyyn tavoitteeseen (Ross & Kurtz 1993, 256). Toimintamateriaalin käyttö ei ole oppimisen tae. Joskus oppilas osaa käyttää konkreettista toimintamateriaalia ja pääsee oikeaan ratkaisuun tehtävässä, mutta ei silti ymmärrä tai osaa selittää sanallisesti tekemisiään. Toimintamateriaali ei ole tällaisessa tapauksessa edistänyt matemaattista ajattelua. Tärkeä tekijä toimintamateriaalin käytössä on sen varmistaminen, että oppilas osaa ja ymmärtää yhdistää konkreettisen materiaalilla toimimisen ja matemaattisen käsitteen toisiinsa. Ilman tätä yhdistymistä toimintamateriaalilla ei ole merkitystä. (Bohan & Bohan-Shawaker 1994, 246; Clements & McMillen 1996, 270.)

Konstruktivistinen oppimiskäsitys kiinnittää siis huomiota siihen, mitä oppilaan ajatuksissa tapahtuu; millaisia ajatusmalleja hän itselleen muodostaa opittavasta käsitteestä. Ihanne on, että oppilas ei omaksu opettajan esittämiä asioita sellaisenaan, vaan rakentaa itse oman ajattelumallinsa aikaisempien tietojensa ja kokemustensa perusteella. Matemaattisten käsitteiden rakennustyössä on hyödyllistä työskennellä erilaisilla konkreettisilla välineillä eli toimintamateriaalin avulla. Oikein valittu ja käytetty toimintamateriaali vahvistaa oppimista, lisää mielenkiintoa matematiikkaa kohtaan ja kasvattaa ongelmanratkaisutaitoja. (Kennedy 1986, 6 - 7.)

Toimintamateriaalin käytön tavoitteena on se, että oppilas voi kokeilla ja havaita konkreettisesti oikeisiin ratkaisuihin johtavat toimintamallit ja ratkaisustrategiat. Oppilas löytää ne oman toimintansa kautta ja samalla asian ymmärtäminen helpottuu. Tällä tavalla oppilas näkee yhteyden myös matematiikan symboliesityksen ja arkielämän tapahtuman välillä. Välineillä toimiessaan oppilas konstruoi niitä ajattelurakenteita, joita hän myöhemmin käyttää toimiessaan abstraktilla tasolla ilman välinettä. (Strang 1993, 133.)

Havainnollistamisvälineet ja havaintomallit kuuluvat tiiviisti alkuopetuksen matemaattiseen käsitteenmuodostukseen. Havainnollistamisvälineestä tulee toimintamateriaalia, kun se opettajan sijasta aktivoi oppilaan toimimaan (Hollingsworth 1990, 27). Toiminnallinen materiaali auttaa oppilaita rakentamaan, konstruoimaan, matemaattista tietoa. Toimintamateriaalin käyttäminen on alkuopetuksen ohella yhtä tärkeää myös peruskoulun muilla luokilla. Oppiminen tekemisen kautta kuuluu hyvään matematiikan opetukseen kaikenikäisten oppilaiden kanssa työskennellessä (Malaty 1997, 86).

Seuraavassa esimerkki päiväkirjastani toimintamateriaalin käytöstä toisen luokan oppilaiden laskiessa isoilla luvuilla kymmenylityslaskuja.

8.9. Kakkoset tekivät kirjasta laskuja isoilla luvuilla ilman kymmenylitystä. Jussikin osasi, kun neuvoin että laske erikseen kymmit ja ykköset. Paikkajärjestelmä on onneksi Jussille selvä eli hän erottaa, mikä numero tarkoittaa kympejä ja mikä ykkösiä.

10.9. Kakkosille tuli uutta asiaa; isoja kymmenylityslaskuja. Jussille vaikeeta, kun sama malli, jolla viimeksi onnistui (laske ykköset ja kymmit erikseen), ei nyt sujukaan. Hankalaa alkuun. Kymmenjärjestelmävälineet apuna, niillä onnistuu. Hidastahan se on, mutta

hyvä kun Jussi käyttää apuvälinettä laskemisessa, vaikka muut kakkoset eivät apuvälineitä tarvitse. Heikki aloitti tehtävien tekemisen kymmenjärjestelmävälineet apunaan, mutta jätti ne muutaman laskun jälkeen pois. Jussille yritin opettaa/palauttaa mieliin kympin täyttämistä ensin ja sitten vasta loppujen, sen yli menevien laittamista. Välineillä hän laskee, laittaa ensin kymppisauvoista ja ykköspaloista yhteenlaskettavat ja sitten muuttaa vastauksesta kymmenen ykköspalikkaa aina täysiksi kympeiksi. Kysyin, miten hän laskua ajattelee ja miten hän sen laskee, mutta en pysynyt perässä selityksessä. Seurasin sitten Jussin laskemista välineillä ja huulen, että hän osaa kuitenkin ajatella ensin kympin täyteen ja sitten loput yli uudelle kymmenluvulle.

Jussin tapauksessa toimintamateriaalin käyttö oli lähes välttämätöntä, koska ilman sitä hän ei pystynyt laskuja laskemaan. Välineen käyttö auttoi Jussia kymmenylitysten konstruomisessa, hän sai tehtävät ratkaistua välineen avulla. Edellinen esimerkki osoittaa kuitenkin, ettei Jussi pystynyt sanallisesti selittämään toimintaansa materiaalin kanssa. Jussi ei ole vielä valmis siirtymään materiaalisesta vaiheesta puhuttuun vaiheeseen. Matemaattinen kehitys on ollut Jussin kohdalla hidasta ja toimintamateriaalin käyttö auttaa häntä vähitellen kehittämään taitojaan.

Toimintamateriaaleja on luokiteltu niiden käyttötarkoituksen mukaan. *Käsitteenmuodostusta tukevia oppilaskohtaisia materiaaleja ja välineitä* ovat sellaiset, joilla oppilas saa kokeilla ja etsiä ratkaisua annettuihin ongelmiin. Tällaisia materiaaleja ovat mm. palikat, nopat, kymmenjärjestelmävälineet, opetusrahat, tikut, numerokortit, pikkuesineet, mitat, geolauta, murtolukukakut sekä leikkely- ja taittelupaperit. *Lukutajun ja päässälaskuvalmiuksien kehittämiseen ja opittujen asioiden varmentamiseen tarkoitettut välineet* sopivat käytettäväksi yksilöllisesti, pareittain tai ryhmissä. Tällaisia ovat erilaiset pelit ja leikit, tietokoneet sekä laskimet. Tietokoneohjelmissa toimintamateriaali poikkeaa perinteisestä, mutta se voi kuitenkin olla yhtä konkreettista kuin käsin kosketeltavakin (Clements & McMillen 1996, 271). Myös kymmenjärjestelmävälineet, numerokortit ja opetusrahat sopivat tähänkin tarkoitukseen. *Avoimeen, luovaan työskentelyyn ja tuottamiseen sopivat materiaalit* eivät ole välttämättä oppilaskohtaisia ja ne ovat usein varsin moninaisia. Tällaisia voivat olla mm. tangram -palat, geolaudat, erilaiset pakkaukset, sanomalehdet, mainokset ja tietokirjat. (Ilmavirta 1995, 64.)

Varsin yllättäviäkin välineitä voidaan käyttää toimintamateriaalina. Jos kyseessä vain on väline, joka aktivoi oppilaan, johtaa matemaattiseen ajatteluun ja sopii käytettäväksi oppimisprosessin eri vaiheissa, voidaan puhua toimintamateriaalista. Vain opettajan mielikuviutus rajoittaa toimintamateriaaliksi sopivan materiaalin käyttämistä. Itse käytin eräänä materiaalina kymmenluvun havainnollistamiseksi kymmenen kananmunan kennoa sekä kymmentä massapalloa.

5.10. Munakennoilla kymmenen jaotelmia. Mallia otettiin Iikka -videolta, jossa tyhmä kana ei osaa laskea montako munaa hänen kymmenen munan vaumustaan puuttuu. Kanan typerys nauratti lapsia ja spontaanisti he neuvoivat kanaa munien laskemisessa. Oppilaat tekivät toisilleen samanlaisia tehtäviä: toinen otti kymmenen kananmunan kennosta osan massapalloista pois ja toisen piti päätellä/laskea kennoon jääneistä massapalloista, montako puuttuu kymmenestä. Touhusivat pitkään kennojen kanssa.

Edellisessä esimerkissä mainittu Iikka -video on koulutelevision alkuopetuksen matematiikkaan suunnattu viisiosainen ohjelmasarja Iikka matematiikkamaassa, joka esitettiin syksyllä. Ohjelmasarja oli oppilaille mieluinen osa matematiikan opiskelua. Opetuskokeilussani käytin paljon erilaista materiaalia, ohjelmasarjakin kuului käyttämiini materiaaleihin. Jokaisen oppilaan omien välineiden lisäksi luokassa oli käytettävissä mm. tikkuja, simpukoita, erilaisia palikoita ja nappeja luokittelua ja laskemista varten. Lisäksi oppilaiden käytettävissä oli muovisia numeroita ja hiekkapaperinumerot sekä tunnustelupussi tunnustelua varten. Pelit olivat oppilaiden käytössä. Seinällä olivat näkyvissä oppilaiden itsensä hiekkaliimauksella valmistamat luvut 0 -12 ja lukumäärän (***) , lukusanan (kolme) ja numeromerkin (3) yhdessä sisältämät kuvataulut. Satataulut, toinen kiinteä ja toinen irrotettavine lukukortteineen, olivat luokan seinällä. Kymmenjärjestelmävälineet kuuluivat myös muuten kuin toisen luokan oppilaiden käyttäminä luokan materiaaleihin. Kalenteri oli esillä ja järjestäjät huolehtivat oikean päivämäärän näkyviin helmistä ja rautalangasta.

Opetuskokeiluni alkuvaiheessa lukukäsitteeseen ja lukujonotaitoihin perehtymisen ohella annoin oppilaille myös erilaisia laskutehtäviä. Laskimme yhteen- ja vähennyslaskuja käyttäen konkreettisesti ymmärrettäviä käsitteitä kuten ”tulee lisää, saat lisää, ostat lisää, lähtee pois, annat pois tai syödään pois”. Laskuja ratkaistessaan oppilailla oli käytettävissä materiaalia, mm. palikoita, jota pystyi konkreettisesti käsittelemään ja näin käyttämään apuna tehtävää ratkaistessa. Galperinin teorian mukaisesti aloitimme konkreettisella ja materiaalisella tasolla laskutehtävissä. Opetuskokeilussa tämä näkyi laskutehtävien konkreettisuuden korostamisena, tehtävien symbolisen esityksen tarkoituksellisena sivuttamisena. Pysyttelimme konkretian tasolla yli kuukauden koulun alkamisesta. Symbolisia numero- tai muita merkkejä (+, -, =) en käyttänyt laskutehtävissä opetuskokeilun tässä vaiheessa ensimmäisen luokan oppilaiden kanssa ollenkaan. Vasta syyskuussa aloitimme opettelemaan numeromerkkien kirjoittamista ja siirryimme laskemaan numeromerkein merkittyjä laskuja.

21.9. Kokeilimme ”sormilaskukonetta”, niin kuin Essi sitä nimitti. Annoin yksinkertaisia laskutehtäviä numerosymboleilla (esim. $3 + 1$, $5 - 4$) ja oppilaat laskivat innoissaan ”oikeita laskuja”. Tuomas ei tarvitse sormia lainkaan apuna laskemisessa, ainakaan hän ei niitä käyttänyt. Laskimme laskuja lukualueella 0 - 10.

23.9. Nyt kun numeroita ja merkkejä on harjoiteltu kirjoittamaan, niin otettiin ne heti todelliseen käyttöön. Ensimmäiset pelkästään symboleilla (0, 1, 2, 3, 4, +, - ja =) esitetyt laskut eivät tuottaneet oppilaille ongelmia. Innoissaan he rupesivat laskemaan kirjaan ”oikeita laskuja”, niin kuin Tuomas sanoi. Ohjasin oppilaita käyttämään apuna laskemisessa pulpetissaan säilytettäviä palikoita tai ”sormilaskukonetta”. Mutta vain Mirka ja Ville käyttivät näitä apuvälineitä laskiessaan.

Konkreettisen materiaalin käyttämisen tarve symbolisissa, numeromerkein kirjoitetuissa laskuissa oli oppilailla heti alkuvaiheessa vähäistä, kuten edellinen päiväkirjan esimerkki osoittaa. Tämä johtunee siitä, että olimme jo reilun kuukauden ajan laskeneet samanlaisia tehtäviä erilaista materiaalia (simpukat, palikat, pikkuesineet) käyttäen. Materiaalinen ja puhuttu vaihe oli jo tavallaan käyty läpi. Uutta laskuissa oli vain esitystapa, numerosymboleilla merkitseminen.

3.6 Loppumittaus

Opetuskokeiluni perustui toiminnalliseen ja leikinomaiseen matematiikkaan. Matematiikan tekeminen kuvaa mielestäni osuvasti toimintaa opetuskokeilun aikana. Kirja jäi sivummalle kokeilussa. Oppikirjan horjuttamaton asema oli iskostettu minunkin mieleeni ja välillä heräsi epäilyksiä, oppivatko oppilaani samat asiat leikkimällä ja pelaamalla kuin kirjan tehtäviä tekemällä. Opetuskokeiluni lopuksi tein erilaisia loppumittauksia, joiden avulla arvioin oppilaiden osaamista ja samalla koko opetuskokeiluani ja sen onnistumista. Onnistuessaan opetuskokeilun tulee edesauttaa oppimista ja muuttaa toimintaa oppitunneilla entistä paremmaksi. Jos oppilaiden oppiminen ei olisi onnistunut, olisi opetuskokeilukin epäonnistunut. Kun oppiminen on ainakin yhtä onnistunutta kuin perinteisen matematiikan opetuksen avulla saavutettu, voi opetuskokeilunkin sanoa onnistuneen. Loppumittauksina käytin arviointikeskustelua ensimmäisen luokan oppilaiden kanssa, perinteistä matematiikan koetta sekä pysäkkityöskentelyä opetuskokeilun päätteeksi.

Keskustelimme ensimmäisen luokan oppilaiden kanssa kuluneen syksyn matematiikan tunteista ja heidän oppimisestaan opetuskokeilun viimeisellä viikolla ennen syyslomaa. Oppilaat kokivat kuluneen syyslukukauden alkupuolen mukavana ja helppona myös matematiikan osalta. Seuraava katkelma keskustelusta on videonauhalla.

Minä: No mikäs on ollu kaikista vaikeinta täällä matematiikan tunneilla? Kukaan ei viittaa.

Minä: Vai onko joku asia ollu vaikeeta?

Mirka: Ei.

Minä: No onko joku asia ollut semmosta ihan helppoa, mitä sä oot osannut jo ennestään?

Oppilaat: On.

Minä: No mikä asia on ollut helppoa? Essi?

Essi: Se väritysjuuttu.

Minä: Mikä väritysjuuttu?

Essi: Ne joissa pittää vähemmän ja enemmän värittää. Tuomas ja Mirka viittaavat.

Minä: Tuomas?

Tuomas: Se oli mimusta aika vaikea se että pittää värittää kaks enemmän.

Minä: Mirka?

Mirka: Niin tuo ... tuo ... niin että pittää arvata ja kokkeilla niitä numeroita.

Minä: Oliko se sinusta vaikeata vai helppoa?

Mirka: Helppoa.

Minä: Onkos Villen mielestä ollut jotakin ihan helppoa matematiikan tunnilla?

Ville: On.

Minä: No mikäs sun mielestä on ollut ihan helppoa?

Ville: Laskeminen.

Minä: Se on hyvä että ei oo teijän mielestä ollu mikään ... Nauhoitus katkeaa, olin ilmeisesti sanomassa "liian vaikeaa".

Olen tyytyväinen, ettei kukaan ensimmäisen luokan oppilas tuntenut kokeilun aikana mitään tehtävää tai harjoitusta liian vaikeaksi. Helppoja ja mukavia asioita oppilaiden mielestä mukaan opetuskokeiluun mahtui useampiakin, mm. pelaaminen ja leikkiminen.

3.6.1 Koe

Oppilaiden lukukäsitteen sekä aritmeettisten taitojen kehittymistä arvioin opetuskokeilun lopuksi perinteisen kokeen avulla. Vaikka perinteinen matematiikan koe ei sovi konstruktivistiseen oppimisen arviointiin, valitsin sellaisen pidettäväksi kokeen valta-aseman vuoksi oppimistulosten arvioinnissa. Mekaanisten laskutehtävien sisältämä koe arvioi oppilaan matemaattisia taitoja vain suppealta alueelta. Kokeilun aikana teimme vähemmän kirjan tehtäviä, niin kuin kynä-paperi -tehtäviä yleensäkin. Sen vuoksi olikin mielenkiintoista nähdä, miten oppilaat selviäsivät perinteisestä, kirjallisesta matematiikan kokeesta. Opettajanoppaasta (Vähäpassi ym. 1997, 91) kopioitavan kokeen valitsin arvioidakseni myös sitä, miten oppilaat selviytyvät lähinnä mekaanista laskemista sisältäviä tehtävistä, kun sellaisten osuus toiminnasta matematiikan tunneilla kokeilun aikana oli ollut hyvin pieni. Pidin kokeen toimien opettajanoppaassa annettujen ohjeiden mukaan. Oppilaat selviytyivät kokeesta hyvin, kuten seuraava päiväkirjan kohta kertoo.

12.10. Eka luokan ensimmäiset matematiikan kokeet. Samalla koe toimi tavallaan kokeiluni loppumittauksena. Ja hyvin meni. Kokeessa mitattiin mm. lukukäsitteen hallintaa (enemmän kuin ja vähemmän kuin tehtävä) ja mekaanista laskutaitoa. Tässä kokeen tulokset: Tuomas 19/20, Mirka 18/20, Essi 20/20, Susanna 20/20 ja Ville 18/20. Ville ja Mirka olivat värittäneet vain yhden vähemmän tehtävässä, jossa piti värittää kaksi vähemmän. Virhe voi johtua lukutaidottomuudesta, kävimme kyllä yhdessä tehtävät aluksi läpi, mutta kukaan ei kysynyt koetta tehdessään neuvoa, vaikka siihenkin oli mahdollisuus. Markuksen virhe oli ilmeisesti huolimattomuusvirhe (lukumäärän laskemista mitattavan tehtävän kuvassa oli 4 rusetia ja hän oli merkinnyt paperiinsa 3). Kiva huomata, että esim. yhteen- ja vähennyslaskut lukualueella 0 - 5 ovat virheettömästi hallussa, vaikka mekaaniseen laskemiseen pelkillä numerosymboleilla olemme käyttäneet todella vähän aikaa koko syksynä. Lukujonotaitoja kokeessa ei mitattu, mutta jokainen eka-luokkalainen osaa luetella luvut 0 - 10 eteen ja taaksepäin, myös aloittaen jostakin luvusta lukujonon 0 -10 keskeltä. Myös laajemmat lukujonotaidot ovat hallussa ainakin Markuksella, Susannalla ja Essillä. Lukukäsite alkaa olla hyvin hallinnassa jokaisella.

Koetilanne oli oppilaista jännittävä. He olivat ylpeitä saadessaan tehdä ihan oikean kokeen, niin kuin isommat koululaiset olivat kertoneet koulussa tehtävän. Koetilanne voi olla oppilaalle ahdistava tai pelottava, jopa niin että hän suoriutuu koetehtävistä normaalia tasoaan heikommin. Jokainen oppilaani sai mielestäni myönteisen kokemuksen koulutiensä ensimmäisestä oikeasta kokeesta. Eikä kukaan suoriutunut odotettua heikommin, Villen kohdalla olin jopa iloisesti yllättynyt kokeen tuloksesta.

Oppilaiden taitoja tarkastellessani huomaan, ettei kenenkään oppimiselle ole aiheutunut opetuskokeilustani haittaa. Matematiikan tunneilla on tehty monenlaista, kukin oppilaista on saanut edetä omalla tasollaan, kuten konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen kuuluu. Taitavat ja nopeat oppilaat, kuten Susanna, Essi ja Tuomas ovat saaneet edetä pidemmälle ja vaativampiin harjoituksiin. Heidän ei ole tarvinnut pysytellä helpoissa, jo osaamisensa asioissa muita odotellen. He saivat laajentaa lukualuettaan taitojensa mukaan, jopa yli sadan. Hitaammat oppilaat, Mirka ja Ville, ovat ehtineet harjoitella itselleen helpompia, mutta heille tärkeitä tehtäviä kauemmin. Opetuksen eriyttäminen oli opetuskokeilun

toiminnan kautta luontevaa ja se onkin kannattanut. Syksyn kuluessa Villen lukukäsité on kehittänyt ja Mirkan lukujonotaitojen lukualue on laajentunut.

3.6.2 Pysäkkityöskentely

Opetuskokeiluni päättyi koko päivän kestäneeseen pysäkkityöskentelyyn. Pysäkkityöskentely kesti koko koulupäivän, 5 oppituntia. Valmistelin pysäkit sillä tavalla, että niiden sisältämissä tehtävissä kerrattiin ja syvennettiin opetuskokeilun aikana opittuja asioita. Useille pysäkeille varasin toisen luokan oppilaille vaativampia tehtäviä. Pysäkkejä oli kaikkiaan 17. Pysäkit olivat seuraavanlaiset:

1. Hiekkapaperinumeroiden järjestäminen sokkona lukujonoksi 0 - 5
2. Muistipeli (pallukat ja lukumäärää vastaava numeromerkki, 0 - 10)
3. Numeroiden kirjoittamisharjoitusta 0 - 5
 - * kakkosille luetun ymmärtämistä ja päättelyä vaativa tehtävä
4. Noppapolku-peli yhdellä nopalla (järjestyksessä saatava 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1)
 - * kakkosille kahdella nopalla samantyylinen (kymmenylitys)
5. Tunnustelupussi: löytyykö pussista numerot 0 - 5
6. Niputuspele
7. Numerosokkelo: etsi numerot ja väritä samat numerot samalla värillä
 - *kakkosille päättelytehtävä
8. Palikkarakentelu: ovat selin toisiinsa, toinen ohjaa ja molemmat rakentavat. Tuliko samanlaiset?
9. Mikä luku piilossa? 0 - 10, 0 - 20
 - *kakkosille mittanauha 0 - 150
10. Parin etsimistehtävä (erot pieniä, vaikea)
11. Mallirakentelu palikoilla (kuvakortit mallina, tee samanlainen)
12. Selkään piirtely (opettaja piirtää)
13. Tikkuongelmia (oikeilla tikuilla voi kokeilla)
14. Taikakolmio (jokaisen sivun summa on 7, mukana saa olla numerot 1, 2, 3, 4, 5)
15. Satataulun kokoaminen irtopaloista
16. Onginta (kaloissa laskutehtäviä)
 - *kakkosille punaisissa kaloissa isoilla luvuilla kymmenylityslaskuja
17. Palikkatorni ja numero (rakenna ja yhdistä oikein)
 - *kakkosille rahalaskutehtäviä

Pysäkkityöskentely toimi loistavasti. Jonottamista tai turhaa edestakaisin säntäilyä ei syntynyt, vaan parit etenivät sovussa (osalla pareista oli kyllä hiukan erimielisyyksiä pysäkkien valintavuoroissa) pysäkiltä toiselle. Oppilaat etenivät omaa tahtiaan ja jokaiselle parille riitti tekemistä koko päiväksi. Osa eteni nopeammin ja osa viipyi pysäkeillä kauemmin. Välitunnit ja ruokailu olivat tavallisilla paikoillaan, muuten koko päivä meni matemaattisissa merkeissä.

15.10. Keskustelimme eilisestä pysäkkityöskentelystä. Oppilaat pitivät sitä mielenkiintoisena ja kivana. Kysyivät, että milloin sellainen on uudelleen? Vaikeimmaksi pysäkeiksi

oppilaat arvioivat sokkona tehtävän lukujonon ja tunnustelupussin. Tunnustelupussissa ei ollut kaikkia numeroita (0 - 5) ja siellä oli lisäksi numeroiden seassa myös kirjaimia hämäämässä. Mukavimmaksi pysäkiksi nousi monta mielipidettä: sataruudukko (yllättävää kyllä, myös ykkösten mielestä), niputuspelejä, tietokone, onginta ja hiekkaperinumeroiden tunnustelu. Tekemistä oli tarpeeksi ja tehtävistä mikään ei ollut liian vaikea oppilaiden mielestä. Osalta pareista oli jäänyt jokin pysäkeistä käymättä, mutta suurin osa kävi kaikissa. Opettajana olen todella tyytyväinen oppilaiden työskentelyyn pysäkeillä ja matematiikkapäivään kokonaisuutena.

Toiminnallisen matematiikan opetuksen työtavoista pysäkkityöskentely on tehnyt minuun suuren vaikutuksen. Pysäkkityöskentely on monipuolinen ja joustava työtapa. Se sopii hyvin kertaamiseen, mutta myös uusien asioiden toiminnalliseen oppimiseen. Luokassa on useita pysäkkejä, joilla jokaisella on omat tehtävänsä. Oppilaat jaetaan pienryhmiin tai pareihin, joista yksi toimii vuorollaan kullakin pysäkillä. Vuoronvaihto voidaan hoitaa kellosta aikaa katsomalla (esim. 5 min/pysäkki) tai passisysteemillä, jolloin tietyille pysäkkille voi mennä, jos pysäkin passi on vapaana. (Koponen 1995, 75; Saravesi 1998.)

Opettajan tehtävä on etukäteen tapahtuva pysäkkien, niihin sisältyvien tehtävien ja ohjeiden valmistelu. Valmistelu vaatii aikaa ja vaivaa, mutta itse toiminnassa opettajalle jää loistava mahdollisuus keskittyä tarkkailemaan oppilaitensa toimintaa. Toiminnan havainnointi auttaa opettajaa arvioimaan omaa opetustaan. Oppilaiden toiminnasta näkee heidän osaamisensa ja innostuksensa tason. Pysäkkityöskentely soveltuu näin ollen mielestäni hyvin myös oppilaiden matemaattisten taitojen arviointiin.

4 OPETUSKOKOILUN ARVIOINTI

Opetuskokeilu ja toimintatutkimus olivat minulle sopivia, luontevilta tuntuvia menetelmiä tutkielman tekemiseen. Käytännön ihmisenä halusin yhdistää jokapäiväisen opettajan työn ja tutkimuksen tekemisen toisiinsa. Halusin tutkielman tekemisen ohessa saada aikaan jotakin konkreettisesti omassa työssäni nyt ja tulevaisuudessa hyödynnettävää. Tämän tavoitteen saavutin. Valmistamani materiaalit, erityisesti pelit sekä kokemukseni opetuskokeilusta ovat hyödynnettävissä opetuksessani myös tulevina vuosina opettajantyössäni. Olen tyytyväinen metodisiin valintoihini. Toimintatutkimus ja opetuskokeilu sopivat käytännönläheisinä toteutettaviksi jokapäiväisen opetustyön rinnalla omassa luokassani. Opetuskokeiluni toimi ja onnistui käytännön tasolla hyvin. Huomaan onnistuneeni myös teorian ja käytännön yhdistämisessä toiminnan tasolla.

Toimintatutkimukseni alkoi suunnitteluvaiheella kesällä 1999. Suunnitteluvaiheessa tein toimintasuunnitelman ja valmistin tarvittavaa materiaalia, mm. pelejä. Itse opetuskokeilu eli toimintajakso alkoi koulun alkaessa elokuussa ja päättyi syyslomaan lokakuussa. Toimintajakso koostui siis yhdeksästä viikosta. Kun viikossa matematiikkaa oli reilut 3 tuntia, koko kokeilun laajuudeksi tuli n. 30 tuntia. Toiminnassa olivat aluksi mukana molemmat luokat yhdysluokan opetuksellisten järjestelyjen vuoksi. Suunnittelemani sisällöt olivat lähinnä ensimmäisen luokan oppilaille tarkoitettuja, joten rajasinkin toisen luokan oppilaat kokeilun ulkopuolelle toimintajakson puolivälissä. Samassa yhteydessä kärsin opetuskokeilun sisältöjä, kuten seuraava päiväkirjan kuvaus osoittaa.

15.9. Tässä vaiheessa, kokeilun lähestyessä puoliväliään, on syytä tehdä jonkinlainen tilannekatsaus. Alunperin mukaan piti mahdollistaa lukukäsite, lukujonotaidot ja kymmenjärjestelmä. Nyt muutan suuntaa ja jätän raat'asti pois kymmenjärjestelmän osuuden. Samalla rajaan tästä eteenpäin kakkoset kokonaan pois kokeilun piiristä. He haluavat ja saavat jatkaa eteenpäin matematiikan oppimisessa, omat jutut kutsuvat kakkosia. Jussi tosin saa osallistua sopivassa saumassa ykkösten hommiin, se tekee hänelle varmasti vain hyvää. Meillä riittää ykkösten loistavasti tekemistä tähänastisten sisältöaluiden syventämisessä ja lukualueen laajentamisessa kymmenestä eteenpäin. Kymmenjärjestelmää sivutaan, kun lukualue laajenee kohti sataa. Mutta varsinaisen kymmenjärjestelmän opettamisen jätän kokeilustani pois.

Aineistonkeruumenetelminä käytin osallistuvaa havainnointia ja päiväkirjaa, johon kirjasin päivittäin havaintojani. Kuvasin oppilaiden toimintaa videonauhalle ja otin toiminnasta valokuvia. Kuvattua videonauhaa oli 1½ tunnin verran ja valokuvia n. 100 kpl. Aineistoa kokeilun aikana kertyi paljon, videonauha ja päiväkirja litteroituna yhteensä 67 sivua. Koska toimintatutkimus ei metodina määrittele käytettäviä aineistonkeruumenetelmiä, pyrin käyttämään useampia, jotta saisin monipuolisemman kuvan tutkittavasta toiminnasta. Kyseessä oli eräänlainen triangulaatiopyrkimys. Tarkoituksena oli saada aineistoon eri näkökulmia, omani ja oppilaiden näkökulma. Triangulaatiopyrkimyksillä halusin myös lisätä tutkimuksen luotettavuutta.

Aineiston analysointi ja tutkimusraportin kirjoittaminen veivät yllättävän paljon aikaa. Tämä vaihe muodostuikin raskaimmaksi koko tutkimuksessani. Käytännön toimintajakson jälkeen yksinäinen puurtaminen aineiston kimpussa oli työlästä ja vaikeaa. Tässä vaiheessa usko työn valmistumiseen meinasi loppua kesken. Oman, osaltaan työmäärää lisänneen osansa raportointiin toi oppilaiden henkilöllisyyden salassapitäminen. Nimien muuttaminen aiheutti alkuun hankaluuksia. Päiväkirjassa ja puretulla videonauhalla oppilaat menivät sekaisin enkä aina alkuvaiheessa tiennyt kuka oli kuka. Pian kuitenkin opin muistamaan oppilaiden ”salanimet” ja tulosten purkamisen helpottui. Myös ottamani valokuvat jäivät oppilaiden tunnistamisen mahdollisuuden takia pois lopullisesta raportista.

Tutkimuksen tavoitteista ja tuloksista tärkeimpänä pidän oman opettajuuteni kehittymistä. Kokeilun aikana jouduin pohtimaan omia opetuskäytäntöjäni ja -tapojani, perusteellamaan tekemiäni valintojani ja miettimään uudelleen matematiikan opetukseni arvoperustan. Onko tärkeämpää tehdä kirjasta sivut täyteen vai saavutetaanko aktiivisella ja konkreettisella toiminnalla jotakin enemmän? Onko tärkeämpää osata kirjoittaa kauniita numeroita vai osata laskea vaihtorahat kauppaleikissä? Saavutetaanko toiminnalla samat tavoitteet vai vielä enemmän kuin mekaanisella kirjan tehtävien laskemisella? Nyt pystyn sanomaan, että opetuskokeilu kannatti myös oman opettajuuteni kehittymisen suhteen. Epäröintiä ja uskon puutettakin sisältyi kokeilun ajalle, mutta en antanut sen muuttaa suunnitelmiani. Uskallan sanoa, että osaan opettaa matematiikkaa. Erilaisten työtapojen kokeileminen rohkaisi poikkeamaan perinteisestä matematiikan opetuksesta. Pelaaminen, leikki ja yhdessä tekeminen ovat koulutulokkaalle luonteenomaisia toimintoja ja niitä voi hyvin käyttää hyväkseen myös matematiikan opetuksessa. Opettajasta itsestään riippuu hyvin pitkälle se, millaista matematiikkaa ja millaisin keinoin hänen oppilaansa oppivat. Opettajana haluan luoda oppilailleni mahdollisuuden saada matematiikan tekemisestä ja oppimisesta iloa ja onnistumisen kokemuksia. Opetuskokeiluni aikana saavutin tämän tavoitteen. Onnistunut opetuskokeilu rohkaisee jatkamaan kokeilemistä, työtapojen monipuolistamista ja kirjasta irtaantumista jatkossakin.

Toiminnallisuuden ja leikinomaisuuden lisääminen on mielestäni tuonut matematiikan opetukseeni uutta, iloisempaa otetta. Uskalsin jättää kirjan vähemmälle, vaikka välillä epäröinkin. Kirjan tehtävien tekeminen oikeana tapana opettaa ja oppia matematiikkaa on todellakin iskostettu syvälle. Kirjan asema on vankka ja sitä on vaikea horjuttaa. Oppikirja ei ole minulle enää sama asia kuin opetussuunnitelma, vaan se on palautettu paikalleen työvälineeksi, opetuksen helpottajaksi, pois opetuksen ohjaajasta. Oppikirjan valta-asema oli iskostunut myös oppilaiden mieliin ja kirjan sivujen sekä tehtävien tekemättömyys huolestutti heitäkin, erityisesti toisen luokan oppilaita. Vanhempien taholta kyselyjä tai

ihmettelyjä kirjan tehtävien tekemättömyyden osalta ei ilmennyt. Työtapojen monipuolistaminen teki kirjan vähemmälle jättämisen helpommaksi. Kun aikaa käytettiin pelaamiseen, konkreettisella materiaalilla toimimiseen ja keskusteluun, ei kirjan tehtävien tekemiseen enää jäänyt aikaa. Kolme tuntia matematiikkaa viikossa on loppujen lopuksi aika vähän. Kirjalla oli kyllä kokeilun aikanakin oma paikkansa matematiikan opetuksessa. Oppilaat halusivat tehdä kirjallisia tehtäviä ja kirjasta löytyi valmiita, hyviä tehtäviä. Jos kirjaa ei olisi ollut käytettävissä, olisin monistanut oppilaille kirjallisia tehtäviä. Kotitehtävät on helppo antaa kirjasta, samoin mekaanisten tehtävien harjoitteluun kirja sopii hyvin. Kirjan ei saa kuitenkaan antaa ohjata matematiikan opetusta vaan opetussuunnitelma on se, joka opetusta ohjaa. Kirja on hyvä renki, mutta huono isäntä.

Uusien työtapojen kokeileminen matematiikan opetuksessa oli antoisaa. Pysäkkityöskentelyä olin jo kokeillut opetusharjoittelussa ja tunsin sen toimivaksi. Kokonaisen koulupäivän käyttäminen matematiikkaan arvelutti kuitenkin etukäteen. Pysäkkityöskentely onnistui erinomaisesti ja 5 tuntia oli sopiva aika sen toteuttamiseksi. Pelaaminen työtapana herätti etukäteen hiukan epäilyksiä: voiko pelaamalla, hauskaa pitämällä, oppia matematiikkaa? Kokemukset osoittavat, että kyllä voi. Pelatessaan oppilaat puhuvat matematiikkaa ja keskustelu auttaa heitä konstruoimaan matemaattisia malleja. Keskustelujen dokumentointi osoittautui ongelmalliseksi, muuten pidin sitäkin onnistuneena työtapana. Laskutarinoiden käyttö oli minulle uusi kokemus. Samoin kuin keskusteluissa, laskutari-noita kertoessaan lapsi joutuu puhumaan matematiikkaa. Puheen merkitystä ajattelun kehittymiselle on tutkittu paljon ja niillä on havaittu olevan kiistaton yhteys. Oppilaat työskentelivät innokkaasti koko kokeilun ajan ja pitivät kaikista käyttämäni työtavoista. Pienen ryhmän kanssa käyttämäni työtavat ovat osoittautuneet toimiviksi. Isompaa ryhmää tai ainoastaan ensimmäisen luokan opettamisessa tilanne olisi voinut olla toinen.

Opetuskokeilu oli ainutkertainen, juuri tälle ryhmälle juuri tällaiseksi muodostunut kokonaisuus. Toisessa tilanteessa, eri koulussa, eri oppilaiden kanssa opetuskokeilusta olisi varmasti muodostunut erilainen. Toimintatutkimuksen luotettavuutta arvioitaessa onkin huomioitava tutkimuksen ainutkertaisuus. Tutkimuksen tulokset ovat riippuvaisia tutkimuksen osallistujista, koska osallistujat ovat itse subjektiivisesti vaikuttamassa tutkimuksen etenemiseen. Toimintatutkimuksen ainutkertaisuus ja konstruktivistinen oppimiskäsitys yhdessä saavat aikaan myös tulosten ainutkertaisuuden. Toimintatutkimusta ei voi toistaa täysin muuttumattomana. Näin ollen opetuskokeilun tulokset eivät ole sellaisenaan yleistettävissä niin tässä kuin muissakaan toimintatutkimuksissa. Tulokset eivät ole objektiivisia, vaan tutkijan eli minun subjektiivinen näkökulmani tutkittavasta ilmiöstä.

Oppilaiden matemaattisten valmiuksien ja taitojen kehittäminen oli yksi opetuskokeiluni tavoite. Konstruktivistisen ajattelun mukaisesti lähdin liikkeelle oppilailla jo olevan matemaattisten tietojen ja taitojen selvittämisestä. Näin pystyin aloittamaan matematiikanopetuksen jokaiselle oppilaalle yksilöllisesti sopivalta tasolta. Alkumittauksen tulokset osoittivat suuria yksilöllisiä eroja oppilaissa ja heidän taidoissaan. Näin pienessä ryhmässä minulla opettajana oli hyvät mahdollisuudet eriyttää opetusta oppilaiden tason mukaan. Kuten loppumittaus osoitti, ei kenenkään oppilaani oppimiselle tai oppimistuloksille ollut haittaa kokeilusta. Mielestäni asia on pikemminkin päinvastoin. Eniten toiminnallisesta ja leikinomaisesta matematiikanopetuksesta katson olleen hyötyä heikommille oppilaille, kuten Villelle ja Mirkalle. Toiminnan konkreettisuus ja materiaaleilla toimiminen madalsivat kynnystä siirtymiseen symboliseen matematiikkaan. Matematiikan yhdistäminen

oppilaiden arkimaailmaan onnistui hyvin mm. rahoja käyttämällä. Esimerkkitehtävät ja päässäälaskut muotoilin oppilaita itseään koskeviksi käyttämällä heidän omia nimiään, heidän sisaruksiaan ja oikeassakin elämässä mahdollisia tapahtumia mm. ostamista ja ostosten jakamista sisarusten kesken. Palikoilla laskettaessa voitiin puhua karkeista, mikä teki laskemisen mielenkiintoisemmaksi. Mielikuvituksen ja leikin yhdistäminen matematiikkaan sopii mielestäni erittäin hyvin alkuopetuksessa. Symbolitasolle siirtymistä siirsin tarkoituksella myöhemmäksi. Ensimmäisen kuukauden pysyttelimme konkreettisella materiaalilla toimimisen tasolla. Vasta syyskuussa opettelimme kirjoittamaan numerot ja laskimme niillä sekä muilla symbolisilla merkeillä (+, -, =) kuvattuja laskuja kirjallisesti. Riittävän pitkällä, konkreettisella ja materiaaliin pohjautuvalla aloituksella pyrin osaltani ennaltaehkäisemään matematiikan oppimisvaikeuksia.

Konkreettisuuden lisäämisellä ja symbolisuuden vähentämisellä pyrin siis ennaltaehkäisemään matematiikan oppimisvaikeuksia, mikä olikin yksi opetuskokeilun tavoitteista. Tämän tavoitteen toteutumista ei voi vielä mitata. Vaatisi yhtä lukukautta pidemmän ajanjakson seurannan, jotta kokeilun merkitys suhteessa oppimisvaikeuksiin tulisi näkyviin. Tällä hetkellä, kevätlukukauden alkuvaiheissa, ei kenelläkään ensimmäisen luokan oppilaista ole matematiikan oppimisessa vaikeuksia. Ville ja Mirka osaavat muiden lailla laskutoimitukset ja hallitsevat mm. kymmenylitykset yhteen- ja vähennyslaskuissa. Opetuskokeiluni ansioksi en tätä kuitenkaan kokonaan laske, onhan kypsymistäkin tapahtunut syyslukukauden aikana jokaisen oppilaan kohdalla.

Taitavammat ja nopeammat oppilaat, Tuomas, Susanna ja Essi ovat saaneet edetä matematiikassa pidemmälle kuin heikommat luokkatoverinsa. Tämä näkyy erityisen hyvin oppilaiden lukujonotaidoissa. Lukualue on heillä laaja, reilusti 100:n ylittävä. Toiminnallisuus sopii myös taitaville oppilaille. Samoilla materiaaleilla toimiessaan he syventävät matemaattista ajatteluaan samaan aikaan kun heikommat vasta tutustuvat uusiin asioihin. En usko kenenkään oppilaistani kokeneen toimintaa tylsäksi tai pelkäksi leikkimiseksi.

Työyhteisössä suhtauduttiin hyvin myönteisesti kokeilevaan toimintaani. Koulun 5 - 6 - luokan opettaja on muutama vuosi sitten opettanut yhden lukuvuoden matematiikkaa luokalleen kokonaan ilman kirjaa eli kokeiluja on tässä koulussa tehty ennenkin. Oppilaiden vanhemmat suhtautuivat myös myönteisesti kokeiluun. Itse olen edelleen kaikin puolin tyytyväinen opetuskokeiluuni ja sen tuloksiin, kuten heti kokeilun päätyttyäkin.

15.10. Kokeilu on takana. Paljon on tehty ja paljon on touhuttu. Vähemmän on istuttu pulpetissa ja tehty kirjan tehtäviä. Kirja kyllä puolustaa paikkaansa, mm. kotitehtävät olen antanut kirjasta ja mekaanisia tehtäviäkin oppilaat haluavat tehdä. Materiaalia on ollut käytettävissä runsaasti, pääosin itsevalmistettuja tai koululla jo olleita, uutta en ole kokeiluani varten koulun rahoilla ostanut. Suurin hyöty kokeilusta on se, että se ei ole ohi: olen saanut paljon materiaalia tulevienkin vuosien opetustyöhön.

Ja kuten toimintatutkimuksen luonteeseen kuuluu, toiminta jatkuu edelleen. Yksi sykli on pyörähtänyt, toinen on alkamassa. Opettajaksi kasvamiseni on alkanut.

LÄHTEET

- Atkins, S. L. 1999. Listening to Students. The Power of Mathematical Conversations. *Teaching Children Mathematics* 5 (5), 289 - 295.
- Aubrey, C. 1997. Children's Early Learning of Number in School and Out. Teoksessa I. Thompson (toim.). *Teaching and Learning Early Number*. Philadelphia: Open University Press, 20 - 29.
- Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanesian, H. 1978. *Educational Psychology. A cognitive View*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Beard, R. M. 1971. Piaget'n kehityopsykologia. Helsinki: Tammi.
- Berry, J. & Sahlberg, P. 1995. *Matematiikka elämään*. Juva: WSOY.
- Bohan, H. J. & Bohan-Shawaker, P. 1994. Using Manipulatives Effectively: A Drive Down Rounding Road. *Arithmetic Teacher* 41 (5), 246 -248.
- Björkqvist, O. 1993. Konstruktivism och utvärdering. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.). *Matematiikan opetus ja konstruktivismi - teoriaa ja käytäntöä*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 116, 21 - 35.
- Björkqvist, O. 1995. Matematiikan oppimisen monipuolinen arviointi. Teoksessa R. Sepälä (toim.). *Toimi, laske ja ajattele. Ala-asteen matematiikkaa*. Jyväskylä: Gummerus, 37 - 44.
- Carr, W. & Kemmis, S. 1986. *Becoming Critical: Education, Knowledge and Action Research*. London: Falmer.
- Clements, D. H. & McMillen, S. 1996. Rethinking "Concrete" Manipulatives. *Teaching Children Mathematics* 2 (5), 270 -279.
- Copeland, R. 1984. *How Children Learn Mathematics. Teaching Implications of Piaget's Research*. 4th edition. New York: Macmillan Publishing Company.
- Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. 1984. *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research*. Oxford: The Alden Press Ltd.
- Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. Jyväskylä: Gummerus.
- Galperin, P. J. 1969. Stages in the Development of Mental Acts. Teoksessa Cole, M. & Maltzman, I. (toim.). 1969. *A Handbook of Contemporary Soviet Psychology*. New York: Basic Book Inc, 249 - 273.
- Galperin, P. J. 1979. *Johdatus psykologiaan*. Helsinki: Kansankulttuuri.
- Gluck, D.H. 1991. Helping Students Understand Place Value. *Arithmetic Teacher* 38 (7), 10 -13.
- Haapasalo, L. 1993a. Matematiikan opetussuunnitelmien lähtökohtia ja kehittämisenäkymiä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 2.
- Haapasalo, L. 1993b. Miksi opetuksen uudistaminen ei onnistu? *Kasvatus* 24 (3), 266 - 275.
- Haapasalo, L. 1998. *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu*. Joensuu: MEDUSA-software.
- Heikkinen, H. & Jyrkämä, J. 1999. Mitä on toimintatutkimus? Teoksessa H. Heikkinen, R. Huttunen & P. Moilanen. *Siinä tutkija missä tekijä. Toimintatutkimuksen perusteita ja näköaloja*. Juva: WSOY, 25 - 62.

- Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L., & Virta, V. 1998. Hei, nyt lasketaan! Opettajankirja 1A. Uudistetun laitoksen 1. painos. Keuruu: Otava.
- Herbert, E. 1985. Manipulatives Are Good Mathematics! *Arithmetic Teacher* 32 (6), 4.
- Hohmann, M., Banet, B. & Weikart, V. 1992. Leikin, tutkin, opin. Toiminnan iloa esiopetukseen. *Suom. toim. Lius*, E. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Hollingsworth, C. 1990. Maximizing Implementation of Manipulatives. *Arithmetic Teacher* 37 (9), 27.
- Hopkins, D. 1985. *A Teacher's Guide to Classroom Research*. Philadelphia: Open University Press.
- Huttunen, R. & Heikkinen, H. 1999. Toimintatutkimus demokraattisena tahdonmuodotuksena. *Kasvatus* 30 (1), 18 - 30.
- Hägglom, L. 1994. Mathematics on the Child's Condition - A Constructivist Approach at School. Teoksessa M. Ahtee & E. Pehkonen (toim.). 1994. Constructivist Viewpoints for School Teaching and Learning in Mathematics and Science. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia, 131, 93 - 98.
- Ikäheimo, H. 1995. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. Helsinki: Oy Opperi Ab.
- Ikäheimo, H. 1998. Matematiikan esi- ja alkuopetuksen kysymyksiä. Teoksessa P. Räsänen ym. (toim.). *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Toinen painos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 239 - 250.
- Ikäheimo, H., Aalto, A. & Puumalainen, K. 1997. Opi matematiikkaa leikkien esi- ja alkuopetuksessa. Helsinki: Oy Opperi Ab.
- Ilmavirta, R. 1995. Toimintamateriaalin käyttö ja monipuoliset työtavat parantavat oppimista. Teoksessa R. Seppälä (toim.). *Toimi, laske ja ajattele. Ala-asteen matematiikkaa*. Jyväskylä: Gummerus, 61 - 69.
- Kaasila, R. 1997. Konstruktivismiin eri muodot matematiikan opetuksessa peruskoulun ala-asteella. Lapin yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja B. Tutkimusraportteja ja selvityksiä, 26.
- Kallonen-Rönkkö, M. 1986. Koulutulokkaan matemaattisten oppimisvalmiuksien harjoittaminen. Piaget'n teoriaa soveltava ohjelma opettajan käyttöön. Oulun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Opetusmonisteita ja selosteita, 20.
- Kallonen-Rönkkö, M. 1998. Matematiikan oppiminen ala-asteen uusiutuviissa oppimisympäristöissä. Teoksessa P. Räsänen ym. (toim.). *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Toinen painos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 251 - 268.
- Kamii, C. 1990. Constructivism and Beginning Arithmetic (K-2). Teoksessa T. Cooney (toim.). *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*. Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, 22 - 30.
- Kennedy, L. M. A Rationale. *Arithmetic Teacher* 33 (6) 6 -7, 32.
- Keranto, T. 1981. Lukukäsitteen kehittyminen ja kehittäminen: matemaattis-loogiset perusteet ja luvun kognitiivinen rakentuminen. Tampereen yliopiston julkaisuja. Julkaisusarja A: 125.
- Keranto, T. 1993. Käsitteet matematiikan opetuksesta ja oppimisesta muuttuvat - muuttuuko koulukäytäntö? *Kasvatus* 24 (3), 249 -258.
- Kinnunen, R. & Vauras, M. 1998. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa P. Räsänen ym. (toim.). *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Toinen painos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 269 - 282.

- Kivi, T. 1995. Oppimisen ytimessä. Vantaa: Opetushallitus.
- Kiviniemi, K. 1999. Toimintatutkimus yhteisöllisenä prosessina. Teoksessa H. Heikkinen, R. Huttunen & P. Moilanen. Siinä tutkija missä tekijä. Toimintatutkimuksen perusteita ja näköaloja. Juva: WSOY, 63 - 81.
- Koponen, R. 1995. Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille. 2. uudistettu painos. Saarijärvi: Gummerus Kirjapaino Oy.
- Koponen, R. & Kupari, P. (toim.). 1982. Matematiikan diagnosointikortit peruskoulun 1. ja 2. luokalle. Kasvatustieteen tutkimuslaitos. Selosteita, 200.
- Kupari, P. 1993a. Millä tavoin matematiikan opiskelu ja opetus on muuttunut? Teoksessa V. Brunell & P. Kupari (toim.). Peruskoulu oppimisympäristönä. Peruskoulun arviointi -90 tutkimuksen tuloksia. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Jyväskylän yliopisto, 81 -104.
- Kupari, P. 1993b. Mistä rohkeus ja keinot koulumatematiikan uudistumiseen. Teoksessa E. Kangasniemi & R. Konttinen. Lue, etsi, tutki - tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Juva: WSOY, 114 -131.
- Lahdes, E. 1989. Opettaja työnsä tutkijana. Kasvatus 20 (6), 468 - 475.
- Lehtinen, E. 1988. Prosessioituneen opetuksen perusteet: teoreettisia lähtökohtia matematiikan opetuksen kokeiluohjelmalle. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunta. Julkaisusarja A: 127.
- Lehtinen, E. , Kinnunen, R. , Vauras, M. , Salonen, P. , Olkinuora, E. & Poskiparta, E. 1991. Oppimiskäsitys koulun kehittämisessä. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Leino, J. 1992. Uutta ajattelua matematiikan opetukseen! Kasvatus 23 (1), 40-46.
- Leino, J. 1993a. Konstruktivismi ja matematiikan opetus. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.) Matematiikan opetus ja konstruktivismi - teoriaa ja käytäntöä. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 116, 11 -20.
- Leino, J. 1993b. Konstruktivismiin suuntauksia. Teoksessa L. Haapasalo & P. Kupari (toim.). Konstruktivismi matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman kehittämisessä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 6. Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino, 1 - 7.
- Leino, J. 1998. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen ym. (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen painos Jyväskylä: Yliopistopaino, 39 - 51.
- Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. Matikkatupakokeilu peruskoulun toisella luokalla. Tampereen yliopiston julkaisuja. Julkaisusarja A: 307.
- Lindgren, S. 1998. Voidaanko matematiikan opiskeluasenteita muuttaa? Teoksessa P. Räsänen ym. (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen painos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 301 - 315.
- Lummelahti, L. 1993. Erityisopetus - haaste luokanopettajalle. Teoksessa E. Korpinen (toim.). Opettajaksi oppimaan - kasvattajaksi kasvamaan. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 7, 21 - 28.
- Lyytinen, P., Korhokangas, M. & Lyytinen, H. 1995. Näkökulmia kehityspsykologiaan - kehitys kontekstissaan. Porvoo: WSOY.

- Maclellan, E. 1997. The Importance of Counting. Teoksessa I. Thompson (toim.). *Teaching and Learning Early Number*. Philadelphia: Open University Press, 33 - 40.
- Maher, C. A. 1998. Constructivism and Constructivist Teaching - Can They Co-exist? Teoksessa O. Björkqvist (toim.). *Mathematics Teaching from A Constructivist Point of View*. Reports from the Faculty of Education. Åbo Akademi University, 3, 29 - 42.
- Malaty, G. 1997. Mitä matematiikka on? Teoksessa M. Siniharju (toim.). *Esi- ja alkuopetuksen uusia tuulia*. Jyväskylä: Gummerus, 53 - 90.
- McBride, J. W. & Lamb, C. E. 1991. Using Commercial Games to Design Teacher-made Games for the Mathematics Classroom. *Arithmetic Teacher* 38 (5), 14 - 22.
- Mittrowann, U. & Pehkonen, E. 1985. *Oppimislejät matematiikan opetukseen*. Vantaa: Kunnallispaino.
- Munter, H. 1993. Kvalitatiivisen lähestymistavan lähtökohtia kehityspsykologiassa. *Psykologia* 28, 240 -247.
- Olkinuora, E. 1994. Oppimis-, tieto- ja opetuskäsitteet toimintaa koulussa ohjaavina taustatekijöinä. Teoksessa J. Tähtinen. *Opettajaksi kasvaminen*. Turun yliopiston kasvatustieteellisen tiedekunnan julkaisusarja B: 46, 54 - 73.
- Pehkonen, E. 1987. Oppimislejät peruskoulun matematiikan opetukseen. *Dimensio* 51 (8), 38 - 40.
- Pehkonen, E. 1998. Uskomukset matematiikan tunneilla. Niiden hyödyt ja haitat matematiikan oppimiselle. *Dimensio* 62 (5), 29 - 32.
- Pehkonen, E. & Pehkonen, L. 1993. *Nyt on mun vuoro! Oppimislejät peruskoulun matematiikan opetukseen*. Helsinki: Hakapaino.
- Pehkonen, L. 1995. *Oppilasarviointi muutoksessa*. teoksessa R. Seppälä (toim.). *Toimi, laske ja ajattele. Ala-asteen matematiikka*. Jyväskylä: Gummerus, 45 - 49.
- Peruskoulun opetus suunnitelman perusteet 1994. Opetushallitus.
- Piaget, J. 1952. *The Child's Conception of Number*. New York: W. W. Norton & Company, Inc.
- Piaget, J. & Inhelder, B. 1977. *Lapsen psykologia*. Jyväskylä: Gummerus.
- Rask, L. 1995. *Matikkatuvassa on tosi kivaa! Lapsen maailma* 54 (10), 18 -19.
- Rauste- von Wright, M. 1997. *Opettaja tienhaarassa - konstruktivismia käytännössä*. Juva: WSOY.
- Rauste- von Wright, M. & von Wright, J. 1994. *Oppiminen ja koulutus*. Juva: WSOY.
- Ross, R. & Kurtz, R. 1993. Making Manipulatives Work: a Strategy for Success. *Arithmetic Teacher* 40 (5), 254 -257.
- Rossi, M. 1995. *Matematiikkako muka ikävää?* *Dimensio* 59 (6), 26 - 27.
- Salonen, P., Lepola, J., Vauras, M., Rauhanummi, T., Lehtinen, E. & Kinnunen, R. 1994. *Diagnostiset testit 3. Motivaatio, metakognitio ja matematiikka*. Käsi- kirjja oppimistutkimuskeskuksen 3. julkaisuun "Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla". Turun yliopisto. Oppimistutkimuksen keskus.
- Saravesi, P. 1998. *Luokanopettajien aikuiskoulutuksen luennot ja luentomonisteet*.
- Spungin, R. 1996. *First- and Second-grade Students Communicate Mathematics*. *Teaching Children Mathematics* 3 (4), 174 - 179.
- Suojanen, U. 1992. *Toimintatutkimus koulutuksen ja ammatillisen kehittymisen välineenä*. Loimaa: Finn Lectura.

- Strang, T. 1993. Avoimuuden kokeilua ensiluokkalaisten matematiikan oppimisessa. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.). 1993. Matematiikan opetus ja konstruktivismi - teoriaa ja käytäntöä. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 116, 132 - 140.
- Syrjälä, L. 1994. Toimintatutkimus ja opettajan ammatillinen kasvu. Teoksessa L. Syrjälä, S. Ahonen, E. Syrjäläinen & S. Saari (toim.). Laadullisen tutkimuksen työtapoja. Helsinki: Kirjayhtymä, 25 - 55.
- Takala, A. & Takala, M. 1992. Psykologinen kehitys lapsuusiässä. Neljäs painos. Porvoo: WSOY.
- Vahtokari, A. & Vähäpassi, A. 1998. Kirjat esiin ja laskekaa! Teoksessa J. Lavonen & M. Erätuuli (toim.). Tuulta purjeisiin. Matemaattisten aineiden opetus 2000 -luvulle. Juva: WSOY, 213 - 230.
- Vainikainen, T. 1998. Matematiikan oppiminen on pitkälle asennejuttu. Lapsen maailma 57 (2), 36 - 37.
- Vauras, M., Poskiparta, E. & Niemi, P. (toim.). 1994. Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla. Turun yliopisto. Oppimistutkimuksen keskus. Julkaisuja 3, 1994.
- Vornanen, I. 1984. Ensiluokkalaisten lukukäsitteen kehittäminen. Kehityopsykologinen näkökulma. Oulun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Tutkimuksia, 23.
- Vähäpassi, A., Hartikainen, S. & Häggblom, L. 1997. Mieti ja laske. Opettajan kirja 1 syksy. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Yrjönsuuri, R. 1998. Opiskelun taidon ja matematiikan osaamisen arviointi. Helsingin kaupungin opetusviraston julkaisusarja A: 12

Toimintasuunnitelma viikoille 33 - 41

Viikko 33

- koulu alkaa 16.8.
- aiheena toisiimme tutustumisen ohella **lukukäsite**
- sisältöjä: laululeikkejä
noppapelejä
Varo, se sulaa!
KIM- leikkejä
lukumäärädominot
muistipelejä (käsitteet yhtä monta, enemmän ja vähemmän)
pituusjärjestys, ikäjärjestys (syntymäpäivät)
osoitteet, puhelinnumerot
kalenteri

Viikko 34

- aiheena edelleen **lukukäsite**
- alkudiagnosointi:
 - Diagnostinen testi 3 (yksilöllisesti)
 - KPT (yhteisesti)
 - Lukukäsitetehtävä (yhteisesti)
- sisältöjä: numeromerkit 0 - 9
luvut 0 - 10
lukumäärän ja numeromerkin yhdistäminen (etsi ja yhdistä parit)
muistipelit (parin muodostavat lukumäärä esim. viisi kukkaa ja numeromerkki 5)
numerokirjan tekeminen (numeromerkkiä vastaava lukumäärä kuvia leikataan ja liimataan samalle sivulle)

HUOM. Sisällöt ovat suurelta osin sellaisia, joita lapset pystyvät tekemään kouluavustajan kanssa, kun minä testaan lapsia yksilöllisesti.

Viikko 35

- tällä viikolla järjestän iltaisin keskustelut vanhempien kanssa, joissa nostan esiin myös lapsen aikaisemmat kokemukset matematiikasta
- aiheena on edelleen **lukukäsite** ja uutena aloitellaan **lukujonotaitoja**
- sisältöjä: luvut 0 - 10 monella tavalla: tunnustellen, muovailten, lattia-numeroin jne.
lukujen 0 - 10 järjestäminen lukujonoksi mm. hiekkapaperinumeroilla, muovinumeroilla, numerokorteilla, lattia-numeroilla jne.
numerohyrrä
numeropeli (luvut 1 - 12, koska lapsia on 12)
merkit + ja - (esitellen)
pikkuesineiden ja simpukoiden laskemista sekä laskutarinoiden keksimistä

Viikko 36

- aiheena ovat **lukujonot**, mutta lukukäsite ja siihen liittyvät harjoitukset ovat edelleen käytettävissä lasten tarpeiden mukaan
- tällä viikolla perehdymme syksyn satoon (saan vanhempieni maatilulta oikeita vihaneksia) ja vietämme toripäivän, jonka aikana tutustumme rahoihin sekä ostamiseen että myymiseen
- sisältöjä: rahat (aluksi 0 -10 mk)
ostaminen ja myyminen
kymmenhajotelmat (munakennot & massapallot)
sormileikki (oppilaat nostavat parinsa kanssa yhtä aikaa jonkin määrän sormia pystyyn ja laskevat ne; jos tulos on 10, saa pari pisteen)
muistipelit (lukumäärä ja numeromerkki muodostavat parit)
*muistipelejä on myös vaikeampia taitavimmille lapsille; mm. yhteenlaskupeli
ruutuhyppelyt (ulkona)
Etsi yhtä monta -leikki (ulkona), jossa jokaisella parilla on alusta, johon on piirretty jonkin luonnonmateriaalin kuva ja numero; tämän mallin mukaan lapset keräävät materiaalit pussiin ja ope tarkistaa maalissa.

Viikko 37

- aiheena edelleen **lukujonot**
- sisältöjä: numerosuunnistus (ulkona), jossa edetään rasti numerojärjestyksessä 0-10
*voi olla taitavimmille suurempia lukujonoja, esim. 20 rastia
Mikä luku piilossa? - leikki
*lukujonot 0 - 10, 0 - 20, 0 - 100 ja 0 - 150
sydänparit: luvut, joiden summa on 10; harjoitellaan mm. muistipelinä, aukotehtävinä, pariharjoituksena jne.

HUOM. Suunnitelma alkaa olla väljempi, koska jätän tilaa alkuvaiheen toteutuksen antamille kokemuksille ja niiden mukaan tehtäville muutoksille.

Viikko 38

- aiheena edelleen **lukujonot**
- sisältöjä: niputusleikki (kymmennippujen kerääminen)
pikkuesineiden luokittelu 10 kasoisiin ja tätä kautta tutustuminen lukuun 100, kenties jopa lukuun 1000

Viikko 39

- aiheena edelleen **lukujonot** ja uutena mukaan otetaan **10 -järjestelmä**
- sisältöjä: lukujonojen laajentamista alueelle 0 -100, kenties jopa 0 - 1000 paikkasysteemin ja 10 -järjestelmän periaatteen esittely
kymmenjärjestelmävälineisiin tutustuminen

Viikko 40

- aiheena **10 - järjestelmä**
- sisältöjä: paikkasysteemin avulla lukujen muodostamista satataloon tutustuminen

satatalon käyttö laskemisen apuna; täyttäminen simpukoilla (samalla luokit-
telua)

satataloharjoituksia parittain; esim. Mikä luku on piilossa? -leikki

satatalon kokoaminen irtopaloista alustalle

satatalon puuttuvan palasen (muutaman ruudun alue, voi olla pystysuoras-
sakin) lukujen päätteleminen

Edelleen vahvasti mukana on kantaluvun 10 ymmärtäminen: kymmenhajo-
telmat, sydänparit, kymmenten kokoaminen (kymmenniput tikuista, kym-
menkasat pikkuesineistä, kymmenparit numerokorteilla, kymmenpötköt
multilinkeistä jne.)

Viikko 41

- kokeilun päätösviikko

- aiheena on **koko käsitelty alue, sen koonti**

- sisältöjä: matematiikkapäivä, jolloin oppilailla on mahdollisuus pysäkkityöskentelynä
kerrata ja uudelleen kokeilla haluamiaan (vaikeita, mukavia tms.) harjoi-
tuksia jakson varrelta
itsearviointia; mitä oppilaat ovat oppineet?
haastattelut

Kuusamossa 16.8.1999

Hyvät 1- ja 2- luokkalaisten oppilaiden vanhemmat!

Olen Kati Liimatainen ja toimin syyslukukauden lapsenne luokanopettajana. Koulutukseltani olen lastentarhanopettaja ja olen jatkanut opiskelujani niin, että valmistun pian luokanopettajaksi. Opintoihini kuuluu kasvatustieteellisen pro gradu -tutkielman tekeminen. Tutkimukseni on opetuskokeilu, jossa alkuopetuksen matematiikan opetusta pyritään suuntamaan toiminnalliseksi ja leikinomaiseksi, lapselle kokeilemisen ja tutkimisen mahdollisuuksia tarjoavaksi toiminnaksi.

Suoritan opetuskokeilun syyslukukauden alkuvaiheessa. Olen suunnitellut toteutettavaksi 9 viikon mittaisen toimintajakson, joka alkaa heti koulunkäynnin alkaessa ja päättyy syysloman alkuun. Oppilaiden toimintaa tutkiessani käytän menetelminä havainnointia, videointia, valokuvausta sekä haastattelua.

Käytän oppilaista saamiani tietoja luottamuksellisesti. Oppilaiden nimet eivät tule esille tutkielmani missään vaiheessa.

Toivon, että täytätte alla olevan lomakkeen ja palautatte sen lapsenne mukana kouluun viimeistään perjantaina 20.8.

Ystävällisin terveisin, *Kati Liimatainen*

Lapsestamme _____ saatuja tietoja

saa _____

käyttää tutkimusta varten.

ei saa _____

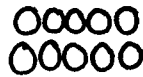
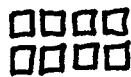
Matemaattisen ajattelun perusvalmiuksia mittaavat tehtävät

- mukaeltu Turun oppimiskeskuksen diagnostisesta testistöstä

Matemaattislooginen ajattelu

1. Joukkojen vertailu

Pöydällä on kahdeksan palikkaa ja kymmenen nappia selvästi erilisissä joukoissa. *"Tässä näet kahdenlaisia esineitä, nappeja ja palikoita. Kumpia on enemmän, nappeja vai palikoita?"*



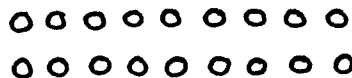
2. Transitiivinen päättely

Pöydällä on kolme samankokoista laatikkoa; oikealta punainen, sininen ja valkoinen. *"Tässä näet kolme samankokoista laatikkoa; sinisen, punaisen ja valkoisen. Kuvitellaan, että laatikoissa on karkkeja. Punaisessa on enemmän karkkeja kuin sinisessä. Sinisessä on enemmän karkkeja kuin valkoisessa. Kummassa laatikossa on enemmän karkkeja, punaisessa vai valkoisessa? Miten päättelit?"*



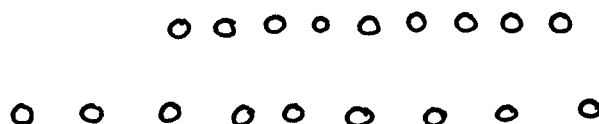
3. Lukumäärän säilyvyys

Muut laatikot pannaan pois ja pöydälle jätetään vain punainen, jossa on sisällä 18 nappia. *"Mikähän siellä oikein kolisee? Katso ja ota esineet pöydälle."* Järjestä napit lapsen eteen pöydälle kahteen jonoon allekain niin, että molemmat yhdeksän napin jonot ovat yhtä pitkät. Pyydä lasta laskemaan nappijonot. *"Onko jonoissa yhtä monta nappia?"*



Seuraavaksi "venytetään" toista jonoa pidemmäksi siten, että lapsi näkee napit koko ajan. *"Onko nappeja nyt yhtä monta vai onko toisessa jonossa enemmän nappeja? Älä laske nappeja, vaan päättelä. Mistä päättelit, että niitä on yhtä paljon tai mistä tiedät, että toisessa jonossa on enemmän?"*

A)



Venyttämisen jälkeen napit järjestetään yhdeksi jonoksi. Laske niiden lukumäärä lapselle. Lapsi saa myös itse laskea napit. Seuraavaksi napit ryhmitellään kolmeen kuuden napin ryhmään. *"Onko nappeja nyt yhtä paljon kuin äsken?"* Lapsi ei saisi laskea nappeja, vaan ohjeeksi voi antaa, että ajattele.

B)



Viimeiseksi napit ryhmitellään kahteen erisuuruiseen jonoon, kuusi ja kaksitoista nappia. *"Onko pöydällä edelleen sama määrä nappeja kuin äsken oli?"*

C)



Lukujonotaidot

Jos lapsi vaikuttaa ahdistuneelta tai ei osaa ensimmäisiä tehtäviä, voi vaikeimmat tehtävät jättää tekemättä. Jos lapsi alkaa laskea väärinpäin lukujono-tehtävissä, hänen annetaan laskea. Mutta seuraavaa tehtävää antaessasi korosta laskemisen oikeaa suuntaa eli taaksepäin tai eteenpäin.

1. Lukujen luettelutaito

"Nyt saat laskea ykkösestä eteenpäin niin pitkälle kuin osaat." Jos lapsi ylittää viisikymmentä virheettömästi, hänet keskeytetään. Luetteluvirheet ja hyppäykset merkitään vastauslomakkeeseen.

2. Esineiden lukuisuuden määrittäminen

*"Laitan tähän nyt näin monta nappia (5; **älä sano lukumäärää lapselle!**), laske, montako niitä on?"* Ota edelliset napit pois ja laita uudet.

- A) 5
- B) 7
- C) 9
- D) 13

Jos lapsi ei edellisessä tehtävässä osannut luetella lukuja yli kymmenen, jätä viimeinen tehtävä pois.

3. Eteenpäin luvusta

"Laske eteenpäin kolmesta / Luettele lukuja eteenpäin luvusta kolme." Kun lapsi on luetellut 4 - 5 lukua, hänet keskeytetään. Anna lapselle yksitellen seuraavat lähtöluvut:

- A) 3

- B) 8
- C) 12
- D) 19

4. Eteenpäin luvusta toiseen

Jos lapsi laskee pidempään kuin tiettyyn lukuun, hänen annetaan laskea. Keskeytä lapsi ja siirry seuraavaan tehtävään.

- A) *"Laske ääneen kahdesta seitsemään."*
- B) *"Laske ääneen kuudesta yhteentoista."*
- C) *"Laske ääneen 18:sta 25:een."*

5. Eteenpäin luvun verran

- A) *"Minkä luvun (numeron) saat, kun lasket kolmesta kaksi lukua eteenpäin?"*
- B) *"Minkä luvun (numeron) saat, kun lasket kahdesta viisi lukua eteenpäin?"*
- C) *"Minkä luvun (numeron) saat, kun lasket seitsemästä neljä lukua eteenpäin?"*

6. Taaksepäin luvusta

"Nyt lasketaan taaksepäin." Kun lapsi on laskenut taaksepäin 4 - 5 lukua, hänet keskeytetään. Anna lapselle yksitellen seuraavat tehtävät.

- A) *"Laske taaksepäin luvusta (numerosta) 4."*
- A) *"Laske taaksepäin luvusta (numerosta) 8."*
- B) *"Laske taaksepäin luvusta (numerosta) 12."*
- C) *"Laske taaksepäin luvusta (numerosta) 23."*

7. Taaksepäin luvusta toiseen

Jos lapsi alittaa annetun luvun, keskeytä hänet. Anna lapselle yksitellen seuraavat tehtävät.

- A) *"Laske ääneen kuudesta kolmeen."*
- B) *"Laske ääneen 13:sta 8:aan."*
- C) *"Laske ääneen 20:stä 17:ään."*

8. Taaksepäin luvun verran

Anna yksitellen seuraavat lukuparit.

- A) *"Minkä luvun (numeron) saat, kun lasket neljästä kolme lukua taaksepäin?"*
- B) *"Minkä luvun (numeron) saat, kun lasket yhdeksästä viisi lukua taaksepäin?"*
- C) *"Minkä luvun (numeron) saat, kun lasket 13:sta neljä lukua taaksepäin?"*

Aritmeettiset perustaidot

Tehtävien tekemisen kriteerinä on, että lapsi osaa luetella lukuja ainakin 15:een asti.

1. Spontaanit aritmeettiset perustaidot

Laita ennen tehtävien aloittamista yhteen laatikkoon 20 nappia.

Ota laatikosta kahdeksan nappia ja pane ne pöydälle.

A) *"Ota laatikosta niin monta nappia, että niitä on yhtä monta kuin pöydällä jo on."*

Suorituksen jälkeen laita lapsen ottamat napit takaisin laatikkoon.

Pöydällä on siis edelleen kahdeksan nappia.

B) *"Ota laatikosta neljä nappia enemmän kuin pöydällä on nappia."*

Suorituksen jälkeen laita lapsen ottamat napit takaisin laatikkoon.

Pöydällä on edelleen kahdeksan nappia.

C) *"Ota laatikosta viisi nappia vähemmän kuin pöydällä on nappia."*

Suorituksen jälkeen laita lapsen ottamat napit takaisin laatikkoon.

Pöydällä on edelleen kahdeksan nappia.

D) *"Kuinka monta nappia pitäisi poistaa kahdeksasta pöydällä olevasta napista, jotta jäljelle jäisi neljä nappia?"*

Pisteytys

Lapsi saa jokaisesta oikeasta vastauksesta yhden pisteen. Näin ollen maksimipisteet ovat osioittain seuraavat:

Matemaattislooginen ajattelu 5 pistettä

- lukumäärän säilyvyyden tehtävästä (osio 3) voi saada enintään 3 pistettä

Lukujonotaidot (osiot 3 - 8) 20 pistettä

- osioista 1 ja 2 ei anneta varsinaisia pisteitä

Aritmeettiset perustaidot (osio 1) 4 pistettä

VASTAUSLOMAKE

Oppilaan nimi: _____

Matemaattislooginen ajattelu

1. Nappeja _____
Palikoita _____ Oikea vastaus: Nappeja on enemmän. pist.
2. Punaisessa _____
Valkoisessa _____ Oikea vastaus: Punaisessa on enemmän. pist.
3. A) On _____
Ei _____ Oikea vastaus: On yhtä paljon. pist.
- B) On _____
Ei _____ Oikea vastaus: On yhtä paljon. pist.
- C) On _____
Ei _____ Oikea vastaus: On yhtä paljon. pist.

Lukujonotaidot

1. Luetteli 50:een tai yli _____
Luetteli 30 - 50 _____
Luetteli 16 - 29 _____
Luetteli 0 - 15 _____

Virheiden laatu ja lukumäärä: _____

2. A) _____ 5 nappia
B) _____ 7 nappia
C) _____ 9 nappia
D) _____ 13 nappia
3. A) 3 ... _____
B) 8 ... _____
C) 12 ... _____
D) 19 ... _____ pist.
4. HUOM! Jos lapsi luettelee yli annetun luvun, ei pisteitä!
A) 2 ... 7 _____
B) 6 ... 11 _____
C) 18 ... 25 _____ pist.
5. HUOM! Jos lapsi luettelee yli annetun luvun, ei pisteitä!
A) _____ Oikea vastaus: 5
B) _____ Oikea vastaus: 7
C) _____ Oikea vastaus: 11 pist.

6. A) ... 4 _____
B) ... 8 _____
C) ... 12 _____
D) ... 23 _____
- pist.

7. HUOM! Jos lapsi luettelee yli annetun luvun, ei pisteitä!

- A) 6 ... 3 _____
B) 13 ... 8 _____
C) 20 ... 17 _____
- pist.

8. A) _____ Oikea vastaus: 1
B) _____ Oikea vastaus: 4
C) _____ Oikea vastaus: 9
- pist.

Aritmeettiset perustaidot

1. A) _____ Oikea vastaus: 8
B) _____ Oikea vastaus: 12
C) _____ Oikea vastaus: 3
D) _____ Oikea vastaus: 4
- pist.